КВАНТ
ЖУРНАЛ

1977

1 - 12

НОМЕР
1

Основан в 1970 году

Квант

1977
1

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

2 Всенародная забота о сельской школе
4 *В. Ефремович.* Пространство и внутренняя геометрия поверхностей
10 *С. Шамаш, Э. Эвенчик.* Цикл Карно

Лаборатория «Кванта»
18 *В. Майер, Р.-Э. Шафир.* Струйный автогенератор звука

Математический практикум
20 *В. Вавилов.* Шарнирные механизмы. Кривые Уатта

Задачник «Кванта»
26 Задачи М421—М425; Ф433—Ф437
28 Решения задачи М379, М381—М384; Ф387—Ф392

По страницам школьных учебников
36 *А. Земляков, Б. Ивлев.* 17 задач по анализу

«Квант» для младших школьников
40 Задачи
41 *Ю. Горст.* На рыбалке

Практикум абитуриента
43 *Г. Дорофеев, Н. Розов.* Периодичность и непериодичность функций
48 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рецензии, библиография
50 *И. Клумова.* Задачи и олимпиады

Информация
52 *Ж. Раббот.* Всесоюзная заочная математическая школа
53 *А. Кирьянов, А. Кутасов, Т. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа
56 *А. Колмогоров, В. Вавилов.* Физико-математическая школа-интернат при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова
58 *И. Наслузов.* Голубой экран — абитуриенту-77

Новости науки
60 *Л. Беве.* Любая карта может быть раскрашена в четыре цвета
61 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 24; 25; 39; 42; 59)*

На 1-й странице обложки изображена лемниската Бернулли (см. статью В. Березина, с. 25)

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

Всенародная забота о сельской школе

Сельская общеобразовательная школа имеет важное значение в решении задач, поставленных XXV съездом КПСС в области социально-экономического и культурного строительства. Ведь в сельских школах занимается около половины всех учащихся страны.

Конкретные пути развития школьного образования на селе намечены Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах по дальнейшему улучшению условий работы сельской общеобразовательной школы». В нем содержится обширная программа строительства новых и расширения имеющихся школьных зданий и интернатов в сельской местности, укрепления учебно-материальной базы сельских школ, обеспечения их квалифицированными педагогическими кадрами, совершенствования форм и методов обучения и воспитания сельской школьной молодежи.

Летом 1976 года по инициативе Министерства просвещения СССР, ЦК ВЛКСМ и ЦК профсоюза работников просвещения, высшей школы и научных учреждений началось Всесоюзное социалистическое соревнование за улучшение условий работы сельской общеобразовательной школы. Итоги этого соревнования, в котором участвуют учреждения системы Министерства просвещения СССР сельских районов, будут подводиться ежегодно в сентябре. Журнал «Квант» приветствует развертывание этого соревнования и сделает все возможное, чтобы помочь его участникам в совершенствовании обучения сельских школьников математике и физике.

Научно-технический прогресс предъявляет особенно высокие требования к подготовке молодежи — как в городе, так и в деревне. Сегодняшние старшеклассники завтра придут на заводы и поля, на стройки и предприятия транспорта, в научные лаборатории и учреждения культуры, будут своим трудом превращать в реальность грандиозные планы десятой пятилетки. Для того, чтобы этот труд был эффективным и творческим, нужно уже сейчас, на школьной скамье, упорно и настойчиво овладевать знаниями и трудовыми навыками.

Заботы сельской школы стали по-настоящему кровным делом многих физиков и математиков. Отрадно отметить, что список научных учреждений и учебных заведений, тесно связанных со школьниками из села, непрерывно растет, а формы такой связи весьма разнообразны. Ученые, преподаватели вузов, научные работники, студенты стремятся обеспечить сельским школьникам широкие возможности для углубленного изучения математики и физики.

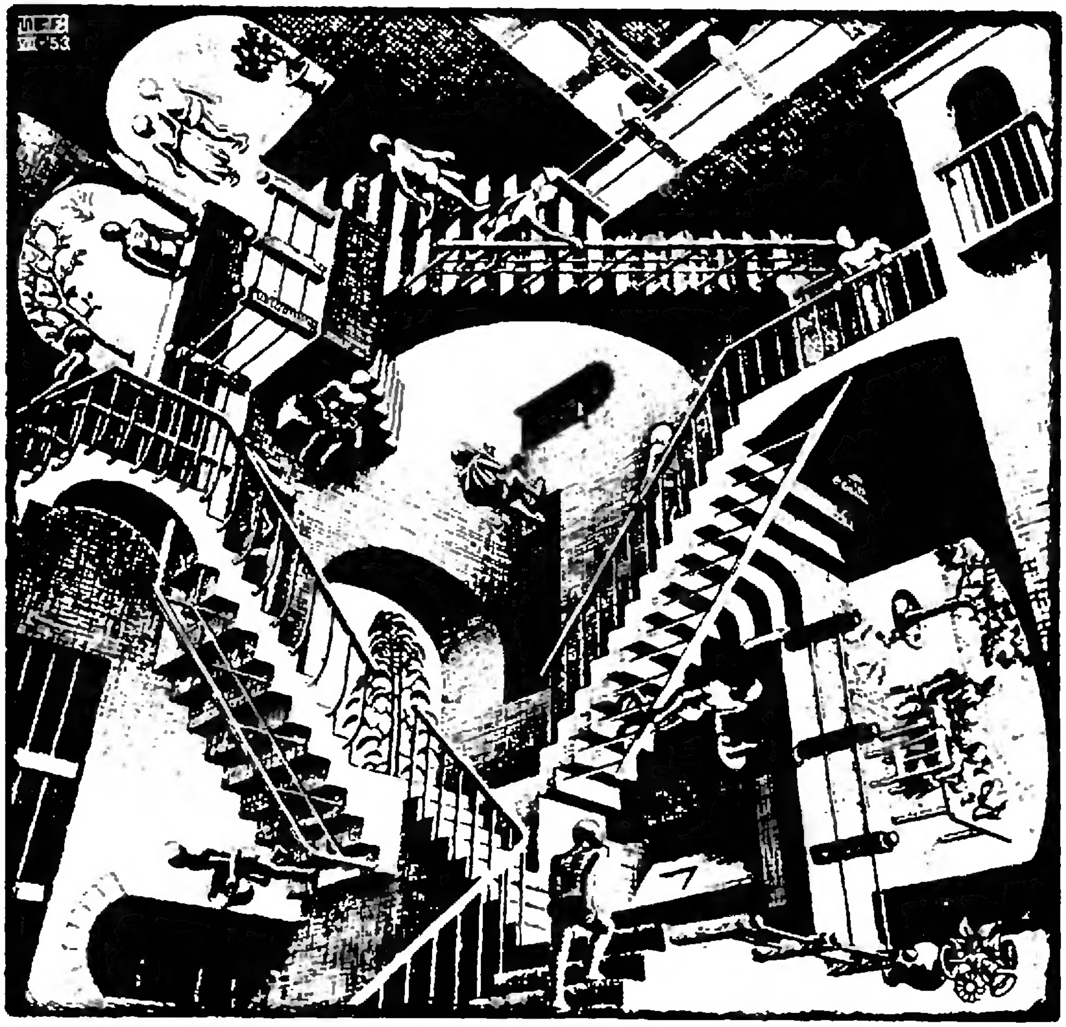
Сотни популярных книг и брошюр по математике и физике написаны известными учеными. Эти книги составили золотой фонд научно-популярной и учебной литературы для юношества и хорошо известны школьникам во всех уголках нашей необъятной Родины. Все больше сельских школьников вовлекаются в юношеские научные общества, участвуют в традиционных физических и математических олимпиадах. Широкое распространение получили летние школы-лагеря, где юноши и девушки сочетают активный отдых с продуктивными занятиями любимым предметом под руководством студентов и молодых ученых. Для талантливой молодежи из сельской местности открыты специальные физико-математические школы-интернаты в ряде городов страны. Десятки тысяч школьников, проживающих в селах, рабочих поселках, небольших городах, вдали от научно-педагогических центров, систематически получают квалифицированное руководство внеклассными занятиями по математике и физике в заочных предметных школах, созданных при университетах, технических и педагогических институтах. Эффективную помощь сельской молодежи оказывают заочные подготовительные курсы, организуемые для поступающих многими вузами и техникумами.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» также видят одну из основных своих задач в том, чтобы всемерно содействовать повышению качества знаний сельских школьников по физике и математике, создать благоприятные условия для пробуждения и развития их интереса к этим наукам.

Публикуемые в журнале общие статьи преследуют цель расширить кругозор юного читателя, в популярной доступной форме познакомить его с дополнительными главами математики и физики, с новейшими достижениями науки, рассказать о крупнейших ученых, раскрыть роль и место физики и математики в общей системе человеческих знаний и в практической деятельности человека. Материалы раздела «По страницам школьных учебников» призваны помочь школьнику, в том числе сельскому, лучше осмыслить узловые темы новых школьных программ, получить по ним дополнительную информацию. Раздел «Спрашивайте — отвечаем» предназначен для ответов на вопросы, которые часто задают в своих письмах в редакцию школьники. Статьи, помещаемые в разделах «Математический кружок» и «Лаборатория «Кванта»», направлены на то, чтобы воспитать у читателя вкус к самостоятельным размышлениям, исследованиям, экспериментам. Любители серьезных размышлений всегда найдут в разделе «Задачник «Кванта» интересные и разнообразные задачи — от относительно простых до довольно сложных. Большой интерес для школьников представляет раздел «Практикум абитуриента», позволяющий конкретно познакомиться с требованиями вступительных экзаменов в вузы и техникумы. Самые юные наши читатели находят занимательные и вместе с тем содержательные материалы в разделе «Квант» для младших школьников».

Многочисленные письма учащихся и учителей сельских школ, поступающие в редакцию, свидетельствуют о том, что материалы журнала оказывают большую практическую помощь в классной и внеклассной работе, способствуют углубленному изучению физики и математики сельскими школьниками. «Число читателей журнала «Квант» с каждым годом возрастает, — пишет в своем письме Турдали Мулдабеков, учитель из совхоза «Социализм» Ворошиловского района Сыр-Дарьинской области Узбекской ССР. — Очевидна причина этого: каждый человек, занимающийся математикой и физикой, найдет на его страницах интересные материалы. Известно, что «Квант» — журнал для учащихся старших классов. Но и учителя, работающие в сельской местности, с интересом читают журнал и решают задачи и примеры, публикуемые в нем».

Редакция обращается к сельским школьникам с просьбой и приглашением чаще писать в журнал письма, сообщать свое мнение об опубликованных материалах, присылать конкретные вопросы, высказывать пожелания. Такие письма особенно важны для нас, ибо только живая обратная связь с сельскими читателями позволит журналу максимально удовлетворять их нужды и запросы.



В. Ефремович

ПРОСТРАНСТВО И ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Наше пространство — каково оно?

Геометрия, которую мы изучаем в школе, — это евклидова геометрия. Но верно ли, что пространство, в котором мы живем, устроено именно так? Евклидово ли оно? Выполняются ли в нашем реальном пространстве аксиомы Евклида?

А как же иначе? Ведь аксиомы так очевидны: «Через две точки проходит только одна прямая»; «Каждая прямая бесконечна в обе стороны»; «Перпендикуляр и наклонная к одной прямой непременно пересекаются» и т. д.

Кажется, все это так очевидно, что иначе и быть не может! Так и говорил знаменитый немецкий философ И. Кант: «Иначе мыслить нельзя!», то есть существуют истины, познаваемые нами без всякого опыта — «априори». А в подтверждение существования таких «априорных» истин Кант приводил как раз геометрические аксиомы, как факты самоочевидные, обладающие несомненной достоверностью, независимые от всякого опыта. Но вот великий наш соотечественник Н. И. Лобачевский показал, что прекрасно можно мыслить иначе!

Он построил геометрию, в которой все аксиомы Евклида выполняются, кроме одной — третьей из приведенных выше*). Оказалось, что эта геометрия не только не хуже евклидовой, но в некоторых отношениях даже совершеннее ее, богаче.

А можно ли отказаться от других аксиом? Можно ли вообразить, что прямая имеет конечную длину? Разве не ясно, что она бесконечна? Но, позвольте, разве кто-нибудь уходил по прямой так далеко, что убедился в ее бесконечности? Быть может, если мы уйдем по прямой очень-очень далеко, то вдруг окажемся в исходной точке путешествия? «Какое нелепое предположение!» — вероятно, подумали некоторые читатели. А между тем, именно так и произошло бы с человеком, который, полагая, что Земля плоская, отправился бы в некотором направлении, стараясь все время идти по кратчайшей линии (на сфере это — окружность «большого круга»); он думал бы, что идет по прямой, и вдруг пришел бы в начальную точку путешествия.

Быть может, мы только думаем, что прямая бесконечна, а она однажды окажется замкнутой линией вроде окружности, только очень большой длины? Мало ли было чрезвычайно ясных вещей, которые потом оказались просто неверными. Ведь ясно же было (пока люди не знали, что Земля — шар), что вертикали строго параллельны, а оказалось, что они пересекаются в центре Земли. Спутникам Магеллана казалось, что если они будут аккуратно каждый день делать записи в судовом журнале, то, объехав вокруг света (то есть) вокруг Земли) и вернувшись домой, они не ошибутся в счете дней. А все же оказалось, что один день пропал.

Есть веские основания предполагать, что наше пространство устроено сложнее, чем думал Евклид. Как можно изучать пространство, отличное от «употребительного» (выражение Н. И. Лобачевского), очень хорошо показал сам Лобачевский, построив свою геометрию, поэтому для первого знакомства с «неевклидовыми пространствами» часто выбирают геометрию Лобачевского. Мы же расскажем о более наглядных вещах.

2. Внутренняя геометрия поверхностей

Обычно систематическое изучение геометрии начинают с *планиметрии*, то есть изучения фигур *на плоскости*. Можно изучать фигуры на какой-нибудь другой поверхности, например, на поверхности цилиндра, шара, эллипсоида.

Говоря «поверхность», мы обычно подразумеваем некоторую «пленку», как-то расположенную в пространстве. Однако, говоря «плоскость», мы не пытаемся как-то вложить ее в окружающее пространство. Занимаясь «внутренней геометрией» плоскости, мы изучаем свойства плоскости, отвлекаясь от всего, что находится вне нее, для нас плоскость становится как бы самостоятельным миром; в этом смысле она сама может быть названа «пространством» (двух измерений).

Аналогично, изучая геометрию некоторой поверхности, полезно не пытаться вложить ее в пространство, то есть не различать, скажем, плоскость, цилиндрическую поверхность, построенную на параболе, и двугранный угол (рис. 1) — они получаются друг из друга изгибанием, не меняющим «внутренних свойств» этих поверхностей.

Чтобы лучше понять это определение, вообразим разумное двумерное существо «Кляксу», живущее в поверхности. Все, что может узнать «Клякса» об этой поверхности, измеряя гибким шнуром длины линий на поверхности, транспортиром — углы и т. д., и составляет внутреннюю геометрию поверхности. Для «Кляксы» весь мир сводится к поверхности, в которой она живет, и ничего реального для нее вне этой поверхности нет!

Но оказывается, что для произвольной поверхности построить геометрию, вообще говоря, не просто — на этой поверхности может не найтись даже конгруэнтных треугольников, а ведь именно на конгруэнтности треугольников основываются

---

*) См. также «Квант», 1976, № 2.

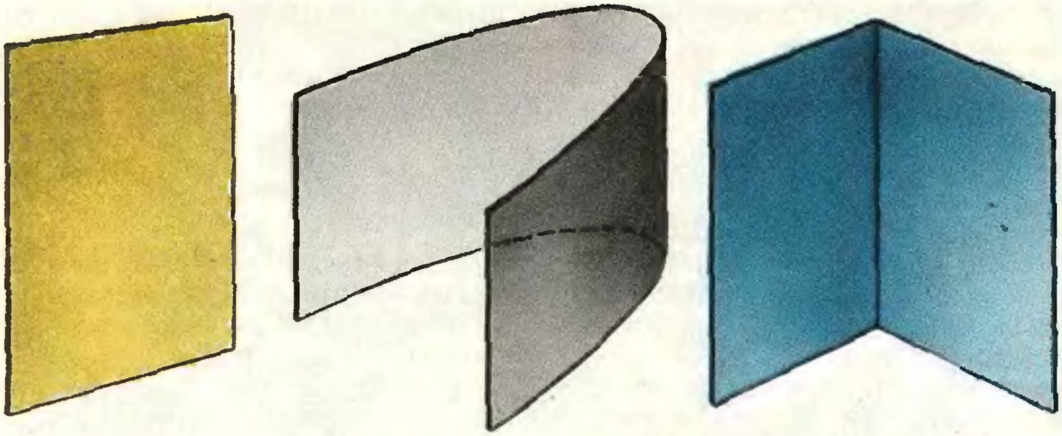


Рис. 1.

первые доказательства в планиметрии! Удобнее всего строить геометрию на поверхностях «однородных» и «изотропных».

В школе вы изучали перемещения плоскости. Напомним, что *перемещением плоскости* называется отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния, то есть длины отрезков, соединяющих две точки. Аналогично *перемещением поверхности* называется отображение этой поверхности на себя, сохраняющее длины всех линий на ней. Такие отображения называются также *изометриями*. Подчеркнем, что мы не определяем здесь понятия «длина линии»; вам достаточно представлять себе линию на поверхности как нитку, которую можно отделить от поверхности, приложить к «метру» и измерить ее длину.

Поверхность называется *однородной*, если для любых двух ее точек A и B можно указать изометрию поверхности, при котором точка A отображается в точку B. Это значит, что поверхность «одинаково устроена около любой своей точки». Такова, например, поверхность бесконечного круглого цилиндра (рис. 2).

Поверхность называется *изотропной в некоторой ее точке* A, если какие бы два «направления» Am и An, исходящие из A, на ней ни взять (рис. 3), существует перемещение поверхности, при котором точка A остается на месте, а Am переходит в An. Например, любая поверхность вращения, пересекающая ось вращения в точке A, изотропна в A.

Поверхность называется *изотропной*, если она изотропна в каждой своей точке. Интересно, что изотропная поверхность всегда однородна.

Одним из примеров изотропных поверхностей является плоскость; ниже мы рассмотрим еще один — сферу.

3. Геодезические линии

Расстоянием между точками A и B на поверхности естественно называть длину кратчайшей линии, соединяющей эти точки и целиком лежащей на поверхности. Поэтому во внутренней геометрии любой поверхности особенно важны *геодезические линии*: они играют роль прямых. Эти линии определяются так: для любых двух не слишком удаленных друг от друга точек A, B такой линии ее кусок AB короче любой другой линии, соединяющей A с B и лежащей на поверхности.

Вот простой пример. Навернем (без растяжений и сжатий) лист бу-

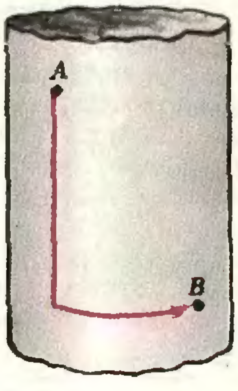


Рис. 2.

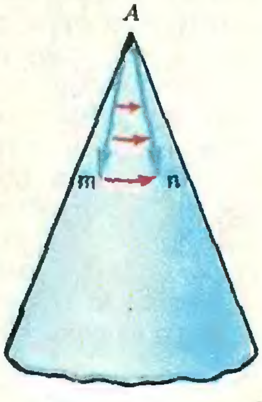


Рис. 3.

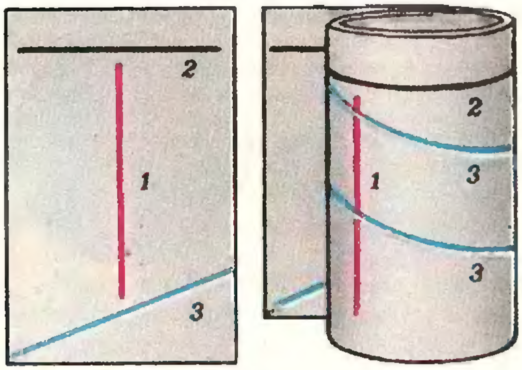


Рис. 4.

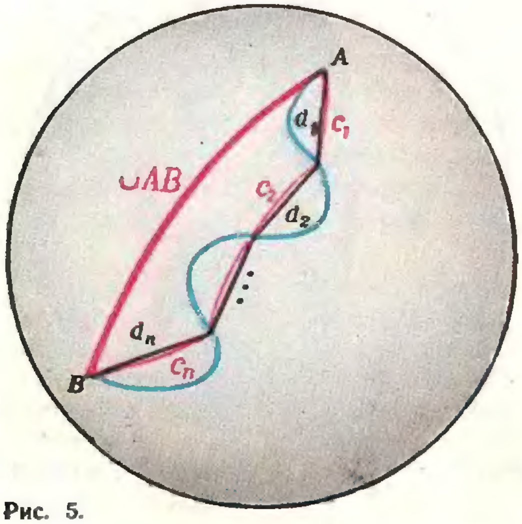


Рис. 5.

маги на прямой круглый цилиндр. Прямые этого листа при таком изгибании дадут геодезические трех родов: некоторые из них вовсе не изогнутся и лягут на образующие цилиндра; другие превратятся в окружности; наконец, третьи превратятся в *винтовые линии* (рис. 4). Только для геодезической 1-го рода любой ее отрезок будет кратчайшим на поверхности; для геодезических 2-го и 3-го родов только не слишком большие их отрезки будут действительно кратчайшими.

Такое же навертывание можно выполнить на коническую поверхность; там некоторые геодезические будут сами себя пересекать! Проделайте это.

Довольно просто исследовать геодезические на сфере. Оказывается, на сфере геодезическими являются окружности большого круга.

Докажем это. Предположим, что точки A и B на сфере радиуса R удалось соединить линией M длины l и $l = \overset{\smile}{AB}/k$ $(k>1)$, где AB — дуга большого круга. Разделим кривую M на n равных по длине частей (рис. 5), причем выберем n так, чтобы длина l/n каждой полученной части была достаточно мала, а именно: чтобы в круге радиуса R для любой хорды PQ длины, меньшей l/n, и стягиваемой ею меньшей дуги выполнялось соотношение $\overset{\smile}{PQ} < |PQ|\cdot k$ (что это возможно при $k>1$, следует из определения длины окружности). Соединим соседние точки деления хордами и меньшими дугами больших кругов. Пусть длины этих дуг равны $c_1, c_2, \ldots, c_n$, а длины хорд $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Теперь заметим, что $c_1 + c_2 + \ldots + c_n \geqslant \overset{\smile}{AB} = lk$ (докажите это самостоятельно). Отсюда следует, что хотя бы для одной дуги, например, для дуги с номером i,

$$l/n \leqslant c_i/k.$$

Но $c_i/k < d_i k/k = d_i$, то есть $l/n < d_i$, что невозможно, поскольку отрезок прямой — кратчайшая из линий, соединяющих две точки.

Подобно тому как на плоскости из точки во все стороны выходят прямые, так и на сфере из любой ее точки по любому «направлению» выходит ровно одна геодезическая. Для полюсов такими геодезическими будут меридианы.

Теперь легко доказать, что даже маленький кусок сферической поверхности нельзя разогнуть (без растяжений и сжатий, хотя бы и очень малых) в кусок плоскости. Для этого из какой-либо внутренней точки сферического куска (примем ее за северный полюс сферы) по меридианам отложим одну и ту же маленькую длину r (маленькую, чтобы не выйти за пределы куска), тогда концевые точки образуют окружность; ее длина l, понятно, будет меньше $2\pi r$, потому что прямолинейный радиус этой окружности меньше r (ее «геодезического радиуса»). Между тем, если бы наш кусок сферы возможно было разогнуть на плоскость, длина окружности и ее геодезический радиус не изменились бы (ведь при изгибании ни одна длина не изменяется, поэтому кратчайшая дуга должна остаться кратчайшей), а на плоскости $l=2\pi r$, — получено противоречие.

4. Геометрия на сфере

Познакомимся теперь несколько подробнее с внутренней геометрией сферы (с внутренней геометрией плоскости вы хорошо знакомы — это планиметрия).

Кратчайшей дугой на сфере служит дуга окружности большого круга. Чтобы найти кратчайший путь на сфере между ее точками A и B, через эти точки и центр O сферы проведем плоскость, она рассечет сферу по окружности; та из двух дуг AmB и AnB этой «большой» окружности, которая короче, и будет кратчайшим путем между A и B. Хорошо, если точки A и B не служат концами одного и того же диаметра — тогда плоскость точками A, B, O определяется однозначно и одна из дуг AmB, AnB непременно короче другой, то есть кратчайший путь между A и B — единственный. Если же A и B диаметрально противоположны, то таких плоскостей, а следовательно, и кратчайших путей, будет бесконечно много — все они одной длины, и короче пути на сфере нет. Таковы, например, все меридианы, связывающие северный полюс с южным.

Внутренняя геометрия сферы во многом схожа с планиметрией, но во многих отношениях и резко от нее отличается. Прежде всего, расстояния на сфере ограничены — они не превышают половины длины окружности большого круга. Роль прямых здесь играют окружности большого круга, роль прямолинейных отрезков — дуги этих окружностей, вмещающие не более 180°. Как мы только что видели, для любых двух точек сферы, если только они не «антиподы», существует единственный отрезок, их соединяющий; для антиподов таких отрезков будет бесконечно много.

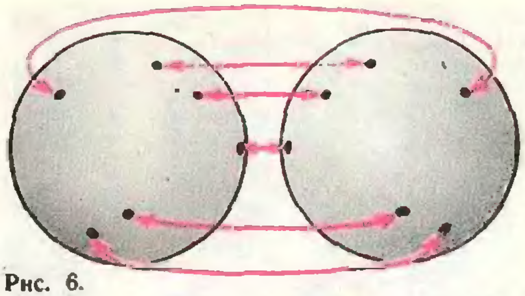


Рис. 6.

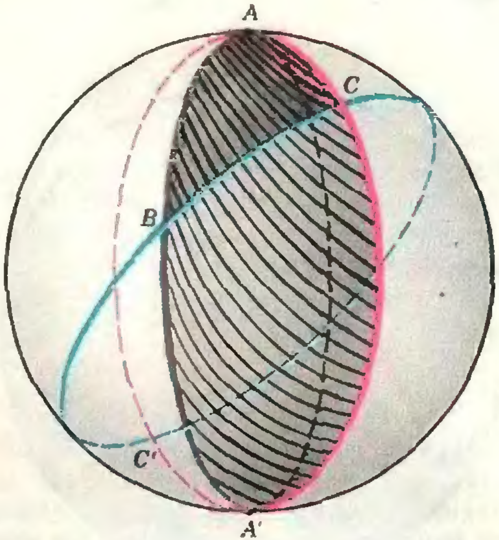


Рис. 7.

Быть может, и в нашей Вселенной найдется пара точек-«антиподов», через которые проходит бесконечное множество прямых? Нам пока приходилось иметь дело лишь со сравнительно близкими точками, с такой парой мы никогда не сталкивались и поэтому стало привычным, что «через две точки проходит только одна прямая».

Однако легко построить модель «вселенной», в которой есть замкнутые прямые, но отличить которую от привычного нам мира на небольших расстояниях невозможно.

Все вы на уроках географии видели изображение поверхности Земли картой из двух кругов — «полушарий», хотя более точным изображением является глобус. А как получить глобус из карты полушарий? Сделать это несложно. Нужно лишь знать правило измерения расстояний в каждом из полушарий и объяснить, как «склеиваются» границы полушарий, то есть как, дойдя до границы одного полушария, попасть в другое.

Так вот, возьмем вместо кругов два шара и «склеим» их границы (см. рис. 6). Получится модель «мира» (трехмерной сферы), небольшие части которого устроены почти так, как обычное трехмерное пространство, но каждая прямая в котором имеет конечную длину.

Вот одно из следствий возможного существования замкнутой «прямой»: если свет распространяется прямолинейно и мы «сверхдальнозорки», то, разговаривая лицом к лицу с приятелем, мы, повернувшись назад, увидим его затылок (каким он был, правда, много миллионов лет назад!). Одно время астрономы допускали, что столкнулись с такой ситуацией: была высказана гипотеза, что слабая весьма далекая туманность М.83 есть просто вид «сзади» на большую внегалактическую туманность М.31 в Андромеде. Но эта гипотеза отпала, так как вскоре в астрономии стали доступны значительно бóльшие расстояния, чем сумма расстояний до М.83 и М.31. Значит, если прямая замкнута и имеет конечную длину, то эта длина много больше.

Как и в планиметрии, на сфере решение задачи обычно сводится к рассмотрению ряда треугольников. *Сферический треугольник* составлен из трех вершин, попарно соединенных кратчайшими дугами — это его стороны. Но на сфере существуют и *двуугольники*, например, два полюса, соединенных двумя меридианами.

Докажем, что сумма углов сферического треугольника всегда больше π *). Для этого вычислим площадь S_{ABC} сферического треугольника ABC, если известны величины его углов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ (в радианах).

Для наглядности чертеж построим так, чтобы точка A попала в северный полюс сферы (рис. 7). Вычислим сначала площадь $S_{AA'}$ двуугольника, который получится, если продолжить стороны AB и AC до взаимного пересечения в точке A', диаметрально противоположной точке A. Пусть площадь всей сферической поверхности равна S. Ясно, что $S_{AA'}=S\cdot\hat{A}/2\pi$ (так как площадь двуугольника с углом в 2π, очевидно, равна S — это вся сфера). Таким же образом, продолжая стороны угла $\hat{B}$, получим двуугольник с площадью $S_{BB'}=S\cdot\hat{B}/2\pi$, а угол $\hat{C}$ приведет нас к двуугольнику с площадью $S_{CC'}=S\cdot\hat{C}/2\pi$. Продолжая стороны тех же углов в противоположные направления, получим дополнительные двуугольники таких же площадей. Какая часть сферы будет покрыта этими парами двуугольников? Ясно, что они покроют всю сферу, причем треугольники ABC и $A'B'C'$ будут покрыты трижды (для наглядности сделайте такое построение для треугольника ABC на плоскости!). Итак,

$$\frac{2S}{2\pi}\hat{A}+\frac{2S}{2\pi}\hat{B}+\frac{2S}{2\pi}\hat{C}=S+4S_{ABC};$$

отсюда

$$S_{ABC}=\frac{S}{4\pi}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi).$$

Площадь треугольника оказалась пропорциональной так называемому «сферическому избытку»

$$\varepsilon=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi.$$

Заметим, что числа S и S_{ABC} положительны, значит, положителен избыток ε, иначе говоря, сумма углов сферического треугольника всегда больше π.

Интересно, что на плоскости Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше π, а его площадь пропорциональна «дефекту» $\delta=\pi-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})$.

В геометрии на сфере справедливы те же признаки равенства треугольников, что и в планиметрии (по стороне и двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам), но есть еще один: по трем углам — на сфере нет подобных треугольников! (Доказательства — те же, что и в планиметрии.)

Упражнения

1 (с очень длинной «бородой»). Дан прямоугольный параллелепипед размером 30×12×12. Найти кратчайший путь по его поверхности между точками A и A', расположенными симметрично относительно центра параллелепипеда на квадратных его гранях на средних вертикалях (для наглядности считаем грани 30×12 полом и потолком), точка A — на высоте 1 над полом, A' — на 1 под потолком. Многие, вероятно, поторопятся: «Длина кратчайшего пути равна 42!» Однако это неверно — есть путь заметно более короткий! Найдите его.

2. Красноярск и Москва лежат почти на одной параллели (56° северной широты). Зная их долготу (93° и 38°) и радиус Земли (6370 *км*), узнать, насколько кратчайший путь короче пути вдоль параллели.

3. Доказать, что:

а) сумма углов $\hat{A}_1+\hat{A}_2+\ldots+\hat{A}_n$ сферического n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ всегда больше, чем $(n-2)\pi$;

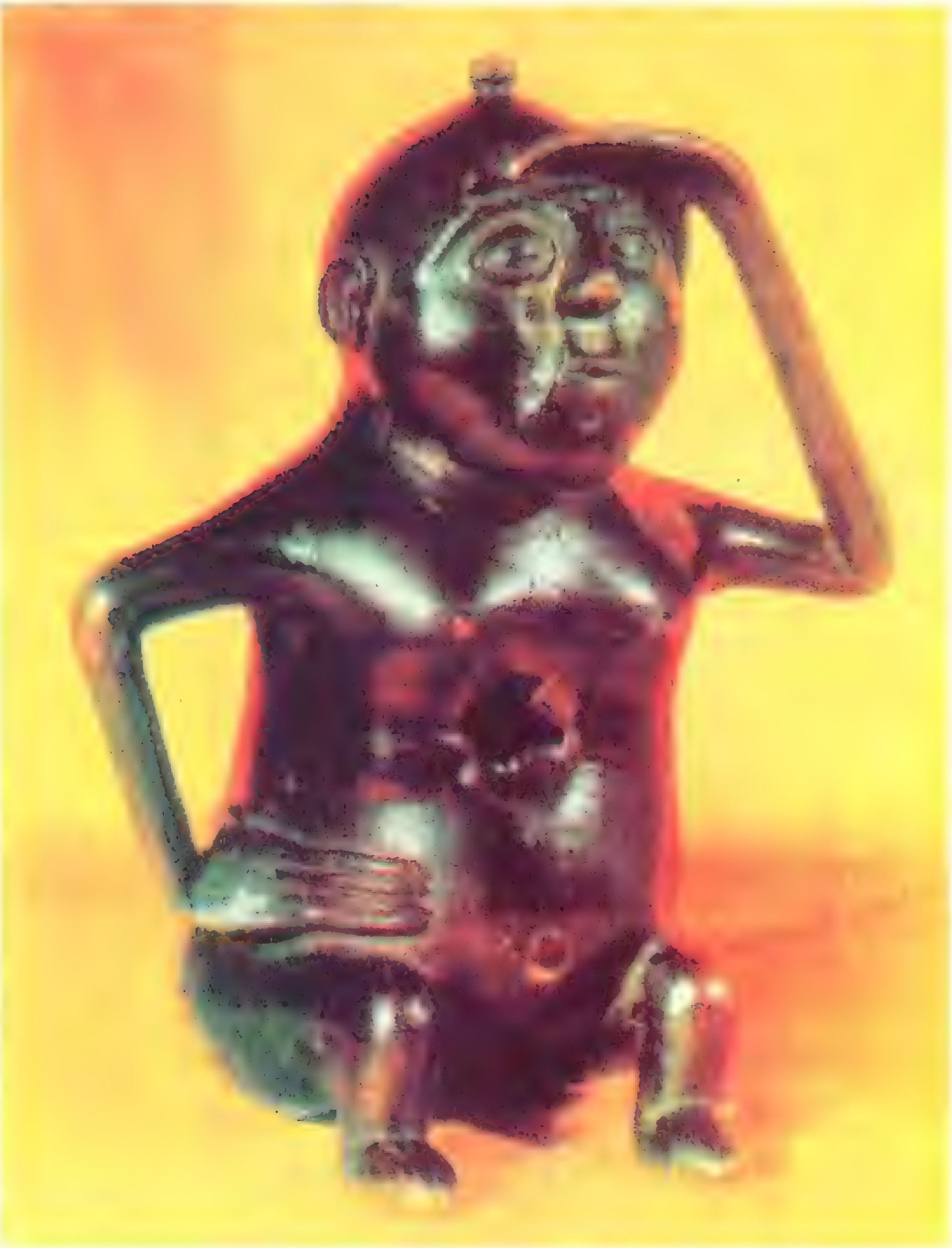
б) площадь сферического n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ пропорциональна избытку $\varepsilon=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\ldots+\hat{A}_n-(n-2)\pi$.

4. Доказать, что в сферическом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны.

5. Доказать признак равенства сферических треугольников по трем сторонам.

---

*) *Величиной угла* (или просто *углом*) *между двумя пересекающимися кривыми* называется угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке пересечения кривых.



Этому бронзовому гномику около семисот лет. В «молодости» он был своеобразным духом-хранителем домашнего очага. В фигурку наливали воду и ставили ее на тлеющие угольки. Вскоре изо рта гномика начинал вырываться пар. Фигурку помещали перед очагом так, чтобы струя пара была направлена в под печи. Так что гномик раздувал пламя в печи. Дырка в теле гномика является следствием «несчастного случая».

Хотя эту фигурку можно считать просто забавной игрушкой, она несомненно представляет пример использования физического явления. Ведь и линзы, и магниты, прежде чем стать научными инструментами, считались просто игрушками. А к обнаружению гироскопического эффекта привел обыкновенный игрушечный волчок.

В настоящее время этот гномик хранится в Венском музее истории искусств.

С. Шамаш,
Э. Эвенчик

Цикл Карно

С древнейших времен люди пользовались внутренней энергией топлива для приготовления пищи, обогрева жилищ, плавки и обработки металлов. Но после изобретения тепловых двигателей приобрело особое значение применение энергии топлива для приведения в движение различных механизмов. Тепловые двигатели применяются на транспорте и в сельском хозяйстве, в промышленности и в военном деле. Генераторы большинства электростанций приводятся в действие тепловыми двигателями.

Все эти двигатели работают за счет внутренней энергии различных видов топлива, в том числе и ядерного. Понятно поэтому, насколько важно знать способы наиболее эффективного использования этого вида энергии для совершения работы.

Внутренней энергией обладают все тела. Как известно, она состоит из кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии взаимодействия самих молекул и всех частиц, входящих в их состав.

В случае одноатомного идеального газа (когда взаимодействие молекул отсутствует) внутренняя энергия равна

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Нетрудно оценить каким огромным запасом внутренней энергии обладает окружающая Землю атмосфера, масса которой равна примерно 10^{18} *кг*.

Еще бóльшим запасом внутренней энергии обладают моря и океаны*). Масса воды в мировом океане составляет около 10^{21} *кг*. Охлаждение ее только на 1 градус привело бы к выделению энергии порядка 10^{24} *дж*. Это в 100 000 000 раз больше всей энергии, вырабатываемой на земном шаре за год!

Казалось бы, энергетические запасы на земном шаре почти безграничны. Однако внутреннюю энергию атмосферы и океанов не причисляют к энергетическим запасам. Это связано с особенностями использования этого вида энергии.

Для использования внутренней энергии тела нужно ее «отнять» у него. Это может быть осуществлено двумя способами — в процессе теплопередачи, когда тело отдает некоторое количество теплоты, или при совершении им работы.

Теплопередачей пользуются, например, в ряде технологических процессов, связанных с нагреванием тел, а также для обогрева помещений за счет внутренней энергии горячего пара или воды.

Но, как уже отмечалось, наибольшее значение имеет использование внутренней энергии тел для совершения механической работы.

Механическая работа совершается лишь тогда, когда происходит упорядоченное движение — перемещение тела. Внутренняя же энергия — это энергия беспорядочно (хаотически) движущихся молекул. Следовательно, для того чтобы за счет внутренней энергии совершалась работа, необходимо найти способ, позволяющий «преобразовать» хаотическое движение молекул в упорядоченное движение какого-либо макроскопического тела. А это задача не простая! Всякое упорядоченное движение тел в реальных условиях (при наличии трения) «преобразуется» в беспорядочное движение молекул (тела нагреваются). Обратное же преобразование хаотического движения молекул в упорядоченное требует специальных условий.

---

*) Внутренняя энергия океана больше той, которая получается из приведенной выше формулы для внутренней энергии идеального газа, так как молекулы воды обладают еще и потенциальной энергией взаимодействия.

Такие условия могут быть созданы, например, при использовании цилиндра с поршнем. Беспорядочное движение молекул газа в цилиндре вызывает перемещение поршня. Цилиндр с поршнем составляет главную часть огнестрельного оружия. За счет внутренней энергии газов, возникающих при сгорании пороха в стволе (цилиндр), совершается механическая работа по перемещению снаряда (поршень).

Огнестрельное оружие, таким образом, является своеобразным тепловым двигателем. Но это не двигатель непрерывного действия, который необходим для того, чтобы приводить в движение станки, генераторы на электростанциях, транспорт и т. д.

Для того чтобы двигатели работали непрерывно, необходимо, чтобы поршень после расширения газа возвращался каждый раз в исходное положение, и газ вновь мог расширяться. А для этого внешняя сила должна совершать работу по сжатию газа в цилиндре. Если работа по сжатию, которая совершается внешней силой, равна работе, совершаемой газом при расширении, то коэффициент полезного действия такого двигателя, очевидно, равен нулю. Необходимо, чтобы работа сжатия была меньше работы расширения газа.

Как известно, элементарная работа, совершаемая при изменении объема газа от значения V_i до значения $V_i + \Delta V_i$, равна

$$A_i = p_i \Delta V_i.$$

Поэтому ясно, что для того чтобы работа внешней силы при сжатии газа была меньше работы, совершаемой газом при расширении, необходимо, чтобы каждому значению объема газа при сжатии соответствовало меньшее давление, чем при расширении. Как известно, давление газа при одном и том же объеме тем меньше, чем ниже его температура. Значит, газ перед сжатием должен быть охлажден.

Казалось бы, охладить газ — задача простая. Например, можно для этого привести его в контакт с телами более низкой температуры. Но в этом случае энергия хаотического движения молекул газа преобразуется в энергию также хаотического движения других тел, и для совершения работы она будет потеряна. Вот почему первые тепловые двигатели, в которых использовался этот способ охлаждения пара перед его сжатием, имели чрезвычайно низкий коэффициент полезного действия — до 5%. Очевидно, нужно было найти другой способ охлаждения газа.

Так потребности техники поставили перед наукой задачу исследовать работу тепловых двигателей и найти способы повышения эффективности их работы.

Процесс расширения газа

Итак, внутренняя энергия, отнятая у нагретого тела при соприкосновении его с более холодным телом, совершенно бесполезна для совершения работы. Она лишь увеличивает энергию хаотического движения молекул холодного тела.

Поэтому, если мы хотим получить максимальную работу при расширении газа, надо, *чтобы газ в этом процессе не соприкасался с телами, имеющими более низкую температуру*.

Исключить контакт рабочего тела с более холодными телами можно двумя способами: поместить газ в сосуд, стенки которого сделаны из теплоизолирующего материала, или поддерживать постоянный контакт газа с телами, имеющими ту же температуру, что и он сам. Рассмотрим оба способа.

Адиабатный процесс

Представим себе, что сжатый газ находится в цилиндре с подвижным поршнем (рис. 1). Цилиндр и поршень сделаны из идеального теплоизолирующего материала. В этих условиях газ будет расширяться и совершать некоторую работу A без передачи тепла в окружающую среду ($Q = 0$). Такой процесс, при котором теплопередача исключена, называется адиабатным *).

Из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A^{**})$$

следует, что в адиабатном процессе

$$\Delta U = -A.$$

При расширении газа силы, с которыми он действует на поршень, совершают положительную работу ($A > 0$), поэтому внутренняя энергия газа уменьшается ($\Delta U < 0$).

Мы видим, что при адиабатном расширении газа его внутренняя энергия уменьшается как раз на величину совершенной работы, то есть газ совершает максимальную работу, равную уменьшению его внутренней энергии. При этом происходит понижение температуры. Легко догадаться, что при адиабатном сжатии газа его внутренняя энергия увеличивается за счет работы, совершенной над газом другими телами.

Итак, при адиабатном сжатии газ нагревается, а при расширении охлаждается. Вспомните, например, опыт с воспламенением ватки, смоченной эфиром, при резком сжатии паров эфира в цилиндре. Охлаждением воздуха и водяных паров, содержащихся в нем, при адиабатном расширении объясняется образование облаков. Нагретый у поверхности Земли воздух при быстром подъеме в верхние слои атмосферы, где давление ниже, расширяется почти адиабатно и при этом охлаждается. Водяные пары в нем конденсируются в мелкие капли и кристаллики, образуя облака.

Изотермический процесс

Рассмотрим другой способ расширения газа.

Представим себе снова, что сжатый газ находится в цилиндре с поршнем (рис. 2). Цилиндр соприкасается теплопроводящим дном только с телом такой же как у него температуры (источник энергии), которая поддерживается постоянной. Предоставим газу возможность расширяться и совершать работу. Так как работа совершается газом за счет внутренней энергии, его температура начнет понижаться. Но тогда температура источника окажется выше, чем температура газа, и тотчас же от источника к газу будет передаваться такое количество теплоты, которое сравняет его температуру с температурой источника. Отдавать же какое-либо количество теплоты газ не может, так как он не соприкасается с телами более низкой температуры. Таким образом, температура газа будет оставаться практически все время постоянной. Процесс, происходящий при неизменной температуре, называется изотермическим.

Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре, а значит, изменение внутренней энергии пропорционально изменению температуры. Следовательно, в изо-

---

*) Адиабатный процесс может происходить и в том случае, когда газ не находится в теплоизолирующей оболочке, но расширяется или сжимается так быстро, что теплопередача не успевает происходить.

**) Напомним, что Q — количество теплоты, полученное системой, ΔU — изменение ее внутренней энергии, A — работа, совершенная силами системы над внешними телами.

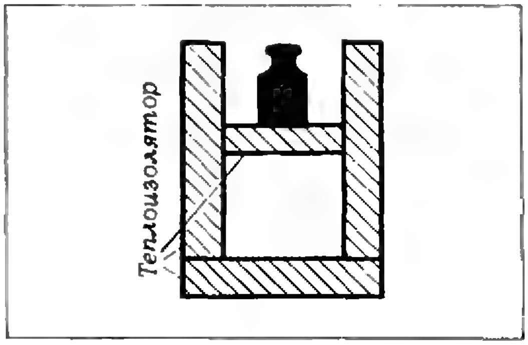


Рис. 1.

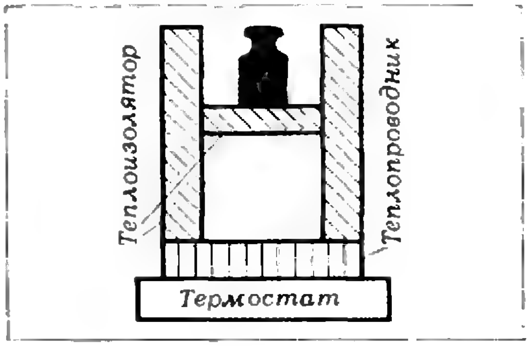


Рис. 2.

термическом процессе внутренняя энергия газа не меняется ($\Delta U = 0$). Тогда из первого закона термодинамики следует, что

$$Q = A,$$

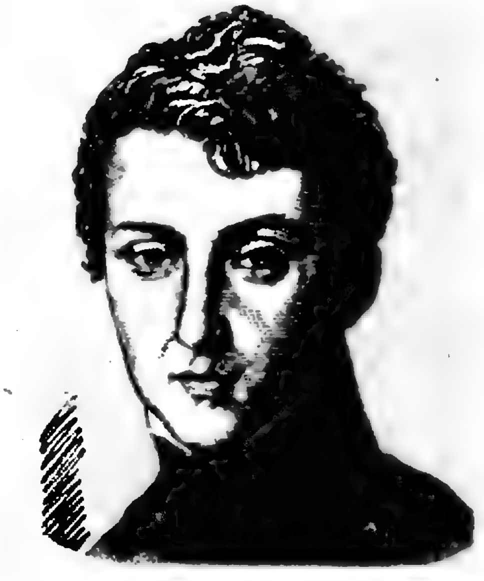
то есть при изотермическом расширении количество теплоты, полученное газом от источника энергии, равно совершенной работе.

Кроме рассмотренных, возможны самые различные процессы расширения газа. Но *в адиабатном и изотермическом процессах наиболее полно используется внутренняя энергия для совершения работы. В этих процессах газ отдает энергию телам только при совершении работы.* В адиабатном процессе газ совершает работу за счет своей внутренней энергии, и эта энергия уменьшается. В изотермическом процессе газ совершает работу за счет внутренней энергии другого тела (источника энергии), от которого он получает некоторое количество теплоты.

Циклические процессы

До сих пор мы рассматривали лишь однократные процессы расширения газа, которые прекращаются, когда давление газа становится равным внешнему. Но для непрерывной работы двигателя необходимо, чтобы процесс расширения газа повторялся периодически. А для этого надо, чтобы после расширения газ снова был сжат, чтобы поршень вернулся в исходное положение и газ мог снова расширяться. Процессы, при которых рабочее тело периодически возвращается в начальное состояние, называют циклическими. Так что непрерывная работа теплового двигателя состоит из повторяющихся циклов.

Из каких процессов должен состоять цикл, чтобы к. п. д. двигателя был максимальным? Очевидно, он должен состоять из таких процессов, которые дадут возможность совершать максимальную работу за счет количества теплоты, полученного от источника энергии, и внутренней энергии рабочего тела. Такими процессами являются, как было выяснено, изотермический и адиабатный. Поэтому при расширении и сжатии газа должны быть использованы именно эти процессы, так как только они позволяют исключить контакт горячего тела с холодным, то есть исключить уменьшение энергии без совершения работы.



Сади Карно (1796—1832).

Впервые такой наиболее совершенный циклический процесс был предложен замечательным французским физиком и инженером Сади Карно в 1824 г.

Карно прожил короткую жизнь — всего 36 лет, но оставил яркий след в науке. В своем труде «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», обессмертившем его имя, он заложил основы теории тепловых машин. По существу он был основоположником науки о тепловых явлениях — термодинамики.

Сади Карно искал пути решения актуальной для его времени задачи — установить причины несовершенства тепловых машин и найти пути наиболее эффективного их использования.

Его труды — наиболее яркий пример в истории физики взаимного влияния науки и техники.

Цикл Карно

Допустим, что сжатый газ, имеющий температуру источника энергии T_1

(температура нагревателя), находится в цилиндре, стенки и поршень которого сделаны из теплоизоляционного материала, а дно — из материала с высокой теплопроводностью. Объем, занимаемый газом, равен V_1.

Приведем цилиндр в контакт с нагревателем. Предоставим газу возможность изотермически расширяться и совершать работу. Газ получает при этом от нагревателя некоторое количество теплоты Q. Этот процесс графически изображается изотермой (кривая *ab* на рисунке 3, *а*).

Далее газ должен быть сжат, но, как уже было выяснено, при более низкой температуре, то есть изотерма сжатия должна быть ниже изотермы расширения. Ведь только в этом случае работа сжатия будет меньше работы расширения. Но мы помним, что газ не следует охлаждать соприкосновением с более холодным телом, чтобы исключить теплопередачу без совершения работы. Сади Карно писал: «В телах, употребляемых для развития движущей силы тепла, не должно быть ни одного изменения температуры, происходящего не от изменения объема». Другими словами, температура рабочего тела не должна изменяться без совершения телами работы. Значит, остается единственная возможность — охлаждать газ, предоставив ему возможность расширяться адиабатно.

Поэтому изотермический процесс расширения не доводят до конца хода поршня в цилиндре. Когда объем газа становится равным некоторому значению V_1', дно цилиндра изолируют от нагревателя; после этого газ расширяется адиабатно до объема V_2, соответствующего максимально возможному ходу поршня в цилиндре (адиабата *bc* на рисунке 3, *б*). При этом газ охлаждается до температуры T_2.

Теперь охлажденный газ можно изотермически сжимать при температуре T_2. Для этого его нужно привести в контакт с телом, имеющим ту же температуру T_2 (холодильник), и сжимать газ внешней силой. Однако в этом процессе газ никогда не вернется в первоначальное состояние — температура его T_2 будет все время меньше, чем T_1.

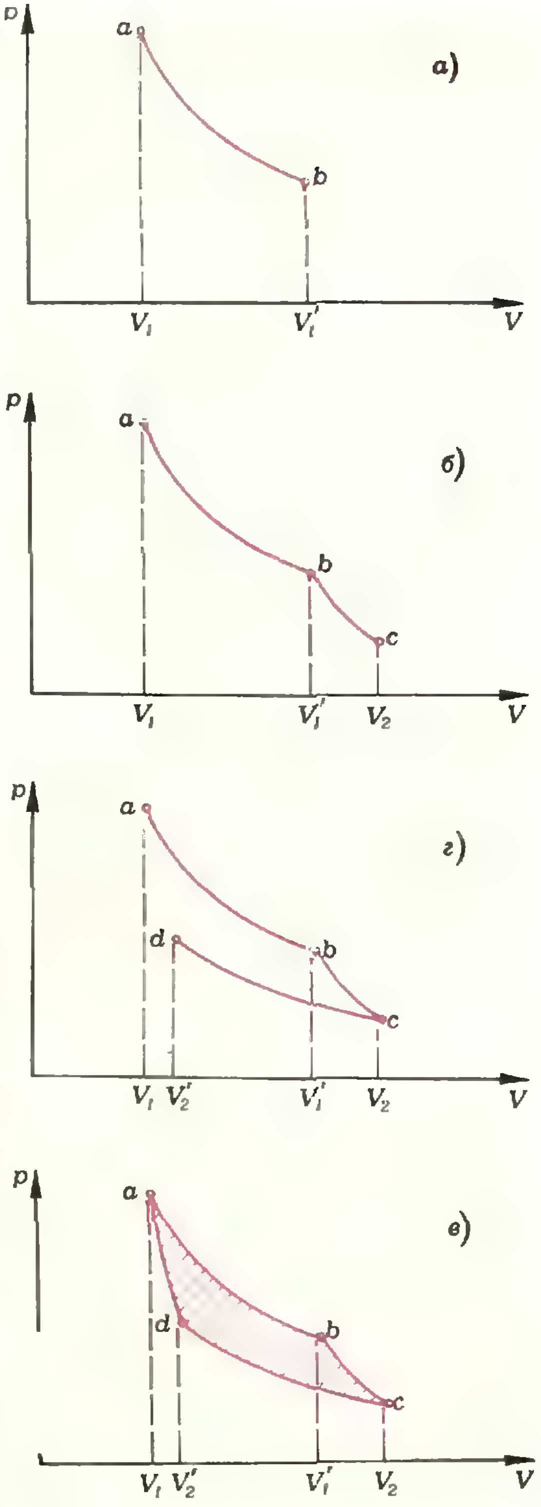


Рис. 3.

Поэтому изотермическое сжатие доводят до некоторого промежуточного объема V_2' (изотерма *cd* на рисунке 3, *в*). При этом газ отдает холодильнику некоторое количество теплоты Q_2, равное совершаемой над ним работе сжатия. После этого газ сжимают адиабатно до объема V_1, чтобы его температура вновь повысилась до T_1 (адиабата da на рисунке 3, *г*). Теперь газ вернулся полностью в первоначальное состояние, при котором объем его равен V_1, температура — T_1, давление — p_1, и цикл можно повторять вновь.

Итак, на участке abc газ совершает работу ($A > 0$), а на участке cda работа совершается над газом ($A<0$). На участках bc и da совершение работы происходит только за счет изменения внутренней энергии газа. Поскольку $\Delta U_{bc} = -\Delta U_{da}$, то и $A_{bc} = -A_{da}$. Так что полная работа, совершаемая за цикл, определяется разностью работ, совершаемых на участках ab и cd. Численно эта работа равна площади фигуры, ограниченной кривой цикла $abcd$ (рис. 3, *г*).

На участке ab газ получает некоторое количество теплоты Q_1 от нагревателя с температурой T_1, а на участке cd газ непременно отдает при сжатии количество теплоты Q_2 холодильнику с температурой T_2. Значит, в полезную работу фактически преобразуется только часть количества теплоты Q_1, полученной от нагревателя, равная $Q_1 - Q_2$. Поэтому к. п. д. цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Если же газ не охлаждать перед сжатием и, следовательно, не отдавать некоторое количество теплоты более холодному телу, то полезная работа за цикл будет равна нулю. В этом состоит особенность совершения механической работы тепловыми двигателями: невозможно все количество теплоты, полученное от нагревателя, преобразовать полностью в работу при циклическом процессе. Неизбежно приходится какую-то часть этого количества теплоты отдавать третьему телу с более низкой температурой. Значит, для работы тепловых машин недостаточно иметь только источник энергии (нагреватель) и рабочее тело. Необходимо иметь еще третье тело с более низкой температурой (холодильник). Таким холодильником часто служит окружающая атмосфера. Для непрерывной работы любого теплового двигателя необходимо иметь *нагреватель, рабочее тело и холодильник.*

Итак, цикл Карно был на всех стадиях проведен таким образом, что нигде не было соприкосновения тел с различными температурами. Это исключало возможность теплопередачи без совершения работы, то есть исключало переход беспорядочного движения молекул одного тела в беспорядочное движение молекул других тел.

Как показал Сади Карно, коэффициент полезного действия идеального цикла может быть выражен через температуры нагревателя (T_1) и холодильника (T_2):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

или

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (*)$$

В реальных двигателях не удается осуществить цикл, состоящий из идеальных изотерм и адиабат. Дело в том, что процессы в двигателях проходят достаточно быстро, и изотермичность процессов нарушается — понижение температуры в результате элементарного расширения «не успевает» скомпенсироваться повышением температуры за счет контакта с нагревателем. Материалы, из которых изготавливаются стенки цилиндра и поршень, не могут быть идеальными изоляторами, как это необходимо для осуществления адиабатного процесса. Поэтому к. п. д. цикла, осуществляемого в реальных двигателях, всегда меньше, чем к. п. д. цикла Карно (при одних и тех же температурах нагревателей и холодильников).

Вместе с тем рассмотрение идеального цикла Карно имеет огромное значение, так как оно указывает пути повышения к. п. д. тепловых двигателей. Из формулы (*) видно, что к. п. д. двигателей тем больше, чем выше температура нагревателя и чем ниже температура холодильника.

В современных двигателях обычно к. п. д. увеличивают за счет повышения температуры нагревателя. В мощных паровых турбинах в настоящее время используют пар, температура которого достигает 600°С. В газовых турбинах температура газа достигает 900°С. Дальнейшее повышение температуры нагревателя ограничивается жаростойкостью материалов, имеющихся в настоящее время.

Ограничения, накладываемые на полное использование внутренней энергии для совершения механической работы в тепловых двигателях, не вытекают из первого закона термодинамики. Этот закон «запрещает» лишь получение работы большей, чем затраченная энергия. Но если бы энергия нагревателя уменьшилась, например, на 100 джоулей, и при этом тепловой двигатель совершил работу 100 джоулей, то это не противоречило бы первому закону термодинамики. Однако, как было выяснено, *невозможен такой циклический процесс, при котором все количество теплоты, полученное от нагревателя, идет на совершение работы.* Неизбежно некоторая часть этого количества теплоты отдается другим телам с более низкой температурой.

Указанные выше ограничения на совершение непрерывной работы в циклических процессах за счет внутренней энергии составляют содержание другого важнейшего закона природы — второго закона термодинамики.

Особенность использования внутренней энергии позволяет понять, почему некоторые источники энергии, находящиеся вокруг нас, бесполезны. Очевидно, не может быть использована энергия таких тел, температура которых равна температуре окружающей среды.

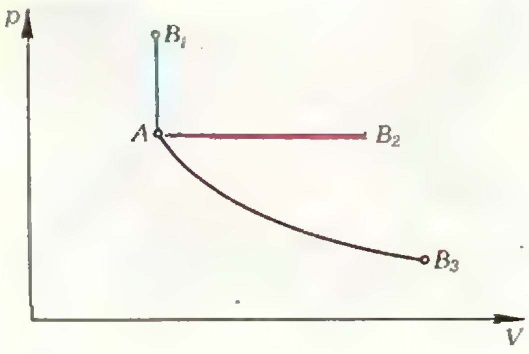


Рис. 4.

Насколько заманчивым казалось бы использование почти безграничного запаса внутренней энергии, которая содержится в атмосфере и водах океанов! Однако для получения работы за счет этой энергии необходимо иметь столь же гигантский холодильник, который принимал бы часть этого огромного количества теплоты и при этом не нагревался сам до температуры океана. Именно поэтому, как уже указывалось, энергию океанов не причисляют к энергетическим запасам на земном шаре.

Однако в настоящее время высказываются предположения о возможности использования разности температур в глубинных и поверхностных слоях морей и океанов, хотя это и связано с огромными техническими трудностями.

Упражнения

1. Чему равно изменение внутренней энергии киломоля идеального газа при его охлаждении на 20 градусов?

2. Какая энергия выделилась бы при охлаждении на 1 градус всей массы воздуха, окружающего земной шар? Удельная теплоемкость воздуха $c=10^3$ *дж/кг·град*.

3. Постройте график изотермического процесса по данным таблицы:

V, *л*	10	15	20	30	40	50	60
p, *атм*	60	40	30	20	15	12,5	10

Пользуясь этим графиком, определите работу газа при изменении его объема от 20 до 40 *л*.

4. На графике (рис. 4) изображены различные процессы изменения состояния газа: AB_1, AB_2, AB_3. При переходе из первого состояния (A) в одно из последующих (B_1, B_2 или B_3) газ получает некоторое количество теплоты. Совершает ли газ работу и изменяется ли его внутренняя энергия в каждом из этих процессов?

5. Восходящий от поверхности Земли поток воздуха представляет собой своеобразный тепловой двигатель. Укажите в нем основные части, присущие любому тепловому двигателю.

В. Майер, Р.-Э. Шафир

Струйный автогенератор звука

Для проведения описанного ниже опыта вам понадобится, прежде всего, стеклянная трубка с небольшим отверстием. Конечно, вы можете воспользоваться обыкновенной стеклянной пипеткой, но нетрудно и самим изготовить нужную трубку.

На пламени сухого горючего или газовой горелки растяните легкоплавкую стеклянную трубку диаметром 4—6 *мм* так, чтобы образовавшаяся перетяжка имела внутренний диаметр около 1 *мм*. Ребром напильника или надфиля аккуратно надпилите трубку посередине перетяжки и затем разломите ее. У вас получится две трубки с оттянутыми, как у пипетки, концами. Можете сделать и по-другому. Введите конец трубки в пламя и равномерно вращайте трубку так, чтобы конец ее стал оплавляться, а отверстие — затягиваться расплавленным стеклом. Когда внутренний диаметр оплавленного конца трубки станет равным примерно 1 *мм*, трубку удалите из пламени и остудите.

Изготовленную стеклянную трубку вставьте в отверстие резиновой пробки, а пробку вденьте в резиновый шланг подходящего диаметра (рис. 1). Шланг соедините с краном водопровода и пустите по нему воду. При этом из отверстия стеклянной трубки будет бить тонкая водяная струя, в которой можно выделить две области. Ближайшая к отверстию часть струи совершенно прозрачна и выглядит неподвижной, ниже струя становится неспокойной и мутной. Очевидно, сначала жидкость движется сплошным потоком, затем поток разбивается на отдельные капли, которые падают обособленно друг от друга, но при этом движутся настолько быстро, что воспринимаются как целостная мутная струя. Верхняя часть струи прозрачна, поскольку свет преломляется на геометрически правильной поверхности струи. В нижней части струи свет рассеивается на отдельных каплях, и вода выглядит мутной.

На рисунке 2 приведена фотография струи, бьющей под углом к горизонту. На фотографии хорошо видны оба участка струи.

В том, что мутная область струи — это поток отдельных капель, можно убедиться и на слух. Введите в струю вверх дном пустую консервную банку. Если дно находится в прозрачном участке струи, вода падает на него почти бесшумно. Опуская банку вниз, вы заметите, что появляется звук, сначала слабый, потом постепенно усиливающийся. Происхождение этого звука и объясняется ударами о дно отдельных капель воды.

Теперь приступайте непосредственно к опыту. Возьмите пустую консервную банку и затяните ее отверстие резиновой пленкой от детского надувного шарика. Введите банку в струю так, чтобы пленка оказалась в сплошном участке струи вблизи места распадания ее на капли (оптимальное положение банки нетрудно подобрать экспериментально). Пользуясь стеклянной палочкой или медной про-

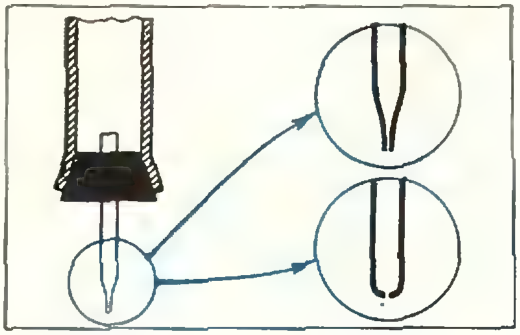


Рис. 1.

волокой диаметром 1,5—2 *мм*, соедините между собой резиновую пленку и стеклянную трубку, из которой выходит струя (рис. 3). Участок струи вблизи пленки немедленно становится мутным, и возникает громкий почти однотонный звук. Звук продолжается все время, в течение которого банка и стеклянная трубка механически соединены. Стоит разорвать связь между этими элементами, и звук исчезает.

Попробуем объяснить результат опыта. Появление звука свидетельствует о том, что в системе возникли незатухающие механические колебания, причем без действия внешней периодически изменяющейся силы. Такие системы называют автоколебательными. Они, как правило, включают в себя (кроме самой колебательной системы) источник энергии и так называемое звено обратной связи, посредством которого колебательная система сама (автоматически) управляет поступлением энергии из источника. Возможно, вы уже встречались с колебательными системами. Это, например, маятниковые часы и ламповый генератор электромагнитных колебаний.

Источником энергии в описанном опыте является поток воды, падающий на резиновую пленку. Колебательную систему представляет собой банка, отверстие которой затянуто резиновой пленкой. В этом нетрудно убедиться: удалите банку из струи и резко ударьте по резиновой пленке пальцем — вы услышите быстро затухающий звук примерно той же частоты, которую раньше давала система. Обратную связь, по-видимому, обеспечивает стеклянная палочка, которая механически связывает между собой колебательную систему и источник энергии.

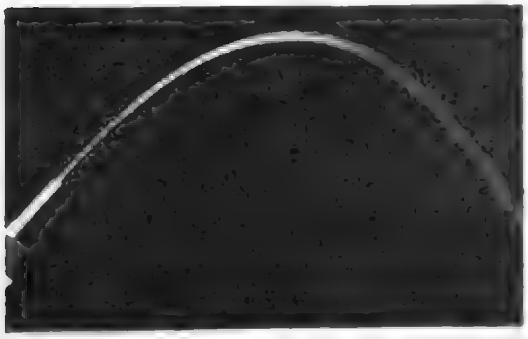


Рис. 2.

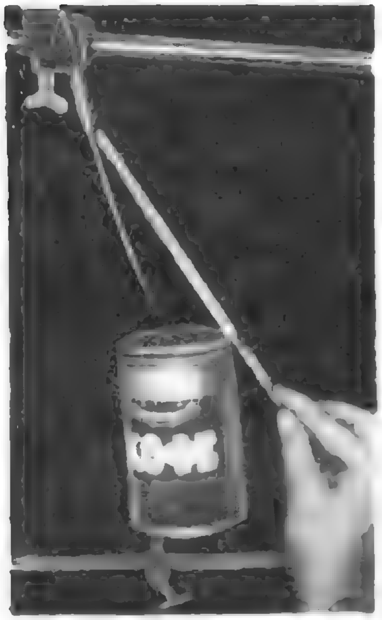


Рис. 3.

Процесс установления колебаний в нашей автоколебательной системе — будем называть ее струйным автогенератором звука — можно представить себе так. Струя, падая на резиновую пленку, в силу чисто случайных причин вызывает слабые быстро затухающие звуковые колебания воздуха в банке. Эти колебания по стеклянной палочке передаются трубке, из которой вытекает струя (звук прекрасно распространяется в твердых телах!). Струя каким-то образом реагирует на звуковые колебания и передает их опять резиновой пленке. Объем воздуха в банке резонирует, колебания усиливаются и частично вновь передаются стеклянной трубке, из которой выходит струя. Далее процесс повторяется до тех пор, пока амплитуда звуковых колебаний не возрастет настолько, что потери энергии будут компенсироваться поступлениями ее из источника. В результате устанавливаются незатухающие автоколебания.

Объясняя работу струйного автогенератора звука, мы предположили, что струя реагирует на звук. Действительно ли звуковые волны воздействуют на струю? В чем выражается это воздействие? Каков его механизм? Попытайтесь ответить на эти вопросы самостоятельно.

Вопреки распространенному заблуждению, значительная часть деятельности математика (или физика-теоретика) является экспериментальной. Прежде чем что бы то ни было доказать, математик тратит много времени на то, чтобы, рассматривая разнообразные примеры и частные случаи, освоиться с новыми объектами и отыскать закономерности, которые затем удается представить в виде «правильной задачи» или «теоремы». Только после этой большой работы, исписав горы бумаги конкретными вычислениями или исчертив ее графиками, математик принимается за решение абстрактной математической задачи или за доказательство теоремы. Многие важные для практических приложений результаты математической науки также представляют собой не абстрактные теоремы, а таблицы для расчетов, графики, схемы, программы для вычислений.

Этой «экспериментальной» части математики и посвящен наш новый раздел «Математический практикум». Выполняя задания «Математического практикума», вы научитесь по нескольким частным наблюдениям находить общие закономерности, сможете, если тема задания вам понравится, разобраться в ней глубже и, возможно, сделаете первые самостоятельные открытия. Как правило, наши задания по математическому практикуму будут состоять из двух или нескольких ступеней: первая — проделать «эксперимент» (нарисовать несколько кривых или фигур, решить серию уравнений и т. п.), следующие — сформулировать общую задачу, написать общее уравнение изучаемого явления или процесса, одним словом, провести некоторое исследование.

В каждом нашем задании мы приводим конкретный образец, которому нужно следовать и описываем план работы. Просим письма с выполненными заданиями присылать в редакцию с пометкой «Мат. практикум». Графики и чертежи выполняйте на стандартных листах бумаги. Просим при пересылке не сворачивать листы в трубку. В письмо вложите конверт с обратным адресом для ответа.

Большая часть заданий, которыми начинается этот отдел, родилась в стенах физико-математической школы при МГУ.

В первом задании математического практикума речь пойдет о некоторых кривых, рассматривавшихся в прошлом веке в связи с трудной (по тем временам) и важной технической проблемой: как связать поршень с точкой махового колеса двигателя таким образом, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение?

В. Вавилов

Шарнирные механизмы. Кривые Уатта

> *«Хоть я и не особенно забочусь о славе, однако параллелограммом горжусь больше, чем каким-либо другим изобретением, сделанным мною».*
>
> Дж. Уатт (из письма к сыну)

1. Шарнирный механизм, изображенный на рисунке 1, был предложен Джемсом Уаттом в 1774 году *), когда он решал такую проблему: как связать поршень с точкой махового колеса, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение? На рисунке 1 изображен так называемый сокращенный параллелограмм Уатта: он состоит из двух стержней O_1A_1 и O_2A_2 одинаковой длины (коромысла и отводного радиуса), соединенных между собой при помощи шарниров стержнем A_1A_2 (шатуном). Стержни O_1A_1 и O_2A_2 вращаются вокруг закрепленных точек O_1 и O_2, и, если позволяют длины стержней, можно получить целый ряд различных «крестообразных» фигур (рис. 2, *а*, *б*).

Тщательно исследовав движение точек M шатуна A_1A_2, Уатт убедился, что *средняя точка шатуна A_1A_2 незначительно уклоняется от прямой линии, когда вся система в целом приходит в движение* (рис. 3).

Трехзвенник $O_1A_1A_2O_2$ обладал одним недостатком: расстояние между точками O_1 и O_2 (между осями вращений коромысла и отводного радиуса) должно было быть довольно значительным, чтобы пригодная часть траектории (то есть часть кривой, мало отличающаяся от прямой линии) движения средней точки шатуна была протяженной; это приводило к недопустимому увеличению размеров машинного отделения. Чтобы избежать этого, Уатт добавил пантографическое расширение к трехзвеннику, получив полный параллелограмм (рис. 3; $|O_1A_1| = |O_2A_2| = |B_2A_2| = |B_1A_1|$, $|B_1B_2| = |A_1A_2|$, $|MA_1| = |MA_2|$, стержень O_2B_2 в точке A_2 не изгибается), после чего сам механизм и стали называть *параллелограммом Уатта*. В силу подобия треугольников O_2A_2M и $O_2B_2B_1$ точки O_2, M и B_1 всегда лежат на одной прямой. На том же основании $|O_2B_1|$ вдвое больше $|O_2M|$; следовательно, точка B_1 описывает траекторию, гомотетичную траектории точки M, в удвоенном масштабе. На практике улучшение состояло в том, что поршень прикреплялся не в точке M трехзвенника $O_1A_1A_2O_2$, а в точке B_1 — вершине параллелограмма $A_1B_1B_2A_2$; таким образом, Уатту удалось размеры механизма полностью согласовать с размерами обычного машинного отделения.

---

*) Джемс Уатт (1736—1819) — выдающийся английский изобретатель. Работая механиком университета в Глазго, занимался усовершенствованием паровых двигателей.

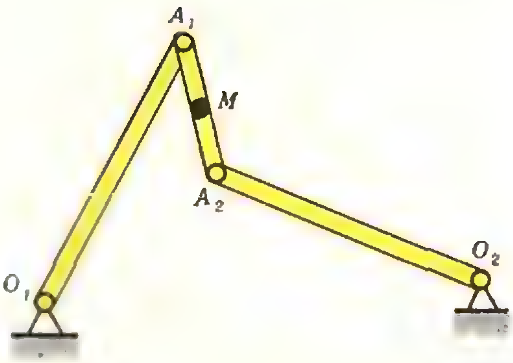


Рис. 1.

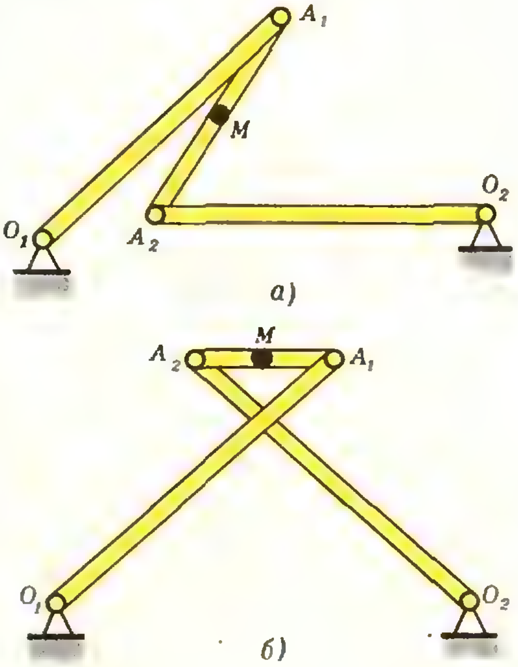


Рис. 2.

На рисунке 3 изображена замкнутая кривая, которую описывает точка M (если движения трехзвенника не ограничивать); только дуга MN этой кривой может использоваться в машине.

Шарнирными механизмами много и плодотворно занимался замечательный русский ученый Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894). К ним он проявлял особую склонность с малых лет. Ими он не переставал заниматься в течение всей своей жизни. Чебышев собственноручно изготовил много самых разнообразных шарнирных механизмов, среди них — лодка с гребным аппаратом, шагающий человек («стопоходящая машина») и другие замечательные вещи.

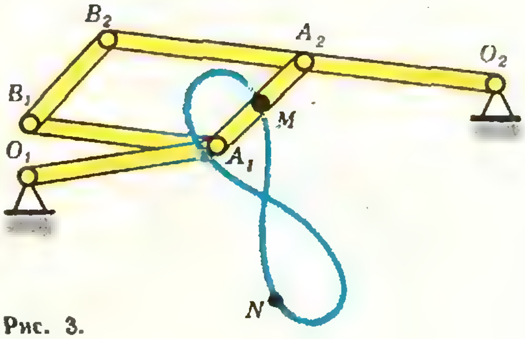


Рис. 3.

П. Л. Чебышева интересовали главным образом те механизмы, которые наиболее точно могли воспроизводить прямолинейное движение. В частности, он выяснил, что в случае параллелограмма Уатта «самые хорошие» кривые получаются тогда, когда выполнено соотношение $(2|O_1A_1|)^2 + |A_1A_2|^2 = |O_1O_2|^2$, которое означает, что должно существовать такое состояние механизма,

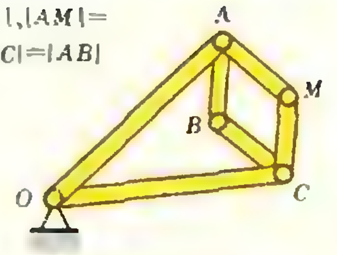


Рис. 4.

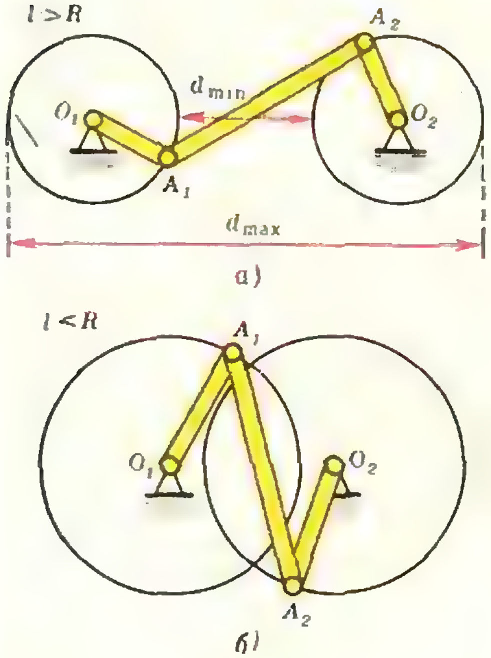


Рис. 5.

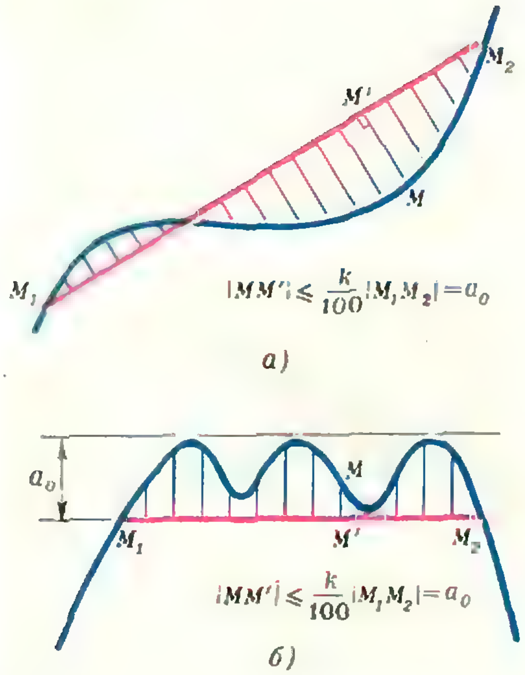

M_2
M'
M
M_1
$|MM'|\leq \frac{k}{100}|M_1M_2|=a_0$
а)
a_0
M
M_1
M'
M_2
$|MM'|\leq \frac{k}{100}|M_1M_2|=a_0$
б)

Рис. 6.

когда $[O_1A_1]\perp[A_1A_2]$ и $[O_2A_2]\perp\perp[A_1A_2]$.

Задачу отыскания точного прямолинейно-направляющего механизма ему, однако, разрешить не удалось. В 1864 году французский офицер Поселье изобрел аппарат, названный *инверсором* (рис. 4), преобразовывающий вращательное движение в безукоризненное прямолинейное.

Задача (*трудная*). Докажите, что если точка B (см. рис. 4) описывает некоторую окружность, проходящую через точку O (этого можно добиться, добавив к инверсору седьмой стержень $O'B$ такой, что $|O'B|=|OO'|$, и точку O' закрепить), то точка M описывает прямую линию *).

Дальнейшие исследования показали, что с помощью шарнирных механизмов можно реализовать очень многие кривые.

Отметим особо, что при изучении параллелограммов Уатта перед Чебышевым возникла следующая математическая задача: при каких соотношениях длин стержней механизма Уатта функция, описывающая движение средней точки шатуна, наименее всего отклоняется на заданном промежутке **) от линейной функции. Такая постановка вопроса послужила толчком к многочисленным теоретическим исследованиям и созданию современной конструктивной теории функций.

2. Мы предлагаем вам проследить за траекторией движения точек M отрезка A_1A_2 (или неразрывно связанных с ним, см. ниже п. 3); эти траектории называются *кривыми Уатта*. Ограничиваясь рассмотрением только симметрического случая ($|MA_1|=|MA_2|$), положим

$$|O_1O_2|=2l,\ |A_1A_2|=2d,$$
$$|O_1A_1|=|O_2A_2|=R.$$

---

*) См. «Квант», 1971, № 8, с. 27—28.

**) До Чебышева участок кривой MN (см. рис. 3) сравнивали с касательной к этой кривой, проведенной в центральной точке. Если же нужно достигнуть хорошего приближения «между данными пределами» (в нашем примере — между точками M и N), то касательной следует предпочесть некоторую другую прямую, «лучше» представляющую дугу MN, чем соответствующий отрезок касательной.

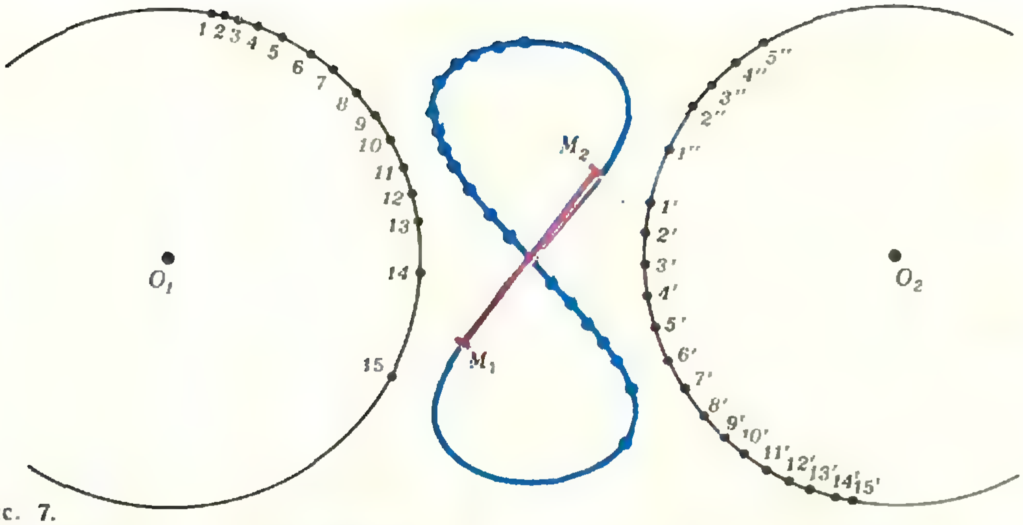


Рис. 7.

Точки A_1 и A_2 могут перемещаться по окружностям радиуса R с центрами O_1 и O_2. Заметим, что наибольшее возможное значение расстояния $|A_1A_2|$ равно $2(l+R)$ (рис. 5,а), а наименьшее — $2(l-R)$ (при $l \geqslant R$) или 0 (при $l \leqslant R$) (рис. 5, а, б). Отсюда следует, что для существования механизма Уатта необходимо, чтобы параметры d, R и l удовлетворяли неравенствам

$$l - R \leqslant d \leqslant l + R.$$

Мы будем говорить, что *участок M_1M_2 кривой отличается от отрезка прямой $[M_1M_2]$ не более, чем на k%*, если каждая точка M этого участка кривой удалена от отрезка M_1M_2 на расстояние, не превосходящее величину $a_0 = \frac{k}{100}|M_1M_2|$ (имеется в виду длина перпендикуляра из точки M на отрезок M_1M_2; рис. 6).

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать задание математического практикума.

Задание

По параметрам d, R и l (см. таблицу) плоского шарнирного механизма Уатта:

а) начертите по точкам кривую Уатта, описываемую серединой шатуна;

б) на построенной траектории при помощи линейки определите длину наибольшего участка кривой, отличающегося от отрезка прямой менее чем на 5%.

Образец

$d = 3$; $R = 4$; $l = 5$ (рис. 7).

Замечание. Для самостоятельной работы возьмите один (или несколько) из наборов значений d, R, l из таблицы. Положение точки M нужно находить при помощи циркуля и линейки: поставив одну ножку циркуля с раствором $2d$ в некоторую точку P окружности с центром в точке O_1 радиуса R, искать другой ножкой точку Q на второй окружности (с центром O_2 радиуса R); середина отрезка $[PQ]$ определяется при помощи линейки. Число точек P, которое нужно взять для более или менее точного построения искомой траектории, равно 15; при вычерчивании кривой по построенным точкам нужно помнить о ее симметрии.

После того как вы построите кривую, попробуйте ответить на несколько вопросов.

1°. На готовом чертеже покажите «полный цикл работы» механизма (т. е. то, как перемещается шатун, когда его середина движется по кривой Уатта).

2°. Сколько у данного механизма существует положений, из которых можно начать движение более чем двумя способами?

Таблица

d	4	4	1	1	2	1	1	4	13	3	2	4
R	3	8	6	5	3	2	3	3	12	4	3	7
l	5	5	5	2	2	1	1	2	5	2	1	2

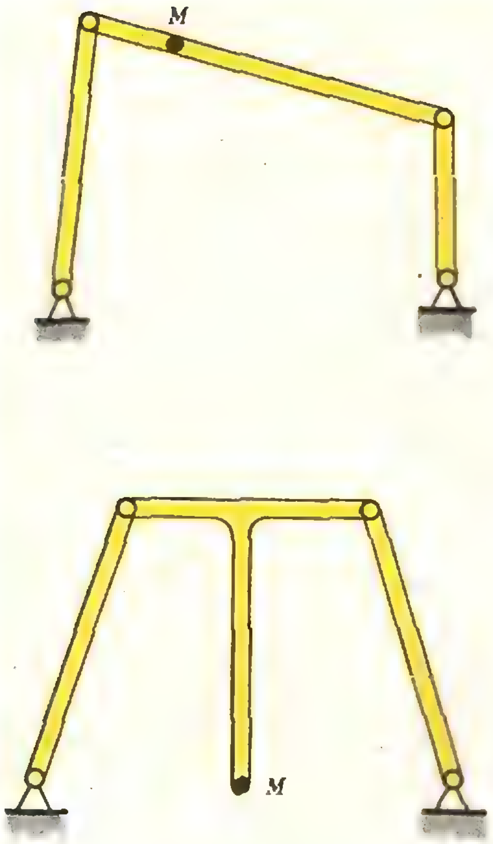


Рис. 8.

3°. Если построенную кривую нужно «повернуть» на 90°, то в каких точках O_1 и O_2 плоскости мы должны закрепить механизм?

4°. Прикиньте «на глаз» на чертеже, какой вид будет иметь кривая Уатта, если $3|MA_1| = |MA_2|$.

5°. Какой участок построенной кривой точка M проходит быстрее (медленнее) всего? Как это можно доказать?

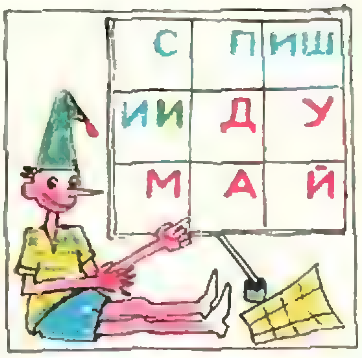
3. Данное задание может стать началом (мы надеемся, что так и будет) *настоящего математического исследования* (теоретического). Вот его возможная программа:

а) найти уравнение кривой Уатта (в декартовых и полярных координатах);

б) определить все возможные типы кривых Уатта в симметрическом случае. Под типом кривой мы понимаем ее форму. Оказывается, что различных траекторий существует только 12 (соответствующие им значения параметров отражены в таблице).

в) какие типы кривых можно получить при помощи механизмов, показанных на рисунке 8?

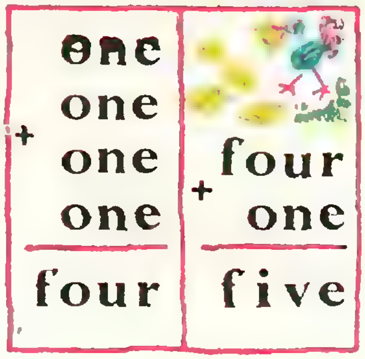
Спиши и думай



Каждая буква здесь обозначает определенную цифру. Суммы чисел по любым вертикалям, горизонталям и диагоналям квадрата одинаковы. Восстановите запись чисел в клетках квадрата.

Л. Мочалов

Ребус



one
+ one
one
one
four

four
+ one
five

В двух примерах на сложение одинаковые цифры были заменены одинаковыми буквами, то, что получилось, изображено на рисунке. Попробуйте расшифровать примеры.

В. Акулич,
И. Акулич

Лемниската Бернулли

На первой и четвертой страницах обложки изображены похожие кривые. На четвертой — *лемнискатоиды*, или *кривые Уатта* (о них рассказывает статья В. Вавилова в этом номере — с. 20). На первой — *лемниската Бернулли* *). При определенном соотношении параметров, задающих лемнискатоиду ($l = d = R\sqrt{2}$ в обозначениях статьи Вавилова), она распадается на лемнискату Бернулли и окружность.

Лемниската Бернулли — замечательная кривая, привлекавшая внимание многих математиков. Определить ее можно по-разному.

Например, *лемниската* Бернулли является множеством точек на плоскости, произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек F_1, F_2 равно $\left(\frac{|F_1F_2|}{2}\right)^2$.

На первой странице обложки нарисована также знакомая вам гипербола, точнее, равносторонняя гипербола, асимптоты которой перпендикулярны). Если проделать преобразование инверсии (см. «Квант», 1971, № 8, с. 23) с центром в центре симметрии гиперболы относительно касающейся ее окружности, то гипербола перейдет в лемнискату.

Получить лемнискату с помощью этой же гиперболы можно и по-другому. Построим все окружности, проходящие через центр симметрии гиперболы, с центрами на этой гиперболе. Кривая, касающаяся всех этих окружностей, и есть лемниската (именно это построение и приведено на обложке).

Вот еще один способ построения лемнискаты. В два квадрата (рис. 1) вписывается по окружности. Проводятся всевозможные секущие через центр O и образуются всевозможные хорды окружностей LM'. Перенесем эти хорды по лучам, которым они принадлежат так, чтобы каждая точка L попадала в точку O. Тогда множество точек M образует лемнискату.

Можно построить лемнискату и с помощью чертежных инструментов. Для этого проведем некоторые дополнительные построения на рисунке 1. Проведем NF параллельно OM, а также AC (где C — центр окружности) и NM перпендикулярно OM (рис. 2). Поскольку

$$|OC| = \frac{1}{2}|OF|, \text{ то и } |AC| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{1}{2}|MN|.$$

Кроме того, $|LA| = \frac{1}{2}|LM'| = \frac{1}{2} \times |OM|$. Следовательно, треугольники LAC и OMN подобны. Длина отрезка $|ON| = 2|LC|$ = постоянна. На этом основан способ построения лемнискаты, показанный на рисунке 3. Здесь используются два угольника и окружность радиуса $|QF|$. Катет одного из угольников должен содержать отрезок NF. Точка M принадлежит лемнискате.

Постарайтесь доказать, что все описанные способы построения дают одну и ту же кривую.

В. Березин

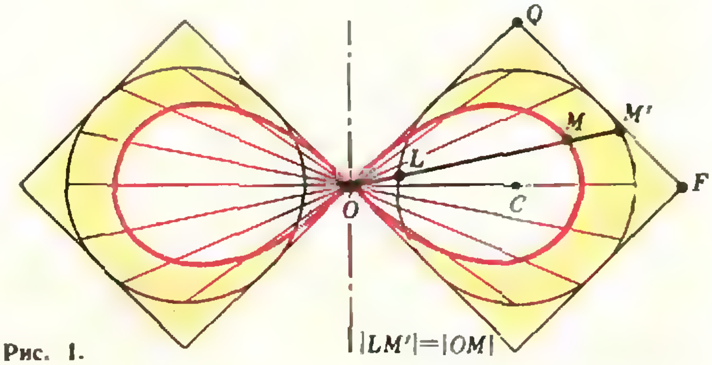


Рис. 1.

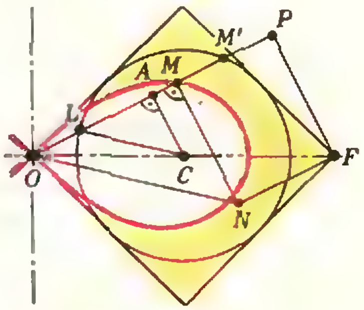


Рис. 2.

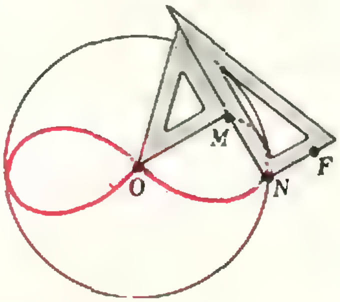


Рис. 3.

---

*) Речь идет о Якобе Бернулли (1654—1705), выдающемся ученом-математике, авторе работ, относящихся, главным образом, к математическому анализу, геометрии и теории вероятностей. Семья Бернулли дала миру много выдающихся ученых, в том числе математиков. В истории науки ученых из этой семьи с одинаковыми именами называют как королей — *Даниил I*, *Иоганн II*, … . «Лемниската» — греческое слово; лемнискатой в античной Греции называли ленточку, при помощи которой к голове победителя прикрепляли венок.

задачник Кванта

Задачи

М421 — М425; Ф433 — Ф437

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 марта 1977 года по адресу: 113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М421, М423» или «Ф434». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М421*. При каких натуральных m и n ($m<n$) можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в черный цвет так, чтобы любой прямоугольник размера $m\times n$ содержал ровно одну черную клетку? Начните с более простой задачи: рассмотрите случаи $m=2$ и $n=3$, 4, 5 (рис. 1).

С. Охитин, ученик 10 класса

М422. Разбейте произвольный треугольник на семь равнобедренных треугольников, из которых три конгруэнтны между собой.

А. Хабелашвили

М423*. Докажите, что для любых действительных x, y и z выполнено неравенство

$$(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)\leqslant$$
$$\leqslant(x+y-z)^2(x+z-y)^2(y+z-x)^2.$$

Р. Шейнцвит

М424. Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной около противоположной грани, и перпендикулярная противоположной грани. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.

А. Ягубьянц

М425*. Существует ли такое натуральное N, что каждое рациональное число между нулем и единицей представляется в виде суммы N чисел, обратных натуральным?

Ф433. Две одинаковые плоско-выпуклые линзы с фокусным расстоянием $F=20$ *см* каждая расположены на расстоянии 30 *см* друг от друга. Оптические оси линз совпадают, линзы обращены друг к другу плоскими сторонами. Где будет находиться изображение источника, находящегося на расстоянии 40 *см* от левой линзы, если пространство между линзами заполнить стеклом с показателем преломления таким же, как у линз?

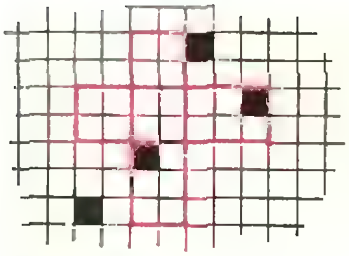


Рис. 1.

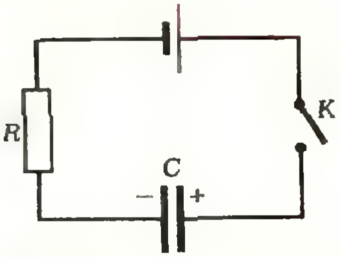


Рис. 2.

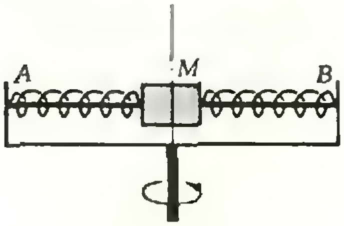


Рис. 3.

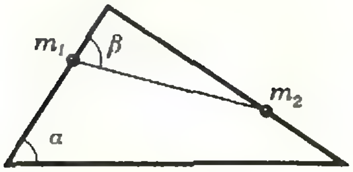


Рис. 4.

Ф434. Какое количество теплоты выделится на сопротивлении R при установлении равновесия после замыкания ключа K (рис. 2), если конденсатор был предварительно заряжен до разности потенциалов $2U$? Э. д. с. источника U, емкость конденсатора C. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало́.

Ф435. В установке, показанной на рисунке 3, муфта M прикреплена к двум одинаковым пружинам, коэффициенты жесткости которых $k=10$ *н/м*. Муфта без трения может скользить по горизонтальному стержню AB. Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=4{,}4$ *рад/сек* вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти период малых колебаний муфты. Масса муфты $m=0{,}2$ *кг*.

При каком значении ω колебаний муфты не будет?

Ф436. Плотность газа, состоящего из смеси гелия и аргона, при давлении 152 *кн/м*^{2} и температуре 27°С равна 2,00 *кг/м*^{3}. Сколько атомов гелия содержится в 1 *см*^{3} газовой смеси?

Ф437. Проволочная рамка, имеющая форму прямоугольного треугольника с углом $\alpha=30°$, помещена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке 4. По проволоке могут без трения скользить связанные друг с другом нитью два грузика с массами $m_1=0{,}1$ *кг* и $m_2=0{,}3$ *кг*. Чему равно натяжение нити и угол β в положении равновесия грузиков? Является ли это равновесие устойчивым?

Решения задач

М379, М381 — М384; Ф387 — Ф392

М379. *На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовем промокашку подходящей для данного куска, если ее можно разместить внутри этого куска так, что она закроет кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для произвольных двух данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется одна промокашка, подходящая для всех кусков.*

Рассмотрим один кусок бумаги. Пусть p и P — промокашки наименьшего и наибольшего радиусов, подходящие для данного куска.

Докажем, что круглая промокашка Π любого промежуточного радиуса — также подходящая для данного куска. (Заметим, что для промокашек другой формы, — например, для подобных прямоугольников — аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.) Пусть круги p и P расположены на куске так, что каждый из них закрывает кляксу. Тогда круг Π можно расположить так, что он будет содержаться в объединении и содержать пересечение p и P (рис. 1):

$$\textit{клякса} \subset (p \cap P) \subset \Pi \subset (p \cup P) \subset \textit{кусок}.$$

Докажем теперь утверждение задачи. Поставим в соответствие каждому из данных n кусков отрезок $[r, R]$ числовой оси, где r и R — радиусы наименьшей и наибольшей подходящей для него промокашки. По условию, любые два отрезка имеют общую точку.

Пусть ρ — наибольший из левых концов этих отрезков; это число ρ, очевидно, не меньше левого конца любого от-

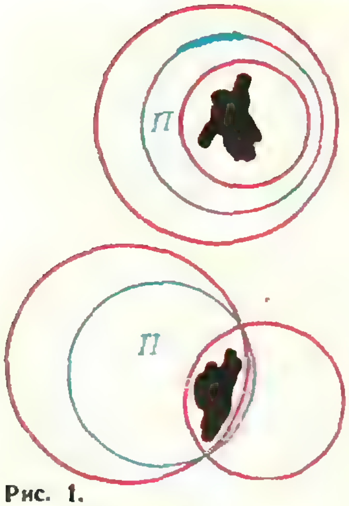


Рис. 1.

резка и не больше наименьшего правого конца, то есть ρ принадлежит всем n отрезкам.

Число ρ — радиус некоторой из наших промокашек. По доказанному, она будет подходящей для всех кусков.

В заключительной части решения мы использовали одномерный вариант **теоремы Хелли** для выпуклых фигур на плоскости: *если каждые три из n выпуклых фигур имеют общую точку, то и все n фигур имеют общую точку* — для выпуклых фигур на прямой, т. е. для отрезков, достаточно потребовать, чтобы любые два имели общую точку.

Н. Васильев

◆

Решение задачи М380 будет опубликовано в следующем номере нашего журнала.

◆

М381. *6 активистов класса образовали 30 различных комиссий. Каждые две комиссии отличаются составом, но обязательно «пересекаются», то есть имеют общего члена. Докажите, что можно образовать еще одну комиссию, пересекающуюся с каждой из этих 30 комиссий.*

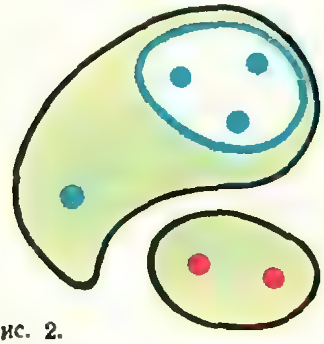


Рис. 2.

Нетрудно показать, что у множества из n элементов ровно 2^n подмножеств. В частности, из шести активистов в принципе можно было бы составить 64 комиссии (включая сюда и «пустую» комиссию).

Разобьем все возможные 64 подмножества множества активистов на пары; в каждой паре — два непересекающихся подмножества A и $\overline{A}$, объединение которых есть все это множество (рис. 2). Поскольку пар 32, а комиссий — 30, то в какой-нибудь паре оба подмножества не пусты и не являются комиссиями. Рассмотрим одно из этих подмножеств A. Если оно пересекается со всеми 30 комиссиями, то задача решена. Если же оно с какой-нибудь комиссией B не пересекается, то второе подмножество из выбранной пары $\overline{A}$ содержит эту комиссию B, а раз B пересекается со всеми остальными комиссиями, то рассматриваемое подмножество $\overline{A} \supset B$ — тем более.

В заключение отметим, что больше, чем 32 комиссии, с соблюдением условий задачи составить вообще нельзя (докажите!).

С. Фомин

◆

М382. *Дан полином $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами и натуральные числа k и p. Докажите, что если ни одно из чисел $f(k)$, $f(k+1)$, $\ldots$, $f(k+p)$ не делится на $p+1$, то уравнение $f(x) = 0$ не имеет рациональных корней.*

Прежде всего заметим, что если уравнение $f(x) = 0$ имеет рациональный корень, то этот корень — целое число. В самом деле, пусть p/q, где p и q взаимно просты, — корень нашего уравнения. Тогда $p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_nq^n = 0$, откуда следует, что p не взаимно просто с q.

Предположим теперь, что у уравнения $f(x)$ есть целый корень $x_0 = m$, то есть $f(m) = 0$. Тогда по теореме Безу мы можем представить полином $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x - m)\,g(x), \qquad (*)$$

где $g(x)$ — полином с целыми коэффициентами.

Подставив в соотношение $(*)$ вместо x значения k, $k+1$, $\ldots$, $k+p$, получим

$$f(k) = (k - m)\,g(k),$$
$$f(k+1) = (k+1-m)\,g(k+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(k+p) = (k+p-m)\,g(k+p).$$

Поскольку одно из $p+1$ последовательных целых чисел $k-m$, $k+1-m$, $k+2-m$, $\ldots$, $k+p-m$ делится на $p+1$, то и одно из чисел $f(k)$, $f(k+1)$, $\ldots$, $f(k+p)$ на $p+1$ делится. Из этого следует, что полином, о котором говорится в задаче, не имеет целых корней.

Т. Райков

М383. *Пусть a и b — два натуральных числа. Докажите, что если ab четно, то найдутся такие натуральные числа c и d, что $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, а если ab нечетно, то таких c и d найти нельзя.*

1). Пусть ab четно.

а) *Если a и b разной четности* (одно — четно, другое — нет), то $a^2 + b^2$ нечетно: $a^2 + b^2 = 2N + 1$. Положим тогда $c = N$, $d = N + 1$. Получим

$$d^2 - c^2 = (d + c)(d - c) = 2N + 1 = a^2 + b^2.$$

б) Если a и b оба четны, то $a^2 + b^2 = 4N$. В этом случае положим $d = N + 1$, $c = N - 1$. Тогда

$$d^2 - c^2 = (d + c)(d - c) = 2N \cdot 2 = a^2 + b^2.$$

2). Пусть ab нечетно: $ab = 2n + 1$. Тогда числа a и b — оба нечетные, а сумма их четна: $a + b = 2m$. Имеем:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4m^2 - 4n - 2,$$

то есть $a^2 + b^2$ делится на 2, но не делится на 4. Поэтому $a^2 + b^2 \neq d^2 - c^2$ ни при каких натуральных c и d: если c и d одинаковой четности (оба четны или оба нечетны), то $d^2 - c^2 = (d + c)(d - c)$ *делится на 4*, а если d и c разной четности, то $d^2 - c^2$ не делится на 2.

М. Гервер

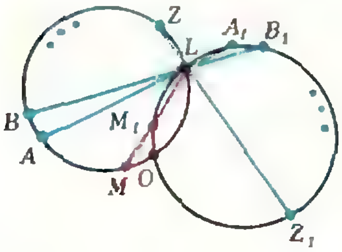


Рис. 3.

◆

М384. *Два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ имеют общую вершину O. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку.*

Наше решение покажет, что *аналогичное* утверждение верно и для правильных n-угольников с общей вершиной, и вообще для подобных друг другу вписанных n-угольников $OAB \ldots Z$ и $OA_1B_1 \ldots Z_1$.

Опишем вокруг обоих n-угольников окружности. Пусть они пересекаются в точках O и L (рис. 3). *Если прямая l*, проходящая через L, равномерно вращается вокруг L с угловой скоростью ω, то вторые точки пересечения M и M_1 прямой l с той и другой окружностью движутся каждая по своей окружности равномерно с угловой скоростью 2ω (градусные величины дуг $\overset{\frown}{OM}$ и $\overset{\frown}{OM_1}$ вдвое больше градусной величины $\widehat{MLO} = \widehat{M_1LO}$). Таким образом, точка M_1 проходит вершины O, A_1, B_1, …, Z_1 многоугольника $OA_1B_1 \ldots Z_1$ *как раз* в те моменты времени, когда M проходит, соответственно, вершины O, A, B, …, Z многоугольника $OAB \ldots Z$. Отсюда ясно, что все прямые AA_1, BB_1, …, ZZ_1 пересекаются в одной точке — точке L, второй точке пересечения окружностей, описанных вокруг рассматриваемых подобных *многоугольников с общей* вершиной (рис. 4).

Н. Васильев

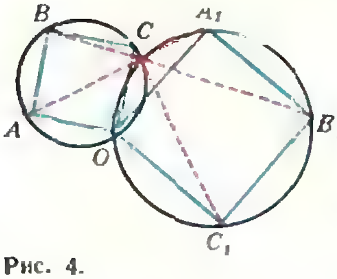


Рис. 4.

◆

Ф387. *Два велосипедиста в цирке едут с одинаковыми линейными скоростями v по окружностям радиусов R_1 и R_2, центры которых находятся на расстоянии l друг от друга ($l < R_1 - R_2$). Один из велосипедистов движется по часовой стрелке, другой — против. Найти относительные скорости велосипедистов (в системе координат, связанной с одним из них) в тот момент, когда они оба находятся на линии, проходящей через центры окружностей, в точках: а) A_1 и A_2; б) A_1 и B_2; в) B_1 и B_2; г) B_1 и A_2 (рис. 5).*

В условии задачи дана скорость каждого велосипедиста относительно неподвижной системы координат (связанной, например, с ареной цирка). Такую скорость принято называть *абсолютной скоростью.*

По условию требуется найти *относительные скорости* велосипедистов. *Относительной скоростью,* например, второго велосипедиста называется его скорость по отношению к движущейся системе координат, связанной с первым велосипедистом. Слово «связанной» здесь означает, что первый велосипедист в этой системе неподвижен. Выберем в качестве такой системы систему с началом координат в центре O_1 окружности, по которой едет первый велосипедист, вращающуюся против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{R_1}$.

Удобство такого выбора состоит в том, что в данном случае легко определить движение любой точки вращающейся системы относительно неподвижной. Это движение принято называть переносным движением, а скорость любой точки движущейся системы относительно неподвижной *называют переносной скоростью.*

В нашем случае переносное движение есть движение по окружности с угловой скоростью ω. Следовательно, перенос-

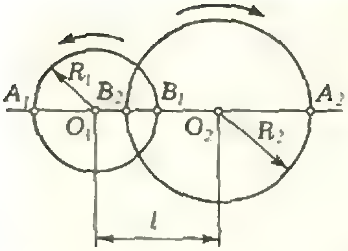


Рис. 5.

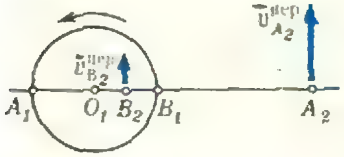


Рис. 6.

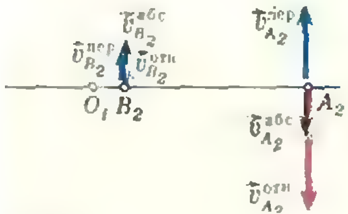

$\vec{v}^{\text{абс}}_{B_2}$
$\vec{v}^{\text{пер}}_{B_2}$
$\vec{v}^{\text{отн}}_{B_2}$
$\vec{v}^{\text{пер}}_{A_2}$
O_1
B_2
A_2
$\vec{v}^{\text{абс}}_{A_2}$
$\vec{v}^{\text{отн}}_{A_2}$

Рис. 7.

ная скорость второго велосипедиста в точке A_2 равна

$$|\vec{v}^{\text{пер}}_{A_2}| = \omega \cdot O_1A_2 = \frac{v}{R_1}(l + R_2),$$

а в точке B_2 —

$$|\vec{v}^{\text{пер}}_{B_2}| = \omega \cdot O_1B_2 = \frac{v}{R_1}(l - R_2).$$

В обеих точках переносные скорости перпендикулярны к прямой A_1A_2 и направлены в одну сторону (на рисунке 6 — вверх).

Абсолютная, относительная и переносная скорости точки связаны соотношением

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}},$$

то есть абсолютная скорость всегда равна векторной (геометрической) сумме относительной и переносной скоростей. Следовательно,

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{абс}} - \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Найдем относительную скорость второго велосипедиста, когда он находится в точке A_2. В этом случае абсолютная скорость равна по модулю $|\vec{v}^{\text{абс}}_{A_2}| = v$ и направлена вниз (рис. 7), а переносная скорость по модулю равна $\left|\vec{v}^{\text{пер}}_{A_2}\right| = \frac{v}{R_1}(l + R_2)$ и направлена вверх. Поэтому

$$\left|\vec{v}^{\text{отн}}_{A_2}\right| = v + \frac{v}{R_1}(l + R_2) = v\,\frac{R_1 + R_2 + l}{R_1}.$$

Направлена эта скорость вниз. Полученный результат не зависит от того, в какой точке в данный момент находится первый велосипедист.

В тот момент, когда второй велосипедист находится в точке B_2, $\left|\vec{v}^{\text{абс}}_{B_2}\right| = v$, $\left|\vec{v}^{\text{пер}}_{B_2}\right| = \frac{v}{R_1}(l - R_2)$ и обе скорости направлены одинаково (вверх на рисунке 7). Следовательно, в этот момент скорость второго велосипедиста относительно первого равна по модулю

$$\left|\vec{v}^{\text{отн}}_{B_2}\right| = v - \frac{v}{R_1}(l - R_2) = v\,\frac{R_1 + R_2 - l}{R_1}$$

и направлена вверх. Этот результат также не зависит от того, в какой точке в данный момент находится первый велосипедист.

Совершенно аналогичным образом определяется скорость первого велосипедиста в системе координат, связанной со вторым. В точке A_1 она направлена вниз и равна по модулю

$$\left|\vec{v}^{\text{отн}}_{A_1}\right| = v\,\frac{l + R_1 + R_2}{R_2},$$

а в точке B_1 относительная скорость направлена вверх и по модулю равна

$$\left|\vec{v}^{\text{отн}}_{B_1}\right| = v\,\frac{R_1 + R_2 - l}{R_2}.$$

◆

Ф388. *В расположенном вертикально цилиндре переменного сечения (рис. 8) между поршнями находится* ν *молей воздуха. Массы поршней* m_1 *и* m_2*, их площади* S_1 *и* S_2 *соответственно. Поршни соединены стержнем длины* l *и находятся на одинаковых расстояниях от стыка ча-*

Рассмотрим систему, состоящую из поршней, воздуха, заключенного между ними, и стержня. Внешние вертикальные силы, действующие на эту систему, суть следующие: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$ ($|\vec{F}_{\text{т}}| = (m_1 + m_2)|\vec{g}|$), сила атмосферного давления $\vec{F}_{\text{а}} = \vec{F}_{\text{а}1} + \vec{F}_{\text{а}2}$ ($|\vec{F}_{\text{а}}| = p_{\text{а}}(S_1 - S_2)$) и сила реакции $\vec{F}$ горизонтального участка стенок цилиндра (см. рис. 8). Силой тяжести воздуха можно пренебречь. По третьему *стей цилиндра с различными диаметрами. На сколько сместятся поршни при повышении температуры в цилиндре на Δt градусов?*

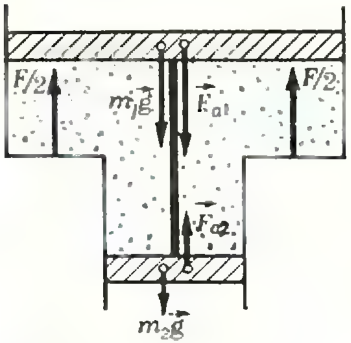


Рис. 8.

закону Ньютона сила F равна по модулю силе давления воздуха на горизонтальный участок цилиндра: $|\vec{F}| = p(S_1 - S_2)$, где p — давление воздуха между поршнями.

При механическом равновесии системы сумма проекций всех внешних сил на вертикальную ось равна нулю:

$$p(S_1 - S_2) - p_a(S_1 - S_2) - (m_1 + m_2)|\vec{g}| = 0.$$

(Внутренние силы — силы давления воздуха на поршни, сила упругости стержня — на равновесие влияния не оказывают.) Из условия равновесия следует, что давление воздуха в системе

$$p = p_a + \frac{(m_1 + m_2)|\vec{g}|}{(S_1 - S_2)}$$

и не зависит от температуры. Следовательно, повышение температуры воздуха на Δt градусов происходит изобарно, и состояния воздуха до и после нагревания можно описать уравнениями

$$p\left(\frac{l}{2}S_1 + \frac{l}{2}S_2\right) = nRT,$$

$$p\left[\left(\frac{l}{2} + x\right)S_1 + \left(\frac{l}{2} - x\right)S_2\right] = nR(T + \Delta t).$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная, T — начальная температура и x — смещение поршней. Вычитая первое уравнение из второго, найдем смещение поршней:

$$x = \frac{nR\Delta t}{p_a(S_1 - S_2) + (m_1 + m_2)|\vec{g}|}.$$

Б. Буховцев

◆

Ф389. *Найти сопротивление между точками A и B и точками A и C бесконечной цепочки, показанной на рисунке 9. Сопротивление проволочек между узлами схемы 1 ом.*

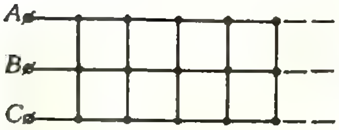


Рис. 9.

Для решения задачи воспользуемся тем обстоятельством, что сопротивление любой бесконечной цепи не меняется, если к ней подсоединить звено, повторением которого строится вся цепочка. Им в нашем случае является звено, состоящее из пяти сопротивлений, выделенных на рисунке 10. Поэтому сопротивления цепей, показанных на рисунках 10, *а* и *б*, одинаковы:

$$R_{AB} = R_{A'B'},\ R_{BC} = R_{B'C'},\ R_{AC} = R_{A'C'}.$$

Любую цепь, состоящую из сопротивлений и имеющую два вывода, всегда можно заменить одним эквивалентным сопротивлением. Точно так же составленную из сопротивлений цепь с тремя выводами можно заменить эквивалентной цепью, состоящей из трех сопротивлений, соединенных звездой (рис. 11, *а*) или треугольником (рис. 11, *б*). Заменим исходную цепь эквивалентной звездой. Так как исходная цепь симметрична, то $R_{AB} = R_{BC}$, то есть (см. рис. 11, *а*)

$$R_1 + R_3 = R_1 + R_2, \quad \text{или} \quad R_2 = R_3.$$

Итак, в эквивалентной схеме звезды два сопротивления одинаковы. Обозначим их через R. Тогда схемы, показанные

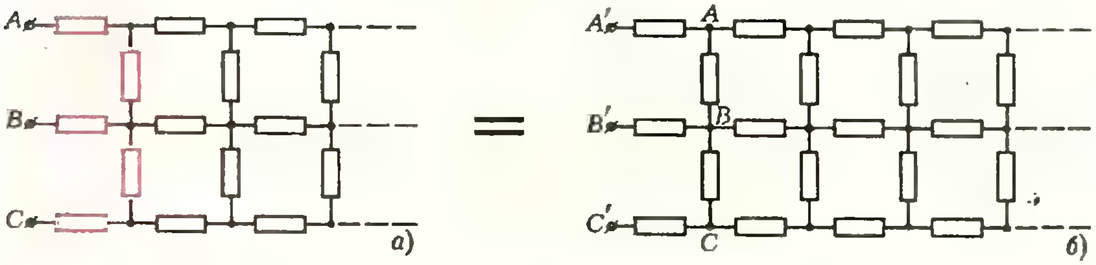


Рис. 10.

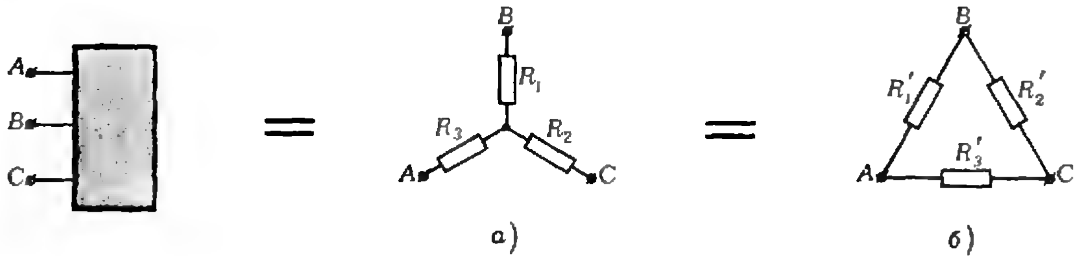

A
B
C
B
R_1
R_3
R_2
A
C
a)
B
R_1'
R_2'
R_3'
A
C
б)

Рис. 11.

на рисунке 10, можно заменить эквивалентными схемами, показанными на рисунке 12. При этом (рис. 12, *а*)

$$R_{AB} = R_{BC} = R + R_1 \text{ и } R_{AC} = 2R.$$

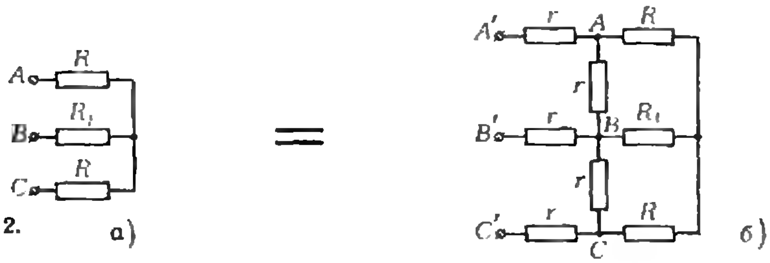

A
R
B
R_1
C
R
a)
A'
r
A
R
r
B'
r
B
R_1
r
C'
r
R
C
б)

Рис. 12.

Сопротивления $R_{A'B'}$ и $R_{A'C'}$ найдем, последовательно заменяя одним сопротивлением несколько сопротивлений, включенных параллельно или последовательно. Для участка $A'B'$ (рис. 13)

$$R_{A'B'} = 2r + R^{***} = 2r + \frac{rR^{**}}{r + R^{**}} =$$

$$= 2r + \frac{r(R + R^*)}{r + R + R^*} = 2r + r\frac{R^2 + 2R_1R + R_1r + Rr}{(r + R)^2 + 2(r + R)R_1}.$$

При вычислении сопротивления $R_{A'C'}$ учтем, что точки *O* и *E* (рис. 14), благодаря симметрии цепи, имеют одинаковый потенциал, и поэтому сопротивление R_1 можно просто исключить. В результате получим

$$R_{A'C'} = 2r + R' = 2r + \frac{2rR}{r + R}.$$

Так как $R_{AC} = R_{A'C'}$,

$$2R = 2r + \frac{2rR}{r + R},$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}r(1 + \sqrt{5}).$$

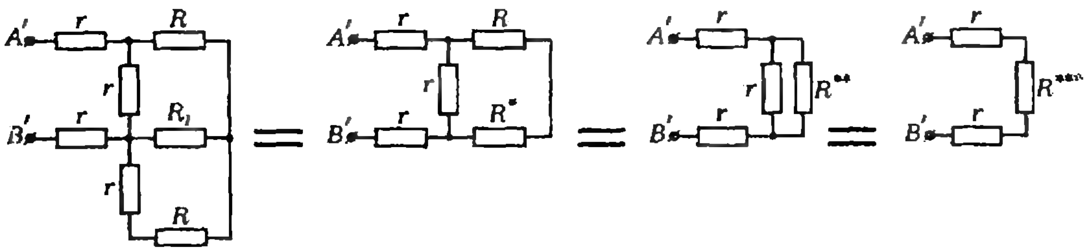

A'
r
R
r
B'
r
R_1
r
R
A'
r
R
r
B'
r
R^*
A'
r
r
R^{**}
B'
r
A'
r
R^{***}
B'
r

Рис. 13.

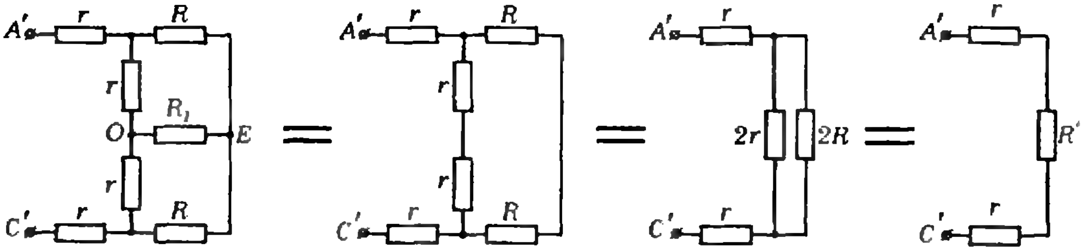


Рис. 14.

Теперь приравняем R_{AB} и $R_{A'B'}$:

$$R+R_1=2r+r\frac{R^2+2R_1R+R_1r+Rr}{(r+R)^2+2(r+R)R_1}.$$

В результате получим квадратное уравнение

$$aR_1^2+bR_1+c=0,$$

где

$$a=2(R+r)=(3+\sqrt{5})\,r,$$

$$b=3R^2-4r^2-2Rr=\frac{1}{2}r^2(\sqrt{5}-1),$$

$$c=(R+r)(R^2-2r^2-2Rr)=-\frac{1}{4}r^3(3+\sqrt{5})^2.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем R_1:

$$R_1=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-(\sqrt{5}-1)\pm\sqrt{294+126\sqrt{5}}}{4\,(3+\sqrt{5})}\,r.$$

Поскольку сопротивление не может быть отрицательным, то

$$R_1=\frac{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{294+126\sqrt{5}}}{4\,(3+\sqrt{5})}\,r\approx 1{,}1r.$$

Тогда окончательно

$$R_{AB}=R_{BC}=R+R_1\approx 2{,}7r=2{,}7\ ом,$$

$$R_{AC}=2R=(1+\sqrt{5})\,r\approx 3{,}2\ ом.$$

И. Слободецкий

◆

Ф390. *Два запаянных сообщающихся капиллярных сосуда цилиндрической формы разных диаметров частично заполнены водой (ртутью) (рис. 15). Воздух из сосудов откачан, так что над жидкостью имеются только ее пары. Как распределится количество жидкости в сосудах: а) на земле? б) в невесомости?*

Пусть радиус левого капиллярного сосуда равен r_1, правого — r_2. При равновесии на земле — случай а) — давления у правого и левого концов горизонтальной трубки, соединяющей сосуды, должны быть одинаковыми. Давление у дна каждого сосуда складывается из гидростатического давления $\rho|\vec{g}|h$ (h — высота столба жидкости, ρ — ее плотность), давления $p_н$ насыщенных паров и дополнительного (лапласовского) давления $p_л$, создаваемого силами поверхностного натяжения жидкости. В случае полного смачивания (вода) или полного несмачивания (ртуть) жидкости, находящейся в капилляре круглого сечения радиуса r, $p_л=\frac{2\sigma}{r}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Таким образом, в случае а) для воды, где силы поверхностного натяжения направлены вверх, при равновесии

$$\rho_в|\vec{g}|h_{1_в}+p_{н_в}-\frac{2\sigma_в}{r_1}=\rho_в|\vec{g}|h_{2_в}+p_{н_в}-\frac{2\sigma_в}{r_2},$$

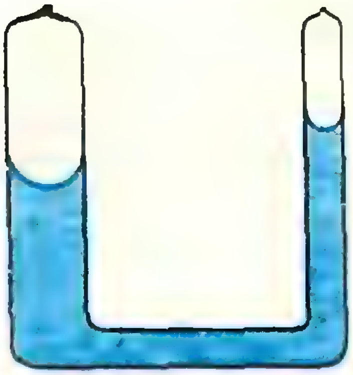


Рис. 15.

то есть разность уровней воды

$$h_{2_{\text{в}}} - h_{1_{\text{в}}} = \frac{2\sigma_{\text{в}}(r_1 - r_2)}{\rho_{\text{в}}|\vec{g}|\, r_1 r_2}.$$

Аналогично для ртути (здесь силы поверхностного натяжения направлены вниз) —

$$\rho_{\text{р}}|\vec{g}|h_{1_{\text{р}}} + p_{\text{н}_{\text{р}}} + \frac{2\sigma_{\text{р}}}{r_1} = \rho_{\text{р}}|\vec{g}|h_{2_{\text{р}}} + p_{\text{н}_{\text{р}}} + \frac{2\sigma_{\text{р}}}{r_2},$$

откуда

$$h_{1_{\text{р}}} - h_{2_{\text{р}}} = \frac{2\sigma_{\text{р}}(r_1 - r_2)}{\rho_{\text{р}}|\vec{g}|\, r_1 r_2}.$$

При расчетах предполагалось, что высота сосудов больше вычисленной разности уровней. В противном случае может, например, оказаться, что один из сосудов будет целиком заполнен жидкостью или другой сосуд будет совсем свободен от жидкости.

В случае б) — в состоянии невесомости — гидростатическое давление, обусловленное силой тяжести, отсутствует. Силы поверхностного натяжения заставят смачивающую жидкость покрыть внутреннюю поверхность обоих сосудов и соединяющей трубки. Сосуд меньшего диаметра при этом может быть заполнен целиком. Наоборот, несмачивающая жидкость в конце концов соберется в шарообразную каплю в большом сосуде. При достаточном количестве жидкости эта капля (разумеется, сплющенная) может заполнить сосуд большего диаметра целиком.

◆

Ф391. *Гладкий Г-образный стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O (рис. 16). Маленькая муфта массы m прикреплена к стержню в точке A с помощью пружины жесткостью k. Длина пружины в 1.2 раза больше ее длины в нерастянутом состоянии. С какой угловой скоростью вращается стержень?*

Во время вращения стержня в горизонтальной плоскости на муфту действуют сила упругости пружины $\vec{F}$ и сила реакции стержня $\vec{N}$ (см. рис. 16). Если l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии, а l — ее длина при вращении, то

$$|\vec{F}| = k(l - l_0) = k(1{,}2\ l_0 - l_0) = 0{,}2\ kl_0. \qquad (1)$$

Поскольку муфта скреплена со стержнем (с помощью пружины), при вращении она будет двигаться по окружности, радиус которой $r = l/\sin\alpha$. Обозначим угловую скорость вращения стержня через ω. Вращение равномерное, поэтому сумма проекций всех сил на направление касательной к окружности должна быть равна нулю:

$$|\vec{N}|\sin\alpha - |\vec{F}|\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

а сумма проекций сил на направление радиуса равна

$$|\vec{N}|\cos\alpha + |\vec{F}|\sin\alpha = m\omega^2 r = m\omega^2\frac{l}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

где $\omega^2 r$ — модуль центростремительного ускорения муфты.

Решая систему уравнений (2) и (3), найдем

$$|\vec{F}| = m\omega^2 l,$$

или, с учетом равенства (1).

$$0{,}2\ kl_0 = m\omega^2 \cdot 1{,}2 l_0.$$

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{k}{6m}, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{6m}}.$$

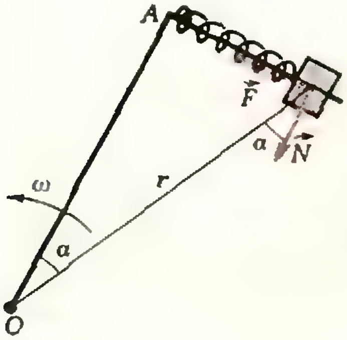


Рис. 16.

◆

Ф392. *Доска массы M расположена горизонтально и опирается на два вращающихся цилиндра (рис. 17). Расстояние между осями цилиндров*

В горизонтальном направлении на доску действуют только силы сухого трения со стороны вращающихся цилиндров. Каждая сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости доски, и ее модуль пропорционален модулю силы нормального давления (а значит, и реакции

l. Коэффициент трения между доской и цилиндрами k. Доказать, что если доску, находящуюся в положении равновесия, слегка толкнуть в горизонтальном направлении, она будет совершать гармонические колебания, и найти период этих колебаний. Каким будет движение доски, если изменить направление вращения цилиндров на противоположное?

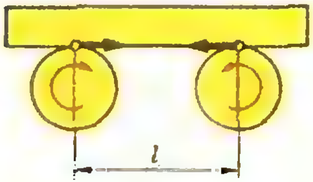


Рис. 17.

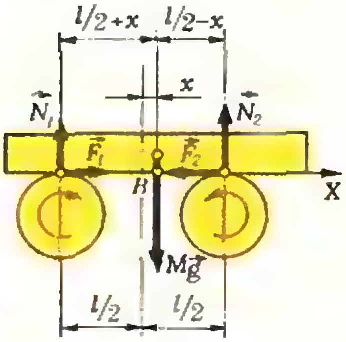


Рис. 18.

опоры). При вращении цилиндров в направлении, указанном в условии, сила, приложенная со стороны левого цилиндра, направлена вправо, а со стороны правого цилиндра — влево (см. рис. 17). Если доска находится в равновесии, то силы трения равны по модулю. Следовательно, равны и силы нормальной реакции каждого из цилиндров. Это означает, что центр тяжести доски при равновесии находится между цилиндрами на одинаковом расстоянии от каждого из них.

Пусть теперь доска смещена от своего положения равновесия на расстояние $x < l/2$, например, вправо (рис. 18). В этом положении силы нормального давления $\vec N_1$ и $\vec N_2$ уже не будут равны друг другу, а потому не будут компенсировать друг друга и силы сухого трения $\vec F_1$ и $\vec F_2$. Результирующая сила $\vec F_1 + \vec F_2$ сообщит доске горизонтальное ускорение. Найдем его, вычислив предварительно $|\vec N_1|$ и $|\vec N_2|$ из условия отсутствия вертикального ускорения:

$$|\vec N_1| + |\vec N_2| - M\,|\vec g| = 0$$

и условия равенства нулю момента внешних сил относительно оси, проходящей через точку B:

$$|\vec N_2|\left(\frac{l}{2} - x\right) - |\vec N_1|\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0.$$

Отсюда

$$|\vec N_1| = M|\vec g|\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right), \quad |\vec N_2| = M|\vec g|\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right).$$

Следовательно, проекция F результирующей силы на ось X, направленную вправо, равна

$$F = |\vec F_1| - |\vec F_2| = k|\vec N_1| - k|\vec N_2| = -\frac{2kM|\vec g|}{l}\,x.$$

Мы видим, что результирующая сила пропорциональна по модулю смещению x доски от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению, то есть к положению равновесия. Таким образом, эта сила является возвращающей силой, аналогичной той, которая возникает при колебаниях маятника. Следовательно, доска совершает гармонические колебания.

Период колебаний можно найти, записав уравнение движения доски. Для проекций на ось X

$$Ma_x = -\frac{2kM|\vec g|}{l}\,x, \quad \text{или} \quad a_x = -\frac{2k|\vec g|}{l}\,x.$$

Модуль коэффициента пропорциональности между смещением и ускорением представляет собой квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{2k|\vec g|}{l}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2k|\vec g|}}.$$

При изменении направления вращения цилиндров на противоположное результирующая горизонтальная сила также изменит свое направление. При смещении доски эта сила уже не будет возвращать ее к положению равновесия, а, наоборот, будет уводить тем больше, чем больше первоначальное смещение. В результате доска соскочит с цилиндров.

Рассмотренный прибор впервые был предложен профессором Н. Е. Жуковским и носит его имя.

Б. Буховцев

А. Землянов, Б. Ивлев

17 задач по анализу

(пределы, непрерывность, монотонность, производная)

Приводимые ниже задачи адресованы девятиклассникам. Для их решения не нужно делать никаких вычислений: достаточно понимать соответствующие определения из учебника «Алгебра и начала анализа 9» и их интерпретацию на графиках функций.

§ 1. Пределы функций (п. 38)

1. На рисунках 1, *а* — *и* изображены графики функций $y = f(x)$, определенных при $x \neq 0$. Укажите:

а) в каких случаях существует предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (и чему он равен);

б) в каких случаях предела $f(x)$ при $x \to 0$ не существует (и объясните, почему).

График на рисунке 1, *в* — это бесконечнозвенная ломаная, точки излома которой имеют абсциссы $x = \pm 1/n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ (четным n соответствуют точки минимума, нечетным — точки максимума).

2. Функции $y = f(x)$, графики которых изображены на рисунках 2, *а* — *г*, определены при $x < 0$. Доопределите эти функции при $x > 0$ (достройте графики) так, чтобы для полученных функций:

а) существовал предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (всегда ли так можно сделать? если нельзя, то объясните, почему);

б) не существовало предела $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (всегда ли так можно сделать?).

Дайте не один, а, скажем, два или три разных способа достраивания графика (в тех случаях, когда требованиям задачи можно удовлетворить).

§ 2. Непрерывность функций (п. 38)

3. Нарисуйте график всюду определенной функции $y = f(x)$, которая была бы непрерывна во всех точках x, кроме: а) $x = 100$; б) $x = \pm 1$; в) $x = 1, 2, 3, 10$; г) $x = n$, где n — произвольное целое число.

4. Среди функций, графики которых изображены на рисунках 3, *а* — *г*, укажите те, которые не непрерывны (разрывны) в точке $x = x_0$ или $x = x_1$.

5. Дорисуйте (желательно несколькими способами) графики на рисунках 4, *а* — *г* так, чтобы получились графики всюду определенных и всюду непрерывных функций. Во всех ли случаях это возможно?

§ 3. Монотонность функций

6. Функция f всюду определена и убывает на всей числовой оси. Может ли при этом функция f быть:

а) всюду положительной (то есть такой, что $f(x) > 0$ при любом x)? б) всюду отрицательной? в) чётной? г) нечетной? д) периодической?

7. Укажите промежутки возрастания и убывания функций, графики которых изображены на рисунках 5, *а* — *в*.

8. Известно, что функция f убывает на промежутках: а) $[0, 1[$ и $[1, 2[$; б) $[0, 1]$ и $[1, 2[$. Можно ли утверждать, что функция f убывает:

1) на объединении этих промежутков — на полуинтервале $[0, 2[$?

2) на «подпромежутке» $[0, 1/2[$?

9. Нарисуйте график функции $y = f(x)$ так, чтобы она:

а) убывала на промежутках $]-\infty, -2]$ и $[1, 4]$ и возрастала на промежутках $[-2, 1]$ и $[4, +\infty[$;

б) возрастала на каждом промежутке вида $[n, n+1]$, где n — целое, но не возрастала ни на каком промежутке длины больше единицы;

в) возрастала на множестве всех целых значений x и убывала на множестве всех остальных чисел.

Можно ли при этом «сделать» функцию f всюду отрицательной?

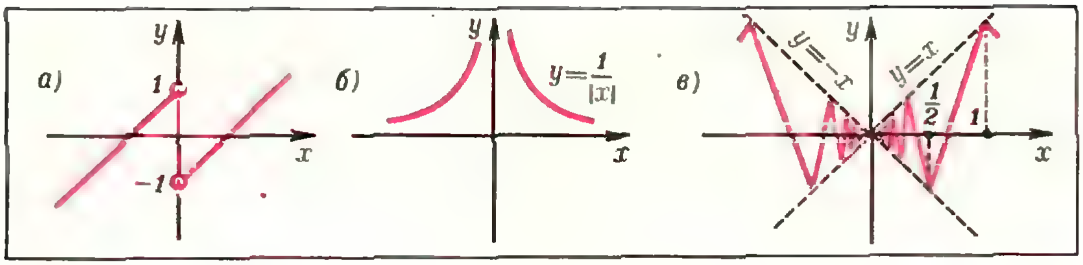

а)
y
1
−1
x
б)
y
$y=\frac{1}{|x|}$
x
в)
y
$y=-x$
$y=x$
$\frac{1}{2}$
1
x

Рис. 1.

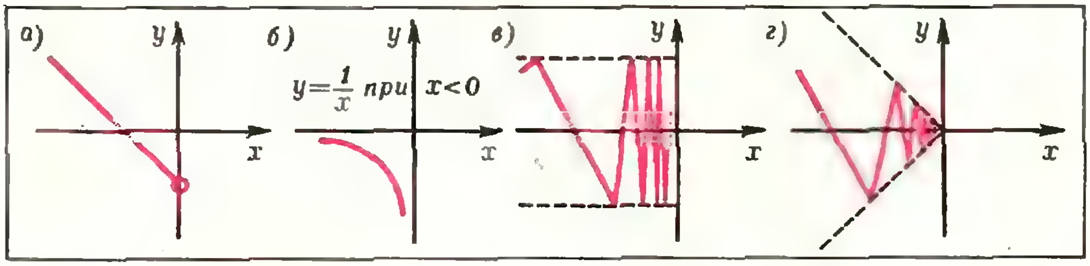

а)
y
x
б)
y
$y=\frac{1}{x}$ при $x<0$
x
в)
y
x
г)
y
x

Рис. 2.

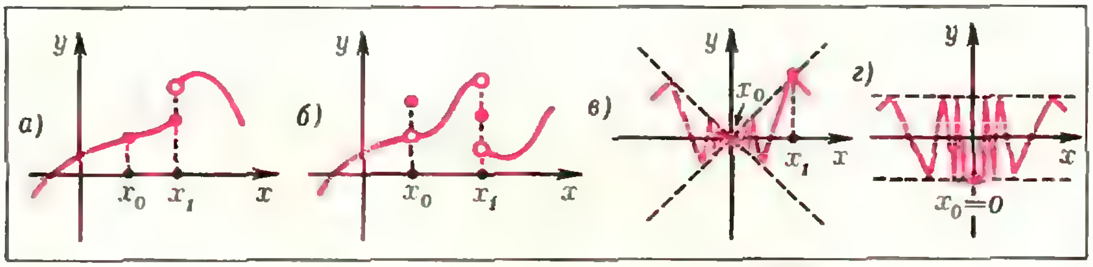

y
а)
x_0
x_1
x
б)
y
x_0
x_1
x
в)
y
x_0
x_1
x
г)
y
x
$x_0=0$

Рис. 3.

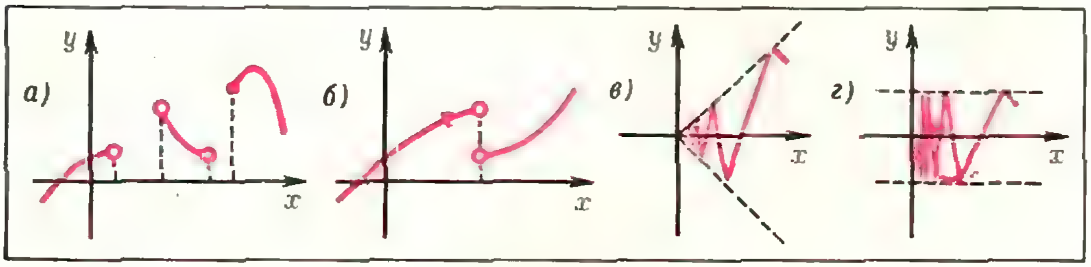

y
а)
x
y
б)
x
y
в)
x
y
г)
x

Рис. 4.

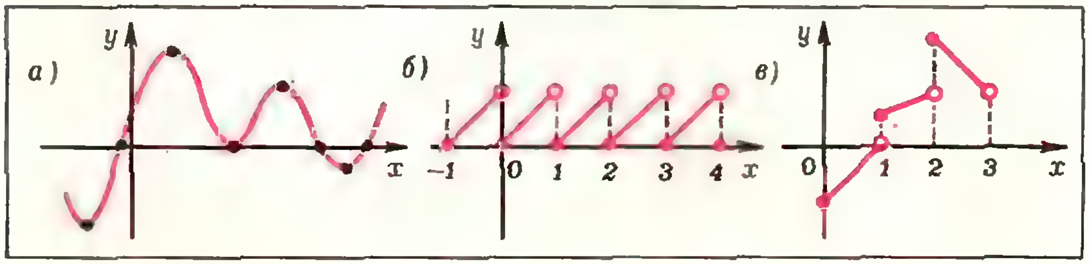

а)
y
x
б)
y
−1
0
1
2
3
4
x
в)
y
0
1
2
3
x

Рис. 5.

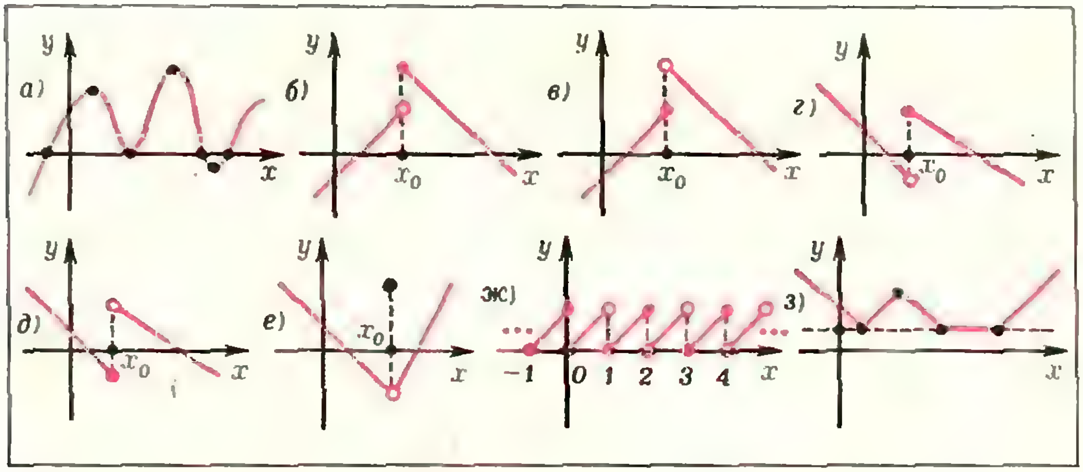

а)
б)
в)
г)
д)
е)
ж)
з)
y
x
x_0
−1
0
1
2
3
4

Рис. 6.

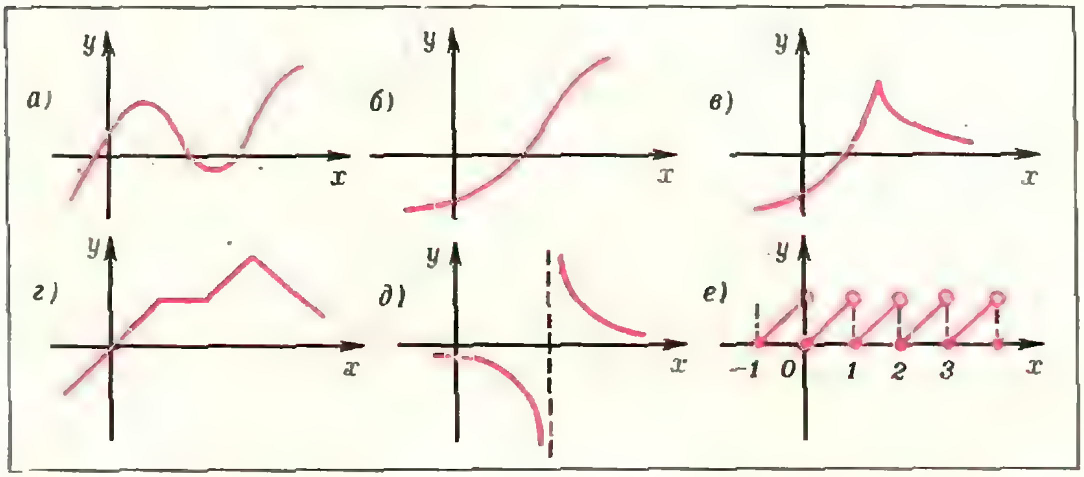

а)
б)
в)
г)
д)
е)
y
x
−1
0
1
2
3

Рис. 7.

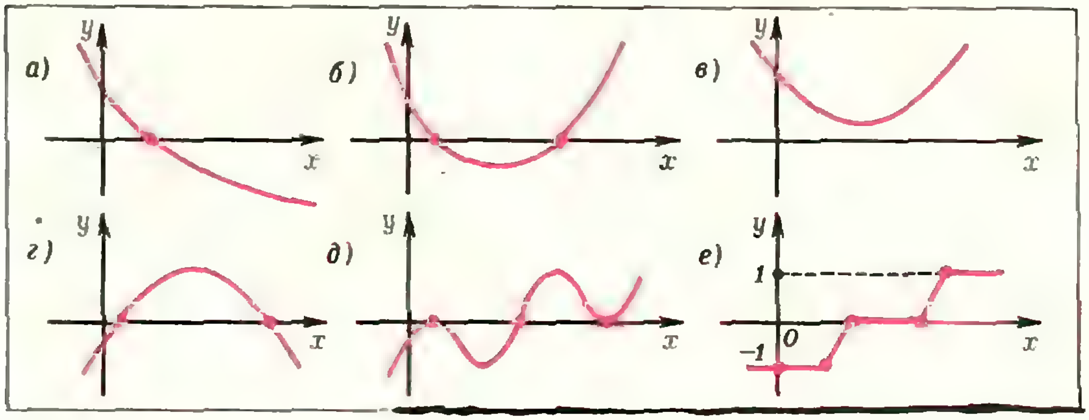

а)
б)
в)
г)
д)
е)
y
x
1
0
−1

Рис. 8

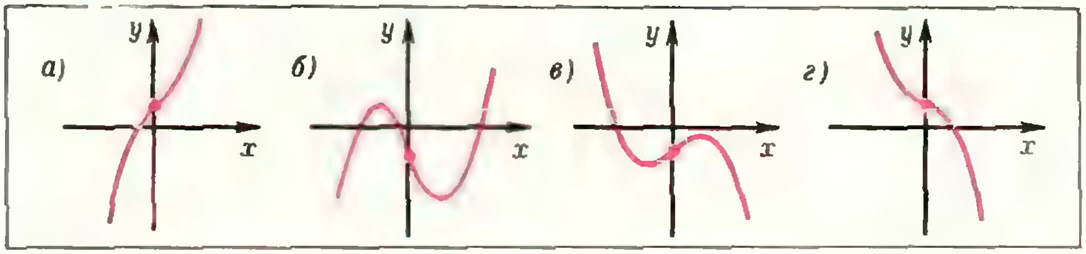


Рис. 9

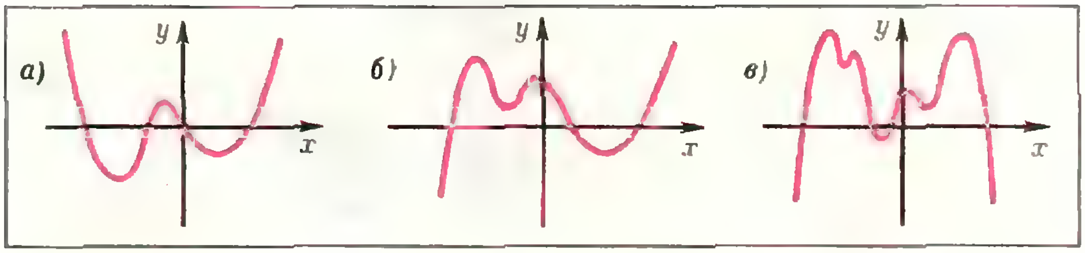


Рис. 10.

§ 4. Экстремумы функций

10. А) Нарисуйте график всюду определенной и всюду непрерывной функции так, чтобы у нее было ровно: а) 0, б) 1, в) 2, г) 3, д) 10, е) бесконечно много — точек экстремума.

Б) Можно ли при этом сделать так, чтобы все точки экстремума лежали на отрезке [0,1]?

11. Для функций, графики которых изображены на рисунках 6, *а—з*, укажите все точки максимума и минимума, если они есть.

§ 5. Производная

12. На рисунках 7, *а—е* изображены графики функций $y = f(x)$. В тех же системах координат (или же под графиками функций $y = f(x)$) нарисуйте примерные графики производных $y = f'(x)$ (при тех значениях x, при которых производная существует; напомним, что в точках разрыва и в точках «излома» графика функции производной не существует).

13. По графикам производных $y = f'(x)$, изображенных на рисунках 8, *а—е*, восстановите примерные графики функций $y = f(x)$. Одна ли такая функция f существует в каждом из случаев? Иными словами, не могут ли две различные функции иметь одну и ту же производную?

14. Можно ли утверждать, что:

а) производная любой четной функции является 1) четной? 2) нечетной?

б) производная любой нечетной функции является 1) нечетной? 2) четной?

в) производная периодической функции является периодической?

15. Может ли:

а) производная всюду положительной функции быть: 1) всюду отрицательной? 2) всюду положительной?

б) производная всюду определенной не периодической функции быть периодической?

в) производная всюду определенной функции, не являющейся ни четной, ни нечетной, быть: 1) четной? 2) нечетной?

§ 6. Многочлены

16А) На рисунках 9, *а—г* изображены графики кубических многочленов вида $y = ax^3 + bx + c$; масштаб не указан. В каждом из случаев определите знаки коэффициентов a, b, c.

Б) Могут ли эти графики быть графиками кубических многочленов вида $y = ax^3 + bx^2 + c$?

17. Какую наименьшую степень могут иметь многочлены

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

если их графики выглядят так, как показано на рисунках 10, *а—в*?

Физики шутят

Однажды в гостях у голландского физика-теоретика Пауля Эренфеста собрались Нильс Бор, Вольфганг Паули и Абрам Федорович Иоффе. Эренфест, Бор и Иоффе расположились на диване, а Паули, по своему обыкновению, ходил по комнате из угла в угол. Немного погодя Бор сказал ему:

— Перестань, пожалуйста, ходить! Это меня раздражает!

— А что именно тебя раздражает? Спросил Паули. Пока Бор обдумывал ответ, Эренфест, известный своим остроумием, произнес:

— Его раздражает, что ты возвращаешься.

«Квант» для младших школьников

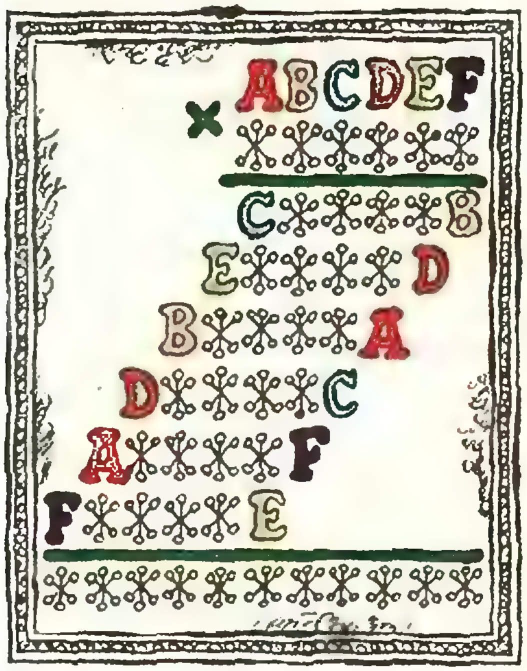
Задачи

1. В чемпионате мира среди профессионалов по крестикам-ноликам на бесконечной клетчатой доске участвовало 10 игроков. Проигравший партию, потеряв надежду на главный приз, уезжал с чемпионата. Какое максимальное число участников могло выиграть по две партии? (В «крестиках-ноликах» на бесконечной доске выигрывает тот, кто поставит пять своих значков подряд по одной линии — вертикали, горизонтали или диагонали; ничьих не бывает.)

2. Когда одного любителя головоломок спросили, отчего он так успешно решает задачи, то в ответ было написано

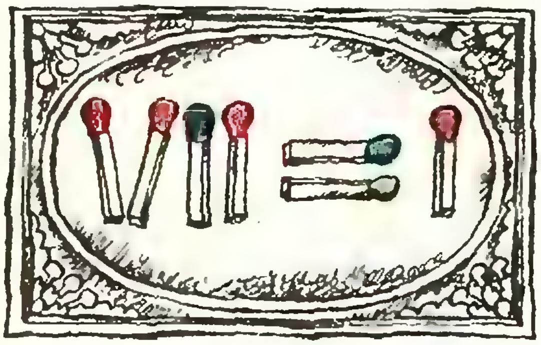
Н:Е=0, СТАРЕЮСТАРЕЮСТАРЕЮ

Попробуйте расшифровать эту запись.



3. В этом примере на умножение (см. рисунок) одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными — разные, вместо звездочек могут стоять любые цифры. Расшифруйте пример.

4. В неверном равенстве из спичек (см. рисунок) переложить одну спичку так, чтобы оно превратилось в верное.



НА РЫБАЛКЕ

(РАССКАЗ-ЗАДАЧА)

Ю. Горст

Ранним июньским утром Коля, Петя и Вася отправились на рыбалку. Дорогой между ними завязался неторопливый разговор.

— Не вернуться бы нам с рыбалки с пустыми руками.

— А ты знаешь, это еще не самое плохое. Недавно на уроке математики учительница рассказала нам, что один известный физик, решая в детстве на экзамене задачу о трех рыболовах, получил в ответе минус две рыбы.

— Да, минус две рыбы — это хуже нуля. А какая же задача была?

— Вот какая. Три рыболова, наловив окуней, заночевали у реки. Ночью один из них проснулся и решил, не тревожа товарищей, отправиться домой. Число пойманных рыб не делилось на три, поэтому он одну из них выбросил в воду, взял третью часть оставшихся рыб и ушел. Ночью проснулся и второй рыболов и, не зная, что первый уже ушел, тоже пересчитал рыб, одну выкинул, треть оставшихся взял себе и ушел. Точно так же поступил и третий рыболов, ничего не знавший об уходе своих товарищей. Спрашивается, сколько рыб поймали рыболовы.

— Интересная задача. Ну-ка, проверим ответ. Значит, поймали они «минус две» рыбы — на три, действительно, не делится. Первый рыболов одну рыбу выбросил — стало «минус три» рыбы, теперь на три делится. Значит, «минус одну» рыбу рыболов взял себе, осталось... опять «минус две» рыбы. Ну, а дальше ясно: так же будет и у двух других рыболовов. Ты смотри, все получается. А как зовут этого физика?

— Вот забыл. Ты, Петя, случайно не запомнил?

— Запомнил. Поль Дирак. Он потом прославился тем, что предсказал существование античастиц. Наверное, ему в этом помогло умение находить отрицательные «решения»: ведь античастица — это вроде «минус частицы».

Несколько минут ребята шли молча, затем разговор возобновился.

— В рыбацком деле многое зависит от удачи. Вот я — невезучий во всем. Помните, была последняя контрольная по физике, так я тогда двойку получил. Ведь вы оба не лучше меня все знали, а двоек избежали. Я и на рыбалке на успех не надеюсь.

— Это ты потому двойку получил, что Николай Геннадиевич тебе задачу на повторение дал. А наш Иннокентий Петрович дал контрольную на то, что мы недавно проходили.

Вот и речка. Забросив удочки в воду, ребята стали внимательно следить за поплавками.

— Смотри, у тебя клюет.

— И правда. Так... так... Есть! Гляньте, какой красавчик этот окунек.

— Не говори так громко, всю рыбу распугаешь. Когда только ты научишься шепотом говорить? И на уроках все время нам замечания: разговоры, разговоры... Ого, и у меня клюнуло. Тоже окунь!

С утра рыба клевала хорошо, а затем, когда припекло солнце и клев ослабел, ребята стали подсчитывать свой улов.

— Смотрите-ка, я больше всех рыбы поймал.

— Да у тебя рыба-то всё мелкая: одни ерши да плотва.

— Это ничего, что у него рыба мелкая: из ершей как раз уха вкусная получается.

Покончив с подсчетами и искупавшись, ребята отправились домой. Настроение у всех было хорошее, но особенно был доволен Петя — он, новичок в рыбалке, наловил рыбы больше, чем заядлый рыболов Вася.

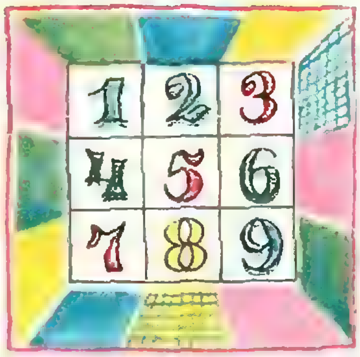
* * *

Вы прочитали этот рассказ? Тогда попробуйте ответить на два вопроса.

1. *Как зовут васиного учителя физики?*

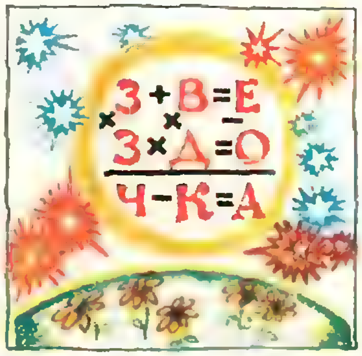
2. *Каков наименьший (положительный!) ответ в задаче, которую решал Дирак?*

Квадраты в квадрате



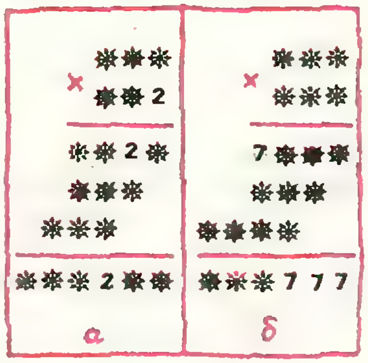
В квадрате 3×3 записаны цифры от 1 до 9. Переставьте эти цифры так, чтобы три образовавшихся трехзначных числа были точными квадратами.

Звездочка



Каждая буква — некоторая цифра. А какая именно?

Ребусы



Поставьте вместо звездочек цифры так, чтобы получились правильно выполненные примеры на умножение.

Л. Мочалов

Г. Дорофеев, Н. Розов

Периодичность и непериодичность функций

Понятие периодической функции относится к числу важнейших понятий математики, широко используемых в вузовских курсах. Поэтому поступающие должны хорошо понимать определение периодической функции, знать основные свойства этих функций, уметь доказывать периодичность (или непериодичность) той или иной конкретной функции. Подчеркнем, что включение в школьную программу элементов математического анализа открывает дополнительные возможности для решения задач такого рода.

Мы не будем здесь подробно обсуждать само определение периодической функции *). Отметим лишь, что при его формулировке поступающие часто допускают ошибку, связанную с невниманием к области определения функции **).

Когда заходит речь о конкретных примерах периодических функций, поступающие обычно ограничиваются указанием на основные тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Между тем запас периодических функций, встречающихся в школьном курсе, гораздо шире.

Большое число периодических функций можно строить по формуле $y = f(g(x))$, если в качестве g взять периодическую функцию, а в качестве f — произвольную функцию, например, $\sin^3 2x$, $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$,

$$\log_2 \cos(x-4),\ |\sin x - 2\cos^2 x|,$$

$$\arcsin(\cos x),\ \ln\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Действительно, как непосредственно следует из определения, если число $T > 0$ — период функции $g(x)$, то функция $f(g(x))$ — периодическая с тем же периодом T.

Напомним еще один пример периодической функции, внешне никак не связанной с тригонометрическими функциями — это $y = \{x\}$, то есть дробная часть числа x. Кроме того, не следует забывать, что периодической функцией является и постоянная, скажем, $y = -2$, $x \in \mathbf{R}$.

Обычно поступающие относительно легко справляются с задачами, в которых требуется доказать периодичность функций, подобных только что указанным. В таких случаях, как правило, угадывается период, после чего доказательство сводится к простой проверке определения. Но значительные трудности возникают тогда, когда нужно доказать *непериодичность* конкретной функции.

Дело в том, что определение периодической функции имеет довольно сложную логическую структуру. Поэтому уже саму формулировку того факта, что функция $f(x)$ *не является периодической* (то есть *является непериодической*), привести не так-то просто, а использовать эту громоздкую формулировку весьма затруднительно. Иногда складывается парадоксальная ситуация: поступающему совершенно ясно, что предложенная ему функция — непериодическая (и это действительно так!), но доказать это он не может.

Между тем для доказательства непериодичности часто вовсе и не нужно точно формулировать определение непериодической функции. Гораздо более простым оказывается иной, обходной путь. Именно, мы можем воспользоваться следующим логически очевидным утверждением: *если все периодические функции обладают некоторым свойством, а данная функция этим свойством не обладает, то данная функция не является периодической.*

---

*) См. учебные пособия «Алгебра и начала анализа 9», п. 69 и «Алгебра и начала анализа 10», с. 173, а также статью А. Землякова и Б. Ивлева «Периодические функции» («Квант», 1976, № 12).

**) Об этом говорилось уже в статье А. А. Рывкина «Периодические функции» («Квант», 1973, № 5).

Конечно, для того чтобы этот обходной путь был эффективным, надо иметь набор общих свойств периодических функций. Укажем несколько таких свойств.

Шесть свойств периодических функций

I. *Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции $f(x)$ с периодом T, то ее области определения принадлежат и все точки $x_0 + nT$, $n \in \mathbf{Z}$.*

В частности, *область определения периодической функции содержит сколь угодно большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа.*

Это свойство есть очевидное следствие определения периодической функции. Отсюда, например, вытекает, что функция, заданная только на положительной полуоси $]0, \infty[$, не может быть периодической. Поэтому не является периодической, например, логарифмическая функция $y = \ln x$.

II. *Периодическая функция принимает каждое свое значение в бесконечном числе значений аргумента, среди которых есть сколь угодно большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа.*

В частности, *периодическая функция не может быть возрастающей или убывающей на всей области определения.*

Это свойство немедленно вытекает из равенства

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbf{Z}, \qquad (1)$$

справедливого для периодической функции $f(x)$ с периодом $T > 0$. Отсюда, например, следует, что функция, возрастающая на всей числовой прямой, не может быть периодической.

Рассказывая о свойствах показательной функции $y = a^x$, поступающие, как правило, не в состоянии доказать, что она не является периодической. Между тем эта функция возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$) на $\mathbf{R}$ (что доказывается в учебнике), а потому непериодическая.

III. *Если $f(x)$ — периодическая функция, определенная на всей числовой прямой, то уравнение*

$$f(x + T) = f(x), \qquad (2)$$

где T рассматривается как неизвестное, а x — как параметр, имеет по крайней мере одно положительное решение $T = T_0$, удовлетворяющее уравнению сразу при всех значениях параметра $x \in \mathbf{R}$.

Это свойство фактически представляет собой переформулировку определения: ведь если функция $f(x)$ — периодическая, то существует такое число $T_0 > 0$, что для любого $x \in \mathbf{R}$

$$f(x + T_0) = f(x),$$

а это и означает, что число T_0 является корнем уравнения (2) для *всякого* значения параметра x.

С последним свойством связан следующий стандартный способ доказательства непериодичности функции $f(x)$: если нам удастся указать такие два значения аргумента $x = a$ и $x = b$, что уравнения

$$f(a + T) = f(a)$$

и

$$f(b + T) = f(b)$$

не имеют *общего* положительного решения $T = T_0$, то функция $f(x)$ не является периодической.

IV. *Если для периодической функции f с периодом T на некотором отрезке $[\alpha, \alpha + T]$ выполнено неравенство*

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad (3)$$

то это неравенство выполняется и для любого значения аргумента.

В частности, *для периодической функции $f(x)$, определенной и непрерывной на всей числовой прямой, существует такое число $M > 0$, что неравенство* (3) *выполняется для всех $x \in \mathbf{R}$.*

Свойство IV вытекает из следующих рассуждений. Пусть функция f — периодическая с периодом T и пусть неравенство (3) справедливо для $x \in [\alpha, \alpha + T]$. Тогда в силу равенства (1) это неравенство справедливо и на любом отрезке

$[\alpha+nT,\ \alpha+(n+1)T]$, $n\in\mathbf{Z}$. Однако любое значение аргумента принадлежит одному из таких отрезков.

V. *Если периодическая функция дифференцируема, то ее производная — периодическая функция с тем же периодом.*

Это свойство доказывается так. Прежде всего из определений производной и периодической функции следует, что если периодическая функция $f(x)$ с периодом T имеет производную $f'(x)$ в некоторой точке x, то она имеет производную и в точке $x+T$. Другими словами, если $x\in D(f')$, то и $x+T\in D(f')$. Остается убедиться, что

$$f'(x+T)=f'(x) \qquad (4)$$

при $x\in D(f')$. Обозначим через $g(x)$ функцию $f(x+T)$ и рассмотрим ее как сложную функцию с «внутренней» функцией $x+T$ и «внешней» функцией $f(x)$. Тогда по формуле для производной сложной функции будем иметь

$$g'(x)=f'(x+T)\cdot(x+T)'=f'(x+T). \qquad (5)$$

Но в силу периодичности $g(x)=f(x)$, так что

$$g'(x)=f'(x). \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) вытекает равенство (4). Таким образом, $f'(x)$ — периодическая функция с периодом T.

VI. *Если $f(x)$ — периодическая функция, определенная на всей числовой прямой и отличная от постоянной, то не существует предела функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.*

Это свойство можно получить из нестрогих графических соображений. Пусть x стремится к нулю, оставаясь положительным; тогда выражение $1/x$ неограниченно возрастает. Так как периодическая функция f при возрастании аргумента «колеблется», то функция $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ «колеблется» в окрестности точки $x=0$ и потому не имеет предела при $x\to 0$.

Строгое доказательство сформулированного свойства проведем методом от противного. Допустим, что

$$\lim_{x\to 0} g(x)=A. \qquad (7)$$

Сначала убедимся, что функция $g(x)$ хотя бы в одной точке $x>0$ принимает значение, отличное от A. В самом деле, если $g(x)=A$ при любом $x>0$, то $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=A$ при всех $x>0$. Но тогда из периодичности функции $f(x)$ следует, что $f(x)$ постоянна на всей числовой прямой, а это противоречит условию.

Следовательно, существует такая точка $x_0>0$, что

$$g(x_0)=\alpha\neq A.$$

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}|A-\alpha|>0$. По определению предела из равенства (7) вытекает существование числа $\delta>0$ такого, что для *любого* $x\neq 0$, удовлетворяющего неравенству

$$|x|<\delta, \qquad (8)$$

выполняется неравенство

$$|g(x)-A|<\varepsilon. \qquad (9)$$

Однако для достаточно большого $n\in\mathbf{Z}$ число

$$x^*=\frac{x_0}{1+nTx_0}$$

неравенству (8) удовлетворяет *), и неравенство (9) при $x=x^*$ не выполняется:

$$g(x^*)=g\left(\frac{x_0}{1+nTx_0}\right)=f\left(\frac{1+nTx_0}{x_0}\right)=$$
$$=f\left(\frac{1}{x_0}+nT\right)=f\left(\frac{1}{x_0}\right)=g(x_0)=\alpha,$$

и поэтому

$$|g(x^*)-A|=|\alpha-A|>\frac{1}{2}|\alpha-A|=\varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию с равенством (7).

Примеры

Покажем теперь на нескольких примерах, как можно использовать приведенные выше свойства периодических функций для доказательства непериодичности конкретной функции.

Пример 1. *Доказать непериодичность функций*

$f_1(x)=\cos\ln|x|$; $f_2(x)=\sqrt{x(x-1)}$;
$f_3(x)=\arcsin x$.

Если бы функция $f_1(x)$ была периодической с периодом $T>0$, то, поскольку $T\in D(f_1)$, по свойству

---

*) Чтобы найти нужное значение n, следует решить неравенство (напомним, что $x_0>0$)

$$\frac{x_0}{1+nTx_0}<\delta.$$

I выполнялось бы условие

$$0 = T - T \in D(f_1),$$

что, очевидно, неверно.

Предположим, что функция $f_2(x)$ — периодическая с периодом T. Возьмем такое целое n, что

$$x^* = \frac{1}{2} + nT > 1.$$

Тогда $x^* \in D(f_2)$, и по свойству I

$$x^* - nT = \frac{1}{2} \in D(f_2),$$

что неверно.

Функция $f_3(x)$ определена на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, не является периодической в силу свойства I.

Пример 2. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}, \quad f_2(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right) + \cos\left(x\sqrt{3}\right),$$

$$f_3(x) = 2x - \cos x.$$

Уравнение

$$\frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} = a$$

(где $a \in \mathbf{R}$) может иметь, как легко видеть, не более двух корней. Поэтому функция $f_1(x)$ каждое свое значение принимает не более чем в двух точках и потому по свойству II не является периодической.

Функция $f_2(x)$ при $x = 0$ принимает значение 3. Решим уравнение

$$\cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right) + \cos\left(x\sqrt{3}\right) = 3. \tag{10}$$

Так как $|\cos t| \leqslant 1$, то уравнение (11) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos\left(x\sqrt{2}\right) = 1, \\ \cos\left(x\sqrt{3}\right) = 1. \end{cases}$$

Но первое уравнение системы удовлетворяется при $x = 2k\pi$, а второе — при $x = \frac{2n\pi}{\sqrt{2}}$ $(k, n \in \mathbf{Z})$ и, как нетрудно убедиться, обе эти серии значений x имеют лишь единственную общую точку $x = 0$, которая, очевидно, удовлетворяет и третьему уравнению системы. Следовательно, уравнение (10) имеет только один корень. Другими словами, функция $f_2(x)$ принимает значение 3 только один раз и по свойству II не является периодической.

Вычислим производную функции $f_3(x)$:

$$f_3'(x) = 2 + \sin x.$$

Мы видим, что $f_3'(x) > 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$, и, следовательно, функция $f_3(x)$ — возрастающая на всей числовой прямой; по свойству II она не является периодической.

Пример 3. *Выяснить, является ли периодической функция*

$$f(x) = \{x\} + \sin x.$$

Для решения этой задачи используем путь, связанный со свойством III. Предположим, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T > 0$. Тогда при любом значении x справедливо равенство

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x.$$

В частности, при $x = 0$ отсюда имеем

$$\{T\} + \sin T = 0, \tag{11}$$

а при $x = -T$ получаем

$$0 = \{-T\} - \sin T. \tag{12}$$

Складывая равенства (11) и (12), мы приходим к равенству

$$\{T\} + \{-T\} = 0.$$

Вспомним, что дробная часть $\{x\}$ любого числа x неотрицательна. Поэтому последнее равенство возможно только если $\{T\} = \{-T\} = 0$, то есть если T — целое число. Далее, если $\{T\} = 0$, то из равенства (11) следует, что $\sin T = 0$, то есть что $T = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Между тем число $k\pi$ при любом целом $k \neq 0$ не является целым числом, поскольку π — иррационально, и потому уравнения (11) и (12) имеют лишь один общий корень $T = 0$. Таким образом, функция $f(x)$ не является периодической.

Пример 4. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x) = 2x\cos(x^2).$$

Допустим, что функция $f(x)$ — периодическая и $T > 0$ — ее период. Так как $f(x)$ определена на всей числовой прямой и $|f(x)| \leqslant 2T$ при $x \in [0, T]$, то согласно свойству IV при любом $x \in \mathbf{R}$

$$|f(x)| = |2x\cos(x^2)| \leqslant 2T.$$

Однако это неравенство не выполняется при $x=\sqrt{2n\pi}$, если только натуральное число n подобрано так, что $\sqrt{2n\pi}>T$.

Пример 5. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x)=\sin(x^2),\quad f_2(x)=2\sin x+\sin(x\sqrt{2}).$$

Вычислим производные данных функций:

$$f_1'(x)=2x\cos(x^2),$$

$$f_2'(x)=2\cos x+\sqrt{2}\cos(x\sqrt{2}).$$

Функция $f_1'(x)$, как показано в примере 4, не является периодической, так что, по свойству V, не является периодической и функция $f_1(x)$. Функция $f_2'(x)$ также не является периодической (доказательство этого факта, по существу, проведено в примере 2) и, следовательно, на основании свойства V не является периодической функция $f_2(x)$.

Пример 6. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x)=e^{\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|}}.$$

Эта функция выглядит довольно страшно, и совершенно не ясно, на каком из свойств здесь удастся сыграть. Однако вопрос решается легко, если догадаться «упростить» данную функцию; при этом, конечно, мы будем пользоваться не тождественными преобразованиями, а тем фактом, что в случае периодичности функции $f(x)$ функция $g(f(x))$ также периодическая.

Итак, пусть функция $f(x)$ — периодическая. Тогда периодическими должны быть и следующие функции:

$$f_1(x)=\ln|f(x)|=\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|},$$

$$f_2(x)=|f_1(x)|^2=\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|,$$

$$f_3(x)=\operatorname{tg}|f_2(x)|=|\sin(x^2)|,$$

$$f_4(x)=|f_3(x)|^2=\sin^2(x^2).$$

Однако последняя из этих функций периодической не является, ибо ее производная

$$f_1'(x)=2x\sin(2x^2)$$

непериодична (это доказывается так же, как в примере 4). Полученное противоречие показывает, что предположение о периодичности функции $f(x)$ неверно.

Пример 7. *Доказать, что любой многочлен*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

($a_0\neq0$) не является периодической функцией.

Предположим, что функция $f(x)$ — периодическая. Тогда, по свойству V, и ее производная $f'(x)$ — периодическая функция. Но отсюда следует, что и $f''(x)=[f'(x)]'$ — также периодическая функция, и т. д. В частности, периодической функцией будет $(n-1)$-я производная многочлена $f(x)$:

$$f^{(n-1)}(x)=n!\,a_0x+(n-1)!\,a_1.$$

Однако эта функция возрастает или убывает на всей числовой прямой (она линейная!) и периодической быть не может.

Пример 8. *Доказать непериодичность функции* $f(x)=\sin\ln(x^2+1)$.

Вычислим производную этой функции:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\cos\ln(x^2+1)$$

и рассмотрим функцию

$$g(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{x^2+1}\cos\ln\frac{x^2+1}{x^2}.$$

Легко видеть, что $|g(x)|\leqslant\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant2|x|$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$. Поскольку функция $f'(x)$ определена на всей числовой прямой и отлична от постоянной, по свойству VI она не периодична. Поэтому по свойству V и сама функция $f(x)$ не является периодической.

Упражнения

Определите, являются ли периодическими следующие функции:

1. $f_1(x)=\{x\}+\cos2x$, $f_2(x)=\{x\}+\sin\pi x$.
2. $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=2\pi^x-3e^x$.
3. $f_1(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$, $f_2(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$.
4. $f_1(x)=2x^3-3x^2+1-5\sin x$, $f_2(x)=(x^4-2x+5)e^{-x}$.
5. $f_1(x)=\sqrt{|\cos(x^2)|}$, $f_2(x)=x\sin x$.
6. $f(x)=\sin\sqrt{|x|}$.
7. $f_1(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq0,\\ 1 & \text{при } x=0,\end{cases}$

   $f_2(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq0,\\ 0 & \text{при } x=0,\end{cases}$

   $f_3(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$
8. $f_1(x)=\frac{2x^2-3x-1}{x^4+3x^3-2x+10}$,

   $f_2(x)=\frac{x^6-3x^3+4x^2+x+2}{x^4+2x^3-4x+1}$.

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

В этом номере журнала мы публикуем образцы вариантов письменного экзамена по математике, предлагавшихся поступающим на некоторые естественные факультеты МГУ в 1976 году. (Варианты механико-математического, физического факультетов и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ будут опубликованы в одном из следующих номеров журнала.) Напоминаем читателям, что вступительные экзамены на естественных факультетах Московского университета проводятся в июле.

Географический факультет

1. Большой насос перекачивает за час на 2 $м^3$ воды больше, чем средний, а средний — на 2 $м^3$ больше, чем малый насос. Два средних и два малых насоса, работая вместе, наполнили резервуар емкостью 48 $м^3$. Сразу после этого были включены два средних и два больших насоса, которые наполнили другой резервуар той же емкости. На всю работу затрачено [illegible] часов. Сколько кубометров воды перекачивает в час средний насос?

2. Решить уравнение

$$4\sqrt{x+2} = |x+1| + 4.$$

3. Решить уравнение

$$1 - \sin 2z = \cos z - \sin z.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2 - 10x + 22) > 0.$$

5. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, и диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и CD за меньшее основание BC трапеции отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна S, а сумма величин углов CAD и BDA равна 60°.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

1. Найти все решения уравнения

$$2\log_{10}x = 5 + \log_x 1000.$$

2. В рудном карьере имеются два транспортера для подъема породы. В начале рабочего дня в карьере было 20 $м^3$ породы. Сначала работал только первый транспортер и поднял 2/5 части всей породы. Затем его выключили и одновременно включили второй транспортер, который поднял всю остальную породу. В результате вся работа была завершена за 4 часа 20 минут. Если бы с начала и до конца работали одновременно оба транспортера, то на подъем всей породы потребовалось бы 2 часа. Определить производительность (количество поднимаемой в час породы) каждого транспортера, если известно, что у первого транспортера она больше, чем у второго.

3. Найти все решения уравнения

$$-3\frac{|1-\cos x|}{1-\cos x}\sin x = \sin x - 2\sin 2x.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{-1-x} - \sqrt{2y-x} = 1,\\ \sqrt{1-2y} + \sqrt{2y-x} = 4.\end{cases}$$

5. В параллелограмме $ABCD$ известны длины диагонали $|BD| = \sqrt{10}$ и сторон $|AB| = 3$, $|BC| = 1$. Окружность, лежащая в плоскости параллелограмма $ABCD$, радиуса $\sqrt{31/2}$ с центром в точке [illegible] пересекается со второй окружностью, которая проходит через точки A и C. Известно, что касательные, проведенные через одну из точек пересечения этих окружностей, взаимно перпендикулярны. Найти радиус второй окружности.

Геологический факультет (отделение геофизики)

1. К резервуару объема 24 $м^3$ подведены две трубы. Через первую трубу вода может только выливаться со скоростью 2 $м^3/ч$, а вторая труба может только наполнять резервуар. Вначале, когда резервуар был пуст, одновременно открыли обе трубы. После того как резервуар оказался наполненным наполовину, первую трубу закрыли, и вторая продолжала наполнять резервуар. В результате резервуар был заполнен за 28 часов 48 минут. Какое количество воды в час подает вторая труба?

2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}(3\cos 2x - 6\operatorname{ctg} y + 2) = 0,\\ 18\sin^2 x - 2\operatorname{tg} y - 3 = 0.\end{cases}$$

3. Найти все решения неравенства

$$\frac{1}{2}\log_{3+x^2}(x^2-6)^2 < 2 + \frac{1}{12}\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{64}.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ со стороной $|AD|=12$ и диагональю $|AC|=16$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F диагонали BD. Точки E и F выбраны таким образом, что

$$\frac{|EC|}{|EF|}=\frac{1}{4}, \quad \frac{|FD|}{|BF|}=\frac{1}{3}.$$

Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\frac{|EM|}{|MF|}=\frac{1}{3}$. Найти длины стороны AB и диагонали BD.

5. Найти все числа p, при которых существует единственное число x, удовлетворяющее одновременно следующим условиям: $\sin \pi x=0$, $(2x+14p^2-7)(4x-4p^2-15)\leqslant 0$.

Факультет почвоведения

1. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Они двигались без остановок с постоянной скоростью и встретились через 30 часов после выхода. Найти, сколько времени был в пути до пункта назначения каждый поезд, если первый поезд прибыл в пункт B на 25 часов позже, чем второй прибыл в пункт A.

2. Дана равнобедренная трапеция, у которой длина верхнего основания вдвое меньше длины нижнего. Определить, в каком отношении делит нижнее основание прямая, которая параллельна диагонали, проходит ниже нее и отсекает треугольник площадью в 4 раза меньше площади трапеции.

3. Решить уравнение

$$2(\sin^2 2x+1)=\sin 8x+6\cos^2 2x.$$

4. Найти все значения параметра α, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+x\cos\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2}-1=0$$

на $\sqrt{2,2}$ больше, чем бо́льший корень уравнения

$$x^2-x(3+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha+2=0.$$

5. Решить неравенство $\log_{x-1}(1+2x^4-x^6)<0$.

Биологический факультет

1. Решить уравнение

$$|\cos x-\sin x|=1+\sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_x\frac{1}{7}+\log_{\frac{1}{7}} x>10|\log_{\frac{1}{7}} x|.$$

3. Имеются два водных раствора № 1 и № 2 веществ A и $Б$, различающиеся весовыми соотношениями веществ A, $Б$ и воды. В растворе № 1 вещества $Б$ в 4 раза больше, чем вещества A, а воды столько же, сколько вещества $Б$. Смешав 3 *кг* раствора № 1, 6 *кг* раствора № 2 и добавив 1 *кг* воды, получим новый раствор, в котором вещества A в 2 раза меньше, чем вещества $Б$, и в 3 раза меньше, чем воды. Требуется определить весовое соотношение веществ A, $Б$ и воды в растворе № 2.

4. В равнобедренную трапецию вписана окружность с центром O_1. Другая окружность с центром O_2, расположенным вне вписанного круга, касается большего основания и боковой стороны трапеции. Обе окружности пересекаются и имеют общую хорду MN. Известно, что $\widehat{MO_1N}=60°$, $\widehat{MO_2N}=120°$, $|MN|=2$. Найти площадь трапеции.

5. Доказать, что уравнение $2x-x^3=\frac{2}{x}$ не имеет положительных решений.

Химический факультет

1. Три экскаваторщика получили задание вырыть три одинаковые канавы. Первый и второй экскаваторщики приступили к работе одновременно. Третий начал работу, когда второй вырыл пятую часть своей канавы, а закончил, когда первому оставалось вырыть четвертую часть своей канавы. Производительность второго экскаватора на 2 *м/ч* меньше, а производительность первого — на 4 *м/ч* меньше, чем производительность третьего экскаватора. Найти производительность третьего экскаватора.

2. Решить неравенство

$$2x^2-|x|\log_3 78+\log_3 26<1.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Величины углов ADB, BAD, ABD, ACB в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C, если известно, что $|AB|=1$.

4. Найти все решения уравнения

$$4-2\sin x-3\cos x=$$
$$=4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}(2-\sin x-2\cos x),$$

которые одновременно являются и решениями уравнения

$$2\sin x=\operatorname{ctg} x+3\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}$$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, где $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ и $[DD']$ — параллельные ребра, плоскость π проходит через диагональ $A'C'$ грани куба и через середину ребра AD. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости π, если длина ребра куба равна 3.

Задачи и олимпиады

В 1976 году издательство «Мир» выпустило в свет перевод еще одной замечательной книги: И. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани «Венгерские математические олимпиады» (серия «Задачи и олимпиады»).

Венгрия — это первая страна, в которой (по решению Венгерского физико-математического общества) начали проводиться олимпиады по математике для выпускников гимназий. Первая олимпиада состоялась в 1894 году. С тех пор олимпиады в Венгрии проводятся ежегодно (за исключением периода двух мировых войн).

В книге «Венгерские математические олимпиады» собраны задачи всех олимпиад вплоть до 1974 года (на каждой олимпиаде участникам предлагалось по три задачи).

Первые 93 задачи (до 1928 года) были собраны и изданы с решениями одним из организаторов олимпиад — Кюршаком. Задачи олимпиад 1928—1963 годов были собраны венгерскими математиками Хайошем, Нейкоммом и Шурани. И, наконец, задачи олимпиад самых последних лет (включая 1974 год) собрал переводчик книги Ю. А. Данилов.

Книга состоит из трех разделов. Первый раздел — это просто условия 222 олимпиадных задач (чтобы вы смогли оценить эти задачи, ниже мы приводим некоторые из них). Второй раздел — это *«Решения»*. Ко многим задачам решение дается не одно, а несколько; зачастую решения превращаются в небольшие заметки-исследования. Наиболее же интересные и трудные задачи, возникающие на «стыке» школьной математики и математики «неэлементарной», обсуждаются дополнительно — в третьем разделе книги, названном *«Немного истории»*. В этом разделе затрагиваются самые разные вопросы. Здесь читатель познакомится с теорией чисел (вопросами делимости, теорией сравнений, с задачами о простых числах, числами Ферма и совершенными числами, с Малой и Великой теоремами Ферма); комбинаторикой; узнает о сравнении мощностей бесконечных множеств и о гипотезе континуума. Познакомится с алгеброй многочленов, с алгебраическими и трансцендентными числами, найдет большой раздел, посвященный неевклидовой геометрии и одному из ее создателей — Яношу Бойяи, много теорем и задач геометрии треугольника, теорем о суммировании и перестановке членов бесконечных рядов, задач на графы, целочисленные решетки и т. д.

Мы советуем всем старшеклассникам, любящим математику и трудные задачи, готовящимся к олимпиадам или уже неоднократно побеждавшим в них, — постараться купить эту книгу. Даже если вы не сможете решить какие-то задачи, прочтя решения, вы узнаете много важного и полезного. А теперь — несколько задач. Первая задача предлагалась на самой первой олимпиаде — в 1894 году.

Олимпиада 1894 года (№ 1)

Доказать, что выражения $2x+3y$ *и* $9x+5y$ *делятся на 17 при одних и тех же целых числах* x *и* y.

Олимпиада 1901 года (№ 22)

Доказать, что сумма n-х степеней $1^n+2^n+3^n+4^n$, *где* n *— целое положительное число, делится на 5 в том и только том случае, если показатель степени* n *не делится на* 4.

Решение этой задачи основано на том, что $1^4\equiv 2^4\equiv 3^4\equiv 4^4\equiv 1 \pmod 5$. Эта цепочка сравнений — не что иное, как частный случай *Малой теоремы Ферма*.

Если a — целое число, не делящееся на простое число p, то $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

Олимпиада 1924 года (№ 82)

Даны три целых положительных числа a, b *и* c. *Доказать, что если при всех целых положительных* n *можно построить треугольники со сторонами длины* a^n, b^n, c^n, *то все построенные треугольники будут равнобедренными.*

Олимпиада 1926 года (№ 90)

Окружность катится без проскальзывания по окружности вдвое большего радиуса, оставаясь внутри нее. Какую линию описывает при этом произвольная точка окружности?

Решить эту задачу вам поможет знакомство со статьями С. Верова о рулеттах (см. «Квант», 1975, № 5, 8 и 12). Ответ здесь такой: диаметр большей окружности, проходящий через точку, в которой ее касается меньшая окружность в начальный момент, проходимый дважды — в прямом и обратном направлениях.

Олимпиада 1933 года (№ 110)

На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток, причем так, что на каждой из 8 горизонталей и каждой из 8 вертикалей оказалось по 2 помеченные клетки. Доказать, что на помеченных клетках можно расставить 8 черных и 8 белых фигур (по одной фигуре на каждой помеченной клетке) так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали стояло по 1 белой и 1 черной фигуре.

Оказывается, эту задачу можно перевести на язык теории графов, с использованием теорем которой (все необходимые сведения сообщаются в решении) она легко решается. При этом удается решить даже более общую задачу о расстановке черных и белых фигур на шахматной доске размером $m\times n$, и другие задачи.

Олимпиада 1935 года (№ 116)

Точка O называется центром симметрии точечного множества H, если точка, симметричная относительно O любой точке множества H, также принадлежит множеству H. Доказать, что конечное точечное множество не может иметь двух различных центров симметрии.

Для этой задачи приводятся два решения; во втором решении показывается, что точечное множество с двумя центрами симметрии — бесконечно и имеет бесконечно много центров симметрии: — все точки, расположенные на прямой, проходящей через данные два центра симметрии, и отстоящие от концов этого отрезка на расстояния, равные целым кратным его длины.

Олимпиада 1937 года (№ 122)

Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга, причем все три точки касания различны. Доказать, что эти окружности лежат либо на одной сфере, либо в одной плоскости.

Олимпиада 1947 года (№ 144)

Круг радиуса r покрывают кругами радиуса r/2. Какое наименьшее число кругов требуется для этого?

Ответ. семь.

Олимпиада 1966 года (№ 196)

Существует ли пространственный пятиугольник, все стороны которого равны, а углы между двумя любыми смежными сторонами прямые?

Оказывается, такого пятиугольника нет. Пространственный пятиугольник можно построить, если, например, отказаться от условия равенства всех его сторон, а только потребовать, чтобы равными были лишь четыре стороны, и чтобы углы между любыми двумя смежными сторонами были прямыми. Или же, наоборот, оставить условие равенства всех сторон, но потребовать, чтобы лишь четыре угла между смежными сторонами были прямыми — такой пространственный пятиугольник тоже существует. Если же в задаче спрашивать о существовании пространственного многоугольника с большим числом сторон (а не о пятиугольнике), то ответ будет утвердительным.

Олимпиада 1967 года (№ 200)

Выпуклый многоугольник разделен на треугольники своими непересекающимися диагоналями. Все вершины многоугольника служат вершинами нечетного числа таких треугольников. Доказать, что число сторон многоугольника делится на 3.

Требование выпуклости в этой задаче на самом деле не существенно. Оно включено лишь для облегчения задачи; иначе нужно доказать дополнительно, что всякий многоугольник можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями, — что сделать отнюдь не просто.

Олимпиада 1968 года (№ 204)

Расположим в ряд произвольным способом n черных и n белых шариков. Подсчитаем число перемен цвета в каждом таком расположении, то есть определим, сколько раз черные и белые шарики оказываются рядом.

Доказать, что расположений, в которых шарики различных цветов n — k раз оказываются рядом, столько же, сколько расположений с n+k парами разноцветных «соседей» $(0<k<n)$.

Олимпиада 1971 года (№ 211)

Прямая пересекает сторону AB треугольника ABC в точке C_1, сторону AC в точке B_1 и продолжение стороны BC в точке A_1. Пусть C_2 — точка, расположенная симметрично точке C_1 относительно середины стороны AC, и A_2 — точка пересечения прямых B_1C_2 и BC.

Доказать, что

$$\sin \widehat{B_1A_1C} : \sin \widehat{C_2A_2B} = |B_2C_2| : |B_1C_1|.$$

Олимпиада 1972 года (№ 215)

В классе учится одинаковое число мальчиков и девочек (всего класс насчитывает не менее 4 человек). Их в различном порядке выстраивают в один ряд и смотрят, нельзя ли разделить ряд на две части так, чтобы в каждой части девочек и мальчиков было поровну. Пусть a — число случаев, когда такое разбиение ряда невозможно, а b — число случаев, когда удается разбить ряд на две части с одинаковым числом девочек и мальчиков в каждом из них, но лишь одним способом. Доказать, что $b=2a$.

Олимпиада 1973 года (№ 219)

В пространстве задано n плоскостей $(n\leqslant 5)$ *так, что любые три из них имеют ровно одну общую точку и в пространстве нет точек, через которые проходило бы более трех плоскостей. Доказать, что среди частей, на которые эти n плоскостей делят пространство, имеется не менее* $\dfrac{2n-3}{4}$ *тетраэдров.*

Аналог утверждения задачи на плоскости гораздо более прост: *если на плоскости задано n прямых, расположенных так, что никакие две из них непараллельны и никакие три не проходят через одну и ту же точку, то среди частей, на которые эти прямые делят плоскость, имеется не менее* $(2n-2)/3$ *треугольников.*

Олимпиада 1974 года (№ 221)

Дана бесконечная последовательность квадратов со сторонами длиной 1, $^1/_2$, $^1/_3$, …, $^1/n$, … *Доказать, что существует квадрат, в котором можно разместить все квадраты последовательности так, чтобы они не перекрывали друг друга, и определить, чему равна сторона наименьшего из квадратов, вмещающих все квадраты данной последовательности.*

Все квадраты, образующие заданную бесконечную последовательность, можно разместить в квадрате со стороной $1^1/_2$.

И. Клумова

Объявляют прием

Всесоюзная заочная математическая школа

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1977 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Срок обучения — три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 20 марта 1977 года. После проверки работ (примерно в июле 1977 года) будет сообщено, приняты ли вы в школу. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и рецензии на них не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14 *см*×6 *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	*Вологодская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1963 г.*
Класс	*7-й класс «А»*
Школа (полное название)	*школа № 2 г. Тотьмы*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*отец — шофер автобазы № 3,* *мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*123456, г. Тотьма, ул. Ленина* *д. 3, кв. 23*

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, присылают работы по адресу: г. Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ. На конкурс.

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, присылают работы по адресу: г. Воронеж, Университет, ЗФМШ. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и в других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: 117234, г. Москва, В — 234, МГУ мех.-мат, ВЗМШ. На конкурс.

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1977 году

1 В равенстве двух дробей, числители и знаменатели которых двузначные числа, цифры заменены буквами одинаковые — одинаковыми, разные — разными

$$\frac{КУ}{РЕ} = \frac{КА}{КУ}$$

Какую цифру означает каждая из букв (достаточно привести все возможные ответы)?

2 Дан прямоугольник $ABCD$ Найдите множество точек M, для которых

$$|MA| + |MB| = |MC| + |MD|$$

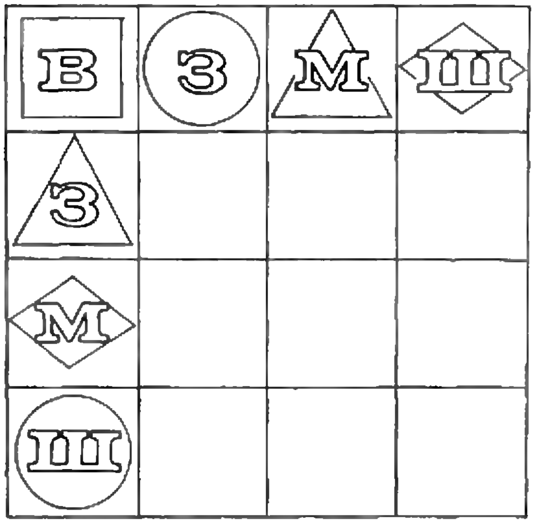
3 Дополните табличку 4×4 (см рисунок) буквами В, З, М, Ш, обведите их рамками четырех типов (квадрат, ромб, круг, треугольник) и раскрасьте их в четыре цвета так, чтобы выполнялись следующие условия 1) в каждой строчке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, цвета и типы рамок, 2) каждая буква должна быть раскрашена по разу каждым цветом, 3) рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет (Достаточно нарисовать требуемую картинку)

4 В прямоугольном треугольнике a и b — длины его катетов, c — длина гипотенузы, h — длина высоты, опущенной на гипотенузу Докажите, что $c + h$ больше $a + b$

5 Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

6 Даны две непересекающиеся окружности Существует ли вне окружностей такая точка, что всякая прямая, проходящая через нее, пересекает хотя бы одну из окружностей?



7 Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из A в B Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю оставалась треть пути до B Автомобиль, доехав до B, без остановки поехал обратно в A Кто приедет раньше автомобиль в A или велосипедист в B?

8 Известно, что числа 2077 и 100 при делении на натуральное число a дают одинаковые остатки Найдите число a

9 Большой прямоугольник разбит на клетки 1 *см*×1 *см* Внутри каждой клетки написано число Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строчке равна 1, а в каждом вертикальном столбце — равна 2 Может ли площадь прямоугольника равняться 1976 *см*²?

10 Несколько ящиков весят вместе 10 тонн, причем каждый из них весит не больше одной тонны Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

Ж Раббот

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико техническом институте проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8 й, 9 й и 10-й классы на 1977/78 учебный год

Форма обучения в нашей школе отличается от привычной для ребят работы с учителем на уроках Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли

За 10 лет работы ЗФТШ дала хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых стали студентами ведущих вузов нашей страны

Цель нашей школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по физике и математике Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где помощь нашей школы особенно нужна

В ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание)

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это — и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися г. Москвы проводятся очные занятия по физике и математике 2 раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ.

Вступительное задание каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет.

На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Кемеровская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Глухов Валерий Иванович*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*школа № 6, ул. Шишкина, 26*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*слесарь, мастер цеха*
мать	*бухгалтер*
6. Подробный домашний адрес	*623023, г. Прокопьевск,* *ул. Урожайная, д. 11, кв. 20*

Срок отправления решения — не позднее 10 марта 1977 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу будет проводиться приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1977 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся 7-х классов, задачи 1, 4—8 — для учащихся 8-х классов, задачи 1, 6, 8 — 12 — для учащихся 9-х классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для 7-х классов, 4—10 — для 8-х классов, 7—13 — для 9-х классов.

Задачи вступительной контрольной работы в ЗФТШ в 1977 году

Физика

1. Не прибегая к взвешиванию на весах, определить среднюю плотность куриного яйца.

2. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что на прохождение отдельных участков дистанции, длины которых относятся как 1:3:4:2, потребовались промежутки времени, находящиеся в отношении 2:4:3:1, и на последнем участке скорость равнялась 80 *км/час*.

3. Сообщающиеся сосуды в виде цилиндрических трубок длиной 10 *см*, площади поперечных сечений которых отличаются вдвое, соединены внизу резиновым шлангом и наполнены водой до половины высоты. В узкую трубку поместили цилиндрик изо льда высотой 10 *см*. На сколько изменились при этом уровни воды в сосудах, если площадь поперечного сечения цилиндра изо льда практически не отличается от площади поперечного сечения узкой трубки?

4. Горючее получено смешиванием равных объемов бензина и спирта. Какое количество теплоты выделится при сгорании 1 *кг* такой смеси?

5. Через раствор азотнокислого серебра пропускают постоянный электрический ток сначала силой 200 *а* в течение 5 *час*, а затем силой 150 *а* в течение 8 *час*. Какова масса выделившегося из раствора серебра, если

при прохождении одного кулона электричества выделяется 1,118 *мг* серебра?

6. Используя известные экспериментальные данные, оценить среднюю плотность Солнца.

7. После скатывания с горы санки начинают двигаться по горизонтальному участку дороги со скоростью 2 *м/сек*. Коэффициент трения между полозьями санок и дорогой равен 0,02. Какой путь пройдут санки за 15 *сек*?

8. Пассажиры не испытывают неприятных ощущений, если только их вес в полете не увеличивается более чем вдвое. Какое максимальное ускорение в горизонтальном полете допускает это условие?

9. Маятнику массы 1 *кг* сообщили такой толчок, что он совершил полный оборот в вертикальной плоскости. В верхнем положении маятника натяжение нити оказалось вдвое меньше силы натяжения в состоянии покоя, когда груз спокойно висит на нити. Каково натяжение нити в момент прохождения маятником положения равновесия?

10. Вода нагревается электрокипятильником постоянной мощности. На что потребуется больше времени — нагреть воду от 10 до 20 или от 80 до 90° C?

11. Под тяжелый поршень, который может скользить без трения внутри вертикально расположенного откачанного цилиндра, вводится некоторое количество смеси аргона и водорода. В результате поршень смещается вверх и располагается на высоте, составляющей $^2/_3$ от высоты цилиндра, считая от его дна. Однако с течением времени поршень перемещается вниз, так как материал, из которого изготовлен поршень, оказывается проницаемым для водорода. Окончательно поршень располагается на высоте, равной $^1/_4$ высоты цилиндра. Найти отношение масс аргона и водорода в смеси.

12. Конденсатор емкости 1 *мкф*, заряженный до напряжения 44 *в*, подключается через очень большое сопротивление к батарее с э. д. с. 220 *в* так, что положительно заряженная обкладка конденсатора подсоединена к отрицательному полюсу батареи. Определить количество теплоты, которое выделяется в цепи при зарядке конденсатора до напряжения 220 *в*.

Математика

1. Бак вмещает 1000 литров воды. Каждый день расходуют 600 литров, а ночью доливают в бак половину того количества, что находилось в баке утром. В понедельник утром бак был полон. Хватит ли воды в баке в четверг?

2. Существуют ли такие натуральные значения k, m, n, для которых справедливо равенство

$$(2k+1)^2-(2m+1)^2=4(2n+1).$$

3. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, разделяет его на равновеликие фигуры. В каком отношении эта прямая делит две другие стороны треугольника?

4. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) для делимости n^2-1 $(n\geq 5)$ на 24 достаточно, чтобы n было простым числом;

б) для делимости n^2-1 $(n\geq 5)$ на 24 необходимо, чтобы n было простым числом.

5. Ученикам всем поровну раздали тетради. Если бы учеников было на несколько человек меньше, то каждый получил бы 18 тетрадей, а если бы их было больше на то же количество, то некоторые получили бы по 4 тетради, а остальные — по 5 тетрадей. Сколько тетрадей получил каждый ученик?

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Первая окружность проходит через центр второй. Хорда BD первой окружности пересекает вторую окружность в точке C, которая делит дугу ACB так, что $\overset{\smile}{AC}:\overset{\smile}{CB}=1:2$. В каком отношении точка D делит дугу ADB?

7. Найдите четыре числа, первые три из которых составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую прогрессию, если известно, что сумма крайних чисел равна 4, а сумма средних равна 2.

8. В ромбе $ABCD$ угол BAD острый. Окружность, вписанная в этот ромб, касается сторон AB и CD соответственно в точках M и N и пересекает $[CM]$ в точке P, а $[BN]$ в точке Q. Определите $|BQ|:|QN|$, если $|CP|:|PM|=9:16$.

9. Даны два утверждения:

а) *уравнение* $x+\sqrt{x}=a$ *не имеет решений;*

б) *неравенство* $4x^2+(a-3)x+1\geq 0$ *справедливо при всех значениях* x.

При каких значениях a одно из этих утверждений истинно, а другое ложно?

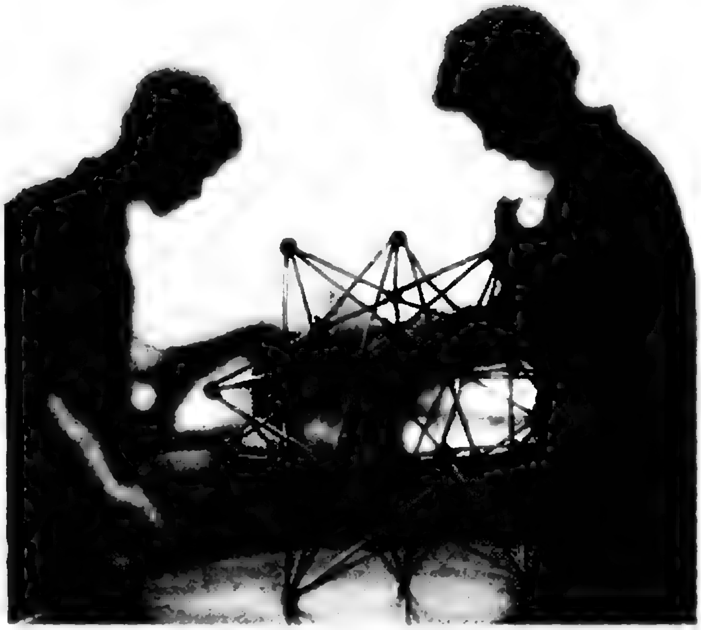
10. Колонна солдат движется с постоянной скоростью, растянувшись на 50 метров. Связной, выйдя из строя, идет с постоянной скоростью до конца колонны, затем поворачивает и доходит до начала колонны, еще раз поворачивает и идет до своего места в строю. За это время колонна продвинулась на 120 метров. Сколько метров прошел связной?

11. Спортплощадку площадью 0,9 гектара, имеющую форму прямоугольника, необходимо огородить с севера и юга деревянным забором, с востока и запада — проволочным. Установка одного метра деревянного забора обходится в 5 рублей, проволочного — в 2 рубля. На строительство выделено 1200 рублей. Достаточно ли этой суммы?

12. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_0=2$, $x_1=\frac{3}{2}$, $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}$. Найдите формулу для x_n. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?

13. Из пункта B идут две прямолинейные дороги: одна в пункт A, другая в пункт C, причем $\widehat{ABC}=120°$. Из A в B и из B в C одновременно выезжают два автомобиля. В тот момент, когда автомобиль, выехавший из A, прошел седьмую часть своего пути, расстояние между автомобилями стало наименьшим. Чему равно отношение скоростей автомобилей?

А. Кирьянов, А. Кутасов, Т. Чугунова



Физико-математическая школа-интернат при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

Вот уже более 13 лет работают специализированные школы-интернаты в Киеве, Ленинграде, Москве, Новосибирске, Ереване и Тбилиси. Задача этих школ состоит в том, чтобы подросткам, живущим вдалеке от научных центров, представить те же возможности выдвижения в науку, что и ученикам университетских городов. Мы попросили председателя попечительского совета школы-интерната при МГУ академика А. Н. Колмогорова и заведующего учебной части по математическому циклу В. В. Вавилова рассказать об их школе.

Многие читатели «Кванта», наверное, видели телевизионный фильм «Спрашивайте, мальчики», который, в частности, рассказывает об интернате при МГУ. В эту школу-интернат принимаются учащиеся, хорошо окончившие восьмой класс и проживающие в Центральной Европейской части СССР, на Урале, Поволжье, Северном Кавказе и Белоруссии. Отбор будущих школьников производит приемная комиссия на основе конкурсных экзаменов по профилирующим предметам, которые устраиваются ежегодно во время проведения областных олимпиад. Сроки этих экзаменов можно узнать в областном отделе народного образования или в Министерстве просвещения соответствующей республики (для поступления в интернат участие в олимпиаде не обязательно; школьники, пропустившие по какой-либо причине экзамен, могут обратиться непосредственно в школу, ее адрес: *Москва, 121357, Кременчугская, 29, школа-интернат, приемная комиссия*).

Если мечта заниматься наукой пришла к вам только в девятом классе, то вы тоже можете принять участие в экзамене — мы принимаем и на один год в десятый класс. Правда, конкурсные требования здесь особенно высоки (на одногодичном потоке всего 60 мест).

По результатам экзаменов лучшие кандидаты вызываются на летний учебный сбор (летнюю ФМШ), где производится окончательное зачисление (в 9 или 10 класс).

В ФМШ учиться нелегко: заниматься приходиться значительно больше, чем в обычной школе, нужны хорошее здоровье и большая организованность. Поступать имеет смысл только тем, кто имеет горячее желание работать в области физико-математических наук и их применений. По окончании ФМШ наши ученики чаще всего продолжают свое образование на механико-математическом или физическом факультетах МГУ, в Московском физико-техническом институте (65% выпускников интерната); в целом же около 95% наших выпускников поступают в различные университеты, технические вузы и педагогические институты.

ФМШ была задумана как школа научного творчества, а не как своеобразные курсы по подготовке к конкурсным экзаменам. Мы стремимся дать нашим питомцам навыки самостоятельного научного мышления, вооружить их всем необходимым

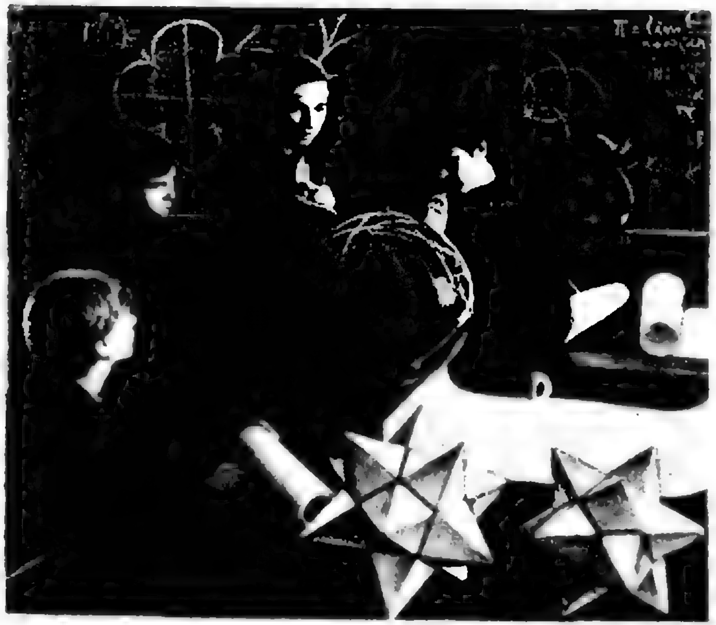
1. Очередной выпуск ежемесячной общешкольной стенной газеты готовят ученики 10а класса.

2. Чтобы разобраться с очередным заданием по математическому практикуму, пришлось... перекрасить глобус!

3. Перед отбоем. Графики, графики, графики...

4. ФМШ — «Футбольно-математическая школа», так расшифровывают ее название ребята. Спортом в школе увлекаются все — от учеников до директора.

1



2

3

4

для восприятия университетских курсов с полным и наглядным пониманием существа дела. Выходя за рамки обычного школьного курса, мы не дублируем, однако, университетское образование. Все это обеспечивает быстрое вхождение лучших выпускников школы в самостоятельную научную работу. Этому в школе способствуют задания по физическому и математическому практикумам, специальные курсы и семинары, кружки и консультации (в вечернее время).

Лекции в ФМШ читают профессора и доценты Московского университета. Лекций, однако, не много — в неделю два часа по математике и два часа по физике. Занятия в классах по математике и физике ведут опытные преподаватели, аспиранты и студенты МГУ (в значительной части из наших же выпускников). Сама система преподавания математики и физики в школе сильна своими традициями, создающими в школе особую атмосферу, в которой интерес к науке, спорт и любовь к природе, интерес к литературе и искусству, общественная работа — все вместе содействует воспитанию полноценного человека.

Окончательная оценка результатов работы интерната может быть получена из анализа успехов выпускников прошлых лет. Выпускники 1964—1969 годов в значительной их части окончили аспирантуру и защитили кандидатские диссертации (и пока только одну — докторскую). Ими опубликованы сотни научных работ, иногда выдающихся. Некоторые из них были приглашены рассказать о своих научных результатах на научные конференции и международные съезды.

На письменные экзамены к нам приходит несколько тысяч человек. И хотя мы не можем принять их всех, очень советуем смелее пробовать свои силы. Нашей стране крайне нужны большие ученые и просто талантливые работники науки. Не лишайте нас возможности найти их!

Приглашаем всех любителей математики и физики в нашу школу!

Голубой экран — абитуриенту-77

В сентябре 1976 года начались занятия на Московских подготовительных телевизионных курсах, созданных в 1971 году Центральным телевидением совместно с Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

Каждый год телекурсы принимают десятки тысяч слушателей. Опыт работы курсов свидетельствует, что большинство учащихся, систематически и добросовестно занимающихся в течение учебного года, поступают в высшие учебные заведения. В этой заметке рассказывается, как будет организована работа подготовительных телекурсов в 1976/1977 учебном году.

Телевизионные занятия проводятся в течение всего учебного года по трем дисциплинам: математике, физике и русскому языку.

На телекурсах в основном принята лекционная форма работы, однако значительная часть телеуроков отводится на практические занятия, консультации и обзорные передачи.

Для закрепления знаний слушателям регулярно предлагаются домашние задания, состоящие из задач, примеров и текстов различной трудности. Как правило, задания соответствуют тематике лекций. Предлагаются они во время телепередач, а также публикуются в прессе («Говорит и показывает Москва»).

После проверки ответы на домашние задания заносятся в картотеку и с оценками возвращаются адресатам.

В 1976/77 учебном году, как и в прошлые годы, телекурсы будут проводить очные зачеты: зимой (примерно в январе — феврале) и весной (примерно в апреле — мае).

На очные зачеты вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Успешно сдавшие зачеты получают в конце учебного года Свидетельства об окончании телевизионных подготовительных курсов. Эти Свидетельства принимаются приемными комиссиями вузов в качестве документа, характеризующего академическую активность абитуриента.

В предстоящем учебном году слушателям будут еженедельно предлагаться две передачи по математике, две — по физике и одна — по русскому языку. Для удобства учащихся (особенно тех, кто работает в разные смены) эти телеуроки повторяются дважды в неделю, в разные дни и часы.

Расписание занятий следующее:

русский язык—премьера в среду днем (повторяется по воскресеньям утром);

математика — премьера по четвергам и пятницам в дневное время (повторяется соответственно по субботам вечером и по воскресеньям утром);

физика — как и математика — по четвергам и пятницам премьеры (соответственно по субботам и воскресеньям повторы).

В основу телевизионных лекций положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР» по русскому языку, математике и физике. Учтены также и изменения в школьных программах по этим предметам. Так, например, занятия по математике в течение года проводятся в соответствии с новой школьной программой по математике. Однако для тех, кто закончил школу или среднее учебное заведение раньше, с января 1977 г. вводится дополнительный курс, соответствующий старой школьной программе по математике. Премьеры этих передач будут транслироваться по понедельникам (днем), а повторы — по четвергам (вечером).

Занятия на телекурсах будут состоять из двух циклов: основного (он закончится в мае 1977 г.) и обзорно-консультационного (июнь — июль 1977 г.). На уроках второго цикла рассматриваются вопросы, вызывающие наибольшие трудности при изучении и повторении учебного материала.

Зона приема передач «Для поступающих в вузы» в 1976/77 учебном году по сравнению с прошлыми годами расширилась — дневные передачи теперь могут смотреть жители ряда областей и районов Украины, Белоруссии Литвы, Латвии, Молдавии, а также Москвы и областей РСФСР: Московской, Белгородской, Брянской, Вологодской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калининградской, Калужской, Кировской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Ленинградской, Липецкой, Пермской, Псковской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ярославской.

На подготовительные телекурсы принимаются все желающие — и уже имеющие законченное среднее образование, и учащиеся — выпускники школ, ПТУ, средних специальных заведений.

Прием на телекурсы проводится без конкурса. Обучение — бесплатное.

Для зачисления слушатель должен прислать в адрес телекурсов «Анкету-заявление», «Регистрационные карточки» и 4 конверта с маркой со своим обратным адресом (один из конвертов должен быть с марками стоимостью на 12 коп.).

«Анкета-заявление» оформляется на обычной почтовой карточке. На лицевой стороне ее напишите свой адрес, а москвичи —

фото
3×4

Р, М, Ф

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество;
2. Год рождения;
3. Род занятий (учусь, работаю);
4. Место работы, должность, стаж (если работаете);
5. В какой вуз собираетесь поступать.

Прошу принять меня на отделение русского языка, математики и физики Московских подготовительных курсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата.

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

1. Фамилия, имя, отчество;
2. Место учебы;
3. Последняя годовая оценка по математике, полученная вами в школе или среднем учебном заведении;
4. В какой вуз собираетесь поступать.

Подпись, дата.

еще номер телефона (домашнего или служебного), если он имеется. Обратная (чистая) сторона карточки заполняется ответами на вопросы анкеты, образец которой приводится.

Все записи следует делать параллельно узкой стороне карточки, чертежным шрифтом.

В правом верхнем углу проставьте буквы, соответствующие отделениям, на которых вы собираетесь заниматься. Например, если вы предполагаете заниматься на всех отделениях, то поставьте три буквы: «Р» (соответствует отделению русского языка), «М» (соответствует отделению математики), «Ф» (соответствует отделению физики). Под ответами на вопросы анкеты напишите текст заявления о приеме (см. образец) с перечислением выбранных вами отделений, поставьте подпись, дату.

Регистрационная карточка оформляется также на почтовой карточке. На лицевой стороне ее обязательно напишите свой адрес (москвичи — еще и телефон). Обратная (чистая) сторона карточки заполняется, как указано на образце. В левый верхний угол приклейте фотографию (размер 3×4 см). Надпись «Регистрационная карточка» делается на сантиметр ниже края почтовой открытки. Все записи выполняются параллельно узкой стороне карточки чертежным шрифтом. Для каждого отделения заполняется отдельная «Регистрационная карточка». В правом верхнем углу каждой карточки проставляется одна из букв — «Р», «М», «Ф», — соответствующая выбранному отделению (так, если слушатель предполагает заниматься на всех трех отделениях, то он должен оформить и прислать три «Регистрационные карточки»).

На письмах с заявлениями о приеме в адрес курсов проставляйте в левом верхнем углу те же буквы («Р», «М», «Ф»), что и в «Анкете-заявлении».

Каждому слушателю, после получения от него письма с заявлением о приеме, присваивается шифр и высылаются (в одном из присланных конвертов) «Удостоверение слушателя» и «Аннотации телевизионных занятий и методические указания к ним». В «Аннотациях» содержится программа занятий, рекомендуемая литература, методические указания к выполнению домашних заданий и правила их оформления, советы, как вести самостоятельно учет успеваемости и т. п.

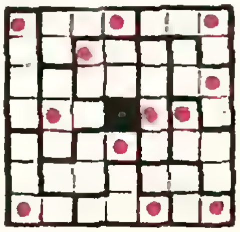
В течение учебного года в тематическом плане телезанятий могут происходить некоторые изменения, поэтому слушателям рекомендуется следить за уточненным расписанием занятий на каждую неделю, которое будет публиковаться в еженедельном обозрении программ Центрального телевидения и радиовещания «Говорит и показывает Москва».

Адрес телекурсов: 113162, Москва, Шаболовка, 37, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы.

И. Наслузов

Укладка тетрамино

Двенадцать тетрамино расположены в квадрате 7×7 (центральная клетка квадрата не закрыта). На каждом тетрамино стоит точка. Переложите тетрамино так, чтобы точки оказались на диагоналях квадрата (а центральная клетка опять была не закрыта). Переворачивать тетрамино нельзя.



Л. Молчалов

Любая карта на плоскости может быть раскрашена в четыре цвета

Так называется заметка, появившаяся в сентябре 1976 года в журнале Американского математического общества «Bulletin of American Mathematical Society». Это сообщение обратило на себя внимание профессиональных математиков и любителей математики всего мира: знаменитая проблема четырех красок решена!

Более ста лет эта проблема дразнила воображение математиков своей формулировкой — не менее простой, чем формулировка Великой теоремы Ферма, и при этом более наглядной; работа над этой проблемой стимулировала создание столь популярной сейчас и важной для приложений теории графов.

Наш журнал неоднократно рассказывал о проблеме четырех красок*).

Вот несколько эпизодов из столетней истории этой проблемы.

1840 год. Немецкий астроном и геометр А. Мебиус доказал, что «на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу». Эта нетрудная теорема — прелюдия к проблеме четырех красок.

1852 год. Английский математик Де Морган пишет своему другу и коллеге В. Гамильтону о задаче, придуманной одним из его студентов: «Любую карту на сфере можно раскрасить не более чем в четыре цвета так, чтобы любые две соседние страны были раскрашены в разные цвета». Четверть века об этой задаче никто не вспоминал.

1878 год. С трибуны Британского географического общества известный английский математик А. Кэли вновь формулирует проблему четырех красок (и добавляет, что сам вот уже несколько дней как не может решить ее — это происходило почти сто лет тому назад!).

С тех пор эта проблема (или гипотеза*) приобрела широкую и до некоторой степени нездоровую известность. «Гипотезу четырех красок можно с полным правом назвать еще «болезнью четырех красок», так как она во многом похожа на заболевание...»**) Ею «переболели» тысячи любителей и математиков, в том числе весьма известных (О. Веблен, Ф. Франклин и т. д.).

1880 год. Одна из первых «жертв» эпидемии — английский адвокат А. Кемпе публикует доказательство гипотезы четырех красок в серьезном математическом журнале, и в течение 10 лет (!) проблема считается решенной.

1890 год. П. Хивуд находит в работе Кемпе ошибку и доказывает, что любая карта на сфере может быть правильно раскрашена пятью красками («правильно» означает «так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет»). Одновременно Хивуд ставит общую задачу о раскраске карт на более сложных поверхностях, чем сфера, — на «сферах с ручками» (на торе, «кренделе» и т. п.), находит формулу для числа красок в зависимости от числа «ручек» и доказывает (как выяснилось, неверно) эту формулу. Случай тора был однако рассмотрен Хивудом до конца и безошибочно.

Хотя история доказательства формулы Хивуда растянулась на 70 лет, все же в 1968 году оно было завершено для всех поверхностей — кроме сферы! Проблема четырех красок по-прежнему казалась неприступной.

Разумеется, упомянутая выше работа американских математиков Аппеля и Хакена, доказавших знаменитую гипотезу (замечательно, что в доказательстве «принимала участие», и весьма существенное, ЭВМ), будет подвергнута учеными многих стран тщательной проверке. Мы надеемся вернуться к этой теме в будущем.

Л. Беве

---

*) См. статьи: для младших школьников — «Топологические опыты своими руками», 1974, № 2, с. 58; для школьников 7—9 классов — «Карты и раскраски», 1972, № 4, с. 33 и для десятиклассников — довольно сложную статью «Арифметика на географической карте», 1974, № 4, с. 23.

*) Гипотеза состоит в том, что карту можно раскрасить, проблема — в том, чтобы решить, верна ли гипотеза.

**) Ф. Харари, Теория графов. Перев. с англ., изд-во «Мир», М., 1973, с. 151.

К статье «Цикл Карно»

1. $\Delta U = \frac{3}{2} R\Delta T = -2{,}5\cdot 10^5$ *дж.*

2. $\Delta U = cm\Delta T = 10^{21}$ *дж.*

3. На графике (рис. 1) заштрихованная площадь численно равна работе, совершаемой при изменении объема газа от 20 до 40 *л*. В выбранном масштабе площадь каждой клетки равна 100 (*л·атм*). Так как 1 *л·атм* $= 10^{-3}$ *м*$^3\cdot 101\,325$ *н/м*$^2 \approx 100$ *дж*, то площадь одной клетки соответствует работе $\approx 10^4$ *дж*. Площадь заштрихованной фигуры примерно равна 4,25 клетки. Следовательно, при изменении объема газа от 20 до 40 *л* совершается работа $A \approx 4{,}25\cdot 10^4$ *дж*.

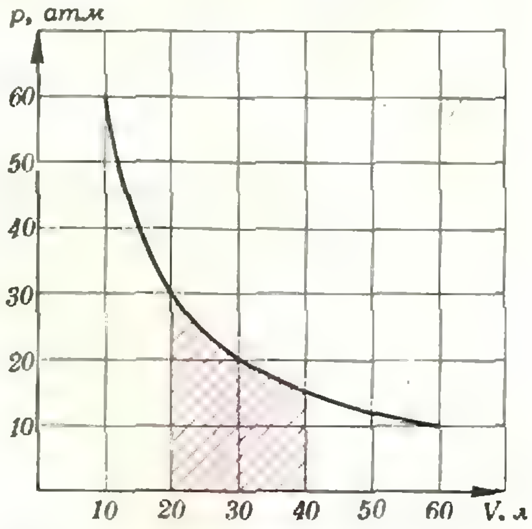


Рис. 1.

4. В процессе AB_1 работа не совершается, внутренняя энергия газа увеличивается.

В процессе AB_2 совершается работа и увеличивается внутренняя энергия газа.

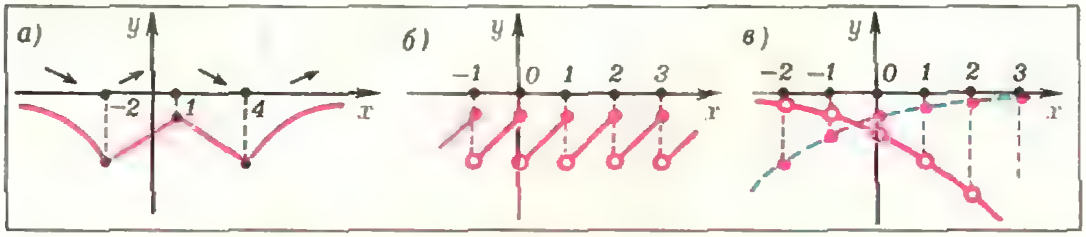


Рис. 2.

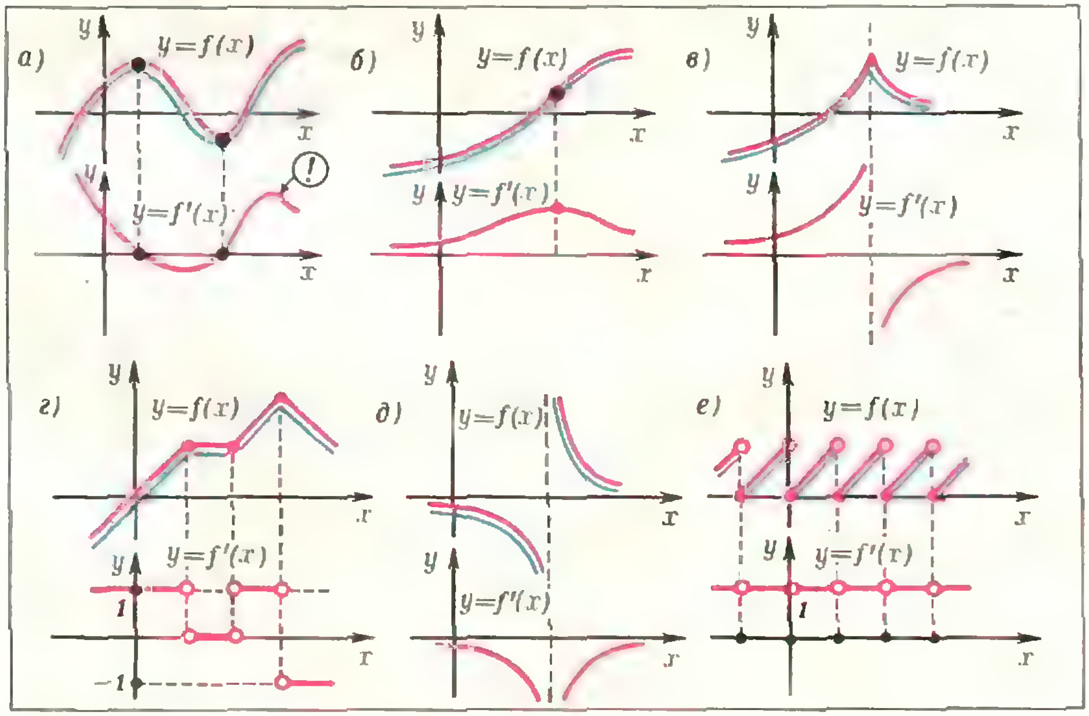


Рис. 3.

В процессе AB_3 совершается работа, внутренняя энергия газа не изменяется.

5. Нагретая поверхность Земли — нагреватель, восходящий поток воздуха — рабочее тело, верхние слои атмосферы — холодильник.

К статье «17 задач по анализу (пределы, непрерывность, монотонность, производная)»

1. Предел существует только в случае *в*).

2. Доопределить функцию так, чтобы существовал нужный предел, можно только в случаях *а*) и *г*).

3. *г*) Такова, например, функция $y=[x]$ (целая часть x).

4. Функции с графиками *б*) и *г*) разрывны в точке $x=x_0$; функция с графиком *б*) разрывна еще и в точке $x=x_1$; функция с графиком *а*) разрывна только в точке $x=x_1$.

5. В случаях *б*) и *г*) функцию f нельзя доопределить до всюду непрерывной.

6. *а*), *б*), *г*) — да; *в*) и *д*) — нет.

7. в) Промежуток возрастания [0,2], убывания — [2, 3].

8. В случае а): 1) нет (пример: $y=[x]-x$); 2) да; в случае *б*): 1) и 2) — да.

9. На рисунках 2,*а* — *в* изображены графики всюду отрицательных функций, удовлетворяющих условиям задачи.

10. Б) Можно.

11. *а*) Две точки максимума и две — минимума.

б) x_0 — точка максимума.

в) Точек экстремума нет.

г) x_0 — точка максимума.

д) x_0 — точка минимума.

е) x_0 — точка максимума.

ж) При целых n в точках $x=2n$ — максимум, в точках $x=2n+1$ — минимум.

з) Одна точка максимума и одна — минимума (кроме того, целый отрезок точек *нестрогого* минимума).

12. Графики производных $y=f'(x)$ под данными графиками функций $y=f(x)$ изображены на рисунках 3,*а* — *е*.

13. Конечно, разные функции могут иметь одну и ту же производную: если $g(x)=f(x)+c$, где c — постоянная, то, очевидно, $g'(x)=f'(x)$. Более подробно по этому поводу см. в п. 98 учебника «Алгебра и начала анализа 10». Примерные графики функций $y=f(x)$, имеющих данные графики производных $y=f'(x)$, изображены на рисунках 4,*а* — *е*.

14. а): 1) нет, 2) да;
б): 1) нет, 2) да;
в) да.

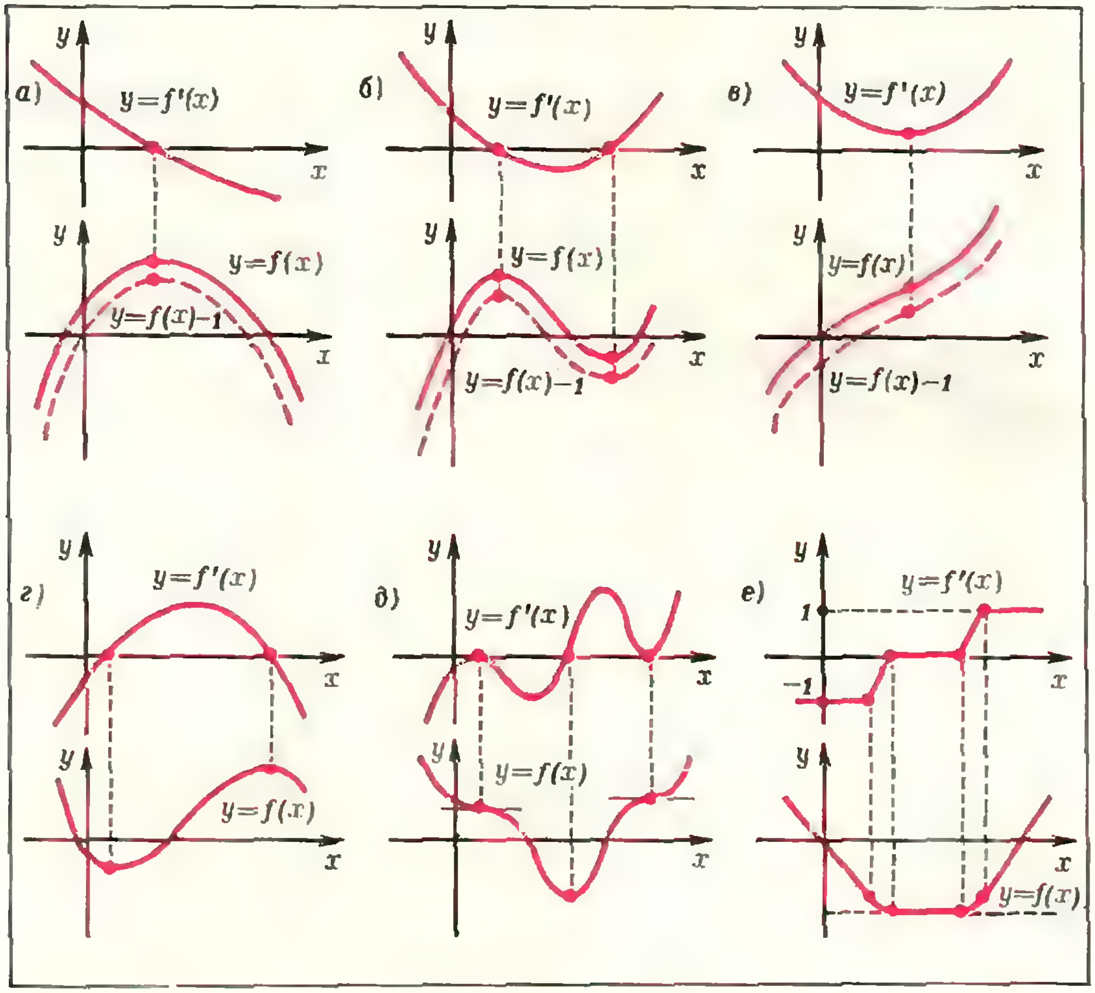


Рис. 4.

15. а): 1) и 2):— да (примеры: $y=10^{-x}$ и $y=10^{x}$)

б) да (пример: $y=x+\sin x$);

в) 1) да (пример: $y=x^3+17$), 2) нет.

16 А). а) $a>0$, $b>0$, $c>0$; б) $a>0$, $b<0$, $c<0$;

в) $a<0$, $b>0$, $c<0$; г) $a<0$, $b<0$, $c>0$.

Б). Ответ: *нет*. Указание: рассмотрите производную функции $y=ax^3+bx^2+c$.

17. а) 4; б) 5; в) 8.

К статье «Периодичность и непериодичность функций»

1. $f_1(x)$ — непериодическая, $f_2(x)$ — периодическая.

2. Нет. Указание. Решить уравнение $2\pi^x=3e^x$.

3. Указание. Убедиться, что $f_1'(x)>0$. Доказать, что $f_2(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$.

4. Указание. Функция $f_1(x)$ — неограниченная. Вычислить функцию $g_1(x)=f_2(x)+f_2'(x)$, а затем — функцию $g_2(x)=g_1(x)+g_1'(x)$; решить уравнение $g_2(x)=0$.

6. Нет. Указание. Рассмотреть уравнение $f(x+T)=f(x)$ при $x=0$ и $x=\pi^2$.

7. Указание. Решить уравнения $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_3(x)=0$.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Географический факультет

1. 3 *м*³. 2. $x_1=-1$, $x_2=7$. 3. $z_1=2k\pi$, $z_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ (k и n — целые). 4. $3<x<5-\sqrt{3}$, $x>7$. Указание. Величина $\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)$ может принимать значения как большие, так и меньшие единицы. 5. $\frac{4}{5}S$. Указание. Доказать, что вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

1. $x_1=10^{-1/3}$, $x_2=10^3$. 2. Производительность первого транспортера 6 *м*³/*ч*, второго — 4 *м*³/*ч*. 3. $x=\pi+2k\pi$ (k — целое). 4. $x=-49+24\sqrt{3}$, $y=-6+2\sqrt{3}$. Указание. Переписать первое уравнение в виде

$$\sqrt{-1-x}=1+\sqrt{2y-x}$$

и, возведя в квадрат, получить равенство $-1-x=y^2$. Затем, сложив данные уравнения, прийти к уравнению

$$\sqrt{y^2}+\sqrt{1-2y}=5$$

и заметить, что его корни должны удовлетворять условию $|y|\leqslant 5$. 5. $R=\frac{1}{12}\sqrt{9970}$. Указание. Установить, что $ABCD$ — прямоугольник. Показать, что радиусы окружностей, проведенные в точку M их пересечения, взаимно перпендикулярны, а потому центр второй окружности лежит вне первого круга. Рассмотреть два случая: 1) центр O второй окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка D (тогда применить теорему косинусов к треугольнику BSO, где S — центр прямоугольника $ABCD$, учитывая, что $\widehat{BSO}=90^\circ+2\cdot\widehat{BAC}$, а стороны BO и SO выражаются через радиус R второй окружности из прямоугольных треугольников BMO и CSO); 2) центр второй окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка B (доказать, что этот случай невозможен).

Геологический факультет (отделение геофизики)

1. 2,5 *м*³. 2. $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y=\operatorname{arctg}3+n\pi$ (k и n — целые). 3. $x<-\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}<x<-\sqrt{3/2}$, $\sqrt{3/2}<x<\sqrt{6}$, $x>\sqrt{6}$. 4. $|AB|=\sqrt{112}$, $|BD|=16$. Указание. Убедиться, что $|EM|=\frac{1}{4}|EF|$, так что $\triangle CEM$ — равнобедренный. Продолжив FE до пересечения со стороной AD в точке K, вывести из $\triangle KFD\sim\triangle BFE$, что $|KF|=\frac{1}{3}|EF|$, а из $\triangle AKM\sim\triangle MEC$, что $|MC|=3$. Провести через точку F прямую, параллельную стороне AB; пусть N — точка пересечения этой прямой с диагональю AC. Показать, что $|NM|=1$. Записать: теорему косинусов для треугольника MNF, выразив $\cos\widehat{MNF}$ из треугольника MEC; теорему косинусов для треугольника OMF, где O — центр параллелограмма; соотношение между сторонами и диагоналями параллелограмма.

5. $-\sqrt{\frac{3}{14}}<p\leqslant-\sqrt{\frac{1}{14}}$, $\sqrt{\frac{1}{14}}\leqslant p<\sqrt{\frac{3}{14}}$.

Указание. Получить решение заданного неравенства в виде $-7p^2+\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant p^2+\frac{15}{4}$. Выяснить, при каких значениях p на отрезке между числами $-7p^2+\frac{7}{2}$ и $p^2+\frac{15}{4}$ лежит целое число и притом только одно. Для этого рассмотреть параболы $y_1=-7p^2+\frac{7}{2}$ и $y_2=p^2+\frac{15}{4}$ и заметить, что $y_1=3$ при $|p|=\sqrt{1/14}$, $y_1=2$ при $|p|=\sqrt{3/14}$, а $y_2=4$ при $|p|=1/2$.

Факультет почвоведения

1. Первый поезд был в пути 75 *ч*, а второй 50 *ч*. 2. $(2\sqrt{6}-3):3$. 3. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$ (k — целое).

4. $\alpha = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ (k — целое).

5. $1 < x < \sqrt{2}$. Указание. Рассмотреть отдельно случаи $0 < x - 1 < 1$ и $x - 1 > 1$; во втором случае доказать, что при всех $x > 2$ справедливо неравенство $x^4(x^2 - 2) > 1$.

Биологический факультет

1. $x = \frac{k\pi}{2}$ (k — целое). 2. $7^{-1/3} < x < 1$. 3. Весовое соотношение веществ A, $Б$ и воды в растворе № 2 равно 2:3:4. 4. Площадь трапеции равна $16\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$. Указание. Доказать, что радиус первой окружности равен 2, а радиус второй $2/\sqrt{3}$. Убедиться, что центр второй окружности лежит к вершине при большем основании трапеции ближе, чем центр первой окружности. Записать уравнение, означающее, что расстояние от вершины при большем основании трапеции до центра O_1 равно расстоянию от той же вершины до центра O_2, сложенному с расстоянием между центрами. Далее воспользоваться тем фактом, что квадрат диаметра окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен произведению длин оснований трапеции. 5. Указание. Рассмотреть графики функций $y = 2x - x^2$, $y_2 = \frac{2}{x}$ и показать, что при $0 < x \leqslant 2$ график функции y_1 лежит не выше прямой $y = 1$, а график функции y_2 — не ниже этой прямой.

Химический факультет

1. 10 *м/ч*. 2. $-1 < x < -\frac{1}{2}(\log_3 26 - 1)$, $\frac{1}{2}(\log_3 26 - 1) < x < 1$. Указание. Заметить, что $x^2 = |x|^2$, и обозначить $|x|$ через z. 3. $\sqrt{3}$. 4. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (k — целое). 5. 2.

К статье «На рыбалке»

1. Из разговора ребят можно сделать вывод, что двое из них, в том числе Петя, учатся в одном классе (у Иннокентия Петровича), а третий — в другом (у Николая Геннадиевича). Ребята, учащиеся в одном классе, поймали по окуню, тогда как у поймавшего больше всех рыбы окуней не оказалось. Следовательно, тот, кто поймал больше всех рыбы, — не Петя, и учится он у Николая Геннадиевича. Но у Васи не самый большой улов, поэтому больше всех рыбы мог поймать только Коля. Значит Вася учится у Иннокентия Петровича.

2. Обозначим через n число пойманных рыб. Первый рыболов взял себе $(n-1)/3$ рыб, второй $[2(n-1)/3-1]/3 = (2n-5)/9$, третий $(4n-19)/27$. Надо найти наименьшее натуральное n, при котором числа $(n-1)/3$, $(2n-5)/9$ и $(4n-19)/27$ — целые. Положим $(4n-19)/27 = k$, тогда $n = (27k+19)/4$. При $k = 3$ получаем ответ: $n = 25$ (при $k = 1$ и $k = 2$ получаются нецелые n). Кстати, при $k = -1$ получаем $n = -2$ — ответ Дирака.

КРОССВОРД

«Знаменитые ученые»

По горизонтали:

5. Один из основателей небесной механики. 6. Русский математик, основатель одного из наиболее важных направлений в теории вероятностей. 9. Физик, доказавший на опыте существование электромагнитных волн. 12. Один из создателей теории функций комплексной переменной. 13. Крупнейший математик XVIII—XIX столетий. 14. Физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. 17. Французский физик XIX века. 18. Физик и инженер, установивший закономерности работы тепловых машин. 19. Советский инженер, использовавший в своих конструкциях однополостный гиперболоид вращения. 22. Астроном, обнаруживший новую планету по данным, предвычисленным Леверье. 23. Физик-экспериментатор, работы которого положили начало ультрафиолетовой и инфракрасной фотографии. 25. Знаменитый датский физик. 26. Греческий математик, инженер и изобретатель I в. н. э. 30. Врач, один из первых сформулировавший закон превращения и сохранения энергии. 31. Основоположник кибернетики. 32. Астроном, который произвел точное определение радиуса Земли.

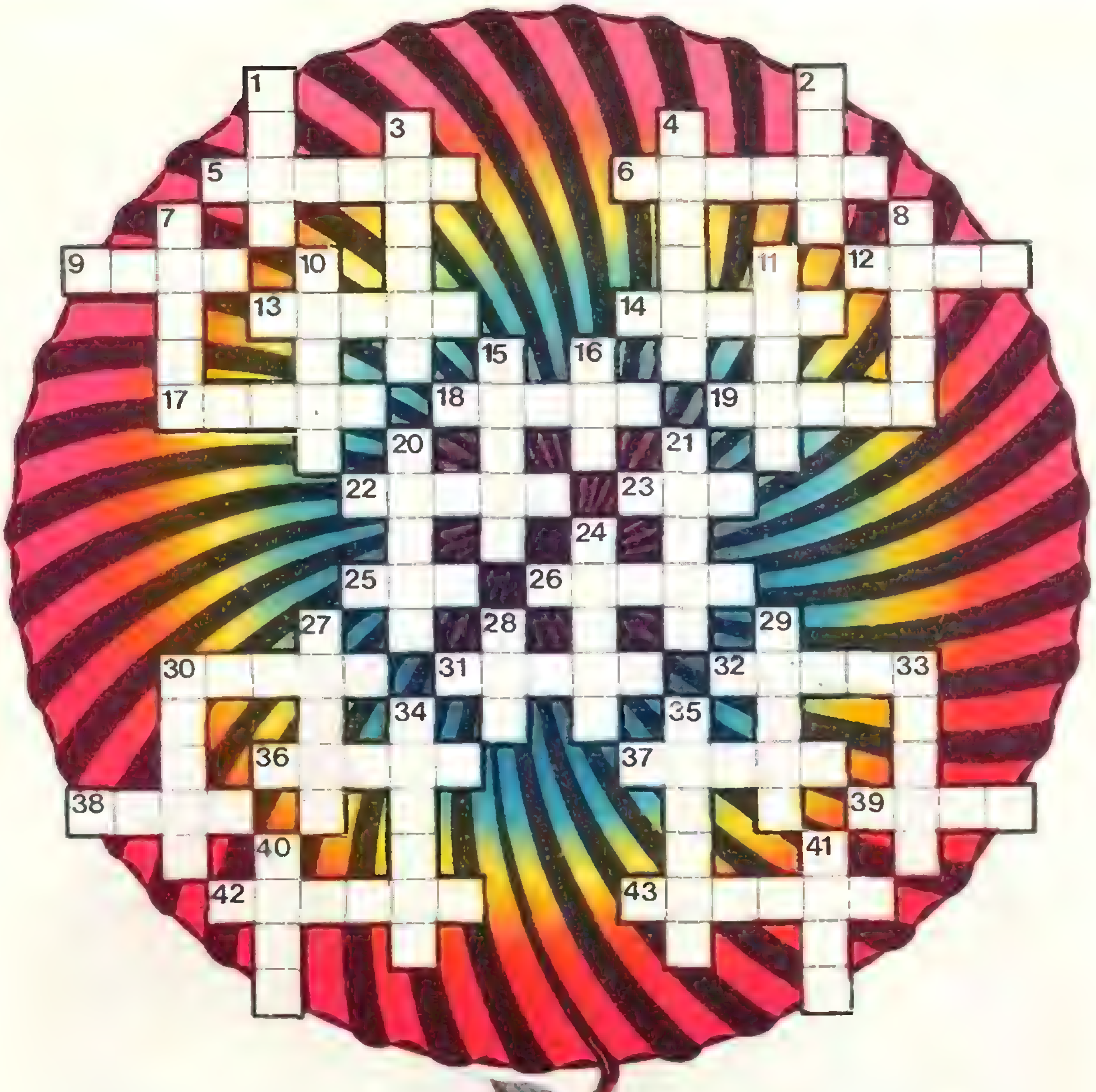
Номер готовили:	В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович
Номер оформили:	М. Дубах, Г. Красиков, И. Смирнова, Э. Пономарева
зав. редакцией	Л. Чернова
художественный редактор	Т. Макарова

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/X-76 г.
Подписано в печать 29/XI-76 г.
Бумага $70\times108^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,20. Уч.-изд. л. 6,45
Цена 30 коп. Заказ 2384 Тираж 294 725 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



36. Французский физик и математик, установивший закон взаимодействия электрических токов. 37. Астроном, впервые доказавший, что наша звездная система — не единственная во Вселенной. 38. Основоположник математической логики. 39. Физик, доказавший волновую природу рентгеновских лучей. 42. Немецкий математик, основоположник теории множеств. 43. Физик, один из изобретателей прибора, позволяющего считать отдельные заряженные микрочастицы.

По вертикали:

1. Французский математик, впервые применивший в алгебре буквенные обозначения. 2. Русский физик-теоретик. 3. Немецкий физик, разработавший теорию электролитического растворения металлов. 4. Английский математик, обладавший феноменальной памятью. 7. Английский физик, сконструировавший спинтарископ. 8. Изобретатель радио. 10. Индийский физик, лауреат Нобелевской премии. 11. Великий французский математик, живший в XIX столетии. 15. Физик, высказавший гипотезу о существовании нейтрино. 16. Выдающийся английский ученый XVIII—XIX столетий. 20. Один из основоположников квантовой электроники. 21. Французский физик, сформулировавший законы сухого трения. 24. Один из основателей теории логарифмов. 27. Французский математик, один из создателей теории чисел. 28. Физик, теоретически обосновавший один из законов излучения черного тела. 29. Один из основателей химической термодинамики и статистической механики. 30. Английский физик, установивший зависимость длин волн рентгеновских лучей от величины заряда ядра. 33. Выдающийся немецкий математик XIX века. 34. Основоположник отечественной электротехники. 35. Астроном, один из пионеров применения спектрального анализа в астрономии. 40. Выдающийся английский изобретатель XVIII—XIX столетий. 41. Русский физик, установивший закон выделения тепла электрическим током в проводниках.

Г. Цеслер

НОМЕР
2

Основан в 1970 году

Квант

2
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *Ю. Макаренков.* Алгоритмы на словах
10 *А. Вирский.* Этот удивительный эллипсоид
12 *Р. Гутер, Ю. Полунов.* Точка, точка, запятая...

Лаборатория «Кванта»

15 *Е. Пономарев.* Опыты для изучения реактивного движения

Математический кружок

17 *В. Болтянский.* Шесть зайцев в пяти клетках
21 **Победители конкурса «Кванта»**

Задачник «Кванта»

22 Задачи М426—М430; Ф438—Ф442
24 Решения задач М386—М390; Ф393—Ф396
30 *С. Пухов.* Задача о выпуклых телах

По страницам школьных учебников

35 *А. Хинчин.* Геометрический смысл производной

«Квант» для младших школьников

38 Задачи
39 *Ю. Данилов.* Головоломки художника Громова
43 *В. Березин.* Строфоида

Практикум абитуриента

44 Программа вступительных экзаменов по математике для поступающих в вузы в 1977 году
47 *И. Габович.* Конусы в каркасах
50 *Э. Турчин.* Как решать задачи на механическое движение
54 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
58 **Спрашивайте — отвечаем**
60 *Л. Мочалов.* Сквэрворд
61 *А. Савин.* Сквэрворд и слова-оборотни
62 **Ответы, указания, решения**
Смесь (с. *9, 14, 21, 34, 57, 59*)

На первой странице обложки изображены ...280 десятичных знаков числа π. ЭВМ вычислила 100 000 знаков числа π и оказалось, что все десять цифр встречаются в этой записи примерно одинаково часто. Подробнее об этом рассказано в заметке В. Вавилова (см. с. 57).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

Ю. Макаренков

Алгоритмы на словах

В конце девятнадцатого — начале двадцатого века в математике появился новый объект для изучения: цепочки символов, взятых из фиксированного набора. У нас в математической литературе такие цепочки называют теперь *словами*.

Знаменитый немецкий математик Давид Гильберт в начале века предложил план доказательства непротиворечивости математики при помощи построения *исчислений* (то есть правил преобразования) слов. В начале тридцатых годов было выяснено, что «всю математику» (и даже «всю арифметику») втиснуть в одно исчисление невозможно (это знаменитая *теорема Гёделя*). Хотя надежды Гильберта в полном объеме не оправдались, отдельные разделы математики «формализовать» таким путем удается, и все современные исследования по основаниям математики начинаются с подобной формализации. Во многих разделах математики (например, в математической лингвистике и общей алгебре) и ее приложениях (скажем, языки программирования) слова стали одним из важнейших объектов изучения.

Теория алгоритмов родилась только в тридцатых годах нашего века. С тех пор понятие алгоритма также стало одним из важнейших в математике.

Хотя слово «алгоритм» появляется только в последнем разделе предлагаемой статьи, вся она посвящена словам и алгоритмам, работающим со словами.

Вводный пример

Фиксируем на плоскости равносторонний треугольник ABC (рис. 1). Обозначим через R поворот плоскости на 120° против часовой стрелки вокруг центра O треугольника (рис. 2); через S обозначим осевую симметрию плоскости с осью OB (рис. 3). Каждое из преобразований R, S отображает треугольник ABC на себя. Поэтому их называют также *самосовмещениями* исходного треугольника. Самосовмещения R и S мы будем называть *элементарными*.

Рассмотрим всевозможные композиции элементарных самосовмещений («Геометрия 7», п. 77). Каждая такая композиция снова, очевидно, будет некоторым самосовмещением.

Подобно обычным операциям сложения и умножения чисел, операция композиции самосовмещений обладает сочетательным, или ассоциативным, свойством: если f, g, h — самосовмещения, то

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

(Это верно не только для самосовмещений треугольника, но и для произвольных отображений любого множества M в себя!) Поэтому в «длинных» композициях элементарных самосовмещений скобки можно ставить в любом порядке, а значит, можно их и вообще не ставить. Например,

$$(R \circ S) \circ (R \circ R) = R \circ ((S \circ R) \circ R) = R \circ S \circ R \circ R.$$

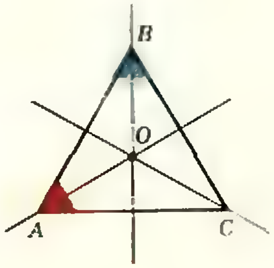


Рис. 1.

В отличие от сложения и умножения чисел, операция композиции самосовмещений не обладает, вообще го-

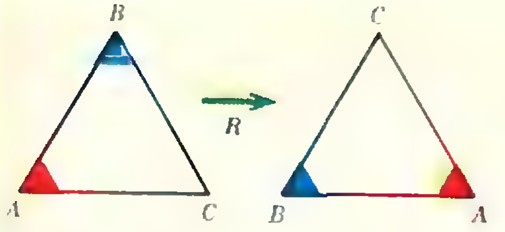


Рис. 2.

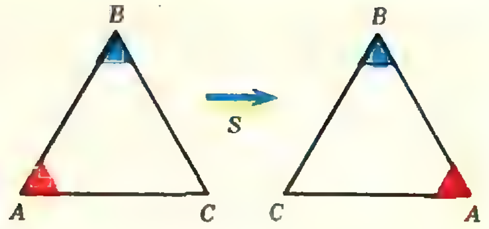


Рис. 3.

воря, переместительным, или коммутативным, свойством. Так, в данном случае $R \circ S \neq S \circ R$ (ср. рисунки 4 и 5).

Напишем наудачу какую-нибудь «длинную» композицию элементарных самосовмещений:

$$X = S \circ S \circ R \circ S \circ R \circ S \circ R \circ S \circ S \circ R. \quad (1)$$

Что можно сказать о самосовмещении X?

Легко доказать, что всего существует шесть самосовмещений исходного треугольника: тождественное отображение E, оставляющее каждую точку плоскости на месте; поворот на 120° против часовой стрелки; поворот на 120° по часовой стрелке; осевые симметрии с осями OA, OB, OC. Из рисунков 4 и 5 видно, что осевая симметрия с осью OA совпадает с композицией $S \circ R$, а осевая симметрия с осью OC есть композиция $R \circ S$.

Задача. Представьте в виде композиции элементарных самосовмещений поворот на 120° по часовой стрелке.

Итак, наша наудачу написанная композиция (1) является одним из шести перечисленных самосовмещений. Каким же именно?

Разумеется, этот вопрос легко решить чисто геометрически: проделайте с исходным треугольником по очереди все указанные самосовмещения (не забудьте только, что запись $f \circ g$ означает: сначала совершается g, потом f!) и посмотрите на конечное положение треугольника.

Для наших целей существенно, что этот же вопрос можно решить при помощи некоторого алгебраического вычисления.

Легко проверить, что

$$\left\{\begin{aligned} S \circ R &= R \circ R \circ S, \\ R \circ R \circ R &= E, \\ S \circ S &= E. \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Кроме того, в любой композиции самосовмещений тождественное отображение E можно опускать.

Поскольку нам предстоит сравнительно длинная выкладка, да-

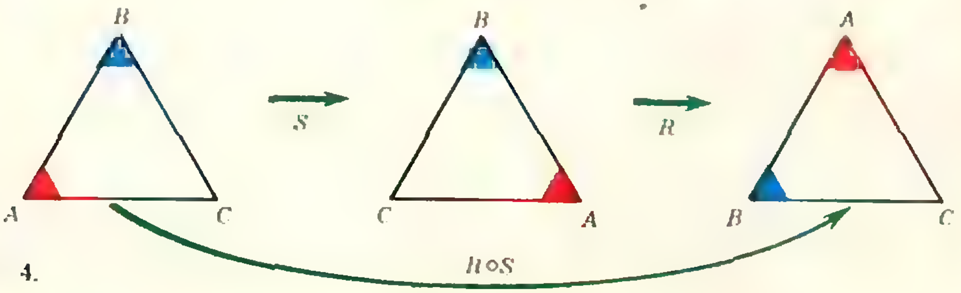


Рис. 4.

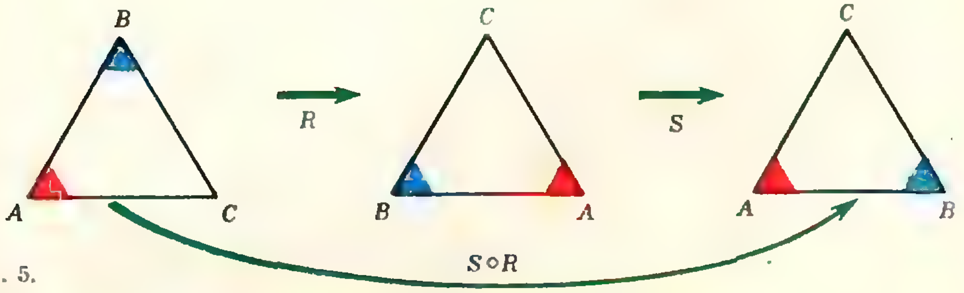


Рис. 5.

вайте со знаком композиции ∘ обходиться как с точкой при умножении: не будем этот знак писать. Равенства (1), (2) примут тогда вид

$$X = SSRSRSRSSR, \qquad (3)$$

$$\left\{\begin{aligned} SR &= RRS, \\ RRR &= E, \\ SS &= E. \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Композицию X можно преобразовать так:

$$\begin{gathered} X = SSRSRSRSSR = \\ = (SS)R(SR)(SR)(SS)R = \\ = ER(RRS)(RRS)ER = \\ = R(RRS)(RRS)R = \\ = (RRR)(SR)R(SR) = \\ = E(RRS)R(RRS) = \\ = (RRS)R(RRS) = RRS(RRR)S = \\ = RRSES = RRSS = RR(SS) = \\ = RRE = RR. \end{gathered}$$

Ассоциативные исчисления

В только что проведенной выкладке мы фактически имели дело со *словами* (см. первый абзац статьи).

В предыдущем разделе буквы R и S имели смысл: они обозначали вполне конкретные объекты — некоторые самосовмещения. Сейчас мы займемся изучением абстрактных букв и слов — букв и построенных из них слов, которые ничего не обозначают. (Впрочем, ниже мы еще вернемся к примеру из предыдущего раздела.)

Исходный набор букв, из которого строятся слова, называется *алфавитом*. Число букв в слове называют его *длиной*.

Пусть наш исходный алфавит состоит всего из двух букв: $\{a, b\}$. Тогда существуют 4 слова длины 2: aa, ab, ba, bb; 8 слов длины 3 и т. д. Разрешается говорить и об «однобуквенных» словах, словах длины 1; их всего два: a и b. Удобно считать, что существует также слово, не содержащее букв — *пустое слово*. Пустое слово — это аналог пустого множества. Его обозначают греческой буквой Λ. Длиной его, конечно, считают число 0.

Наши «правила игры» будут иметь такой вид:

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \qquad (5)$$

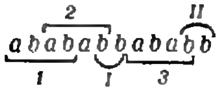


Рис. 6.

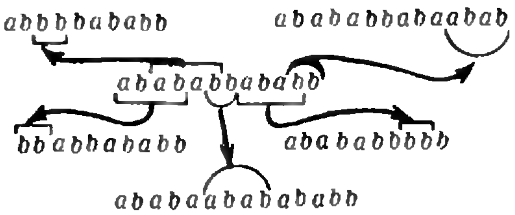


Рис. 7.

где α и β — некоторые слова. Правило (5) означает, что в любом слове можно вместо α подставить слово β и вместо β — слово α. Правила вида (5) называются *подстановками*.

Рассмотрим для примера подстановку:

$$abab \leftrightarrow bb. \qquad (6)$$

В слово $\gamma = ababab b ababb$ слово $abab$ входит в трех местах (рис. 6) или, как говорят в математике, имеет три *вхождения*. Слово bb имеет в слово γ два вхождения (рис. 6). Однократным применением подстановки (6) из слова γ можно получить 5 слов (рис. 7). К слову $abaab$ подстановка (6) неприменима: в него не входят ни левая, ни правая части этой подстановки.

Когда мы вычисляем $((10+2) \times (8-3)) : (15-3) = (12 \cdot 5) : 12 = 60 : 12 = 5$, мы, по существу, применяем подстановки $(10+2) \leftrightarrow 12$, $(8-3) \leftrightarrow 5$, $(12 \cdot 5) \leftrightarrow 60$ и т. п.

Подстановка вида

$$\alpha \leftrightarrow \Lambda \qquad (7)$$

означает, во-первых, что в любом слове вместо α можно «подставить пустое слово», т. е. попросту выбросить вхождение слова α. Если, например, подстановку

$$bb \leftrightarrow \Lambda \qquad (8)$$

применить таким образом ко второму вхождению слова bb в слово γ, получится слово $ababab baba$. Подстановка вида (7) означает, во-вторых, что в любом слове между любыми двумя буквами можно «вставить» слово α: естественно считать, что пустое слово входит между любыми буквами. Кроме того, применяя подстановку (7) «справа налево», можно, конечно, «приписать» слово α как впереди, так и позади любого слова. Таким применением подстановки (8) можно из того же слова γ получить 6 слов (почему?).

Чтобы задать «игру», надо фиксировать некоторый конечный набор подстановок. Такой набор (вместе с алфавитом) в математической логике называется *ассоциативным исчислением.*

Два слова называются *смежными* в данном ассоциативном исчислении, если одно из них можно получить из другого однократным применением какой-нибудь из подстановок этого исчисления. Два слова, δ и η, называются *эквивалентными* в данном исчислении, если их можно «соединить» цепочкой смежных слов, т. е. если существуют такие слова μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n$, что в цепочке $\delta, \mu_1, \mu_2 \ldots \ldots, \mu_n, \eta$ каждое слово смежно со своими соседями. Эквивалентность слов δ, η мы будем обозначать так: $\delta \sim \eta$.

Разумеется, смежные слова эквивалентны.

Пример 1

Рассмотрим в алфавите $\{a, b\}$ ассоциативное исчисление с подстановками

$$\begin{cases} ba \leftrightarrow aab, \\ aaa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda. \end{cases} \tag{9}$$

Какие слова в этом исчислении эквивалентны?

Например, $aababbaaaaba \sim a$, поскольку в цепочке $aababbaaaaba$, $aabaaaaaba$, $aabaaba$, $aaaababa$, $ababa$, $aaabba$, bba, a каждое слово смежно со своими соседями.

А нельзя ли указать способ, как для любых двух слов в нашем алфавите узнавать, эквивалентны они или нет?

Сравнение равенств (4) с подстановками (9) подсказывает такой способ. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC и его самосовмещения R, S (с. 2).

Для любого слова α обозначим через T_α композицию элементарных самосовмещений R и S, получающуюся в результате замены в слове α буквы a на R и буквы b — на S. Например, $T_{ba}=SR$, $T_{abaa}=RSRR$.

Поскольку в композиции самосовмещений тождественное отображение E можно не писать, положим по определению $T_\Lambda=E$.

Каждая композиция элементарных самосовмещений может, очевидно, быть записана в виде T_α, где α — некоторое слово.

Таким образом, мы получили некоторое соответствие между множеством всех слов в алфавите $\{a, b\}$ и множеством самосовмещений. Это соответствие не является обратимым: различным словам может соответствовать одно и то же самосовмещение. Например, $T_{ba} = SR = RRS = T_{aab}$ (ср. рисунки 5 и 8).

Способ, который мы хотим предложить для установления эквивалентности произвольных слов, основывается на трех «китах»:

(А) *Левой и правой части каждой из подстановок исчисления соответствует одно и то же самосовмещение:*

$$\begin{cases} T_{ba} = T_{aab}, \\ T_{aaa} = T_\Lambda, \\ T_{bb} = T_\Lambda. \end{cases}$$

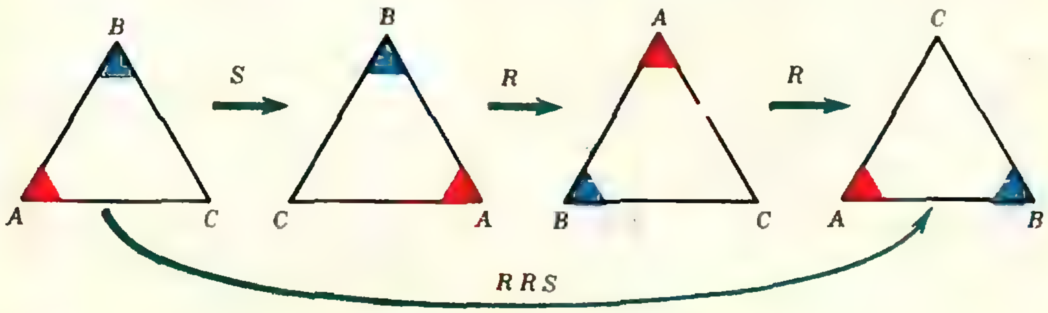


Рис. 8.

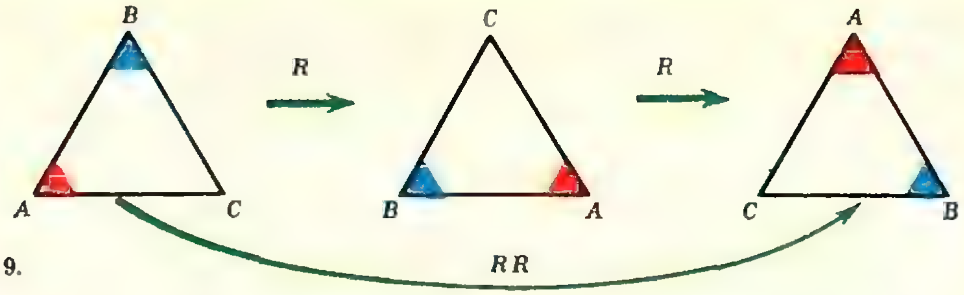


Рис. 9.

(Б) *Любое слово эквивалентно в нашем исчислении одному из шести слов:* Λ, a, b, aa, ab, aab.

(В) *Любым двум из слов* Λ, a, b, aa, ab, aab *соответствуют разные самосовмещения.*

Прежде всего установим верность утверждений (А) — (В).

Утверждение (А) вытекает из равенств (4). Утверждение (В) проверяется геометрически: подействуем на исходный треугольник самосовмещениями T_Λ, T_a, T_b, T_{aa}, T_{ab}, T_{aab} и увидим, что получаются разные результаты (см. рисунки 1—3, 9, 4 и 8).

(Б) доказывается посложнее. Пусть α — произвольное слово. Применив к нему нужное число раз первую из подстановок (9), мы «перегоним» все a в начало. Таким образом, слово α эквивалентно слову вида

$$\beta = \underbrace{aa\ldots a}_{k}\underbrace{bb\ldots b}_{l}$$

($k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$). Если l четно, то, применив к β нужное число раз третью из подстановок (9), мы можем «уничтожить» в β все b. В этом случае β, а значит, и α, эквивалентно слову вида

$$\gamma' = \underbrace{aa\ldots a}_{k}.$$

В зависимости от остатка деления числа k на 3 (он равняется 0, 1 или 2) слово γ' при помощи второй из подстановок (9) преобразуется в одно из слов Λ, a, aa. Если же l нечетно, то β и α эквивалентны слову вида

$$\gamma'' = \underbrace{aa\ldots a}_{k}b.$$

В зависимости от того же остатка слово γ'' переводится в одно из слов b, ab, aab.

Из (А), очевидно, следует, что смежным словам соответствует одно и то же самосовмещение. Значит, это верно и для эквивалентных слов:

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow T_\alpha = T_\beta. \tag{10}$$

Из (Б), (В) и (10) мы получим обратное утверждение:

$$T_\alpha = T_\beta \Rightarrow \alpha \sim \beta. \tag{11}$$

Пусть $T_\alpha = T_\beta$. В силу (Б) каждое из слов α, β эквивалентно одному из слов Λ, a, b, aa, ab, aab. Положим $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, где $\alpha', \beta' \in \{\Lambda, a, b, aa, ab, aab\}$. Из (10) $T_{\alpha'} = T_\alpha$ и $T_{\beta'} = T_\beta$. Учитывая $T_\alpha = T_\beta$, получаем $T_{\alpha'} = T_{\beta'}$. Тогда из (В) $\alpha' = \beta'$. Следовательно, $\alpha \sim \beta$.

Из (10) и (11) вытекает

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow T_\alpha = T_\beta. \tag{12}$$

Просмотрите еще раз доказательство утверждения (12) и вы убедитесь, что это доказательство опирается только на (А) — (В). После того, как (А) — (В) установлены, дальнейшее обращение к подстановкам исчисления не нужно.

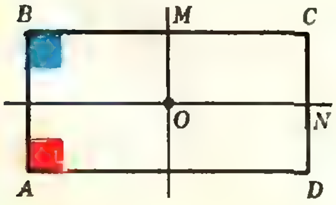


Рис. 10.

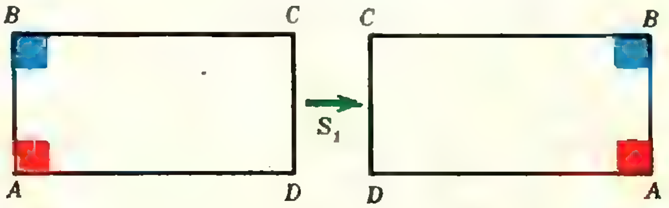


Рис. 11.

Теперь, после установления (12), мы можем наконец предложить обещанный способ: пусть надо испытать на эквивалентность слова α и β; подействуйте на треугольник ABC самосовмещениями T_α и T_β: если получите одинаковый результат, то $T_\alpha = T_\beta$ и, значит, в силу (12) α и β эквивалентны; в противном случае, опять в силу (12) они не эквивалентны.

Пример 2

Рассмотрим теперь в том же алфавите $\{a, b\}$ ассоциативное исчисление с подстановками:

$$\begin{cases} ab \leftrightarrow ba, \\ aa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda. \end{cases} \tag{13}$$

Для этого исчисления легко указать два способа распознавания эквивалентности.

Первый способ

Данный способ аналогичен способу из примера 1. Фиксируем на плоскости какой-нибудь прямоугольник $ABCD$ (рис. 10). Обозначим через S_1 осевую симметрию плоскости с осью OM, проходящей через центр симметрии прямоугольника O параллельно стороне AB (рис. 11); через S_2 обозначим осевую симметрию с осью ON (рис. 12). Обе эти симметрии являются самосовмещениями исходного прямоугольника. Самосовмещения S_1 и S_2 мы будем называть *элементарными*.

Как и в примере 1, рассмотрим всевозможные композиции элементарных самосовмещений.

На этот раз самосовмещение T_α мы будем получать из слова α заменой буквы a на S_1, буквы b — на S_2.

Опять выполняются три «кита»:

(А) *Левой и правой части каждой из подстановок исчисления соответствует одно и то же самосовмещение:*

$$\begin{cases} T_{ab} = T_{ba} \\ T_{aa} = T_\Lambda, \\ T_{bb} = T_\Lambda. \end{cases}$$

(Б) *Любое слово эквивалентно в нашем исчислении одному из четырех слов:* Λ, a, b, ab.

(В) *Любым двум из слов* Λ, a, b, ab *соответствуют разные самосовмещения.*

Из (А) — (В), как и выше, выводится

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow T_\alpha = T_\beta.$$

Значит, эквивалентность произвольных слов α, β устанавливается, как в примере 1: подействуйте на прямоугольник $ABCD$ преобразованиями T_α и T_β: если получим одинаковый результат, то $\alpha \sim \beta$; иначе α и β не эквивалентны.

Второй способ

Присмотревшись к подстановкам (13), можно подметить, что они *сохраняют четность* как числа букв a, так и числа букв b.

Как мы знаем из (Б), любое слово эквивалентно в нашем исчислении одному из *эталонных слов* Λ, a, b, ab.

Поскольку у любых двух эталонных слов либо четности числа букв a, либо четности числа букв b различны (см. рис. 13), эталонные слова попарно не эквивалентны.

Следовательно, эквивалентность произвольных слов α, β распознается просто: применяя подстановки (13), найдите эталонные слова, эквивалентные словам α и β (как это делается, рассказано при доказательстве (Б) из примера 1); если α и β окажутся эквивалентными одному и тому же эталонному слову, то $\alpha \sim \beta$; в противном случае α и β не эквивалентны.

На языке статьи А. Толпыго «Инварианты» («Квант», 1976, № 12) второй способ может быть изложен так: для любого слова

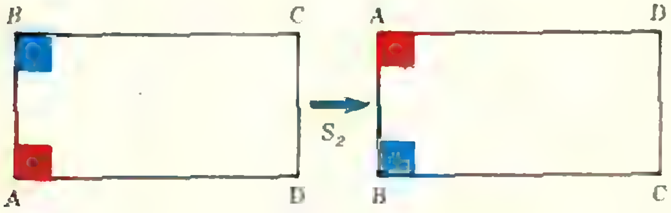


Рис. 12.

	Λ	a	b	ab
a	0	1	0	1
b	0	0	1	1

Рис. 13.

α положим

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если число букв } a \text{ в слове } \alpha \text{ четно,} \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если число букв } b \text{ в слове } \alpha \text{ четно,} \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Функции f_1, f_2 образуют полную систему инвариантов. Поэтому эквивалентность произвольных слов α, β распознается так: посчитайте значения функций f_1 и f_2 на α и β; если равенства

$$\begin{cases} f_1(\alpha) = f_1(\beta), \\ f_2(\alpha) = f_2(\beta) \end{cases}$$

будут выполнены, $\alpha \sim \beta$; в противном случае α и β не эквивалентны.

Попробуйте решить задачу из примера 1 вторым способом, т. е. при помощи инвариантов. Это намного труднее, чем в примере 2.

Алгоритм существует не всегда

Проблема отыскания способов для установления эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях была поставлена в 1914 году норвежским математиком Туэ. Сам Туэ указал такие способы для ассоциативных исчислений некоторого специального вида.

В 1946 и 1947 годах советский математик Андрей Андреевич Марков и американский математик Эмиль Пост независимо построили ассоциативные исчисления, для которых такого способа не существует.

До сих пор в нашей статье мы избегали слова «алгоритм». В математике *алгоритмом* называют точное предписание для решения некоторого класса задач. Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как определение понятия алгоритма — ведь слова «точное предписание» не являются каким-то математическим термином, не имеют однозначного смысла.

До тех пор, пока математики занимались построением конкретных алгоритмов, они обходились тем расплывчатым описанием этого понятия, которое дано выше. Но в первые десятилетия XX века накопилось много классов задач, для которых алгоритма найти не удавалось. Математики начали подозревать, что дело не в недостатке у них смекалки. Им пришла в голову мысль: а вдруг для того или иного класса задач просто невозможно найти алгоритм? А если его просто не существует?

Для того чтобы доказать, что алгоритма *не существует*, уже недостаточно расплывчатого понятия, надо это понятие уточнить. Такое уточнение и было проделано в середине тридцатых годов нашего века *).

Лишь после этого уточнения стало в принципе возможно доказывать несуществование алгоритма. Первое доказательство такого рода дал американский логик Алонзо Черч.

Исчисления, построенные А. А. Марковым и Э. Постом, были весьма громоздкими: они содержали сотни подстановок. Математики стали искать более простые примеры ассоциативных исчислений с неразрешимой проблемой эквивалентности. В этом направлении рекорд поставил Григорий Самуилович Цейтин: он построил такое исчисление всего с 7 подстановками **).

Цейтин доказал, что для исчисления в алфавите $\{a, b, c, d, e\}$ с подстановками

$$\left\{ \begin{array}{l} ac \leftrightarrow ca, \\ ad \leftrightarrow da, \\ bc \leftrightarrow cb, \\ bd \leftrightarrow db, \\ eca \leftrightarrow ae, \\ edb \leftrightarrow be, \\ abac \leftrightarrow abace \end{array} \right. \qquad (14)$$

алгоритма распознавания эквивалентности слов не существует.

Интересно, что исчисления с разрешимой и исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности «лежат рядом». В брошюре Б. А. Трахтенброта «Алгоритмы и машинное решение задач» (Москва, Физматгиз, 1960) исчисление Цейтина было приведено «всего» с одной опечаткой: последняя подстановка в (14) была напечатана в виде $abac \leftrightarrow abacc$. Читатель Г. Н. Спиридович из Ленинграда, не поверив на слово автору брошюры, нашел для «искаженного исчисления Цейтина» искомый алгоритм. А вы могли бы?

---

*) Об этом можно прочесть в §§ 7, 13 брошюры Б. А. Трахтенброта «Алгоритмы и вычислительные автоматы» (Москва, «Советское радио», 1974) и на с. 9—13 книги «Машины Тьюринга и рекурсивные функции» (Москва, «Мир», 1972).

**) Его рекорд впоследствии перекрыл Юрий Владимирович Матиясевич, построивший такое исчисление с тремя подстановками. К сожалению, они слишком длинны, чтобы их здесь привести.

Задачи

1. Построить алгоритм, распознающий эквивалентность слов, для ассоциативного исчисления в алфавите $\{a\}$ с единственной подстановкой

$$aa \leftrightarrow \Lambda.$$

2. Та же задача для исчисления в алфавите $\{a, b\}$ с подстановками

$$\left\{\begin{aligned} aaaa &\leftrightarrow \Lambda,\\ bb &\leftrightarrow \Lambda,\\ abab &\leftrightarrow \Lambda.\end{aligned}\right.$$

3. Та же задача для исчисления в алфавите $\{a, b\}$ с подстановками

$$\left|\begin{aligned} aaaaa &\leftrightarrow \Lambda,\\ bb &\leftrightarrow \Lambda,\\ abab &\leftrightarrow \Lambda.\end{aligned}\right.$$

4. Та же задача для исчисления в алфавите $\{a, b, c\}$ с подстановками

$$\left|\begin{aligned} aa &\leftrightarrow \Lambda,\\ bb &\leftrightarrow \Lambda,\\ cc &\leftrightarrow \Lambda,\\ ab &\leftrightarrow c,\\ ac &\leftrightarrow b,\\ ba &\leftrightarrow c,\\ ca &\leftrightarrow b,\\ cb &\leftrightarrow a.\end{aligned}\right.$$

5. Построить ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности с 7 подстановками в *двухбуквенном алфавите*. Указание. Разрешается воспользоваться тем, что для исчисления Цейтина (с. 8) проблема эивалентности неразрешима.

6. Имеется число n, в записи которого нет нулей. Если в нем стоят рядом две одинаковые цифры или два одинаковых двузначных числа, то их разрешается вычеркнуть. Наоборот, в любое место разрешается вставить две одинаковые цифры или два одинаковых двузначных числа. Доказать, что, комбинируя эти операции, можно получить число, меньшее 10^9. (Эта задача, придуманная Г. Гальпериным, предлагалась на XXXIX Московской математической олимпиаде.)

Задачи наших читателей

1. Среди 15 одинаковых по виду шариков имеется один «бракованный», отличающийся от всех остальных по весу, и один отмеченный «стандартный».

Как найти «бракованный» шар не более чем тремя взвешиваниями на чашечных весах (без гирь)?

М. Караджян
(г. Степанаван)

2. Прямые, проходящие через основания высот BB_0 и CC_0 треугольника ABC, параллельны стороне BC и пересекают стороны AB и CA (или их продолжения) соответственно в точках C_1 и B_1. Докажите, что

а) $|B_0C_1| \cdot |B_1C_0| = |B_0C_0|^2$;

б) $|B_1C_1|^2 = |B_0B_1|^2 + |C_0C_1|^2 + |B_0C_0|^2$.

У. Алли
(г. Выру)

3. Доказать неравенства

$$1{,}71 < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1{,}72.$$

С. Берколайко
(с. Котово
Белгородской обл.)

4. Решить уравнения

а) $x^5 = \overline{yyyx}$;

б) $(x+y)^2 = \overline{xy}$;

в) $(\overline{xx})^2 = \overline{yzt\frac{x}{2}}$.

И. Михалкович
(Минская обл.)

5. В тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' — центры окружностей, описанных около граней BCD, CDA, DAB, ABC соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B, C, D соответственно на плоскости $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$, пересекаются в одной точке.

Нгуен Конг Кви
(г. Ханой)

А. Вирский

Этот удивительный эллипсоид

Эллипсоид представляет собой поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой, проходящей через его фокусы. Покроем его изнутри зеркальным слоем. Эта зеркальная поверхность обладает очень интересными свойствами. Самое известное из них такое: если в одном из фокусов находится точечный источник света, то все лучи после отражения от стенок эллипсоида проходят через второй фокус *).

Здесь мы хотим познакомить вас еще с одним замечательным геометрическим свойством зеркального эллипсоида. Вот в чем оно состоит.

Если в один из фокусов эллипсоида поместить точечный источник света и произвести «мгновенную» вспышку, то через некоторое время после многократных отражений от идеальной зеркальной поверхности эллипсоида все лучи практически сконцентрируются вдоль его большой оси.

Для простоты рассуждений рассмотрим не эллипсоид в трехмерном пространстве, а эллипс на плоскости. Предварительно напомним определение и основные параметры эллипса. Согласно одному из определений, эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек (называемых фокусами эллипса) есть величина постоянная. В соответствии с принятым обозначим расстояние между фокусами через $2c$, длину большой оси эллипса — через $2a$, малой — через $2b$ (см. рисунок). Легко показать, что $a^2 = b^2 + c^2$. Степень вытянутости эллипса характеризуется его эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

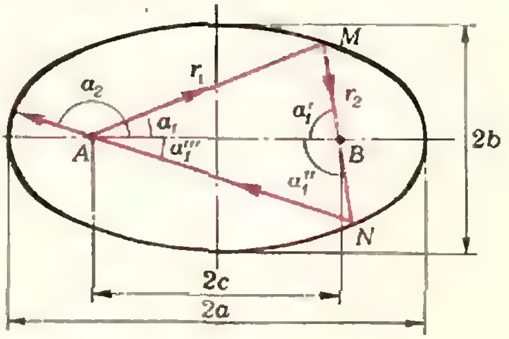
Предположим, что эллипс представляет собой зеркальную кривую. Пусть в какой-то момент произошла «мгновенная» вспышка источника света, помещенного в фокусе A. Рассмотрим луч AM, составляющий с большой осью эллипса угол α_1. После первого отражения (в точке M) он проходит через второй фокус B, отражается от эллипса вторично (в точке N), снова попадает в первый фокус и выходит оттуда уже под углом α_2 к большой оси. Непосредственно из построения уже видно, что $\alpha_2 > \alpha_1$, то есть луч после двукратного отражения как бы «прижался» к прямой AB.

Можно найти строгую зависимость между углами первичного направления луча из фокуса A (α_1) и вторичного направления луча (α_2) из того же фокуса после двукратного отражения от эллипса. Запишем два раза теорему косинусов для треугольника AMB, используя обозначения на рисунке и соотношение $r_2 = 2a - r_1$:

$$(2a - r_1)^2 = \\ = r_1^2 + (2c)^2 - 4r_1 c \cos \alpha_1, \quad (1)$$

$$r_1^2 = (2a - r_1)^2 + \\ + (2c)^2 - 4(2a - r_1) c \cos \alpha'_1, \quad (2)$$

Определим r_1 из первого уравнения и подставим его значение во второе.



---

*) См., например, статью В. Болтянского «Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы», «Квант», 1975, № 12.

Тогда получим

$$\cos\alpha_1' = \frac{2ac-(a^2+c^2)\cos\alpha_1}{a^2+c^2-2ac\cos\alpha_1} =$$

$$= \frac{2\varepsilon-(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha_1}. \qquad (3)$$

Аналогичное соотношение можно записать для углов α_1'' и α_1'' из треугольника ANB. Учитывая, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1''$ и $\alpha_1'' = \pi - \alpha_1'$, и используя соотношение (3), получим

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi-\alpha_1'') = -\cos\alpha_1'' =$$

$$= -\frac{2\varepsilon-(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1''}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha_1''} =$$

$$= -\frac{2\varepsilon+(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1'}{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\alpha_1'} =$$

$$= -\frac{4\varepsilon(1+\varepsilon^2)-[4\varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)]\cos\alpha_1}{4\varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)^2-4\varepsilon(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1}. \qquad (4)$$

Пользуясь выражением (4), нетрудно показать, что для любых α_1 таких, что $0 < \alpha_1 < \pi$ (ограничимся рассмотрением только верхней полуплоскости),

$$\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1, \text{ и } \alpha_2 > \alpha_1.$$

Можно было бы продолжить рассмотрение хода луча AM и найти выражения для соответствующих углов α_3, α_4, ..., α_n. Однако мы предоставим читателю проделать это самостоятельно. Заметим лишь, что в общем случае, при многократных отражениях, справедливо соотношение

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n.$$

С увеличением эксцентриситета ε «сходимость» лучей ускоряется.

В приведенной ниже таблице даны в качестве примера результаты расчетов для углов α_2, α_3 и α_4 в зависимости от угла α_1. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 0{,}5$. Из таблицы видно, что уже после третьего цикла отражений почти все лучи «выстраиваются» вдоль большой оси эллипса.

Аналогичные рассуждения можно провести для зеркального эллипсоида. Можно рассмотреть и более сложные задачи, например, когда источник света находится в произвольной точке внутри эллипсоида или когда каждая точка внутренней поверхности эллипсоида является излучателем.

Таблица

α_1	α_2	α_3	α_4
0	0	0	0
1° 15′	11° 30′	84° 25′	166° 5′
2° 30′	22° 45′	122° 10′	173°
5°	42° 55′	148° 25′	176° 20′
10°	76° 25′	163° 45′	178° 10′
20°	115° 35′	172°	179°
30°	134° 55′	174° 40′	179° 10′
60°	158° 10′	177° 30′	
90°	167° 20′	178° 30′	
120°	172° 40′	179° 10′	
180°	180°	180°	180°

В начале статьи мы назвали рассматриваемое свойство зеркального эллипсоида интересным геометрическим свойством. Но тот факт, что почти все лучи «выстраиваются» вдоль большой оси эллипсоида, означает, что световая энергия почти вся концентрируется в одном направлении. Может быть, это можно использовать практически?

Заметим, однако, что необходимые для этого условия — идеально отражающая зеркальная поверхность эллипсоида и «мгновенная» вспышка — практически неосуществимы. Особенно сложно выполнить второе условие. Действительно, время вспышки τ должно быть хотя бы меньше времени прохождения светом пути AMB: $\tau < \frac{r_1+r_2}{c_0} = \frac{2a}{c_0}$. Поскольку скорость света в вакууме $c_0 = 3\cdot10^8$ *м/сек*, то при разумных размерах эллипсоида ($a \sim 1$ *м*) $\tau < 10^{-8}$ *сек*. Так что рассмотренная задача пока представляет чисто теоретический интерес.

Р. Гутер,
Ю. Полунов

3|141592
10-997133
41120671
176°667712
4·81
62.03940
0,2776

Точка, точка, запятая...

Десятичные дроби, позволяющие вести вычисления с дробями так же, как с целыми числами, занимают одно из первых мест среди «китов», на которых опирается наша техника арифметических вычислений. Современные представления о десятичных дробях сложились постепенно. Изобретение десятичных дробей нельзя приписать какому-нибудь одному человеку: их история сложна и запутана. На протяжении XV и XVI веков многие ученые Европы использовали их отдельные свойства. Математики стран Ближнего Востока, Средней Азии и Северной Африки фактически касались десятичных дробей еще в XI—XIII веках.

Сильно запутана история и «десятичного знака», служащего для разделения целой и дробной частей числа в десятичных дробях.

Мы хотим познакомить читателей «Кванта» с историей развития «десятичного знака». На примере числа $14\frac{382}{1000}$ мы покажем, как изображались десятичные дроби в XVI—XVII веках—см. таблицу на с. 13.

В этой таблице встречаются и знаменитые имена, и имена, известные лишь узкому кругу специалистов по истории математики. Далее мы приведем короткие биографические справки о некоторых упоминающихся здесь людях.

Франсуа Виет де ла Биготье (1540—1603) был юристом и советником у французских королей Генриха III и Генриха IV. Математикой он занимался «в свободное от работы время». Виет внес значительный вклад во все области современной ему математики, но особенно велики его заслуги в развитии алгебры: он был первым, кто начал употреблять алгебраическую символику. (Впрочем, его символика не получила широкого распространения. Современная алгебраическая символика в основном ведет свое начало от «Рассуждения о методе» Р. Декарта (1637 г.).) В одной из его первых книг «Математические таблицы», опубликованной в 1579 году в Париже, автор говорит о преимуществах десятичных дробей при вычислениях и сам широко их использует.

Выдающийся фламандский ученый Симон Стевин (1548 — 1620) — один из «универсальных гениев» эпохи Возрождения. Труды Стевина посвящены самым разнообразным вопросам современных ему математики, механики и физики. Но наибольшую славу ему принесла небольшая книжка «Десятая», изданная в 1585 году в Лейдене. В ней автор выступил популяризатором десятичных дробей. Подробно поясняя технику выполнения арифметических операций с десятичными дробями, он всячески подчеркивает простоту излагаемого материала: «...Может же недалекий умом деревенский медведь по счастливой случайности набрести на дорогой

$\mathbf{14}\,382$	1579г.	Франсуа Виет
14/382		
$14\,\frac{382}{}$		
14⓪3①8②2③	1585г.	Симон Стевин
14382 ③		
14,382	1592г.	Джованни Маджини
$\overset{\circ}{14}382$	1592г.	Иост Бюрги
14.382	1593г.	Кристофер Клавий
$\overset{\circ}{14}.\ \overset{\mathrm{I}}{3}.\ \overset{\mathrm{II}}{8}.\ \overset{\mathrm{III}}{2}$	1603г.	Иоганн Бейер
$14\,3^{(1)}8^{(2)}2^{(3)}$	1608г.	Роберт Нортон
14 | 382	1608г.	Бартоломей Питиск
14 (382	1616г.	Иоганн Кеплер
14·382	1617г.	Джон Непер
14,382		
$14\,\underline{382}$	1624г.	Генри Бриггс
$14\,\frac{382}{}$		
14382 ③	1626г.	Иезекиил де Деккер
$14\underline{\vert 382}$	1631г.	Уильям Отред
14382‴	1634г.	Пьер Эригон
14:382		
14 382 iij	1636г.	Джеймс Юм
$14\,\vert\,\dot{3}\dot{8}\dot{2}$	1651г.	Роберт Джагер
14,382	1661г.	Георг Бёклер
14–382	1670г.	Иоганн Карамуэль
14[382	1674г.	Франсуа Дешале
$14\ \overset{①}{3}\ \overset{②}{8}\ \overset{③}{2}$	1691г.	Жак Озанам

клад, не применив при этом никакой учености!». «Десятая» получила широкую известность в Европе. На французский язык она была переведена в том же 1585 году самим автором. На английском языке она появилась в 1608 году.

Джованни Антонио Маджини (1555—1617) был профессором университета в Болонье. Он использовал «десятичную запятую» в таблицах своей книги «Плоские треугольники», изданной в 1592 году в Венеции.

Швейцарец Иост Бюрги (1552—1632) был сначала часовщиком и механиком, помогал строить и ремонтировать астрономические инструменты, а затем помогал Кеплеру в обработке астрономических наблюдений и других вычислениях. В 1592 году он составил таблицу синусов и написал руководство по арифметике. В них он систематически применял десятичные дроби. В 1616 году Кеплер писал о нем: «... так как часто будут получаться дроби, а мне желательно пользоваться короткими числами, то заметь, что все цифры, стоящие после знака ◦, принадлежат дроби в качестве числителя, знаменателя же к ней не пишут, но он всегда есть круглое десятичное число со столькими нулями, сколько цифр стоит после знака ... Такой вид вычислений с дробями придумал Иост Бюрги ... Благодаря этому, с целыми числами и с дробью при всех основных действиях можно обращаться как с одним числом».

В 1603 году франкфуртский врач Иоганн Гартман Бейер (1563—1625) выпустил сочинение «Десятичная логистика», где писал: «... я обратил внимание на то, что техники и ремесленники, когда измеряют какую-нибудь длину, то очень редко и лишь в исключительных случаях выражают ее в целых числах одного наименования; обыкновенно им приходится или брать мелкие меры, или обращаться к дробям; точно так же астрономы измеряют величины не только в градусах, но и в долях градуса, т. е. минутах, секундах и т. п.; но мне кажется, что их деление на 60 частей не так удобно, как деление на 10, на 100 частей и т. д., потому что в последнем случае гораздо легче складывать, вычитать и вообще производить арифметические действия; мне кажется, что десятичные доли, если бы их ввести вместо шестидесятеричных, пригодились бы не только для астрономии, но и для всякого рода вычислений».

Немецкий священник Бартоломей Питиск (1561—1613) известен в истории математики как автор нескольких книг по тригонометрии и обширных тригонометрических таблиц. Именно он первый предложил термин «тригонометрия».

Имя великого ученого — астронома, физика и математика — Иоганна Кеплера (1571—1630) известно сейчас любому школьнику. При исследовании движения планет ему приходилось проводить колоссальную вычислительную работу и он пользовался десятичными дробями, о которых узнал от Бюрги.

Шотландский барон Джон Непер (1550—1617) знаменит как изобретатель логарифмов и «палочек Непера» — простого приспособления для умножения многозначных чисел *). В книге «Рабдология», вышедшей в 1617 году незадолго до его смерти, он использовал десятичную запятую. В другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», вышедшей после его смерти, но написанной много раньше, он рекомендует использовать десятичную точку.

Профессор математики и астрономии в Лондоне и Оксфорде Генри Бриггс (1561—1631) совместно с Непером разработал систему десятичных логарифмов и выпустил первые таблицы их.

Английский математик Уильям Отред (1575—1660), изобретатель первых логарифмических линеек, был в течение 50 лет приходским священником и обучал желающих математике. Обозначать умножение «косым крестом» × впервые предложил он.

Хотя «знаковая фантазия» не иссякла еще и в XVIII веке, основная борьба велась уже между десятичной точкой и десятичной запятой. Как видно из нашей таблицы, эти знаки появились почти одновременно. Непер, колеблясь между ними, использовал оба знака. Со времени появления «Новой арифметики» Г. Бёклера (1661 г.) в математических книгах, издаваемых в Германии, укоренилась десятичная запятая. Постепенно она прочно утвердилась в континентальной Европе, тогда как в англоязычных странах предпочитают десятичную точку, причем в Англии ее сейчас ставят в середине строки: 14·382, а в США — внизу: 14.382. (В качестве знака умножения в англоязычных странах обычно применяют «косой крест» × .)

В последние 10—15 лет, под влиянием алгоритмических языков программирования, десятичная точка стала постепенно теснить десятичную запятую. Поскольку в них принята именно десятичная точка, а для умножения «косой крест», люди, связанные с программированием, — а таких становится все больше и больше — предпочитают эту систему обозначений.

---

*) «Квант», 1975, № 2, с. 42.

16 карточек

На шестнадцати квадратных карточках написаны слова:

БАРИН
БИРКА
БУЛКА
БУРАН
БУРКА
КЛОУН
КОЛБА
ЛУНКА
РОЛИК
РУБКА
РИСКА
САЛОН
САТИН
СИЛОК
СУКНО
СУРОК

Расположите эти карточки в виде квадрата таким образом, чтобы в любых четырех словах, стоящих на одной вертикали, горизонтали или диагонали квадрата, встречалась бы общая буква.

Л. Мочалов

Е. Пономарев

Опыты для изучения реактивного движения

В прошлом учебном году ученик 8 класса средней школы № 82 поселка Черноголовка Московской области Евгений Пономарев под руководством учителя физики В. А. Орлова проделал очень интересную работу по экспериментальному исследованию реактивного движения. В публикуемой статье автор рассказывает о проделанной работе.

Реактивным движением принято называть движение, вызываемое реакцией вытекающей струи жидкости или газа. Так движутся, например, ракеты. Горячие газы, образующиеся при сгорании топлива в двигателе ракеты, с большой скоростью выбрасываются через отверстие (сопло) в хвосте ракеты. Сила реакции вытекающей струи газов сообщает ракете ускорение. Поскольку масса ракеты постепенно уменьшается (выгорает топливо), модуль ускорения ракеты со временем изменяется. Как же в таком случае рассчитать скорость ракеты?

Известный советский ученый К. Э. Циолковский теоретически вывел формулу (ее теперь называют формулой Циолковского), по которой можно определить скорость ракеты в любой момент работы ее двигателей. В частности, к моменту полного сгорания топлива модуль скорости $\vec{v}_1$ ракеты вычисляется по формуле

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Здесь $\vec{v}_2$ — скорость вытекания продуктов сгорания относительно ракеты, m_1 — масса самой ракеты (без топлива), m_2 — масса сгоревшего топлива, ln — натуральный логарифм *).

Экспериментальную проверку этой формулы можно провести с помощью прибора для демонстрации реактивного движения. Он представляет собой модель ракеты, которая продается в магазинах как игрушка и имеется в школьных кабинетах физики. Кроме того, для опытов потребуются весы рычажные лабораторные и пружинные бытовые, секундомер, мензурка и велосипедный насос (рис. 1).

Экспериментальная задача заключается в том, чтобы определить на опыте $|\vec{v}_1|$ и сравнить его со значением, рассчитанным по формуле Циолковского.

Прежде всего в корпус ракеты заливается некоторое количество воды, а в сопло ракеты вставляется пусковое устройство со скобой, удерживающей ракету. Затем в вертикально стоящую ракету через пусковое устройство насосом накачивается воздух. При сдергивании скобы сжатый воздух выбрасывает воду, и ракета, отделяясь от пускового устройства, взлетает.

Начальную скорость ракеты при строго вертикальном полете можно

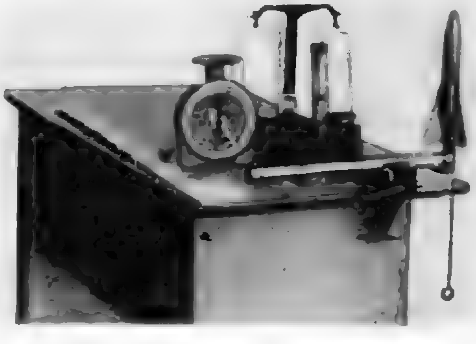


Рис. 1.

---

*) Для вычисления натурального логарифма некоторого числа a можно воспользоваться формулой $\ln a = \frac{\lg a}{\lg e}$, где $e \approx 2{,}71$ (см., например, «Алгебра и начала анализа — 10»).

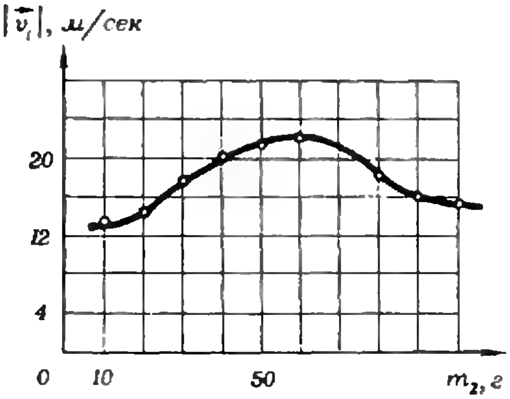


Рис. 2.

найти по времени ее полета t:

$$|\vec v_1| = |\vec g|t/2.$$

Если же ракета взлетела под некоторым углом к горизонту и приземлилась на расстоянии s от места запуска, то

$$|\vec v_1| = \sqrt{(|\vec g|\,t/2)^2+(s/t)^2}.$$

Заметим, что высота полета ракеты в наших опытах достигала 30 *м*, так что запуск следует производить на открытом пространстве.

Теперь задача сводится, по существу, к определению скорости $\vec v_2$ истечения воды относительно ракеты. Для этого измеряется сила $\vec F$, с которой водяная струя из сопла ракеты ударяется в подставленную чашку пружинных весов. При ударе вода передает весь свой импульс чашке весов, поэтому $|\vec F|\Delta t = m_2|\vec v_2|$, где Δt — время выброса воды, а масса выброшенной воды $m_2 = \rho S|\vec v_2|\Delta t$ (ρ — плотность воды, S — площадь сечения сопла). Таким образом,

$$|\vec v_2| = \sqrt{|\vec F|/(\rho S)}\,.$$

Для измерения силы удобно на весы поставить дополнительную стрелку, которая не возвращается в первоначальное положение после удара воды и фиксирует максимальную силу удара.

Поскольку измерения $|\vec v_1|$ и $|\vec v_2|$ нельзя провести в одном и том же опыте, важно быть уверенным в том, что давление воздуха в ракете всегда одно и то же. Проще всего добиться одинаковости давлений, взвешивая ракету до накачивания ее воздухом и после того. Масса накачанного воздуха (измеренная на лабораторных весах с точностью до 0,01 *г*) должна быть во всех опытах одной и той же.

И еще одна тонкость. Непосредственно из формулы Циолковского следует, что скорость ракеты растет с увеличением массы воды («сгоревшего топлива»). На опыте получается, что, начиная с некоторого значения m_2, скорость ракеты уменьшается при увеличении массы воды (рис. 2). Это кажущееся противоречие можно объяснить тем, что скорость вытекания воды ($|\vec v_2|$) зависит от ее массы. Так, при большом количестве воды объем сжатого воздуха в ракете заметно увеличивается по мере выброса воды. Это приводит к уменьшению давления воздуха, а значит, и скорости вытекания воды. Оптимальное значение m_2 можно найти экспериментально. В наших опытах объем воды составлял 30 *см*³ при объеме ракеты 140 *см*³.

В заключение приведем результаты одного из опытов: масса ракеты $m_1 = 53{,}15$ *г*, масса воды $m_2 = 30$ *г*, масса нагнетаемого воздуха $m_в = 0{,}53$ *г*, сечение сопла ракеты $S = 3{,}1\cdot10^{-5}$ *м*², сила удара струи $|\vec F| = 29$ *н*, экспериментально измеренная скорость ракеты $|\vec v_{1э}| = 14{,}7$ *м/сек*, а рассчитанная по формуле Циолковского $|\vec v_{1р}| = 13{,}9$ *м/сек*. Отсюда

$$\frac{|\vec v_{1э}| - |\vec v_{1р}|}{|\vec v_{1э}|}\cdot 100\% \approx 5{,}4\%,$$

то есть формула Циолковского проверена с вполне допустимой погрешностью измерений.

В. Болтянский

Шесть зайцев в пяти клетках

> *«Ну зайцы, погодите!»*
> Волк

Согласитесь, что если в каждую клетку разрешается посадить не более одного зайца, то разместить шесть зайцев в пяти клетках не удастся, и вообще, ни для какого натурального n не удастся разместить $n+1$ зайцев в n клетках. Можно сказать и иначе: *если в n клетках находится $n+1$ или больше зайцев, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух зайцев.*

Обозначим зайцев символами $p_1, \ldots, p_{n+1}$, а клетки — $q_1, \ldots, q_n$. Тогда каждый способ рассадить зайцев в клетки можно рассматривать как некоторое отображение (рис. 1) множества $P = \{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ в множество $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$: зайцу $p_i \in P$ ставится в соответствие (в качестве его «образа») та клетка $q_j \in Q$, в которой этот заяц сидит. Таким образом, сформулированное выше утверждение о зайцах в клетках имеет следующий математический смысл: *при любом отображении множества P, содержащего $n+1$ элементов, в множество Q, содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P, имеющие один и тот же образ.*

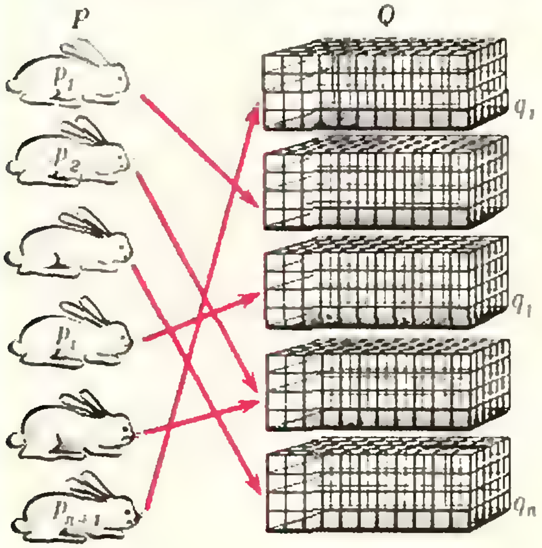


Рис. 1.

Это утверждение называется принципом Дирихле*). Его справедливость нетрудно доказать с помощью метода математической индукции. По неписаной традиции, математики всего мира, рассказывая о принципе Дирихле, разъясняют его смысл не на языке множеств и отображений и не с какими-либо другими предметами, а именно с зайцами и клетками.

Принцип Дирихле, несмотря на его простоту и очевидность, очень часто используется при доказательстве теорем и решении задач.

Пример 1. *Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни*

---

*) Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859) — выдающийся немецкий математик; ему принадлежат основополагающие работы в теории чисел и других областях математики.

через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.

Полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, обозначим через q_1 и q_2; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой l). Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут «зайцами», а полуплоскости q_1 и q_2 — «клетками». Каждый «заяц» попадает в какую-либо «клетку» (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C). Так как «зайцев» три, а «клеток» две, то найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку»; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости (рис. 2). Пусть, скажем, точки A и B находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок AB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

Пример 2. *Доказать, что если имеется 100 целых чисел $x_1, \ldots, x_{100}$, то из них можно выбрать несколько чисел (может быть, одно), сумма которых делится на 100.*

Рассмотрим суммы

$$s_1 = x_1,$$
$$s_2 = x_1 + x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_{100} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}.$$

Если хотя бы одна из этих сумм делится на 100, то наша цель достигнута.

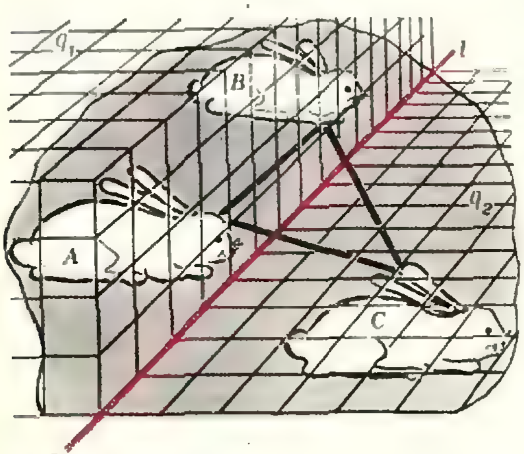


Рис. 2.

Допустим, что ни одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$, не делится на 100. Эти числа будем считать «зайцами». За «клетки» же примем числа 1, 2,… …, 99. Сопоставим каждому числу $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ остаток от деления его на 100. Поскольку числа s_i на 100 не делятся, они будут давать остаток от 1 до 99, то есть каждый «заяц» попадет в какую-то «клетку». По принципу Дирихле найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку», то есть числа s_i и s_j (пусть для определенности $i < j$), дающие одинаковые остатки при делении на 100. Но тогда число

$$s_j - s_i = (x_1 + \ldots + x_j) - \\ -(x_1 + \ldots + x_i) = x_{i+1} + \ldots + x_j$$

делится на 100. Таким образом, сумма $x_{i+1} + \ldots + x_j$ является искомой.

Пример 3. *Числа a и m взаимно просты. Доказать, что найдется натуральное k, для которого число ka при делении на m дает остаток* 1.

Числа 1, 2, …, $m - 1$ будем считать «зайцами». Если k — один из «зайцев», то число ka не делится на m (поскольку a и m взаимно просты и $0 < k < m$), то есть ka дает при делении на m один из остатков 1,2, … …,$m - 1$. Допустим, что ни при каком $k = 1, \ldots, m - 1$ число ka не дает при делении на m остаток 1. Тогда возможными остатками являются лишь числа 2, …, $m - 1$. Эти числа будем считать «клетками» (так что «зайцев» больше, чем «клеток»). Согласно принципу Дирихле найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку», то есть среди чисел 1, 2, … …, $m-1$ найдутся такие два k_1, k_2, что числа $k_1 a$ и $k_2 a$ дают при делении на m одинаковые остатки (мы можем считать, что $k_1 < k_2$), а потому число $k_2 a - k_1 a = (k_2 - k_1) a$ делится на m. Так как a и m взаимно просты, то отсюда вытекает, что $k_2 - k_1$ делится на m. Но это невозможно, поскольку $0 < k_2 - k_1 < m$. Полученное противоречие показывает, что найдется k, для которого число ka дает при делении на m остаток 1.

Установленный факт можно сформулировать и иначе: *если числа a и m взаимно просты, то существуют та-*

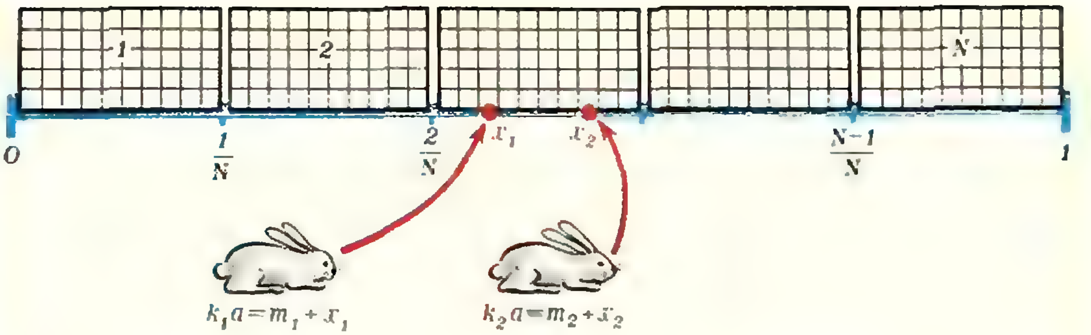


Рис. 3.

кие натуральные *) *числа* k, l, *что* $ka = lm + 1$, то есть $ka - lm = 1$.

Пример 4. *Доказать, что для любого* $a > 0$ *и любого натурального* N *найдутся такие целые* $m \geqslant 0$, $k > 0$, *что* $|ka - m| \leqslant \frac{1}{N}$.

Точки $\frac{1}{N}$, $\frac{2}{N}$, $\ldots$, $\frac{N-1}{N}$ разбивают отрезок $[0, 1]$ на N отрезков, которые будем считать «клетками» (рис. 3). Далее, числа $1, 2, \ldots, N+1$ примем в качестве «зайцев». Если k — один из «зайцев», то число ka можно записать в виде $ka = m + x$, где m — целое, $0 \leqslant x < 1$. Число x попадает в одну из «клеток»; в эту «клетку» мы и посадим «зайца» k.

Так как «зайцев» больше, чем «клеток», то найдутся два «зайца», сидящих в одной «клетке». Иначе говоря, среди чисел $1, 2, \ldots, N+1$ найдутся такие два числа $k_1 < k_2$, что $k_1a = m_1 + x_1$, $0 \leqslant x_1 < 1$; $k_2a = m_2 + x_2$, $0 \leqslant x_2 < 1$, причем x_1, x_2 находятся в одной «клетке», и потому $|x_2 - x_1| \leqslant \frac{1}{N}$. Таким образом,

$$|(k_2 - k_1)a - (m_2 - m_1)| = |x_2 - x_1| \leqslant \frac{1}{N},$$

то есть числа $k = k_2 - k_1$ и $m = m_2 - m_1$ являются искомыми.

Пример 5. *Пусть* a, b, x_0 — *некоторые натуральные числа. Доказать, что в последовательности*

$$x_0,\ x_1 = ax_0 + b,\ x_2 = ax_1 + b, \ldots, x_n = ax_{n-1} + b, \ldots$$

имеется бесконечно много чисел, не являющихся простыми.

Прежде всего заметим, что $x_n = ax_{n-1} + b \geqslant x_{n-1} + b > x_{n-1}$, поэтому числа $x_0, x_1, x_2, \ldots$ образуют возрастающую последовательность, причем уже $x_1 > a$, то есть все числа этой последовательности (кроме, может быть, x_0) больше a.

Если числа a и b не взаимно просты, то они имеют общий делитель $d \neq 1$; легко видеть, что тогда все x_i делятся на d ($i \geqslant 1$), и, поскольку $x_i > b$, все они составные.

Пусть a и b взаимно просты; тогда a и x_k ($k \geqslant 1$) взаимно просты. Возьмем некоторое x_k, обозначим его для удобства через N, и докажем, что среди чисел $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ обязательно найдется составное число. Числа $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ будем считать «зайцами», а возможные их остатки от деления на N (то есть числа $0, 1, \ldots, N-1$) — «клетками». Так как число «зайцев» больше числа «клеток», то найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку». Иначе говоря, найдутся среди $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ два числа, скажем, x_p и x_q, где $p > q$, дающие одинаковые остатки при делении на N. Следовательно, $x_p - x_q$ делится на N. Так как $x_p = ax_{p-1} + b$, $x_q = ax_{q-1} + b$, то $x_p - x_q = a(x_{p-1} - x_{q-1})$. Отсюда видно, что $x_{p-1} - x_{q-1}$ делится на N (поскольку a и N взаимно просты). Аналогично, $x_{p-2} - x_{q-2}$ делится на N и т. д. Так мы дойдем до числа $x_{k+p-q} - x_k$. Но число $x_k = N$ тоже делится на N, поэтому x_{k+p-q} делится на N, а тогда число x_{k+p-q} не является простым.

Итак, независимо от взаимной простоты a и b, среди чисел $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ имеется число, не являющееся простым. Взяв теперь вместо x_k число $x_{k+p-q+1}$, мы снова среди не-

---

*) Поскольку $a \neq 1$, ka будет больше 1, то есть заведомо $l > 0$.

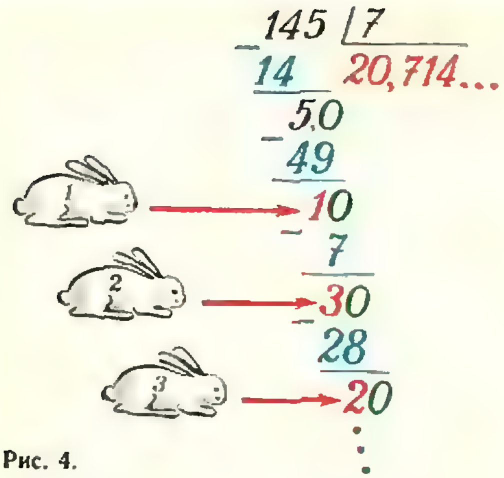


Рис. 4.

скольких следующих членов последовательности найдем число, не являющееся простым, и т. д.

Пример 6. *Пусть p и q — натуральные числа, и рациональное число $\frac{p}{q}$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби. Докажите, что тогда эта дробь обязательно будет периодической.*

Доказательство этого факта (в школе оно не рассматривается) нетрудно получить с помощью принципа Дирихле. При выполнении деления $p : q$ «столбиком» все время будут получаться отличные от нуля остатки (иначе число $\frac{p}{q}$ не записывалось бы в виде бесконечной десятичной дроби). Таким образом, каждый раз при нахождении очередной цифры частного будет получаться в остатке одно из чисел $1, 2, \ldots, q-1$). Эти возможные значения остатков мы и будем считать «клетками», так что всего имеется $q-1$ «клеток». «Зайцами» же будем считать остатки, которые в действительности получаются после того, как мы снесли последнюю значащую цифру делимого (рис. 4). Рассмотрим первых q «зайцев» (на 1 больше, чем число «клеток»). Каждый «заяц» попадает в какую-либо «клетку» — каждый остаток равен одному из чисел $1, 2, \ldots, q-1$. В силу принципа Дирихле найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку». Иначе говоря, среди чисел $1, 2, \ldots, q$ можно выбрать такие два числа i, j, что i-й и j-й остатки (после того, как мы снесли последнюю значащую цифру) одинаковы. При этом можно считать, что $i < j$. Но тогда процесс деления, начиная с j-го остатка, будет повторять процесс деления после i-го остатка. Обозначим $j - i$ через r. Тогда, получив i-й остаток и выписав затем r цифр частного, мы снова получим такой же остаток (j-й «заяц»); вслед за тем мы выпишем такие же r цифр частного и опять получим тот же остаток, то есть в частном снова и снова будет повторяться одна и та же комбинация из r цифр. Это и означает, что при записи числа $\frac{p}{q}$ в виде десятичной дроби получается *смешанная периодическая дробь* (а в отдельных случаях дробь может получиться чисто периодической — повторение цифр частного будет наблюдаться с самого начала).

Заметим, что мы установили периодическое повторение в частном одной и той же комбинации, состоящей из r цифр, где $r = j-i$. Так как i, j — это какие-либо «зайцы», то есть какие-либо из чисел $1, 2, \ldots, q$, то $i \geqslant 1$, $j \leqslant q$ и потому $r = j-i \leqslant q-1$.

Итак, если при обращении $\frac{p}{q}$ в десятичную дробь получается бесконечная дробь, то она периодическая, причем период содержит не более $q-1$ цифр.

Из приведенных примеров видно, что принцип Дирихле как элемент рассуждения может применяться при решении разнообразных задач. Ниже приводится ряд задач для самостоятельного решения. И хотя читатель понимает, что при решении нужно применить принцип Дирихле, эта подсказка не делает задачи неинтересными: надо догадаться, что считать «зайцами», а что «клетками», как использовать наличие двух «зайцев», попавших в одну «клетку», и т. п.

Задачи

1. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

(Продолжение см. с. 87)

Победители конкурса «Кванта»

За минувший 1976 год редакция получила значительно больше писем с решениями задач, чем за прошлый год. Редколлегия журнала «Квант» вместе с членами Оргкомитета Всесоюзной олимпиады отобрала лучшие решения.

Ниже публикуется список школьников — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участия в республиканских олимпиадах 1977 года.

Математика

С. АБАДЖЯН — г. Ереван, ФМШ, 10 кл.
Б. АМОСОВ — г. Мытищи Московской обл., с. ш. 26, 10 кл.
Б. АРОНОВ — г. Саратов, с. ш. 13, 9 кл.
А. БЕР — г. Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
И. ВОРОНОВИЧ — г. п. Сопоцкин Гродненской обл., 10 кл.
А. ГАРНАЕВ — г. Таллин, с. ш. 19, 10 кл.
В. ГРОССМАН — г. Одесса, с. ш. 116, 10 кл.
М. ГРУНТОВИЧ — д. Новый двор Гродненской обл., 10 кл.
А. ДИДЕНКО — г. Краснодар, с. ш. 28, 10 кл.
С. ГУБАНОВ — г. Ворошиловград, с. ш. 17, 10 кл.
А. ЖЕРДЕВ — г. Славянск Донецкой обл., с. ш. 5, 9 кл.
Р. ИЗМАЙЛОВ — г. Баку, с. ш. 134, 8 кл.
Б. КАПЛАН — г. Киев, с. ш. 173, 10 кл.
В. КАСКЕВИЧ — д. Новый двор Гродненской обл., 10 кл.
А. КАСЯНЧУК — г. Николаев, с. ш. 22, 10 кл.
М. КУТЕРНИН — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. ЛОЗИЦКИЙ — г. Ганцевичи Брестской обл., с. ш. 1, 9 кл.
С. МЕЛИХОВ — г. Донецк, с. ш. 17, 10 кл.
А. МОШОНКИН — г. Ленинград, ФМШ 45, 10 кл.
М. НАРОДИЦКИЙ — г. Куйбышев, с. ш. 135, 10 кл.
Е. ОГИЕВЕЦКИЙ — г. Днепропетровск, с. ш. 23, 10 кл.
А. ПЕТУХОВ — г. Новосибирск, ФМШ 165, 10 кл.
С. ПОЛЫГАЛОВ — г. Пермь, с. ш. 102, 9 кл.
В. РОГАВА — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.
Р. СЕВДИМАЛЫЕВ — Зангеланский р-н АзССР, Шаифлинская с. ш., 10 кл.
В. УГРИНОВСКИЙ — г. Хмельник Винницкой обл., с. ш. 3, 10 кл.
С. ХАРЕНКО — г. Ангарск Иркутской обл., с. ш. 10, 9 кл.
Ю. ШТЕЙНШРАЙБЕР — г. Баку, с. ш. 210, 9 кл.
В. ШТЕПИН — г. Челябинск, с. ш. 103, 10 кл.

Физика

Ф. БАГДАСАРЯН — г. Баку, с. ш. 145, 10 кл.
В. ГАРКАВЫЙ — г. Лида Гродненской обл., с. ш. 1, 9 кл.
В. ГАРМАШ — г. Запорожье, с. ш. 28, 10 кл.
А. ЗАБРОДИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82, 9 кл.
В. КОТОК — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
А. ЛИСТОВНИЧИЙ — г. Киев, с. ш. 96, 10 кл.
В. ЛОБЗИН — г. Свердловск Ворошиловградской обл., с. ш. 9, 10 кл.
Ю. МУХАРСКИЙ — г. Киев, с. ш. 145, 10 кл.
А. НИКИТЕНКОВ — г. Великие Луки, с. ш. 3, 9 кл.
В. НИКОЛАЙЧИК — г. Москва, ФМШ 18, 10 кл.
В. ПАЛЕЙ — г. Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Д. ПАТАРАЯ — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 8 кл.
В. ПОТЕМКИН — г. Великие Луки, с. ш. 3, 10 кл.
К. ТРУТНЕВ — г. Казань, с. ш. 39, 10 кл.
Э. ШИФРИН — г. Днепропетровск, с. ш. 23, 10 кл.
Ю. ШТЕЙНШРАЙБЕР — г. Баку, с. ш. 210, 9 кл.

задачник Кванта

Задачи

М426 — М430; Ф438 — Ф442

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 апреля 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М426, М427» или «. . . Ф438». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «. . . новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М426. Таблица из $n\times n$ клеток заполнена числами от 1 до n так, как показано на рисунке 1. При каком n в ней можно выбрать n клеток так, чтобы никакие две клетки не принадлежали одной строке или одному столбцу и чтобы все числа в выбранных клетках были разные?

А. Ненашев

М427. а) Докажите, что существует нечетное число n, для которых ни при каком четном k ни одно из чисел бесконечной последовательности

$$k^k+1,\ k^{k^k}+1,\ k^{k^{k^k}}+1,\ \ldots$$

не делится на n.

б) Докажите, что для каждого натурального n существует такое натуральное число k, что каждый из членов бесконечной последовательности

$$k+1,\ k^k+1,\ k^{k^k}+1,\ k^{k^{k^k}}+1,\ \ldots$$

делится на n

С. Лавренченко, [illegible] класс

М428. В олимпиаде участвуют $(m-1)n+1$ человек. Докажите, что среди них либо найдутся m участников, попарно незнакомых между собой, либо найдется один участник, знакомый не менее чем с n участниками олимпиады. Остается ли верным утверждение задачи, если число участников олимпиады уменьшить на единицу?

Э. Туркевич

М429. а) Сколько решений имеет уравнение

$$[x]-1977\{x\}=1978?$$

(Здесь $[x]$ — целая часть x, и $\{x\}=x-[x]$.)

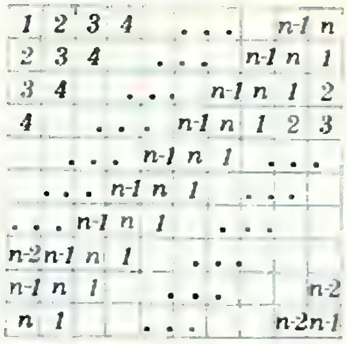
б) Докажите, что при любых $p\neq 0$ и q уравнение

$$[x]+p\{x\}=q$$

имеет $[|p|]$ или $[|p|]-1$ решений.

Ж. Сатаров

М430. а) Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру площади S можно поместить в прямоугольник площади $2S$.



1	2	3	4		. . .			n-1	n
2	3	4		. . .			n-1	n	1
3	4		. . .			n-1	n	1	2
4		. . .			n-1	n	1	2	3
		. . .		n-1	n	1		. . .	
	. . .		n-1	n	1		. . .		
. . .		n-1	n	1		. . .			
n-2	n-1	n	1			. . .			
n-1	n	1			. . .				n-2
n	1			. . .				n-2	n-1

Рис. 1.

б)* Докажите, что любое выпуклое тело объема V можно поместить в ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда объема 6 V (рис. 2).

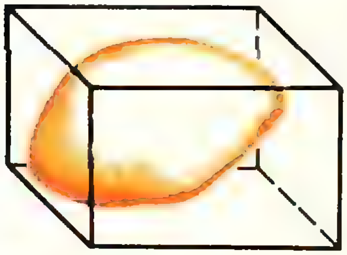


Рис. 2.

Ф438. Однородная палочка лежит внутри шероховатой сферической полости. Длина палочки равна радиусу сферы. Коэффициент трения равен μ. Какой наибольший угол с горизонтом может составлять палочка?

Б. Буховцев

Ф439. Неоновая лампочка (нл) загорается, когда напряжение на ней достигает значения U_1. При этом сопротивление лампочки становится пренебрежимо малым. Когда напряжение на лампе падает до значения U_2, лампа гаснет, и ее сопротивление становится бесконечно большим. Эту лампу включили в цепь, как показано на рисунке 3. Считая $\mathcal{E} \gg U_1 > U_2$, построить примерный график зависимости напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K.

В. Копылов

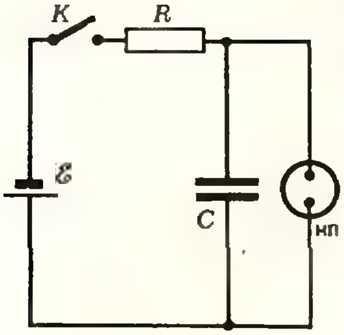


Рис. 3.

Ф440.* Оцените приближенно, при каком минимальном радиусе планеты она сможет удерживать атмосферу, состоящую в основном из кислорода и азота, если температура поверхности планеты $T = 300$ °K. Среднюю плотность вещества планеты принять равной $\rho = 4 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

С. Козел

Ф441.* Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится точечный заряд q. Площадь пластин бесконечно велика, расстояние между ними равно d. Первоначально заряд находится на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от левой пластины. Какой заряд пройдет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряда q в новое положение, при котором он будет находиться на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от правой пластины?

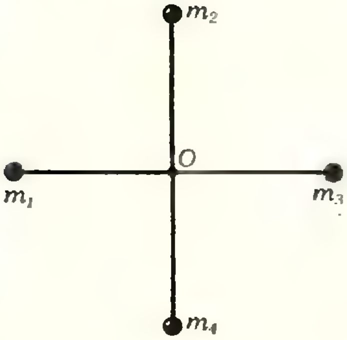


Рис. 4.

Ф442. Шарики с массами 1, 2, 3 и 4 *кг* соединены легкими стержнями длиной 1 *м* каждый. Стержни скреплены так, что они образуют крест (рис. 4). Система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка. Найти амплитуду колебаний системы, если в начальный момент стержень, соединяющий грузы с массами $m_2 = 2$ *кг* и $m_4 = 4$ *кг* был вертикален и шары были неподвижны.

Решения задач

М386—М390; Ф393—Ф396

М386. *Квадратная комната разгорожена перегородками, параллельными стенам, на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.*

Первое решение. Рассмотрим вначале случай, когда длины сторон всех комнат равны единице (длина стороны исходной комнаты, разумеется, больше единицы — иначе ее нельзя разгородить на меньшие квадратные комнаты с целыми длинами сторон). Из рисунка 1 видно, что в этом случае в каждой из частей 1, 2, 3 и 4 поровну перегородок, и, следовательно, общая их длина делится на 4.

В общем же случае разгородим каждую из комнат на комнаты со стороной длины 1. Для такого разбиения сумма длин перегородок по доказанному делится на 4. Посмотрим, как эта сумма отличается от первоначальной. После дополнительного разгораживания к сумме длин в каждой комнате добавится число, кратное четырем (здесь мы снова воспользовались разобранным частным случаем!). Следовательно, общая сумма длин перегородок увеличится на число, кратное четырем. Из этого получаем, что и первоначальная сумма длин перегородок делится на 4.

Второе решение. Добавим к сумме длин перегородок периметр исходной комнаты — делимость на 4 от этого не изменится. Полученная сумма есть половина суммы периметров всех комнат, включая исходную. Осталось доказать, что эта сумма периметров делится на 8. Действительно, сумма периметров в 4 раза больше суммы длин сторон всех комнат (от каждой комнаты берется по одной стороне). Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что число комнат, длины сторон которых нечетны — четно; поэтому сумма длин сторон всех комнат (включая исходную) четна, сумма периметров делится на 8, а исходная сумма длин перегородок делится на 4.

Третье решение. Будем считать, что наша комната расположена на большой шахматной доске с длиной стороны клетки, равной единице. Разобьем все перегородки и стены исходной комнаты на отрезки длины 1. Среди этих отрезков имеются отрезки четырех типов (рис. 2), в зависимости от расположения относительно черных и белых клеток доски. Легко понять, что среди отрезков, расположенных на стенках каждой комнаты, отрезков каждого из этих типов поровну (рис. 3). Просуммировав отрезки каждого типа по всем комнатам разбиения и разделив каждое из этих четырех чисел пополам, получим, что на всех перегородках и стенах исходной комнаты отрезков указанных четырех типов — поровну. Поскольку добавление периметра исходной комнаты не меняет делимости на 4, из последнего замечания следует утверждение задачи.

С. Фомин

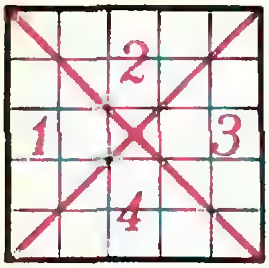


Рис. 1.

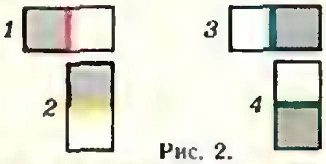


Рис. 2.

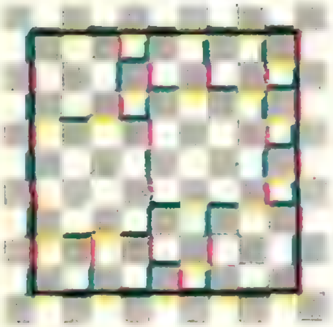


Рис. 3.

◆

М387. *Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе, то получится точный квадрат?*

Будем решать задачу в системе счисления с основанием $q > 1$ (в условии $q = 10$).

1) Пусть искомое число A n-значно, то есть $q^{n-1} \leqslant A < q^n$. Приписав A к самому себе, получим число $\overline{AA} = A \cdot q^n + A = (q^n + 1)A$. Условие задачи теперь выглядит так: существуют ли натуральные числа n, A, B такие, что $q^{n-1} \leqslant A < q^n$ и $(q^n + 1)A = B^2$?

Предположим, что в разложении числа $q^n + 1$ на простые сомножители каждый из них встречается лишь по разу. Так как B^2 делится на $q^n + 1$, то в этом случае и B делится на $q^n + 1$. Поэтому B^2 делится на $(q^n + 1)^2$, откуда следует, что A делится на $q^n + 1$. Но это невозможно, поскольку $A < q^n + 1$. Значит, в разложении числа $q^n + 1$ хотя бы один простой сом-

---

Задаче М385 будет посвящена статья А. Кушниренко, которую мы опубликуем в одном из ближайших номеров нашего журнала.

ножитель должен встретиться больше одного раза. Мы получили **необходимое** условие разрешимости задачи: число q^n-1 должно быть представимо в виде M^2N, $M > 1$.

2) Докажем теперь, что это условие является также и **достаточным**.

Предположим, что $q^n+1 = M^2N$, $M > 1$. Если число N уже n-значно, т. е. если $q^{n-1} \leqslant N < q^n$, то все в порядке: в качестве A годится само N: тогда $\overline{AA} = N(q^n+1) = M^2N^2$ — точный квадрат. Но пока мы можем сказать лишь то, что $q^{n-i-1} \leqslant N < q^{n-i}$, $i \geqslant 0$ (т. е. N может оказаться и меньше, чем n-значным). Возьмем $r > 1$ такое, что $r^2 \leqslant q$ (это всегда можно сделать, если $q \geqslant 4$; например, положить $r = 2$), и рассмотрим геометрическую прогрессию $\{N \cdot r^{2k}\}$, $k = 0, 1, \ldots$. Поскольку первый член этой прогрессии меньше q^n и знаменатель $r^2 \leqslant q$, ясно, что в ней найдется член B, принадлежащий промежутку $[q^{n-1}, q^n]$. Так как B имеет вид $N \cdot r^{2i}$, то, положив $A = B$, получим, что $\overline{AA}_q = N \cdot r^{2i}(q^n+1) = M^2N^2 \cdot r^{4i}$ — точный квадрат.

Наше рассуждение проходит для всех $q \geqslant 4$. Остаются случаи $q = 2$ и $q = 3$. В случае $q = 3$ возьмем $A = 1$, поскольку $\overline{AA}_3 = 11_3 = 1 \cdot 3+1 = 4$ — точный квадрат. В случае $q = 2$, положив $n = 3$, получим $2^3+1 = 3^2 \cdot 1$, т. е. $N = 1 < 2$, а нам нужно, чтобы $2^2 \leqslant N < 2^3$. Умножив $N = 1$ на $2^2 = 100_2$, получим уже трехзначное число $A = 100_2$. Число $\overline{AA}_2 = 100\,100_2 = 36$ — точный квадрат.

3) Докажем **существование** решения при любом q, т. е. докажем, что для всякого q существуют такие n и $M > 1$, что $q^n+1 = M^2N$.

Если q — число вида rs^2-1, $s > 1$, то $n = 1$, $M = s$, и решением задачи служит число $A = r$ (записываемое одной цифрой):

$$\overline{rr}_q = r(rs^2-1)+r = (rs)^2.$$

В частности, такими являются числа q вида 2^k-1, $k \geqslant 2$ (при $s = 2$, $r = 2^{k-2}$).

Вот несколько первых q вида rs^2-1:

$$3,\ 7,\ 8,\ 11,\ 15,\ 17,\ 19,\ 23.$$

Рассмотрим число $q+1$. Если оно не содержит нечетных множителей, то оно — вида 2^k, т. е. $q = 2^k-1$, и это уже рассмотренный случай. Если же $q-1$ содержит нечетный множитель p, то

$$q^p+1 = [(q+1)-1]^p+1 = (q+1)^p-p(q+1)^{p-1}+ \ldots \\ \ldots + p(q+1),$$

откуда следует, что q^p+1 делится на p^2 (так как $q+1$ делится на p).

В частности, при $q = 10$ получаем $n = 11$, $M = 11$, $N = 826446281$, $A = 4^2 \cdot 826446281 = 13223140496$, так что

$$1322314049613223140496 = (4 \cdot 11 \cdot 826446281)^2.$$

4) Итак, число 10^n+1 представимо в виде M^2N, $M > 1$ при $n = 11$. Является ли $n = 11$ наименьшим возможным? Чтобы выяснить этот вопрос, мы составили программу для ЭВМ и получили следующие разложения на простые множители:

$10^1+1 = 11;$
$10^2+1 = 101;$
$10^3+1 = 7 \cdot 11 \cdot 13;$
$10^4+1 = 73 \cdot 137;$
$10^5+1 = 11 \cdot 9091;$
$10^6+1 = 101 \cdot 9901;$
$10^7+1 = 11 \cdot 909091;$
$10^8+1 = 17 \cdot 5882353;$
$10^9+1 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579;$
$10^{10}+1 = 101 \cdot 3541 \cdot 27961;$
$10^{11}+1 = 11^2 \cdot 23 \cdot 4093 \cdot 8779,$

так что $n = 11$ в самом деле является наименьшим.

Б. Кукушкин

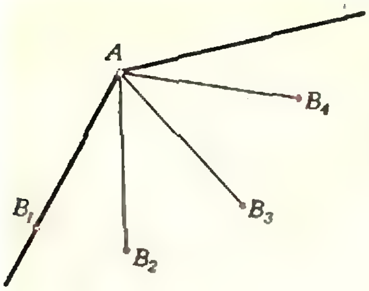


Рис. 4.

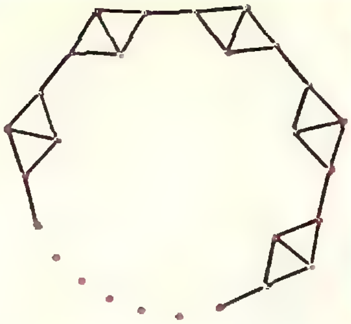


Рис. 5.

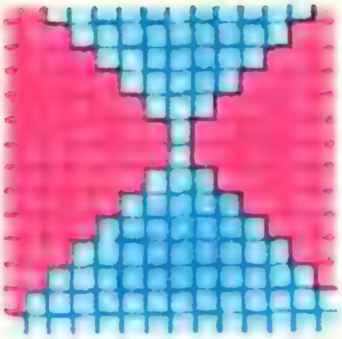


Рис. 6.

M388. *а) На плоскости отмечено конечное число точек. Докажите, что среди них найдется точка, у которой не больше трех ближайших (то есть находящихся от нее на наименьшем расстоянии; таких точек, вообще говоря, может быть несколько).*

б) Существует ли на плоскости конечное множество точек, у каждой из которых в этом множестве ровно три ближайших?

а) Предположим, что мы построили такое конечное множество M точек на плоскости, в котором у каждой не менее четырех ближайших. Пусть r — *наименьшее* из расстояний между его точками. Рассмотрим множество $L \subset M$ всех точек, расстояние от которых до ближайших к ним равно r; в множестве L, очевидно, также у каждой точки будет не менее четырех ближайших.

Построим выпуклую оболочку K множества L (наименьший выпуклый многоугольник, содержащий L). Пусть A — одна из *крайних точек* L, то есть одна из вершин K. Пусть B_1, B_2, B_3 и B_4 — четыре точки из L, находящиеся на расстоянии r от A. Ясно, что любой из углов B_iAB_j больше 60°, потому что $|B_iB_j| \geq r$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j$). Это обстоятельство явно противоречит тому, что все точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат в одном угле с вершиной A, меньшем 180° (рис. 4)

(В этом решении мы дважды использовали совет, преподанный в статье «Правило крайнего» в Кванте № 8 за 1976 год — в разделе «Квант» для младших школьников»!)

б) Да, существует. Пример изображен на рисунке 5.

Н. Васильев

◆

M389. *Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на «доминошки» (каждая доминошка покрывает две соседние клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линии сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?*

На рисунке 6 указано такое разбиение. Каждая горизонтальная прямая пересекает синюю область по отрезку, и потому разрезает лишь конечное число доминошек (очевидно, «синих»). Аналогично и для вертикальных прямых (каждая из них разрезает лишь конечное число «красных» доминошек).

С. Фомин

◆

M390. *Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых сумма цифр числа 2^n больше суммы цифр числа 2^{n+1}.*

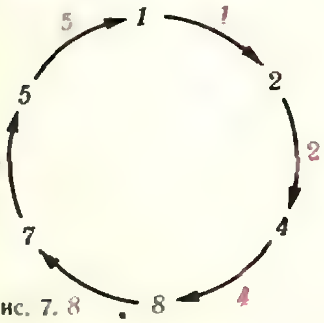


Рис. 7.

Решение этой задачи основано на двух фактах.

I. Остатки чисел 1, 2, 2^2, 2^3, … при делении на 9 образуют периодическую последовательность, изображенную на рисунке 7.

II. Количество цифр в числе 2^n не превосходит

$$\lg 2^n + 1 = n \lg 2 + 1 \leqslant \frac{n}{3} + 1.$$

Покажем, что эти два факта находятся в противоречии с предположением

III. $s(2^n) \leqslant s(2^{n+1})$

для всех n, не меньших некоторого N, где $s(a)$ — сумма цифр числа a.

Отсюда будет следовать, что **III** неверно, а это и требуется доказать в задаче.

Допустим, что **III** верно, то есть что для всех $n \geq N$ сумма цифр 2^n все время возрастает. Тогда согласно **I** для $n \geq N$ при переходе от 2^n к 2^{n+6} (за один период) сумма цифр увеличивается не меньше, чем на

$$1+2+4+8+7+5=27.$$

(Мы рассуждаем так: если a дает при делении на 9 остаток 8, b — остаток 7 и $a<b$, то разность $b-a$ не меньше 8; оценки для разностей указаны на рисунке 7 красным цветом). Итак, $s(2^{n+6}) \leqslant s(2^n)+27$.

Значит, при $n=N+6k$, где $k \geqslant 1$, будет

$$s(2^n)=s(2^{N+6k}) \geqslant s(2^N)+27k=\frac{9}{2}n-\frac{9}{2}N+s(2^N).$$

Поскольку все цифры не больше 9, согласно **II**

$$s(2^n) \leqslant 9\left(\frac{n}{3}+1\right).$$

Таким образом, при всех $n=N+6k$ должно выполняться неравенство

$$\frac{9}{2}n-A \leqslant s(2^n) \leqslant 3n+9$$

(здесь A—число, не зависящее от n). Но поскольку $\frac{9}{2}>3$, это, очевидно, неверно (при всех $n>2(A+9)/3$). Полученное противоречие доказывает, что предположение **III** неверно.

С. Конягин

◆

Ф393. *Известно, что частота излучения атомов, летящих со скоростью v в направлении наблюдателя, изменяется на величину $\Delta f=\frac{v}{c}f_0$, где c — скорость света, f_0 — частота излучения покоящегося атома (это явление называется явлением Доплера). Вследствие этого из-за теплового движения атомов спектральные линии атомов оказываются уширенными. Оцените температуру атомов Ne, зная, что в спектре его излучения обнаружена красная линия частоты $f_0=4{,}8\cdot10^{14}$ гц, ширина которой $\Delta f=1{,}6\cdot10^9$ гц.*

Средняя кинетическая энергия теплового движения атома Ne равна $\bar{E}_к=\frac{3}{2}kT$. С другой стороны, $\bar{E}_к=\frac{m\overline{v^2}}{2}$, где m — масса атома, $\overline{v^2}$ — средний квадрат скорости его теплового движения. Из равенства $\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{3}{2}kT$ находим среднеквадратичную скорость атома Ne:

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где μ — атомная масса Ne.

Изменение частоты излучения, принимаемого наблюдателем, зависит от скорости v_x движения источника в направлении наблюдателя. Для оценки величины эффекта мы можем предполагать, что компонента скорости v_x у разных атомов неона лежит в пределах от $-\sqrt{\overline{v_x^2}}$ до $+\sqrt{\overline{v_x^2}}$, где $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ — среднеквадратичное значение скорости v_x. Используя эту несколько упрощенную модель, мы получим для ширины линии в спектре излучения источника

$$\Delta f=\frac{2\sqrt{\overline{v_x^2}}}{c}f_0.$$

Поскольку $\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$, окончательно можно записать

$$\Delta f=\frac{2f_0}{c}\sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

откуда следует

$$T=\frac{\mu c^2}{4R}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2\approx 700\ {}^\circ\mathrm{K}.$$

С. Козел

Ф394. *Устройство ртутного медицинского термометра показано на рисунке 8. К баллончику со ртутью припаян тонкий капилляр, внизу которого имеется «перетяжка» — участок с диаметром примерно 30 микрон. Какую роль играет эта перетяжка? Оцените, какое ускорение нужно сообщить термометру для того, чтобы его «стряхнуть» после изменения температуры?*

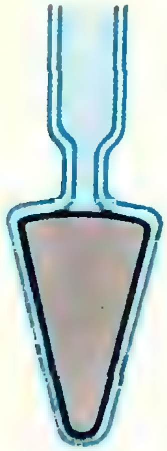


Рис. 8.

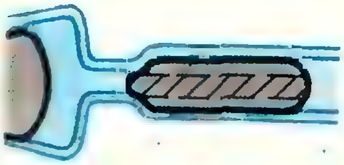


Рис. 9.

Медицинский термометр представляет собой так называемый «максимальный» термометр. Его показания соответствуют максимальной температуре за все время измерения. Это происходит за счет «перетяжки». При нагревании ртути в баллончике она расширяется. Возникающие при этом силы упругости превышают силы поверхностного натяжения, действующие на столбик ртути в месте перетяжки, и ртуть «продавливается» в капилляр. При остывании термометра ртуть начинает сжиматься, возникающие силы упругости разрывают столбик ртути в месте перетяжки, и в капилляре остается столбик ртути, соответствующий максимальной измеряемой температуре. Между столбиком ртути в капилляре и ртутью в баллоне имеются пары ртути.

Сообщим термометру ускорение, направленное вправо (рис. 9). В первый момент ртуть в силу инерции будет оставаться в покое и «войдет» в перетяжку, образовав выпуклый мениск. Давление внутри ртути под мениском будет выше давления насыщенных паров ртути в перетяжке на величину $\frac{2\sigma}{r}$, где r — радиус мениска. В то же время давление в правом конце столбика ртути в капилляре выше давления паров на величину $\frac{2\sigma}{R}$, где R — радиус правого мениска. Его можно считать равным радиусу капиллярной трубки.

Рассмотрим заштрихованный на рисунке участок столбика ртути с площадью сечения $s = \pi r^2$. Давление в его левом конце равно $p + \frac{2\sigma}{r}$, а в правом — $p + \frac{2\sigma}{R}$ (p — давление паров ртути). Потому слева на столбик действует сила $|\vec{F}_1| = \left(p + \frac{2\sigma}{r}\right)s$, а справа — сила $|\vec{F}_2| = \left(p + \frac{2\sigma}{R}\right)s$.

Разность этих сил сообщает столбику (массы m) ускорение

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|}{m} = \left(\frac{2\sigma}{r} - \frac{2\sigma}{R}\right)\frac{s}{m}.$$

Если ускорение, сообщаемое термометру, больше этого значения $|\vec{a}|$, то ртуть будет «отставать» и «продавливаться» через перетяжку. При этом радиус r мениска в перетяжке будет уменьшаться. Его минимальное значение равно радиусу r_0 перетяжки. Следовательно, максимальное ускорение, которое может быть сообщено столбику ртути, равно

$$|\vec{a}_0| = \frac{2\sigma s}{m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right).$$

Так как $r_0 \ll R$, то $\frac{1}{r_0} \gg \frac{1}{R}$, и можно считать, что

$$|\vec{a}_0| \approx \frac{2\sigma s}{r_0 m}.$$

Это значение $|\vec{a}_0|$ и есть минимальное ускорение, которое нужно сообщить термометру, чтобы его «стряхнуть». Оценим величину $|\vec{a}_0|$.

Масса ртути выше перетяжки равна ρV, где $\rho \approx 13{,}6 \times 10^3$ *кг/м³* — плотность ртути и V — объем столбика ртути выше перетяжки. Его можно оценить, полагая, что длина столбика примерно 4 *см*, а диаметр $\sim 6 \cdot 10^{-5}$ *м*. Используя эти данные и значение $\sigma \approx 0{,}5$ *н/м*, найдем, что

$$|\vec{a}_0| \approx 80 \text{ м/сек}^2.$$

◆

Ф395. *Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго (около 10 минут), в*

При измерении температуры термометр должен нагреться от комнатной температуры до температуры тела, т. е. на 15—17 °С. «Стряхнуть» же термометр можно уже тогда, когда его температура понизится на 3—4 °С. Так как шкала термо-

«стряхнуть» термометр можно практически сразу же после измерения температуры?

метра начинается с 34 °С, то при понижении температуры на несколько градусов в баллончике образуется достаточно пустого места, чтобы вместить ту ртуть, которая находится выше перетяжки. Необходимо учесть еще, что при нагревании и остывании тел скорость изменения их температуры пропорциональна разности температур тела и среды, и поэтому зависимость температуры термометра от времени имеет вид, изображенный на рисунке 10. Время остывания термометра до температуры, при которой его можно «стряхнуть», намного меньше времени измерения температуры.

◆

Ф396. *В наполненный водой сосуд погружен вверх дном сосуд меньшего диаметра, неподвижно скрепленный с большим сосудом и частично заполненный водой (рис. 11). На поверхности воды внутри меньшего сосуда плавает кусок льда. Что произойдет с уровнями воды в сосудах, когда лед растает? Как изменится ответ, если меньший сосуд не скреплен с большим и плавает на поверхности воды?*

Давление в жидкости у ее поверхности внутри маленького сосуда при равновесии равно давлению воздуха, находящегося в маленьком сосуде. Для того чтобы давление воздуха не менялось, необходимо, чтобы объем его оставался постоянным (изменением температуры при таянии льда пренебрегаем).

Вода, образующаяся при таянии льда, занимает объем, который имела часть льда, находившаяся первоначально под водой. Если бы уровень воды в маленьком сосуде не изменялся, то объем воздуха в сосуде возрастал бы и давление воздуха уменьшалось. Так что в процессе таяния льда уровень воды в маленьком сосуде поднимается, а в большом, соответственно, понижается.

Если маленький сосуд не скреплен с большим, а плавает на поверхности воды (рис. 12), то давление на дно сосуда при таянии льда не может измениться. Действительно, это давление равно весу содержимого сосуда, деленному на площадь дна сосуда. Так как ни одна из этих величин не меняется, то не меняется и давление на дно сосуда.

Но давление на дно сосуда равно $\rho|\vec{g}|h$, где ρ — плотность воды, $|\vec{g}|$ — ускорение свободного падения и h — высота столба воды. Следовательно, h при таянии льда не меняется. Что касается маленького сосуда, то он несколько погрузится в воду, чтобы объем воздуха в нем остался прежним.

И. Слободецкий

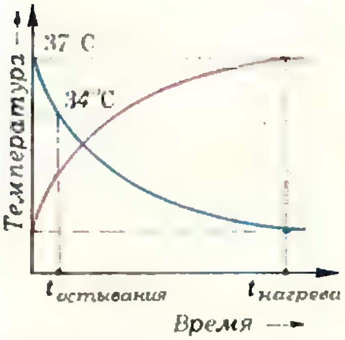


Рис. 10.

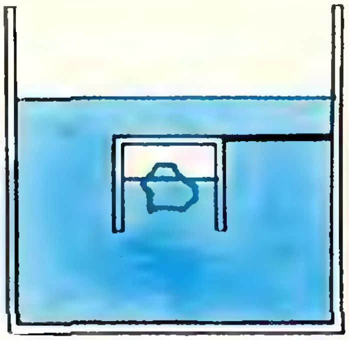


Рис. 11.

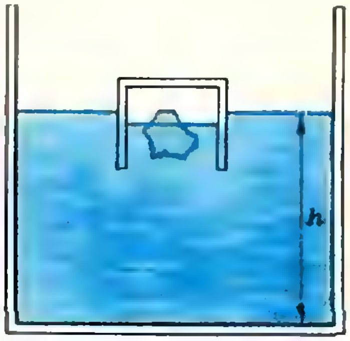


Рис. 12.

С. Пухов

Задача о выпуклых телах

Эта заметка посвящена решению задачи М380, которая была опубликована в «Задачнике «Кванта» (см. № 3 за 1976 год). Напомним ее формулировку.

а) На плоскости дана выпуклая фигура и внутри нее — точка O. К каждой прямой l, проходящей через точку O, проводится перпендикуляр в точке O и на нем по обе стороны от точки O откладываются два отрезка, длины которых равны длине отрезка, получающегося при пересечении данной фигуры с прямой l. Объединение всех этих отрезков — новая фигура с центром симметрии O. Будет ли полученная фигура выпуклой?

б) В пространстве дано выпуклое центрально-симметричное тело с центром O. К каждой плоскости α, проходящей через точку O, проводится перпендикуляр в точке O и на нем по обе стороны от этой точки O откладываются два отрезка, длины которых равны площади сечения данного тела плоскостью α. Объединение всех этих отрезков — новое тело с тем же центром симметрии O. Докажите, что полученное тело тоже выпукло.

Замечание. В задаче б) считается, что фиксирована некоторая единица длины. Тогда единица площади определяется автоматически. И процесс откладывания отрезков надо понимать так: отрезок содержит столько единиц длины, сколько единиц площади содержит перпендикулярное сечение.

Мы не будем определять здесь, что такое выпуклое множество, тело, фигура, как и не будем перечислять свойств выпуклых множеств, — все эти понятия входят в школьный курс геометрии, и их можно найти в школьных учебниках. Кроме того, мы не будем давать строгого определения площади. Оказывается, любая плоская выпуклая фигура имеет площадь в том же смысле, в каком имеет площадь треугольник, квадрат или круг. Подробно об этом можно прочитать, например, в Энциклопедии элементарной математики, том V, статья В. А. Рохлина «Площадь и объем», или в книге В. Бляшке «Круг и шар». Вообще о выпуклых множествах написано много интересных книг. Некоторые из них мы упомянем в конце заметки.

Итак, начнем решать задачу М380.

Отрицательный ответ на вопрос, поставленный в задаче а), дает следующий пример.

Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O (рис. 1). Пусть при этом $|AO| = |BO| = |CO| = \sqrt{2}$, а $|DO| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Начнем осуществлять конструкцию, описанную в пункте а). На лучах OB и OC отложим отрезки OP_1 и OP_2, конгруэнтные отрезкам AC и BD соответственно; точки P_1 и P_2 — точки нового множества. На биссектрисе угла BOC отложим отрезок OP, конгруэнтный отрезку EF (лежащему на биссектрисе углов AOB и COD).

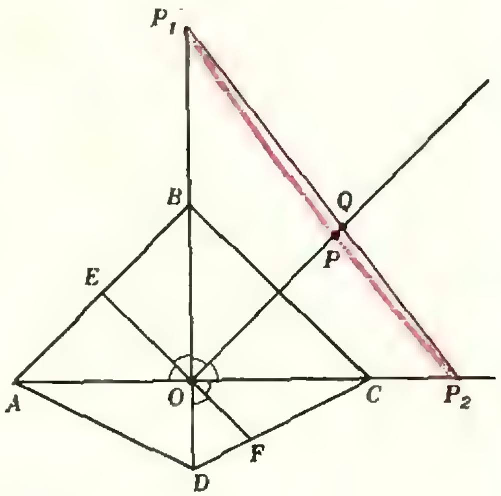


Рис. 1.

Покажем, что отрезок OP не пересекает отрезка P_1P_2. Поскольку P — граничная точка новой фигуры, из этого будет следовать, что новая фигура невыпукла.

Обозначим точку пересечения биссектрисы угла BOC с отрезком P_1P_2 через Q $(Q\in[P_1P_2])$. Нам нужно доказать, что отрезок OP короче отрезка OQ, т. е. что $|OP|<|OQ|$.

Нетрудно посчитать, что $|OE|=1$, $|OF|=\frac{2}{3}$, т. е. что $|EF|=|OP|=\frac{5}{3}$. Но $|OQ|=\frac{12}{7}$ (проделайте все вычисления самостоятельно). Поскольку $\frac{5}{3}<\frac{12}{7}$, получаем, что $|OP|<|OQ|$, то есть новая фигура, получающаяся из выбранного нами четырехугольника $ABCD$ по «рецепту», описанному в задаче а), в самом деле невыпукла.

Упражнение. Докажите, что фигура, получающаяся по рецепту задачи а) из произвольного четырехугольника, отличного от параллелограмма, у которого в качестве точки O взята точка пересечения его диагоналей, также невыпукла.

Перейдем теперь к доказательству утверждения, сформулированного в пункте б) задачи. Для удобства обозначим новое тело буквой V, а тело, из которого оно получается, — буквой W.

Будем говорить, что граничная точка P нового тела V *соответствует* сечению ω старого тела W плоскостью α, проходящей через центр симметрии O, если отрезок OP перпендикулярен к плоскости α, а длина его равна площади сечения ω: $|OP|=S_\omega$. Каждому сечению соответствуют две симметричные относительно O точки; таким образом, новое тело V также симметрично относительно точки O.

Поскольку тело V образовано совокупностью отрезков, «торчащих» из центра O, его выпуклость будет следовать из того, что вместе с любыми двумя граничными точками P_1 и P_2, соответствующими различным сечениям тела W, телу V принадлежит и весь отрезок P_1P_2 (продумайте это).

Итак, пусть точки P_1 и P_2 тела V соответствуют двум различным сечениям ω_1 и ω_2 тела W плоскостями α_1 и α_2, проходящими через центр симметрии O. Пусть Q — произвольная внутренняя точка отрезка P_1P_2. Нужно доказать, что $Q\in V$. Проведем через O плоскость, перпендикулярную к отрезку OQ, и пусть P — точка, лежащая на луче OQ, соответствующая сечению ω тела W плоскостью α. Очевидно, что точка Q будет принадлежать телу V тогда и только тогда, когда $|OQ|\leqslant|OP|$. Таким образом, решение задачи б) сводится к доказательству этого неравенства. Проведем его в несколько шагов.

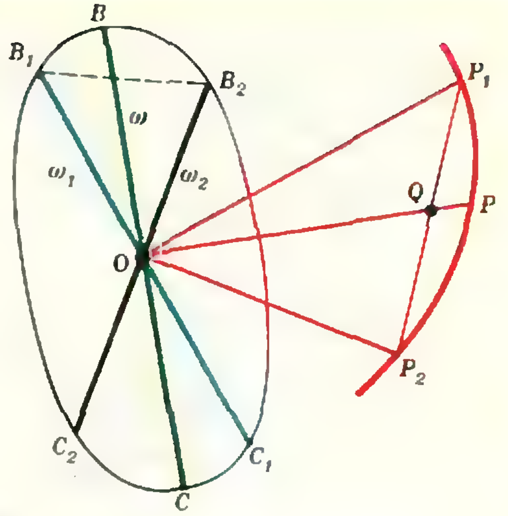


Рис. 2.

1. Спроектируем (ортогонально) сечения ω_1, ω_2 и ω на плоскость, проходящую через точки O, P_1 и P_2 (плоскость рисунка 2); тогда сечения ω, ω_1 и ω_2 превратятся в отрезки. Пусть $[B_1C_1]$, $[B_2C_2]$ и $[BC]$ — эти отрезки.

Заметим, что цветные лучи на рисунке получаются из красных поворотом на 90° вокруг точки O, и что длины красных отрезков OP_1, OP_2 и OP равны площадям сечений ω_1, ω_2 и ω соответственно. Ниже мы, пользуясь выпуклостью тела W и принципом Кавальери *), выведем соот-

---

*) Бонавентура Кавальери (1598—1647)— известный итальянский математик. О его принципе в «Кванте» уже рассказывалось— см. № 6 за 1972 год и № 8 за 1975 год. Принцип Кавальери есть и в школьном учебнике — см. «Алгебру и начала анализа 10», с. 98.

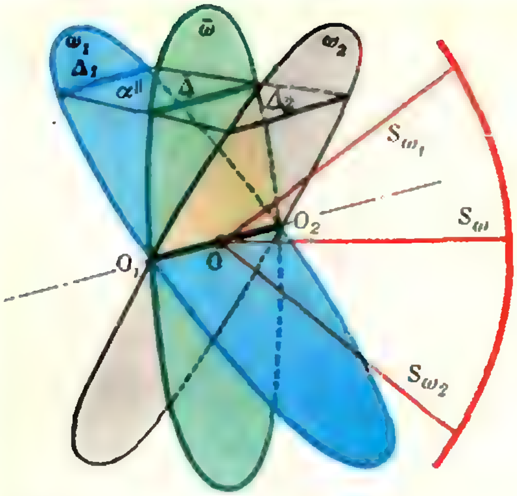


Рис. 3.

ношение для площадей этих сечений, из которого будет следовать, что отрезок OP пересекает отрезок P_1P_2.

Ясно, что плоские сечения ω, ω_1 и ω_2 пересекаются по общему отрезку O_1O_2 (рис. 3). Проведем плоскость через точки B_1 и B_2 параллельно этому отрезку; назовем ее $\alpha^{\|}$. Любая плоскость, параллельная $\alpha^{\|}$, пересекает сечения ω_1, ω_2 и ω по параллельным отрезкам Δ_1, Δ_2, Δ (см. рис. 3), причем если перемещать $\alpha^{\|}$ параллельно самой себе, то отрезки Δ_1 исчерпают все сечение ω_1, отрезки Δ_2 — все сечение ω_2, а отрезки $\bar{\Delta}$ (см. рис. 3) — часть $\bar{\omega}$ сечения ω. При этом отношение, в котором отрезок $\bar{\Delta}$ делит боковые стороны трапеции с основаниями Δ_1 и Δ_2 — одно и то же для всех плоскостей $\alpha^{\|}$; положим его равным $\mu:\lambda$, где $\mu+\lambda=1$ — см. рисунок 4, *а*. Объясним, почему это так. Спроектируем все наши сечения на плоскость, проходящую через центр O, перпендикулярную к отрезку O_1O_2; мы получим картинку, изображенную на рисунке 4, *б*. Сечениям ω, ω_1 и ω_2 соответствуют цветные отрезки, семейству плоскостей $\alpha^{\|}$ — семейство параллельных прямых $l^{\|}$, а каждым трем отрезкам Δ_1, Δ_2 и Δ — три точки, лежащие на одной из прямых семейства $l^{\|}$. Ясно, что все средние точки (соответствующие отрезкам Δ) делят каждый из отрезков, заключенных между крайними прямыми (проекциями сечений ω_1 и ω_2) в одном и том же отношении.

2. Рассмотрим теперь плоскость $\alpha^{\perp}$, проходящую через отрезок O_1O_2 и перпендикулярную к плоскостям $\alpha^{\|}$. Спроектируем сечения ω_1, ω_2 и ω на $\alpha^{\perp}$. В силу выбора плоскости $\alpha^{\perp}$, проекции сечений ω_1 и ω_2 (*пр.* ω_1 и *пр.* ω_2) на плоскость $\alpha^{\perp}$ имеют одинаковую высоту (рис. 5). Отрезки Δ_1 и Δ_2 проектируются в отрезки, лежащие на одной прямой, без искажения длины. Очевидно, что $|\Delta| \geqslant \lambda|\Delta_1| + \mu|\Delta_2|$ (поскольку $\lambda|\Delta_1| + \mu|\Delta_2|$ — длина отрезка $\bar{\Delta}$, параллельного основаниям трапеции длины $|\Delta_1|$ и $|\Delta_2|$, делящего боковые стороны в отношении $\mu:\lambda$ и лежащего внутри трапеции, а отрезок Δ — не короче, что следует из выпуклости тела W).

Раздвинем теперь проекции сечений ω_1 и ω_2 (в плоскости $\alpha^{\perp}$) вдоль прямой, на которой расположено их общее основание — см. рисунок 6; на нем изображены только верхние половинки проекций, поскольку тело W центрально-симметрично. В промежутке между этими «раздвинутыми» проекциями нарисуем еще одну фигуру, у которой:

а) высота такая же, как и у *пр.* ω_1 и *пр.* ω_2;

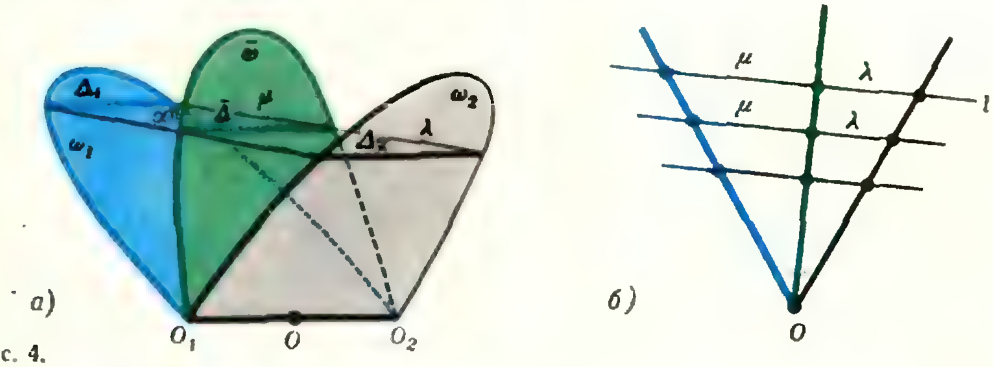


Рис. 4.

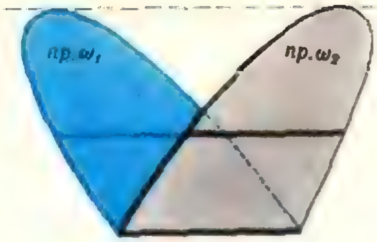


Рис. 5.

б) основание такое же, как и у $пр.\omega_1$, $пр.\omega_2$;

в) если a и b — длины отрезков, получающихся при пересечении $пр.\omega_1$ и $пр.\omega_2$ некоторой прямой, параллельной основанию, то длина отрезка пересечения этой прямой с новой фигурой равна $\lambda a+\mu b$ (λ и μ — те, о которых говорилось выше).

3. Постараемся выяснить теперь, как связаны между собой площади проекций ω_1, ω_2 и новой фигуры, и как площадь новой фигуры связана с площадью проекции сечения ω. Для этого нам понадобятся три свойства площади (доказывать мы их не будем, поскольку не дали строгого определения площади).

Первое свойство — это *принцип Кавальери*. Принцип Кавальери утверждает, что если две фигуры, лежащие в одной плоскости, обладают тем свойством, что любая прямая, параллельная данной прямой (лежащей в той же плоскости), в пересечении с этими фигурами дает конгруэнтные отрезки, то эти две фигуры равновелики.

Второе свойство — это *обобщение принципа Кавальери*. Пусть на плоскости даны три фигуры F, F_1 и F_2, такие, что любая прямая, параллельная заданной прямой, лежащей в плоскости фигур, пересекает эти фигуры по отрезкам длины f, f_1 и f_2, причем всякий раз $f=f_1+f_2$. Тогда $S_F=S_{F_1}+S_{F_2}$ (выведите это свойство из принципа Кавальери).

И наконец — третье свойство: при растяжении фигуры относительно некоторой оси с коэффициентом k площадь ее умножается на k.

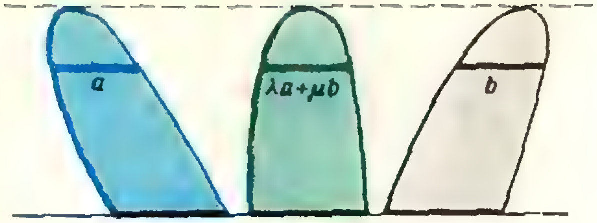
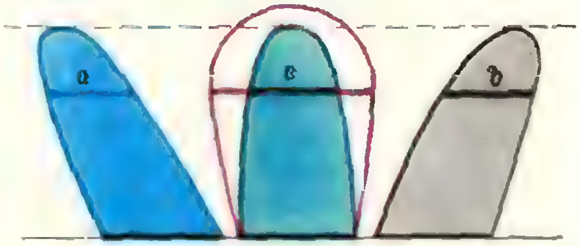


Рис. 6.



$c\geqslant\lambda a+\mu b$

Рис. 7.

Из принципа Кавальери немедленно следует, что площадь построенной на рисунке 6 фигуры такая же, как у проекции на плоскость $\alpha^{\perp}$ части $\overline{\omega}$ сечения ω, т. е. равна $S_{пр.\overline{\omega}}$. Из того же, как строилась новая фигура, и последних двух свойств следует, что $S_{пр.\overline{\omega}}=\lambda S_{пр.\omega_1}+\mu S_{пр.\omega_2}$. Поскольку $S_{пр.\omega}\geqslant S_{пр.\overline{\omega}}$, получаем, что $S_{пр.\omega}\geqslant\lambda S_{пр.\omega_1}+\mu S_{пр.\omega_2}$ (рис. 7).

4. Вернемся теперь к рисунку 2 и вспомним замечание в пункте 1 доказательства. Повернем отрезки OP_1, OP_2 и OP на 90° вокруг центра O; отрезки OP_1, OP (OQ) и OP_2 перейдут в отрезки OP_1', OP'(OQ') и OP_2', расположенные на тех же прямых, что и отрезки B_1C_1, BC и B_2C_2 — прямоугольные проекции сечений ω_1, ω и ω_2 на плоскость рисунка, причем $|OP_1'|=S_{\omega_1}$, $|OP'|=S_{\omega}$, $|OP_2'|=S_{\omega_2}$ (рис. 8, a). Отметим линию пересечения плоскости $\alpha^{\perp}$ с плоскостью рисунка (красная линия на рисунке 8) и спроектируем каждый из отрезков на эту прямую. Отрезок OP_1' перейдет в отрезок OP_1^* длины $S_{пр.\omega_1}$: $|OP_1^*|=S_{пр.\omega_1}$. (Докажите это равенство самостоятельно. Для этого вам нужно понять, как изменяется площадь фигуры при ортогональном проектировании.) Отрезок OP_2' перейдет в отрезок OP_2^*: $|OP_2^*|=S_{пр.\omega_2}$; отрезок OP' — в отрезок OP^* длины $S_{пр.\omega}$, т. е. $|OP^*|\geqslant\lambda|OP_1^*|+\mu|OP_2^*|$. Точка Q' отрезка $P_1'P_2'$, соответствующая точке Q отрезка P_1P_2, проектируется в точку Q^*. Если мы докажем, что $|OQ^*|\leqslant\lambda|OP_1^*|+\mu|OP_2^*|$, то тог-

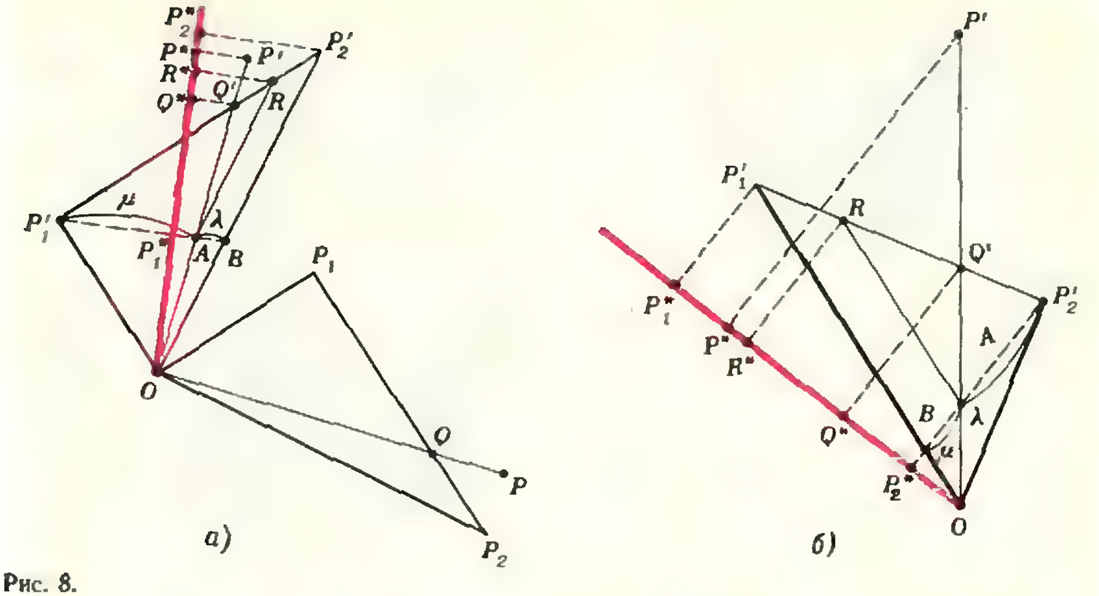


Рис. 8.

да $|OQ^*|\leqslant|OP^*|$, откуда $|OQ'|\leqslant\leqslant|OP'|$, $|OQ|\leqslant|OP|$, и задача решена. Итак, покажем, что $|OQ^*|\leqslant\leqslant|OP^*|$. Пусть $|OP_1^*|\leqslant|OP_2^*|$ (рис. 8, *а*). Продолжим отрезок $P_1'P_1^*$, перпендикулярный к отрезку OP_1^*, до пересечения с лучами OQ' и OP_2' в точках A и B (случай $|OP_1^*|>|OP_2^*|$ изображен на рисунке 8, *б*). Заметим, что $|P_1'A|:|AB|=\mu:\lambda$. Проведем через точку A прямую, параллельную OP_2' (если $|OP_1^*|>|OP_2^*|$, то прямую, параллельную OP_1'); она пересечет отрезок $P_1'P_2'$ в точке R, принадлежащей отрезку $Q'P_2'$, причем $|P_1'R|:|RP_2'|=\mu:\lambda$, так что для проекции R^* на красную прямую будет $|OR^*|=\lambda|OP_1^*|+\mu|OP_2^*|$ и $|OR^*|\geqslant|OQ^*|$, откуда следует, что $|OQ^*|\leqslant|OP^*|$.

Это неравенство, как мы уже отмечали выше, завершает доказательство утверждения б).

И, наконец, обещанный список книг.

Литература

1. *Энциклопедия элементарной математики* (ЭЭМ), книга пятая — геометрия, М., «Наука», 1966.
2. В. Бляшке, *Круг и шар*, М., «Наука», 1967.
3. Л. А. Люстерник, *Выпуклые фигуры и многогранники*, М., «Наука», 1966.
4. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры*, М., «Наука», 1951.
5. И. М. Яглом, *Проблема тринадцати шаров*, Киев, «Вища школа», 1975.

Ходом коня

Шахматный конь обошел всю доску и вернулся на исходное поле. Восстановите весь маршрут, если известны номера только шестнадцати полей доски (в порядке их обхода конем).

52		16					
					48		32
36							
	4				44		60
8		40				12	
							24
20		64					
			56		28		

Точные квадраты

«И все же он не прав»

Эта фраза стала предметом глубоких раздумий одного любителя головоломок: можно ли в ней заменить буквы цифрами (одинаковые — одинаковыми, разные — разными), чтобы каждое слово стало квадратом некоторого натурального числа?

Однако поиск решения настолько затянулся, что требуется ваша помощь.

Л. Мочалов

А. Хинчин

Геометрический смысл производной

В девятом классе на уроках алгебры вы познакомились с определением производной функции. Понятие производной — одно из основных в математическом анализе. Мы помещаем рассказ о геометрической иллюстрации производной, одинаково важной как для анализа, так и для геометрии, которой в школе (см. «Алгебру 9», п. 52) отведено мало времени. Этот рассказ взят нами из «Краткого курса математического анализа» известного советского математика и педагога Александра Яковлевича Хинчина (1894—1959)*).

Геометрическое изображение функций служит чрезвычайно ценным орудием их исследования, прежде всего потому, что многие черты в поведении функции, которые трудно было бы прочитать при ее задании с помощью формулы (а тем более — таблицы), на графике выступают с полной наглядностью и отчетливо видны глазу. Любая особенность данной функции должна при ее графическом изображении выступать как некоторое геометрическое свойство изображающей кривой. Можно, в частности, заранее предвидеть, что чертеж, изображающий функцию, дает нам вместе с тем и наглядное представление о ее производной.

Пусть мы изображаем функцию $y=f(x)$ в декартовой системе координат $(x;\ y)$ (рис. 1). Отметим на кривой точки $M\ (x;\ y)$ и $N\ (x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Проведем прямую MP параллельно оси OX. Очевидно, в прямоугольном треугольнике MNP катетами служат $MP=\Delta x$ и $NP=\Delta y$. Поэтому отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно тангенсу угла φ, образуемого хордой MN с положительным направлением оси OX.

Заставим теперь Δx стремиться к нулю. При этом точка M будет оставаться неподвижной, а точка N — неограниченно приближаться к ней. Хорда MN будет изменять свое направление, причем в каждый момент этого процесса угловой коэффициент этой хорды —

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

если данная функция имеет производную в точке x, т. е. если существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=y',$$

то геометрически это означает, что направление хорды MN стремится при этом к некоторому предельному направлению MT, образующему с положительным направлением оси OX угол α, причем

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'. \qquad (1)$$

Прямую MT, которую чисто геометрически можно определить как предельное положение секущей MN, соединяющей точку M с безгранично приближающейся к ней другой точкой N данной кривой, называют **касательной** к данной кривой в точке M. Равенство (1) показывает, что *производная функции $f(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту каса-*

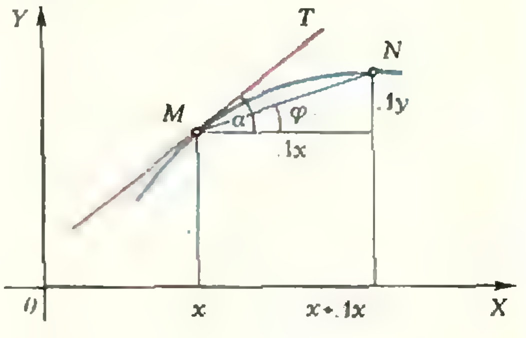


Рис. 1.

---

*) А. Я. Хинчин, *«Краткий курс математического анализа»*, М., Гостехиздат, 1957.

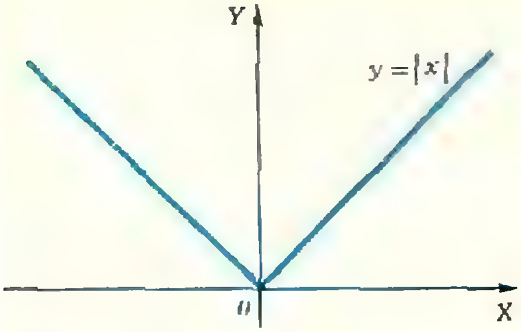


Рис. 2.

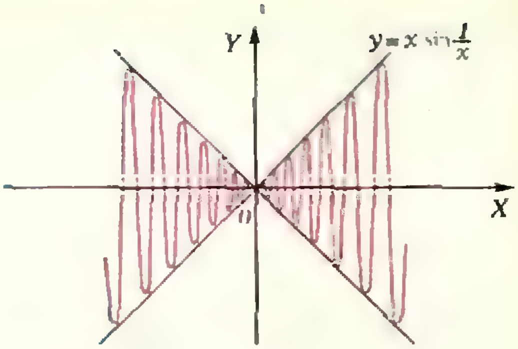


Рис. 3.

тельной к соответствующей кривой в точке с абсциссой x. Если, как это обычно делается, считать (в хорошем согласии с нашим наглядным представлением), что направление касательной характеризует нам направление самой кривой в данной точке, то мы непосредственно видим, что если кривая (с возрастанием x, т. е. слева направо) поднимается, то производная ее неотрицательна, и чем круче подъем, тем больше величина производной; напротив, там, где кривая (слева направо) *опускается*, производная неположительна, причем и здесь абсолютная величина производной тем больше, чем круче спуск.

Найденный нами геометрический образ производной позволяет наглядно разобраться и в примерах отсутствия производной. *Рисунок* 2 дает нам график функции $y=|x|$, а рисунок 3 — функции $y=x\sin\frac{1}{x}$. В первом случае линия $y=|x|$ при $x=0$ имеет определенное направление вправо и определенное направление влево, но эти два *направления* различны между собою; во втором случае кривая $y=x\sin\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ ни вправо, ни влево никакого определенного направления не имеет (отсутствие касательной): по мере того, как $|x|$ становится *все меньше и меньше*, направление секущей все вновь и вновь колеблется между прямыми $y=x$ и $y=-x$ и потому не может стремиться ни к какому предельному направлению.

Наконец, с точки зрения геометрической *интерпретации производной* легко понять, почему так долго господствовала уверенность в том, что всякая непрерывная функция должна иметь производную (кроме, может быть, некоторых особых точек): действительно, очень трудно представить себе непрерывную кривую, которая ни в одной точке не имела бы касательной; и даже теперь, когда существование таких кривых твердо установлено, мы лишь весьма приблизительно можем представить себе их течение; такая кривая в соседстве каждой своей точки расположена примерно так, как кривая рисунка 3 в соседстве точки O. Как бы то ни было, такие кривые существуют, и открытие их было в истории математики одним из самых ярких примеров того, как интуиция, господствовавшая целыми веками, может все же оказаться ошибочной.

Заметим еще, что знание величины производной y' в точке x, очевидно, позволяет нам элементарными приемами построить касательную к кривой $y=f(x)$ в точке M. Элементарная геометрия учит нас строить касательные к окружностям, в аналитической геометрии мы учимся находить касательные ко всем кривым второго порядка, но только дифференциальное исчисление позволяет поставить и решить общую задачу о проведении касательной к произвольной кривой в любой данной ее точке.

А теперь в качестве упражнений мы предлагаем читателям несколько задач на касательные к кривым.

Задачи

1. У параболы $y=\frac{4x-x^2}{4}$ проведены касательные в точках (0; 0), (2; 1), (4; 0). Найти их углы наклона к оси Ox. (9 кл.)

2. Найти угол наклона касательной к гиперболе $xy=a^2$ в точке $(a;\ a)$. (9 кл.)

3. а) Под каким углом кривая $y=\ln x$ пересекает ось Ox?

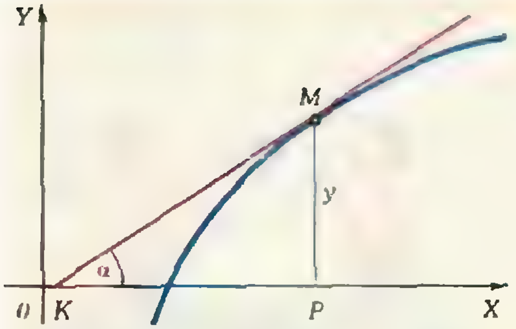


Рис. 4.

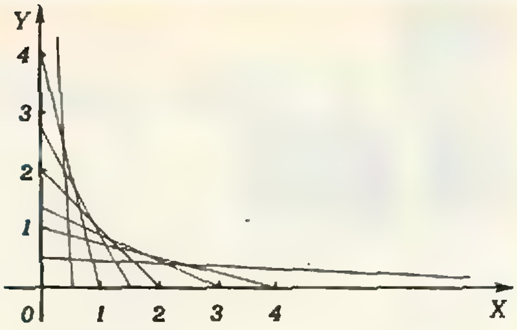


Рис. 5.

б) Тот же вопрос для синусоиды $y=\sin x$. (10 кл.)

4. При каком a кривая $y=a^x$ пересекает ось Oy под углом 45°?

5. Под каким углом пересекаются с осью Oy кривые

$$y=\sin x\sqrt{3}, \quad y=\frac{x}{1+x^2}, \quad y=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}.$$

6. При каком значении a кривая $y=\dfrac{ax-x^3}{4}$ пересекает ось Ox под углом 45°?

(9 — 10 кл.)

Построение касательных

Обозначим через P проекцию точки касания M $(x;\ y)$ на ось OX, а через K — точку, в которой касательная пересекает ось OX (рис. 4). Отрезок KP называется *подкасательной*. Из прямоугольного треугольника KPM (см. рис. 4) получаем: $|KP|\cdot|\operatorname{tg}\alpha|=|y|$ или, поскольку $\operatorname{tg}\alpha=y'$,

$$|KP|=\frac{|y|}{|y'|}.$$

7. а) Определив длину подкасательной к параболе $y=ax^2$, дать способ построения касательной (см. пример 2, п. 52, «Алгебра 9»).

б) То же для кривой $y=x^n$. (9 кл.)

8. Доказать, что кривая $y=a^x$ имеет подкасательную постоянной длины и дать способ построения касательной к этой кривой. (10 кл.)

9. Доказать, что касательная к гиперболе $xy=a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади $2a^2$. (9 кл.)

Из задачи 9 вытекает интересное свойство гиперболы. *Гипербола является огибающей прямых, отсекающих от прямого угла треугольники данной площади* S, то есть гипербола касается всех таких прямых (рис. 5).

(Начало см. с. 20)

2. Каждая грань куба выкрашена в некоторый цвет. Докажите, что если использовать лишь два цвета, то найдутся две смежные грани (примыкающие к одному ребру), которые окрашены в один цвет. Верно ли это для октаэдра?

3. Докажите, что если ни одно из чисел
$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d$$
не делится на n, то числа d и n не являются взаимно простыми.

4. Докажите, что для любого натурального m существует число, записываемое (в десятичной системе) единицами и нулями, делящееся на m.

5. Существует ли такое натуральное n, что n-значное число, записываемое (в десятичной системе) одними единицами, делится на 1977?

6. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 14×14 и в каждой его клетке записано какое-либо из чисел 1, 2, ..., 1977. Докажите, что существуют такие прямоугольники P и Q, вершины которых находятся в центрах клеток, что сумма чисел, записанных у вершин прямоугольника P, равна сумме чисел, записанных у вершин прямоугольника Q.

7. Докажите, что, имея на руках 100 денежных купюр двух различных достоинств, можно купить некоторое число 101-рублевых вещей без сдачи.

8. Даны 11 действительных чисел, каждое из которых больше нуля, но меньше единицы. Докажите, что из них можно выбрать два таких числа a, b, что число $1-a+b$ записывается либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной десятичной дроби, запись которой содержит бесконечно много нулей.

9. Даны три натуральных числа a, b, c, причем a и b взаимно просты. Докажите, что существует натуральное n, для которого $nb+c$ делится на a.

10. Докажите следующее обобщение принципа Дирихле: *если* $nk+1$ *зайцев размещены в* n *клетках, то найдутся* $k+1$ *зайцев, которые посажены в одну клетку* (n, k — натуральные числа).

11. У человека на голове не более 300 000 волос. Докажите, что в Москве найдутся 25 человек, у которых число волос на голове одинаково. (Население Москвы — более 8 миллионов человек.)

(Окончание см. с. 42)

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. а) Два чудака строят на бесконечном листе бумаги в клетку ломаную, прибавляя по очереди с любой стороны одно ребро длины 1, причем проходить дважды по одному отрезку запрещается. Чудак, не имеющий возможности сделать ход, проигрывает. Докажите, что первый чудак может не проиграть, а второй чудак не может проиграть.

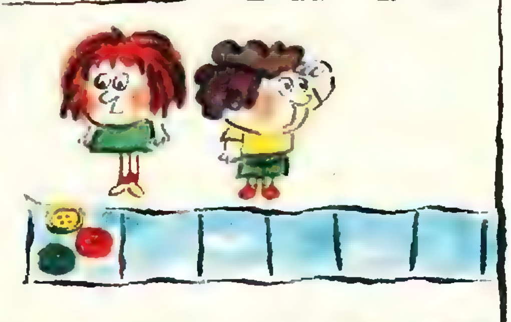
б) Два чудака продолжают играть. Теперь они по очереди режут волейбольную сетку $n \times n$ ячеек, разрезая каждый раз по одной нитке. Чудак, после разреза которого сетка распадается на два куска, проигрывает. Кто выигрывает?

2. Некоторое число при делении на 1976 и на 1977 дает в остатке 76. Какой остаток даст это число при делении на 39?

3. Шахматная фигура «кентавр» ходит как конь, но не может ходить на два поля вверх и одно направо, а также на два поля вниз и одно налево. Может ли кентавр обойти всю шахматную доску, побывав на каждом поле только по одному разу, и вернуться на исходную клетку?

4. На самом левом поле клетчатой полосы 1×1977 лежат три пуговицы. Саша и Люся играют в следующую игру: каждый из них может перенести любую пуговицу (но только одну за ход) вправо на любое число полей. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Докажите, что Люся, начиная, может обеспечить себе победу.

5. Имеется квадратный участок леса со стороной 1 *км*. Лес состоит из деревьев диаметром 50 *см*. Таня выяснила, что через этот лес нельзя пройти ни по какой прямой с одной стороны на противоположную. Доказать, что в лесу не менее двух тысяч деревьев.



Ю. Данилов

Головоломки художника Громова

> *«Прогулка по зоологическому саду — не зоология в учебном смысле слова. Однако мне кажется, что нужно сначала заинтересоваться животными, а потом уже заниматься их классификацией и анатомией. Сад открыт для всех, в том числе и для тех, кто смотрит на животных только для развлечения. Поэтому не беда, если кто-нибудь скажет, что мои картинки — не математика. Кто их пересмотрит с начала до конца, тот, быть может, подметит то общее, что их объединяет, а это и есть математика».*
>
> Гуго Штейнгауз
> (предисловие в книге «Математический калейдоскоп»).

Начнем с игры

Взгляните на фигурки, изображенные на с. 40—41. Чтобы превратить любую из них в любую другую (например, сделать из бегемота слона, из страуса — носорога, из охотника — преследуемого им зверя), вовсе не нужно быть магом и волшебником или обращаться за помощью к Гасану Абдурахману Ибн-Хоттабу, именуемому также Хоттабычем. Все эти фигурки составлены из деталей необычного конструктора — частей квадрата, разрезанного так, как показано на рис. 1. (Каждую часть в случае необходимости разрешается переворачивать оборотной стороной вверх.)

Придумал этот способ раскроя квадрата и выразительные фигурки, которые можно построить из «кусков», художник Александр Илларионович Громов. В 1930 году Государственное издательство выпустило 5 его небольших книжечек-головоломок: «Индеец», «Паровоз», «Завод», «Петух» и «Дом». Изданные небольшим тиражом, эти увлекательные книжки-игры давно разошлись и стали библиографической редкостью. В этом номере мы знакомим читателя с фигурками из книжки А. Громова «Индеец».

Головоломки А. Громова — ближайшие родственники известной игры «танграм», которой посвятили немало замечательных страниц своих произведений классики занимательной математики Сэм Лойд и Генри Дьюдени. О танграме, других головоломках, связанных с составлением фигурок из частей особым образом разрезанной исходной фигуры, и их общем далеком предке — игре «стомахион», которая была известна еще Архимеду, мы расскажем в следующих номерах «Кванта».

Составляя фигурки, изображенные на с. 40—41, или придумывая свои собственные способы раскроя квадрата и композиции *), наши читатели (и даже их младшие братья и сестры, еще не успевшие познакомиться с такой серьезной и древней

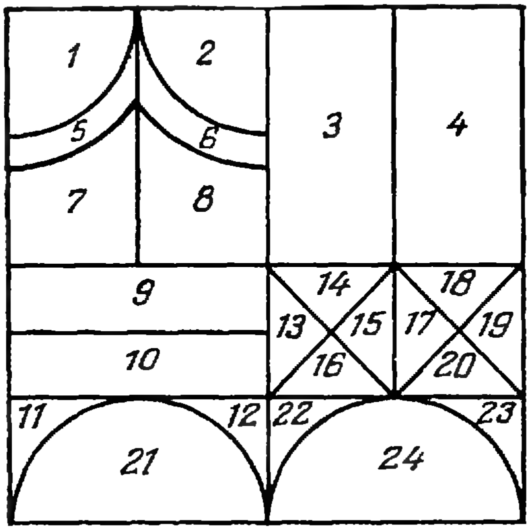
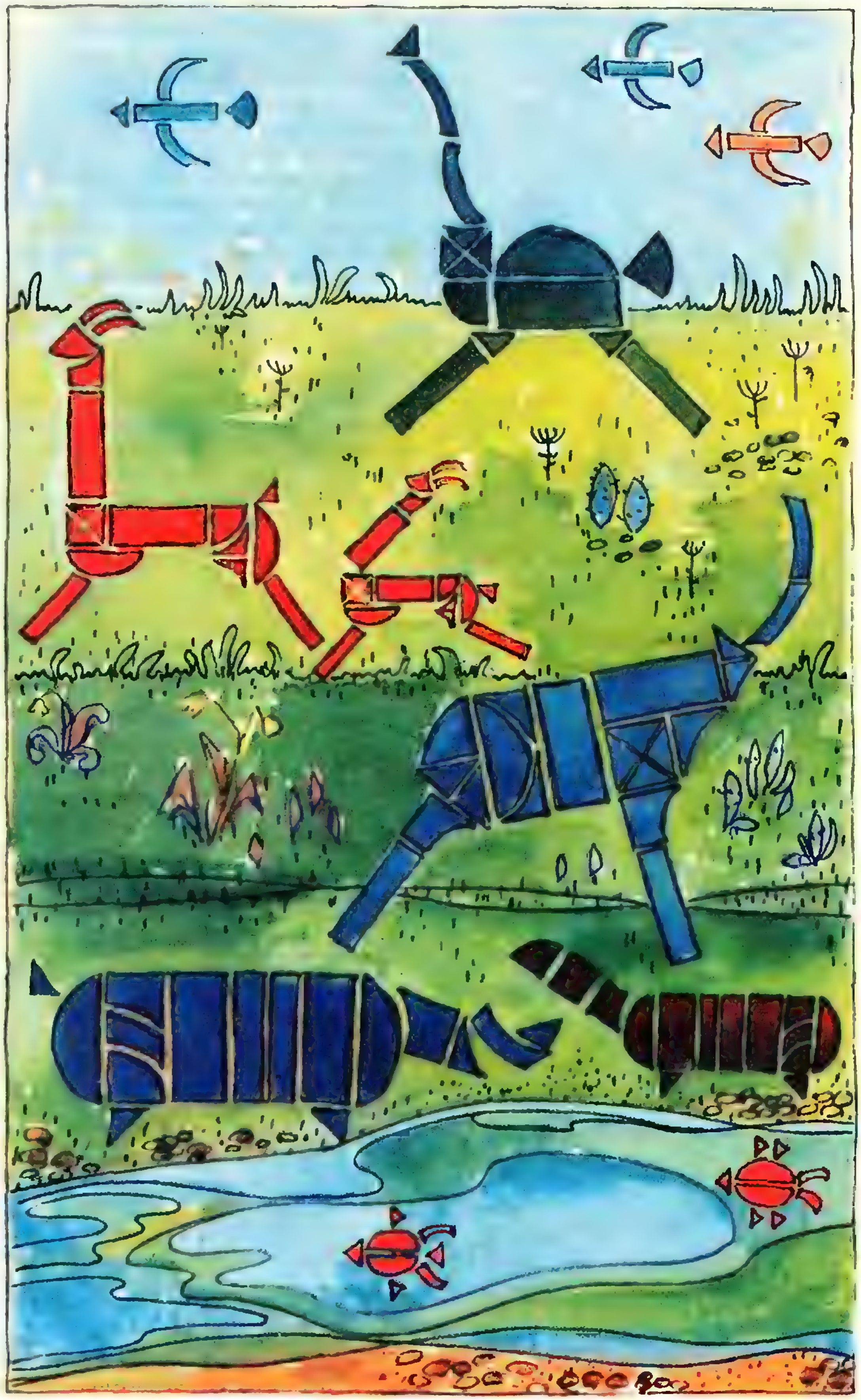
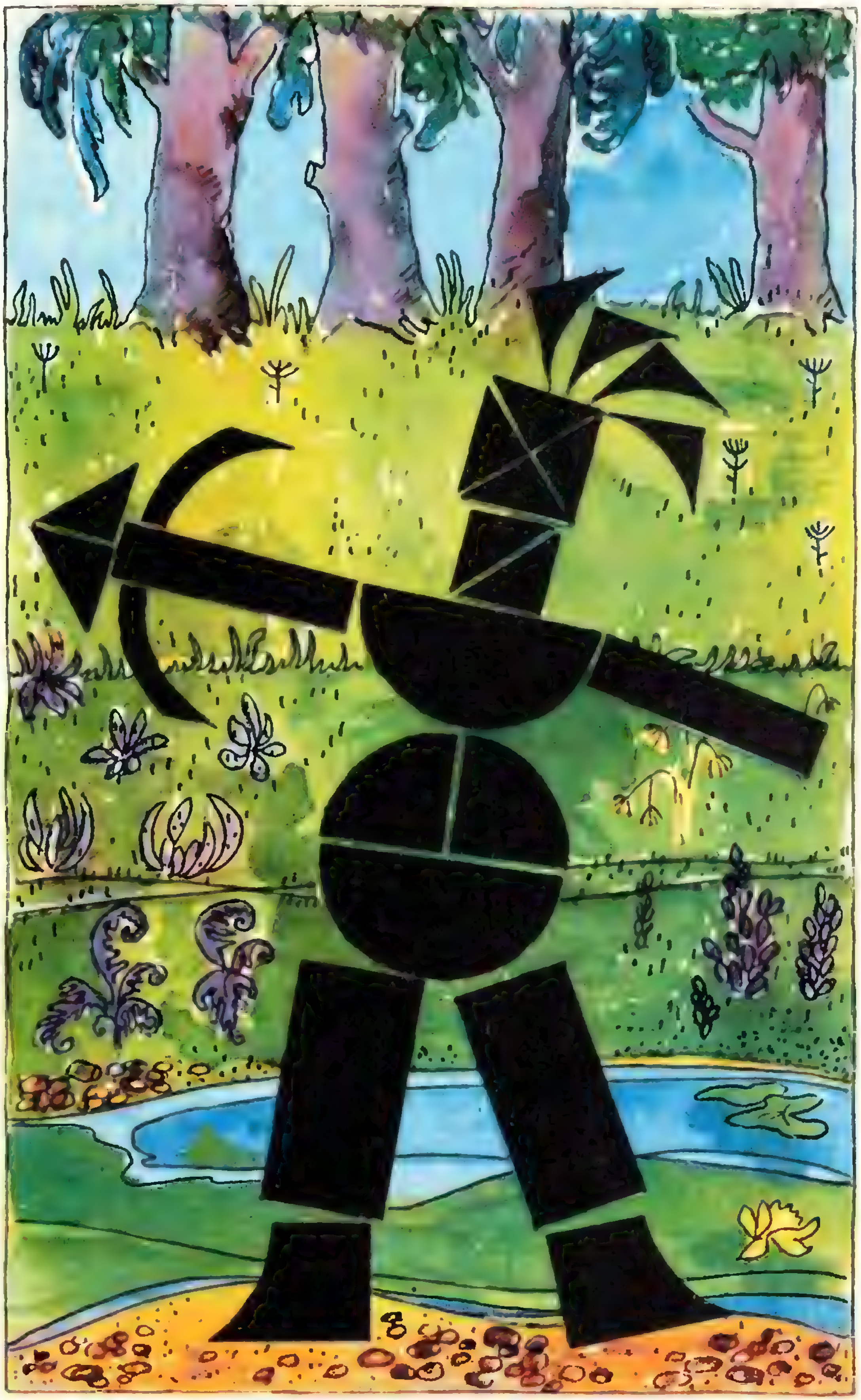


Рис. 1.

---

*) Редакция «Кванта» обращается к читателям с просьбой прислать наиболее удачные из придуманных ими фигурок. Лучшие композиции будут опубликованы, а их авторы премированы годовой подпиской на «Квант».





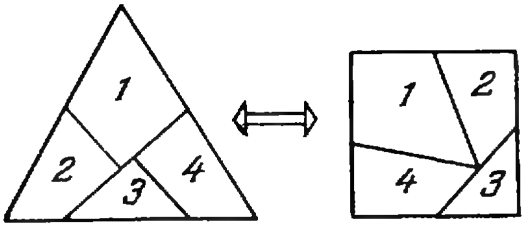


Рис. 2.

наукой, как геометрия), по существу, будут заниматься доказательством теорем о равносоставленных фигурах. Не беда, что эти геометрические фигуры называются несколько необычно: занимался же Иоганн Кеплер вычислением объема «яблока», «земляники», «сосновой шишки» и «турецкой чалмы».

Немного науки

Изучением различных расположений фигур и, в частности, преобразованиями равносоставленных фигур занимается специальный раздел геометрии — *комбинаторная геометрия*.

Важная теорема комбинаторной геометрии плоскости, доказанная в тридцатых годах XIX века венгерским математиком Фаркашем Бойяи (отцом одного из создателей неевклидовой геометрии — Яноша Бойяи) и, независимо от него, немецким математиком Гервином, утверждает, что любые два равновеликих (имеющих одинаковую площадь) многоугольника равносоставлены, т. е. один из них допускает разбиение на части, из которых можно составить другой многоугольник. Любопытно, что для пространства аналогичная теорема не верна: как доказал в начале XX века немецкий математик Ден, существуют равновеликие (имеющие равные объемы), но не равносоставленные многогранники. Элементарному доказательству теорем Бойяи — Гервина и Дена посвящена брошюра В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры», выпущенная в 1956 году Гостехиздатом в серии «Популярные лекции по математике».

Теорема Бойяи — Гервина принадлежит к числу так называемых чистых теорем существования: она ничего не говорит о том, как найти разбиение одного из равновеликих многоугольников на части, из которых можно составить другой многоугольник. Долгое время не существовало общих методов, позволяющих находить нужные разбиения, и поиском их занимались не столько геометры, сколько «старатели от математики», которым иногда удавалось найти поистине удивительные по красоте «самородки». Например, Генри Дьюдени сумел разрезать квадрат на четыре части, из которых можно составить равносторонний треугольник (рис. 2).

Ныне здравствующий эксперт Австралийского Патентного бюро Гарри Линдгрен, разработав общие методы решения широких классов задач на разрезание, сумел превратить геометрию разрезаний из хаотического набора отдельных фактов в науку. Книга Гарри Линдгрена «Занимательные задачи на разрезание» скоро выйдет в издательстве «Мир».

(Окончание. Начало см. с. 20, 37)

12. Даны восемь целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$, причем $0<a_1<\ldots<a_8<16$. Докажите, что для некоторого k из данных восьми чисел можно выбрать не менее трех пар (a_i, a_j), связанных соотношением $a_i-a_j=k$.

13. Докажите, что каковы бы ни были натуральные a, m, остатки от деления чисел a, a^2, a^3, …, a^n, … на m периодически повторяются.

14. Имеется набор из 4 n положительных чисел. Известно, что из любых четырех попарно различных чисел этого набора можно составить геометрическую прогрессию. Докажите, что в наборе найдутся n одинаковых чисел.

15. Докажите, что из 990 различных натуральных чисел, не превосходящих 1977, можно выбрать три числа, сумма двух из которых равна третьему. Можно ли здесь уменьшить число 990?

16. В вершинах выпуклого 65-угольника написаны различные натуральные числа, каждое из которых не превосходит 1977. Докажите, что найдутся две диагонали, для которых разности чисел, написанных у их концов, одинаковы.

17. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, причем $a_1<\ldots<a_n\leqslant 2n$. Докажите, что если наименьшее общее кратное любых из этих двух чисел больше $2n$, то $a_1>\frac{2n}{3}$.

Строфоида

На второй странице обложки вы видите кривую, которую называют строфоидой*). Впервые строфоиду исследовал в 1645 г. Эванджелиста Торричелли (1608—1647)**). Позднее эту замечательную кривую изучали И. Барроу (учитель И. Ньютона) и другие математики.

Можно дать разные равносильные определения и соответствующие построения строфоиды. Одно из таких построений и предлагается на второй странице обложки. Здесь были проведены на равных расстояниях друг от друга три параллельные прямые и перпендикуляр к ним. Из крайней сверху точки пересечения прямых проведен вправо произвольный луч. Рассматриваем окружность с центром в точке пересечения этого луча со средней из параллельных прямых, касающуюся перпендикуляра. Точки пересечения луча с этой окружностью принадлежат строфоиде. Множество всех полученных таким способом точек с добавленной точкой, из которой проводятся лучи, и есть строфоида.

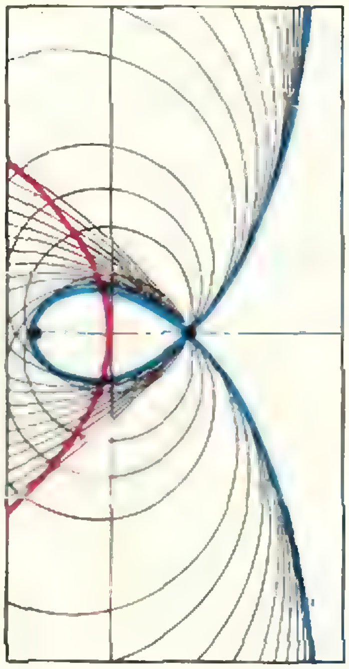


Рис. 1.

Другой способ построения строфоиды предлагается на рисунке 1. Здесь видны парабола и множество окружностей — центр каждой из них принадлежит параболе; все они проходят через точку пересечения директрисы*) параболы с ее осью. Кривая, касающаяся всех этих окружностей, и есть строфоида.

Третий способ построения строфоиды — кинематический; он использует подвижной «синий» прямоугольный треугольник PQR, у которого $\widehat{PRQ}=60°$. На плоскости задается прямая и точка A (рис. 2). Расстояние $|AB|$ точки A от прямой равно $|QR|$. Когда точка R скользит по прямой так, что точка A остается принадлежащей большему катету, вершина прямого угла Q описывает «синюю» дугу строфоиды. «Красную» дугу строфоиды, симметричную первой относительно AB, можно получить, перевернув «синий» треугольник (с другой стороны он «красный»). Взяв больший по линейным размерам прямоугольный треугольник, получаем соответственно более протяженную дугу строфоиды.

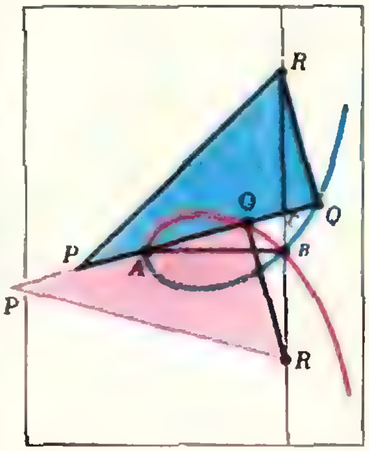


Рис. 2.

Попробуйте убедиться в том, что три описанных способа построения дают одну и ту же кривую. В этом вам может помочь рисунок 3, на котором изображена уже знакомая вам парабола с фокусом в точке A, M — произвольная точка параболы, прямая MC касается параболы в точке M, C — точка пересечения касательной с директрисой, MR — перпендикуляр к директрисе. Виден прямоугольный треугольник PQR. Вершина прямого угла Q описывает дугу строфоиды. Одним из этапов доказательства может служить выяснение того факта, что треугольники ABC и RQC симметричны относительно MC.

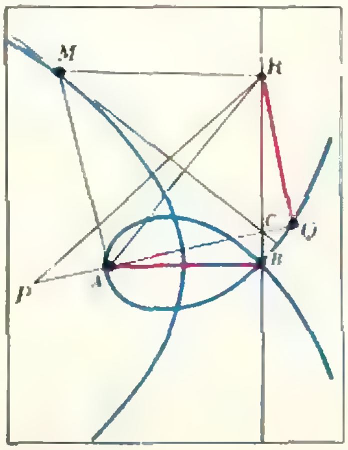


Рис. 3.

В. Березин

---

*) Слово «строфоида» производят от греческого слова στροφή («поворот»). Есть и более изящное толкование: «строфос» по-гречески означает «пояс с петлей для меча».

**) Ученик и последователь Галилея, Торричелли после смерти учителя занимал в Тоскане его должность и продолжал его работу. Успев прославиться как выдающийся физик (ему принадлежат, в частности, открытие так называемой торричеллиевой пустоты и закон истечения жидкости через боковую стенку сосуда), Торричелли последние годы своей короткой жизни много времени уделял и математике.

*) См. статью И. Н. Бронштейна «Парабола» («Квант», 1975, № 4).

Программа вступительных экзаменов по математике для поступающих в вузы в 1977 году

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать:

а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы;

б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику;

в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Программа по математике для поступающих в высшее учебное заведение в 1977 году состоит из двух вариантов: варианта «А» и варианта «Б». Вариант «А» предназначен для абитуриентов, окончивших школу в 1977 году (обучавшихся 10 лет по новой программе). Вариант «Б» — для всех остальных лиц, имеющих законченное среднее образование*. Вариант «Б» здесь не приводится.

Каждый вариант программы состоит из трех разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий (уметь правильно их использовать при решении задач, ссылаться при доказательстве теорем). Во втором разделе указаны теоремы, которые необходимо уметь доказывать, и формулы, которые надо уметь выводить. Содержание теоретической части экзаменов должно черпаться из этого раздела. В третьем разделе охарактеризованы основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

ВАРИАНТ «А»

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра, начала анализа

1. Множество, элемент множества; подмножество, объединение и пересечение множеств.

2. Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Соотношения между ними.

3. Натуральные числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общие делители. Общее наименьшее кратное.

4. Признаки делимости на 2, 3, 5 и 10^n.

5. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Сравнение действительных чисел.

6. Числовые промежутки. Модуль (абсолютная величина) действительного числа и его геометрический смысл.

7. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

8. Степень с натуральным показателем. Одночлен и многочлен. Стандартный вид многочлена.

9. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена.

10. Функция. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. Функция, обратная данной.

11. Числовые функции. График числовой функции. Возрастание и убывание функций; периодичность, четность, нечетность.

12. Экстремум числовой функции. Наибольшее и наименьшее значение числовой функции на промежутке. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма).

13. Основные числовые функции: линейная, квадратичная ($y=ax^2+bx+c$), степенная ($y=ax^n$, $n\in \mathbf{Z}$), показательная ($y=a^x$, $a>0$), логарифмическая; тригонометрические функции ($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$); арифметический корень

$y=\sqrt[n]{x}$ ($n\in \mathbf{N}$).

14. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности.

15. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

16. Уравнение. Множество решений уравнения. График уравнений с двумя переменными. Равносильные уравнения.

17. Неравенства. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства.

18. Системы уравнений и неравенств. Решение системы. Множество решений системы. Равносильные системы.

19. Предел функции. Непрерывность функции.

20. Производная. Производная обратной функции. Производная сложной функции.

21. Первообразная. Интеграл как приращение первообразной.

22. Перестановки. Размещения. Сочетания.

23. Натуральная степень бинома (формула Ньютона).

Геометрия

1. Геометрическая фигура как множество точек. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые, направление.

2. Перемещения. Виды перемещения. Осевая и центральная симметрия. Параллельный перенос. Поворот. Конгруэнтность фигур.

3. Векторы. Операции над векторами. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы.

4. Выпуклые фигуры. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Оси и центры симметрии многоугольников.

5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника.

6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сегмент и сектор.

8. Центральные и вписанные углы.

9. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.

10. Площадь многоугольника. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).

11. Длина окружности и площадь круга. Длина дуги окружности и площади сектора.

12. Преобразование гомотетии. Подобие. Гомотетичные и подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

13. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

14. Параллельность прямой и плоскости.

15. Направление в пространстве. Угол между двумя направлениями. Угол между двумя скрещивающимися прямыми.

16. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

17. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

18. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призма; пирамида. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипед. Прямоугольный параллелепипед. Куб.

19. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

20. Площадь поверхности и объем многогранников и фигур вращения.

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.

2. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ и ее график.

3. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.

4. Формула корней квадратного уравнения.

5. Теорема Виета (прямая и обратная).

6. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

7. Свойства числовых неравенств.

8. Формула n-го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.

9. Формула n-го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.

10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

11. Свойства показательной функции.

12. Свойства логарифмической функции.

13. Логарифм произведения, степени, частного.

14. Свойства функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и их графики.

15. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.

16. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.

17. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

18. Формулы приведения.

19. Формулы синуса, косинуса, тангенса суммы двух аргументов.

20. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента.

21. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

22. Теорема о пределе суммы двух сходящихся последовательностей.

23. Необходимое условие сходимости последовательностей.

24. Теорема о непрерывности дробно-рациональной функции.

25. Производная суммы двух функций.

26. Производная произведения двух функций.

27. Производная частного двух функций.

28. Производные функций: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$.

29. Достаточное условие экстремума функции.

30. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции.

31. Число перестановок.

32. Число размещений.

33. Число сочетаний.

34. Число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.

2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. Признаки параллельности прямых.

4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

5. Свойства средних линий треугольника и трапеции.

6. Центр симметрии параллелограмма.

7. Признаки параллелограмма.

8. Свойство серединного перпендикуляра к стороне прямоугольника.

9. Существование окружности, описанной около треугольника.

10. Существование окружности, вписанной в треугольник.

11. Свойство касательной к окружности.

12. Измерение угла, вписанного в окружность.

13. Признаки подобия треугольников.

14. Теорема Пифагора.

15. Теорема косинусов.

16. Теорема синусов.

17. Формула площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

18. Признак параллельности прямой и плоскости.

19. Признак параллельности плоскостей.

20. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

21. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

22. Теорема о трех перпендикулярах.

23. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

24. Свойство середины диагонали параллелепипеда. Следствия.

25. Свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда.

26. Формулы площади поверхности и объема призмы.

27. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

28. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

29. Формулы площади поверхности и объема конуса.

30. Формула объема шара.

31. Формула площади сферы.

III. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ

Экзаменующийся должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами; округлять числа с заданной точностью. Производить действия над приближенными значениями с использованием практических приемов; пользоваться таблицами.

2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих квадратные корни, показательные, логарифмические и тригонометрические функции; уметь объяснять, на каком множестве установлено тождественное равенство выражений.

3. Строить графики функций, указанных в программе; исследовать функции с помощью производной; решать задачи на нахождение экстремальных значений; решать задачи на вычисление площадей криволинейных трапеций с помощью первообразных.

4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени и уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений, решать комбинаторные задачи.

6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости, строить сечения многогранников и фигур вращения и простейших их комбинаций.

7. Проводить операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число, скалярное умножение) и пользоваться свойствами этих операций.

8. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач и задач из начал анализа; использовать методы алгебры и начал анализа при решении геометрических задач.

И. Габович

Конусы в каркасах

При решении задач на комбинацию конусов порой бывает трудно представить себе их расположение в пространстве. Если же заключить рассматриваемые конусы в «каркасы» (фигуры, образованные ребрами многогранников), то пространственное восприятие конусов облегчается. При этом объект задачи становится более «осязаемым» и путь к решению находится проще, быстрее, что особенно важно для абитуриента. Сначала докажем одну теорему.

Теорема. *Около конуса, величина угла в осевом сечении которого меньше $\pi/2$, можно описать пирамиду, у которой основанием является равнобедренный треугольник, а боковое ребро, проходящее через вершину этого треугольника, перпендикулярно к противоположной боковой грани.*

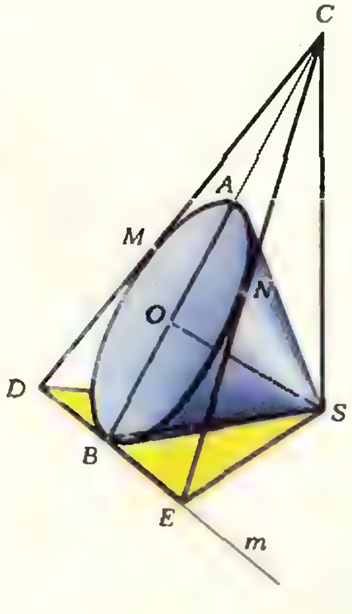


Рис. 1.

Доказательство. Проведем в конусе произвольное осевое сечение ASB (рис. 1). В плоскости основания конуса проведем касательную m к основанию конуса в точке B. В плоскости осевого сечения ASB восставим перпендикуляр к образующей SB в точке S до пересечения с продолжением $[BA]$ в точке C. Поскольку $\widehat{ASB}<\pi/2$, точка C находится вне конуса (на продолжении $[BA)$). Теперь из точки C проводим касательные к основанию конуса до пересечения с прямой m в точках D и E (M, N — точки касания).

Через пересекающиеся прямые CE и CS, CD и CS, SB и DE проводим плоскости и получаем пирамиду $SCDE$, описанную около конуса *). Так как в треугольнике CDE высота CB является также и биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный. Легко показать, что грань SDE также является равнобедренным треугольником ($|SE|=|SD|$).

Таким образом, построенная нами пирамида $SCDE$ является искомой. Такую пирамиду условимся называть *каркасной* для данного конуса. Легко доказать, что каркасные пирамиды конгруэнтных конусов конгруэнтны.

Теперь перейдем к задачам.

Пример 1 (МГУ, физфак, 1970). *Два конгруэнтных прямых круговых конуса с общей вершиной S, высотой h и радиусом основания R ($R<h$) касаются друг друга и плоскости P. Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Вычислить величину угла между прямой l и плоскостью P.*

Из соотношения $R<h$ следует, что величина угла при вершине в осевом сечении конуса меньше $\pi/2$. Опишем около каждого конуса каркасную пирамиду так, чтобы они имели общую грань (см. рис. 2): $[SB]$ — общая

---

*) Напомним, что пирамида называется *описанной около конуса*, если основание пирамиды описано около основания конуса, а вершины пирамиды и конуса совпадают.

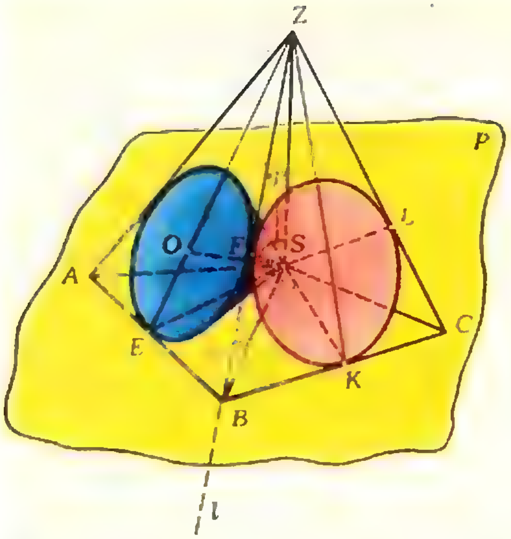


Рис. 2.

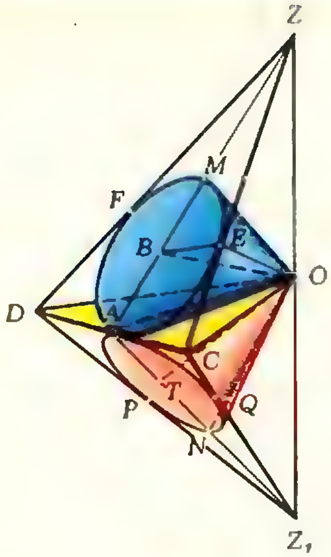


Рис. 3.

сторона оснований, $[ZS]$ — общая высота пирамид, боковое ребро ZB лежит на прямой l, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Таким образом, решение данной задачи сводится к определению $\widehat{ZBS}$.

Из конгруэнтности конусов следует, что их основания касаются ребра ZB в одной и той же точке F, и потому $[SF]$ будет общей образующей. Ясно, что $[ZB]\perp[SF]$. Следовательно, треугольник ZFS — прямоугольный. Треугольник SOE также прямоугольный, так как SO — высота конуса. Положим $\widehat{ZBS}=\varphi$; тогда и $\widehat{ZSF}=\varphi$. Имеем: $|OE|=R$; $|SO|=h$; $\cos\varphi=\frac{|FS|}{|ZS|}$ (из $\triangle ZFS$). Но $|FS|=|ES|$ как образующие, тогда $\cos\varphi=\frac{|ES|}{|ZS|}=\operatorname{ctg}\widehat{SEZ}$. Из $\triangle SOE$: $\operatorname{ctg}\widehat{SEZ}=\operatorname{ctg}\widehat{SEO}=\frac{R}{h}$. Таким образом, $\cos\varphi=\frac{R}{h}$; $\varphi=\arccos\frac{R}{h}$.

Замечание. Если положить $\widehat{ZES}=\beta$, то из решения этой задачи получаем следующее соотношение:

$$\cos\varphi=\operatorname{ctg}\beta. \qquad (*)$$

В дальнейшем оно будет нами использовано.

Пример 2 (МГУ, физфак, 1965). *Два конгруэнтных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Величина угла в осевом сечении конуса равна $2\alpha<\pi/2$. Найти величину двугранного угла между двумя плоскостями, каждая из которых касается конусов, но не проходит через их общую образующую.*

Заметим, что условие $2\alpha<\pi/2$ дано не случайно — иначе задача не имеет решения (докажите это самостоятельно).

Опишем около каждого из конусов каркасную пирамиду так, чтобы их общая грань касалась обоих конусов (рис. 3). Высоты пирамид ZO и Z_1O будут лежать на одной прямой, проходящей через общую вершину O данных конусов перпендикулярно к общему основанию ODC каркасных пирамид; грани ZCO и Z_1CO будут лежать в одной плоскости, проходящей через (ZZ_1); аналогично лежат в одной плоскости грани ZDO и Z_1DO. Конусы касаются по общей образующей OA и касаются граней ZCZ_1 и ZDZ_1 двугранного угла ZZ_1. Мы получили расположение конусов и плоскостей, указанное в условии задачи. Согласно условию $\widehat{AOB}=\alpha$.

Искомой является величина двугранного угла, образованного плоскостями ZCZ_1 и ZDZ_1, то есть $\widehat{COD}$. Положим $\widehat{AOC}=\varphi$; тогда $\widehat{ACO}=\pi/2-\varphi$. Далее легко заметить, что прямоугольные треугольники OAC и OEC конгруэнтны, поэтому $\widehat{ECO}=\widehat{ACO}=\pi/2-\varphi$. Из соотношения $(*)$ (см. выше) следует, что $\cos(\pi/2-\varphi)=\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)$, или $\sin\varphi=\operatorname{tg}\alpha$. Значит, $\widehat{COD}=2\arcsin\operatorname{tg}\alpha$.

Пример 3 (ЛГУ, матмех,

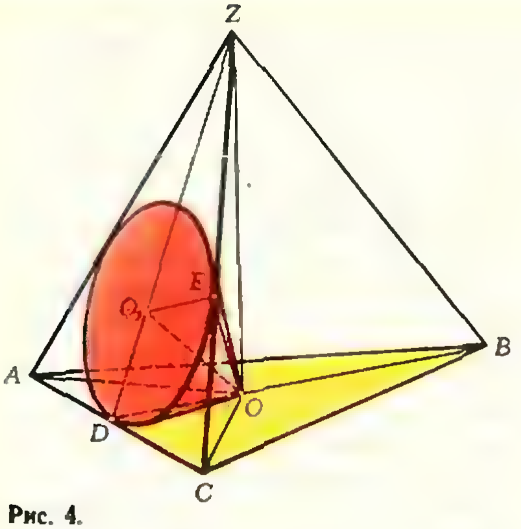


Рис. 4.

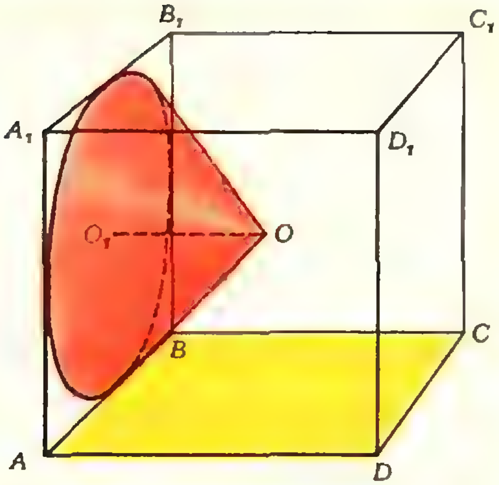


Рис. 5.

1964). *На плоскости лежат три конгруэнтных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найти угол при вершине осевого сечения одного из этих конусов.*

Нетрудно сообразить, что если около каждого из данных конусов описать каркасную пирамиду, то получится правильная треугольная пирамида $ZABC$, в которую «вписаны» три данных конуса; их общая вершина находится в центре основания пирамиды, а основания вписаны в боковые грани пирамиды (рис. 4; для решения задачи достаточно рассмотреть только один из данных конусов).

Так как пирамида $ZABC$ правильная, то $\widehat{DCO}=\pi/6$. Как было показано выше,

$$\operatorname{tg}\widehat{DOO_1}=\cos\widehat{DCO}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, искомый угол равен $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 4′ (Киевский политехнический институт, 1970). *Шесть конгруэнтных конусов имеют общую вершину, причем каждый из конусов имеет с четырьмя другими по одной общей касательной. Найти отношение суммы объемов конусов к объему шара, касающегося плоскостей оснований всех конусов.*

Для решения этой задачи в качестве каркаса выберем куб, в центре которого находится общая вершина конусов, основания конусов вписаны в грани куба (рис. 5; изображен только один из конусов). При этом каждый из шести конусов будет иметь с четырьмя другими по одной общей касательной, а шар, касающийся оснований конусов, будет вписан в куб. Пусть ребро куба равно a. Тогда объем одного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{24},$$

а шести конусов $\pi a^3/4$. Объем шара равен $\pi a^3/6$, откуда находим искомое отношение; оно равно 3:2.

Упражнения

1 (КГУ, мехмат, 1973). Два прямых круговых конуса, осевое сечение каждого из которых образует равносторонний треугольник со стороной a, лежат на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга, имея общую вершину. На какой высоте над плоскостью находится точка касания оснований этих конусов?

2 (КГУ, мехмат, 1972). Четыре равных конуса имеют общую вершину, причем каждый конус имеет с тремя другими по одной общей образующей. Найти отношение суммы объемов конусов к объему шара, касающегося плоскостей оснований конусов.

3 (МГУ, физфак, 1967). Даны три прямых круговых конуса с углом α в осевом сечении и радиусом основания r. Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

4 (ЛГУ, мехмат, 1965). На плоскости уложены n конгруэнтных прямых конусов, имеющих общую вершину в точке, лежащей на этой плоскости. Каждый конус касается двух других конусов. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса.

Э. Турчин

Как решать задачи на механическое движение

Как известно, основной задачей механики является определение положения тела в любой момент времени. Для решения этой задачи, то есть для нахождения координат тела в выбранной системе отсчета, надо знать начальные координаты и перемещение тела. Перемещение можно найти, зная начальную скорость и ускорение тела в каждый момент. Если известны силы, действующие на тело, и эти силы не изменяются со временем, то ускорение тела определяется непосредственно из второго закона Ньютона — основного закона динамики. Поэтому такой путь решения задач на механическое движение называется *динамическим*.

Когда действующие на тело силы непостоянны, применение второго закона Ньютона связано с большими математическими трудностями. В таких случаях удобно воспользоваться законами сохранения, и прежде всего, законами сохранения энергии и импульса, которые выполняются для замкнутых (изолированных) систем тел. При этом конкретный вид закона сохранения энергии зависит от того, какие силы действуют между телами системы.

Например, если это силы тяготения или упругости, то остается неизменной полная механическая энергия системы. При наличии трения механическая энергия не сохраняется, а ее изменение равно работе сил трения. В результате увеличивается внутренняя энергия системы, так что полная энергия, конечно, не изменяется. Или такой пример — заряженная частица движется в электростатическом поле под действием силы Кулона. В этом случае сохраняется сумма механической и электростатической энергий.

Если же система не изолирована, то энергия и импульс могут и не сохраняться, причем изменение энергии равно работе внешних сил, действующих на систему.

Таким образом, при решении задач на механическое движение можно пользоваться не только динамическим, но и *энергетическим* способом, основанном на законах сохранения и изменения энергии. Какой способ решения выбрать, зависит от вида взаимодействий между телами (или телами и полями), входящими в систему, а также от условий данной задачи.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Шайба после удара клюшкой приобрела скорость* $\vec{v}_0$ *и начала скользить по льду. Определить расстояние, пройденное шайбой до остановки. Сопротивление воздуха не учитывать, силу трения считать постоянной, коэффициент трения шайбы о лед равен* μ.

В процессе движения шайба взаимодействует с Землей и льдом. Поскольку нас интересует перемещение шайбы по поверхности Земли, естественно в условиях данной задачи Землю, а значит, и лед считать неподвижными.

Принципиально существуют взаимодействия шайбы с другими телами (например, с Луной, Солнцем и т. д.). Однако их мы учитывать не будем ввиду чрезвычайной малости.

Проанализируем взаимодействия шайбы с Землей и льдом. Между шайбой и Землей существует гравитационное взаимодействие, мерой которого является сила тяжести шайбы $m\vec{g}$ (обозначим через m массу шайбы). Взаимодействие шайбы со льдом можно охарактеризовать силой реакции опоры (силой упругости) $\vec{N}$ и силой трения скольжения $\vec{F}_{тр}$. Таким об-

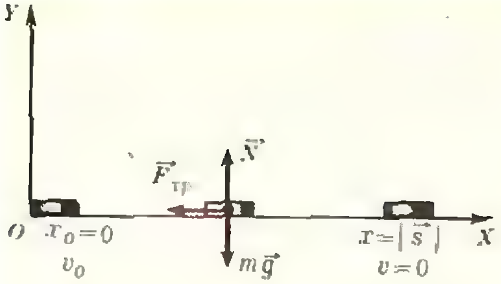


Рис. 1.

разом, на шайбу действуют три силы, то есть ровно столько сил, сколько у нее взаимодействий. Ни о каких других силах — толчка, броска, движения, инерции и т. п., которые, к сожалению, нередко указывают абитуриенты, не может быть и речи.

Так как все взаимодействия стационарные (не изменяются со временем), то возможны оба способа решения — и динамический, и энергетический. Решим задачу обоими способами.

I. Динамический способ. Прежде всего сделаем схематичный чертеж (рис. 1). Выберем систему координат (XOY), отметим параметры начального ($x_0=0$, v_0) и конечного ($x=|\vec s|$, $v=0$) состояний шайбы и действующие на нее силы ($m\vec g$, $\vec N$, $\vec F_{тр}$). Шайбу, разумеется, будем считать материальной точкой.

Запишем в проекциях на оси OX и OY известное выражение для модуля перемещения $|\vec s|$:

$$|\vec s| = x = \frac{v_0^2}{2|\vec a|}$$

и второй закон Ньютона:

$$|\vec a| = \frac{|\vec F_{тр}|}{m}, \quad |\vec N| - m|\vec g| = 0.$$

С учетом уравнения связи

$$|\vec F_{тр}| = \mu |\vec N|$$

получим

$$|\vec s| = x = \frac{v_0^2}{2|\vec a|} = \frac{v_0^2 m}{2|\vec F_{тр}|} = \frac{v_0^2}{2\mu|\vec g|}.$$

II. Энергетический способ. Рассмотрим замкнутую систему шайба—Земля — лед. Внутри этой системы действует сила трения скольжения. В таком случае изменение механической энергии системы равно работе силы трения:

$$(K + \Pi) - (K_0 + \Pi_0) = A_{тр}.$$

Относительно неподвижной Земли (и льда) кинетическая энергия системы в начальный момент равна кинетической энергии шайбы:

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

а в конечный момент она равна нулю:

$$K = 0.$$

Потенциальную энергию взаимодействия шайбы с Землей естественно отсчитывать от поверхности Земли, поэтому

$$\Pi_0 = \Pi = 0.$$

Работа силы трения

$$A_{тр} = |\vec F_{тр}|\,|\vec s|\cos\alpha = -\mu m|\vec g|\,|\vec s|,$$

так как $\alpha = 180°$.

Тогда окончательно

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu m|\vec g||\vec s|, \text{ и } |\vec s| = \frac{v_0^2}{2\mu|\vec g|}.$$

Если в систему взаимодействующих тел не включать лед, то она уже не будет замкнутой. Силы реакции опоры и трения — внешние силы для этой системы, и их работа равна изменению механической энергии системы. Поскольку угол между силой $\vec N$ и перемещением $\vec s$ равен 90°, работа этой силы равна нулю, и по-прежнему

$$K - K_0 = A_{тр}$$

(мы уже говорили о том, что $\Pi = \Pi_0 = 0$).

Если же рассматривать только шайбу, то все действующие на нее силы будут внешними. Согласно теореме о кинетической энергии работа этих сил равна изменению кинетической энергии шайбы. Работа силы тяжести, как и работа силы реакции опоры, равна нулю, так что выражение для изменения механической энергии аналогично предыдущему.

Задача 2. *Частица с массой m и зарядом q движется в электрическом поле одноименного закрепленного заряда Q так, что на расстоянии R_1 ее скорость $\vec v_1$ составляет острый*

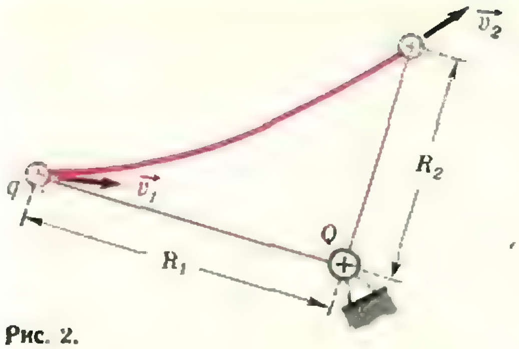


Рис. 2.

угол с линией, соединяющей заряды (рис. 2). Определить модуль скорости частицы ($|\vec{v}_2|$), *когда она будет на расстоянии* R_2 *от заряда* Q. *Сопротивление воздуха и гравитационное взаимодействие не учитывать.*

Между движущейся заряженной частицей и неподвижным зарядом действует кулоновская сила, которая зависит от расстояния R. Следовательно, задачу надо решать энергетически.

Рассмотрим данную систему частица — заряд. Трение в системе отсутствует, а электрическое взаимодействие не изменяет полной энергии этой системы (ускорение движения частицы не столь велико, чтобы нужно было учитывать излучение электромагнитного поля). Таким образом, можно воспользоваться законом сохранения энергии — в данном случае кинетической энергии движущейся частицы и энергии электростатического взаимодействия зарядов:

$$\frac{m|\vec{v}_1|^2}{2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R_1}=\frac{m|\vec{v}_2|^2}{2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R_2}.$$

Отсюда

$$|\vec{v}_2|=\sqrt{|\vec{v}_1|^2+\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)},$$

З а д а ч а 3. *Маленький шарик катится со скоростью* $\vec{v}_0$ *по гладкой горизонтальной поверхности, ударяется в незакрепленный конец упругой и невесомой пружины и прилипает к ней (рис. 3). Записать уравнения гармонических колебаний координаты и проекций скорости и ускорения получившегося пружинного маятника. Максимальная деформация пружины* x_0, *сопротивление воздуха не учитывать.*

Известно, что при гармонических колебаниях маятника его координата x, проекция v скорости и проекция a ускорения изменяются по законам:

$$x=x_0\cos\omega_0 t,$$

$$v=\omega_0 x_0\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$a=-\omega_0^2 x_0\cos\omega_0 t.$$

Здесь x_0 — амплитуда колебаний (максимальная деформация пружины) и ω_0 — частота собственных гармонических колебаний. Для пружинного маятника

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

где k — жесткость пружины, m — масса прилипшего к ней шарика.

Для замкнутой системы пружина — шарик можно записать закон сохранения механической энергии. В начальный момент (см. рис. 3, *а*) шарик обладает кинетической энергией $\frac{m|\vec{v}_0|^2}{2}$, пружина не деформирована. В тот момент, когда деформация пружины максимальна (см. рис. 3, *б*), ее потенциальная энергия равна $\frac{kx_0^2}{2}$, а скорость шарика равна нулю.

Таким образом,

$$\frac{m|\vec{v}_0|^2}{2}=\frac{kx_0^2}{2},\ \text{и}\ \ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{|\vec{v}_0|}{x_0}.$$

Тогда окончательно

$$x=x_0\cos\frac{|\vec{v}_0|}{x_0}t,$$

$$v=|\vec{v}_0|\cos\left(\frac{|\vec{v}_0|}{x_0}t+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-|\vec{v}_0|\sin\frac{|\vec{v}_0|}{x_0}t,$$

$$a=-\frac{|\vec{v}_0|^2}{x_0}\cos\frac{|\vec{v}_0|}{x_0}t.$$

З а д а ч а 4. *Частица с массой* m *и зарядом* q *начинает падать на заряженную горизонтальную бесконечную плоскость, находясь от нее*

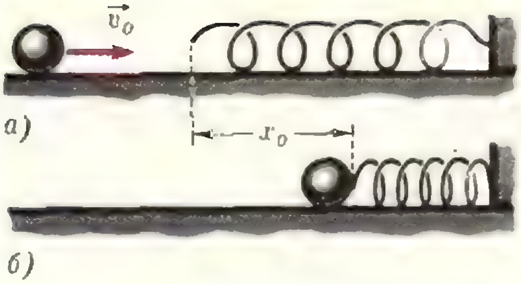


Рис. 3.

на расстоянии h_1. Поверхностная плотность заряда плоскости σ, начальная скорость частицы $\vec{v}_0$. На какое минимальное расстояние частица может приблизиться к плоскости, если их заряды одноименные? Сопротивление воздуха отсутствует.

Частица взаимодействует с Землей и однородным электростатическим полем плоскости. Силы, характеризующие эти взаимодействия, — сила тяжести и электростатическая сила, — стационарные, поэтому, в принципе, применимы оба способа решения задачи. Ограничимся рассмотрением лишь энергетического решения.

Пусть система включает в себя только одну заряженную частицу. Тогда все силы, действующие на нее, — внешние, и их работа равна изменению кинетической энергии частицы.

На минимальном расстоянии h_2 от плоскости скорость частицы равна нулю, поэтому изменение кинетической энергии

$$\Delta K = 0 - \frac{m\,|\vec{v}_0|^2}{2}.$$

Работа силы тяжести

$$A_т = m\,|\vec{g}\,|\,(h_1 - h_2),$$

а работа электростатической силы

$$A_э = -q\,|\vec{E}|\,(h_1 - h_2) = -q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,(h_1 - h_2),$$

где $\vec{E}$ — напряженность поля бесконечной заряженной плоскости.

Согласно теореме о кинетической энергии,

$$0 - \frac{m\,|\vec{v}_0|^2}{2} = m\,|\vec{g}|\,(h_1 - h_2) - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\,(h_1 - h_2).$$

Отсюда

$$h_2 = h_1 - \frac{|\vec{v}_0|^2}{2\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m} - |\vec{g}|\right)}.$$

Заметим, что если $|\vec{v}_0|^2 > 2h_1\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m} - |\vec{g}|\right)$, то $h_2 < 0$, то есть частица может упасть на плоскость, обладая некоторой скоростью.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Маленький шарик массой $m = 200$ *г* укреплен на конце упругой нити длиной 1 *м* и жесткостью 24 *н/м*. Шарик с нитью отводят в горизонтальное положение и отпускают. При прохождении шариком положения равновесия нить растягивается на 25 *см*. Определить скорость шарика в этот момент. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Санки массой 50 *кг* съезжают с горы высотой 7 *м*. Определить работу силы трения, если скорость санок у основания горы равна 10 *м/сек*.

3. Веревка длиной 20 *м* переброшена через невесомый блок малого радиуса. Она висит симметрично и покоится, а затем, в результате незначительного толчка, начинает двигаться по блоку без трения. Какова будет скорость веревки к моменту, когда она сойдет с блока? Сопротивление воздуха отсутствует.

4. Стеклянный шарик объемом 0,2 $см^3$ равномерно падает в воде с небольшой скоростью. Определить работу силы сопротивления воды при перемещении шарика на 6 *см*. Плотность стекла 2,7 $г/см^3$.

5. Электрон, движущийся со скоростью $3 \cdot 10^6$ *м/сек*, попал в область однородного электрического поля и затормозился до полной остановки. Определить разность потенциалов между точкой остановки и точкой влета электрона в поле. Силу тяжести и сопротивление воздуха не учитывать.

6. На горизонтально расположенную бесконечную проводящую плоскость начинает свободно падать частица с зарядом q и массой m, находящаяся на расстоянии H от плоскости. Какова будет скорость частицы на расстоянии $h < H$ от плоскости? Сопротивление воздуха не учитывать.

Указание. Взаимодействие заряженной частицы с наведенным зарядом плоскости можно заменить взаимодействием данной частицы с точечным зарядом, расположенным симметрично относительно плоскости (см., например, статью Г. Мякишева «Электростатическое поле», «Квант», 1975, № 4).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В этом номере мы публикуем образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике, предлагавшихся в МГУ на механико-математическом факультете, факультете вычислительной математики и кибернетики и физическом факультете в 1976 году.

Математика

Механико-математический факультет

1. Решить уравнение

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1.$$

2 Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x-2}\geqslant\frac{2}{3^x-1}.$$

3. В треугольнике ABC ($\widehat{C}=90^\circ$; $\widehat{B}=30^\circ$, $|CA|=1$) проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF. Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

4. Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P, а ось конуса перпендикулярна к этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью P величина одного из углов равна 150°.

5. Числа r, s, t таковы, что $r<s<t$. Кроме того, известно, что после подстановки каждого из трех чисел r, s, t вместо y в равенство

$$x^2-(9-y)x+y^2-9y+15=0$$

по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения Доказать, что $-1<r<1$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Даны: параллелограмм со сторонами, равными $\sqrt{19}$ и $\sqrt{2}/6$, и углом 45° между ними и квадрат со стороной, равной $3\sqrt{2}/5$. Определить, что больше: площадь параллелограмма или площадь квадрата.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}7^y\cdot\log_5 x=-2,\\ 4\cdot 7^y+\log_5 x=2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2+\operatorname{ctg}x-\sin^2 x}-\sqrt{\frac{4}{17}-\sin^2 x}=\sqrt{\frac{30}{17}+\operatorname{ctg}x}.$$

4. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Первая имеет центр в точке N_1 и радиус, равный $5\sqrt{2}$; вторая — центр в точке N_2 и радиус, равный 8. Отрезок N_1N_2 пересекает обе окружности, а величина угла FN_2N_1, где F — одна из точек пересечения окружностей, равна 45°. Вершина L прямоугольного треугольника KLM является точкой пересечения первой окружности и отрезка N_1N_2, а сторона KM — хордой второй окружности, перпендикулярной к прямой, проходящей через точки N_1 и N_2. Найти стороны треугольника KLM, если известно, что $|KL|>8$.

5. Найти все положительные числа a, для которых существует бесконечно много чисел x и y, одновременно удовлетворяющих следующим условиям:

$$18x^2+\frac{3}{2}(1-a)(x^3+9x)-\frac{1}{8}a(x^2+9)^2\leqslant 0,$$

$$\frac{6x}{x^2+9}=\frac{1}{9y}+\frac{ay}{3}+\frac{a}{6},$$

$$y>0.$$

Физический факультет

1. Решить уравнение

$$1-2\sqrt{2}\cos^3 3x+\cos 6x=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(4-x)<4+2\log_3(x+3).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{\frac{x-2y}{2}}+2^{\frac{x-2y}{4}}=20,\\ 2^{\frac{x}{2}}+4^{-\frac{y}{2}}=10.\end{cases}$$

4. В треугольнике KLM, все стороны которого различны, биссектриса угла KLM пересекает сторону KM в точке N. Через точку N проведена прямая, пересекающая сторону LM в точке A такой, что $|MN|=|AM|$

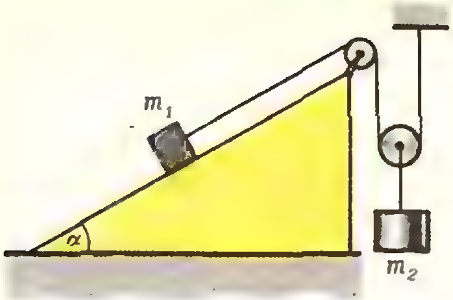


Рис. 1.

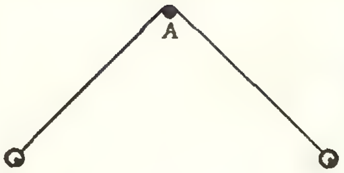


Рис. 2.

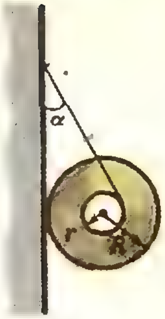


Рис. 3.

Известно, что $|LN|=a$, $|KL|+|KN|=b$. Найти длину отрезка AL.

5. Все плоские углы трехгранного угла $SPQR$ (S — вершина) — прямые. На грани PQS взята точка A на расстоянии 12 от ребра QS и на расстоянии 5 от ребра PS. Из некоторой точки T, расположенной внутри трехгранного угла $SPQR$, в точку A направлен луч света. Он образует угол $\pi/4$ с ребром RS и угол $\pi/3$ с ребром PS. Луч зеркально отражается от граней угла $SPQR$ сначала в точке A, затем в точке B, затем — в точке C. Найти длину отрезка BC.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Два тела с массами $m_1=100$ г и $m_2=600$ г соединены между собой при помощи невесомой нерастяжимой нити и системы блоков (рис. 1). Один конец нити неподвижно закреплен. Тело массы m_1 скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Определить ускорение $\vec{a}_2$ тела с массой m_2. Трением и массой блоков пренебречь.

2. К концам проволоки длиной $l=0{,}2$ м, согнутой посередине под прямым углом, прикреплены шарики одинаковой массы. Проволоку повесили углом на гвоздь A (рис. 2), а затем отклонили так, что одно колено проволоки стало горизонтальным, а другое вертикальным, и отпустили без толчка. Найти модуль скорости шариков в момент прохождения положения равновесия. Проволоку считать жесткой и невесомой. Трением пренебречь.

3. К гвоздю, вбитому в стенку, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, касаясь стенки, как показано на рисунке 3, причем нить составляет со стенкой угол $\alpha=30°$. Радиус оси катушки $r=1$ см, радиус ее щечек $R=10$ см. Найти минимальную величину коэффициента трения μ между стенкой и катушкой.

4. На цилиндр навита веревка, конец которой закреплен в верхней точке наклонной плоскости. Цилиндр лежит на наклонной плоскости, как показано на рисунке 4, причем веревка имеет горизонтальное направление. Масса цилиндра $m=10$ кг. Найти модуль силы $\vec{F}$ давления цилиндра на плоскость.

5. Посередине цилиндра, герметически закрытого с обоих концов и закрепленного под углом $\alpha=30°$ к горизонту, находится поршень массы $m=1$ кг (рис. 5). Площадь поршня $S=10$ см^2. Давление воздуха под поршнем и над ним одно и то же и равно $p=1{,}5\cdot10^4$ н/м^2. С каким начальным ускорением будет двигаться поршень, если его предварительно медленно передвинуть, увеличив объем под ним в $n=1{,}5$ раза, а затем отпустить? Трением пренебречь.

6. Три небольших заряженных одноименным электрическим зарядом шарика находятся в равновесии на двух одинаковым образом наклоненных к горизонту гладких непроводящих плоскостях, располагаясь в вершинах равностороннего треугольника (рис. 6). Заряд шариков 1 и 2 один и тот же и вдвое превосходит заряд шарика 3. Найти отношение масс второго и третьего шариков.

7. По двум параллельным металлическим рейкам, отстоящим друг от друга на расстояние $l=20$ см, движется с постоянной скоростью $|\vec{v}|=6$ м/сек проводник, перпендикулярный к рейкам (рис. 7). Рейки соединены с батареей из двух конденсаторов, емкости которых $C_1=4$ мкф и $C_2=6$ мкф. Все про-

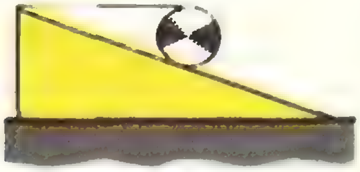


Рис. 4.

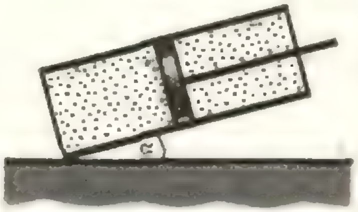


Рис. 5.

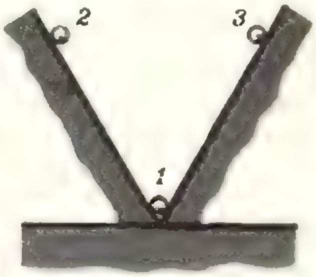


Рис. 6.

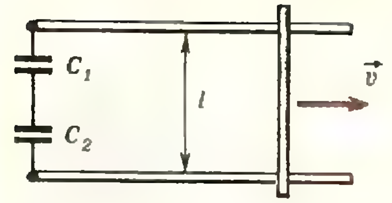


Рис. 7.

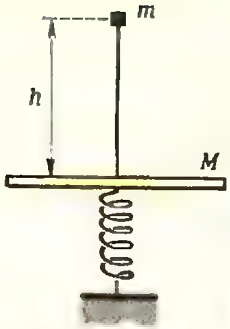


Рис. 8.

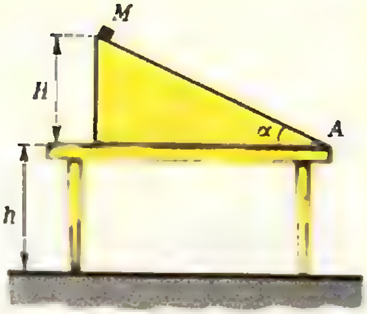


Рис. 9.

водники расположены в одной плоскости и находятся в постоянном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно к плоскости контура, образованного проводниками, и $|\vec{B}|=1$ *тл*. Найти напряжение U_1 между пластинами конденсатора емкостью C_1.

8. Точка лежит на оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=40$ *см* от линзы. Фокусное расстояние линзы $F=10$ *см*. Точку переместили на расстояние $L=5$ *см* в плоскости, перпендикулярной к оптической оси. На какое расстояние l нужно подвинуть линзу, чтобы изображение точки получилось в первоначальном месте?

9. Какую выдержку должен обеспечить затвор фотоаппарата при съемке прыжка в воду, если прыжок производится с вышки высотой $h=10$ *м*, а смещение изображения на негативе не должно превышать $\Delta l=0{,}1$ *мм*? Фотограф располагается у края бассейна на расстоянии $a=15$ *м* от места погружения прыгуна. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F=15$ *см*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Плоская поверхность плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием $|F|=3$ *см* посеребрена. На расстоянии $d=6$ *см* от линзы на ее оптической оси со стороны вогнутой поверхности находится точечный источник света. Найти расстояние l между источником и его изображением.

Физический факультет

1. Ракета, запущенная в вертикальном направлении с земли, движется с постоянным ускорением $2|\vec{g}|$ в течение $t=50$ *сек*. Затем двигатели мгновенно выключают. Определить максимальную высоту подъема ракеты. Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что $|\vec{g}|=10$ *м/сек²*.

2. Маленькое тело массы m свободно падает с высоты h, попадает в середину однородной доски массы M и мгновенно прилипает к ней (рис. 8). Доска лежит горизонтально на пружине, коэффициент упругости которой равен k. Определить максимальное сжатие (то есть изменение длины) пружины. Массой пружины пренебречь.

3. Небольшое тело M начинает скользить без начальной скорости из верхней точки наклонной плоскости. Наклонная плоскость установлена на горизонтальном столе, как показано на рисунке 9, и имеет высоту H и угол наклона α. Коэффициент трения тела о плоскость равен μ. На каком расстоянии по горизонтали от нижнего конца A наклонной плоскости тело упадет на пол, если высота стола h?

4. Сколько угля потребуется для переправки каравана судов на расстояние $L=100$ *км*, если буксирный трос натягивается с силой $|\vec{F}|=80$ *кн*, а буксир без каравана при той же самой мощности двигателя развивает скорость в $n=4$ раза бо̀льшую, сжигая одно и то же количество угля в час? Считать, что сопротивление воды пропорционально скорости. К. п. д. судового двигателя $\eta=10\%$. Теплота сгорания угля $q=7\,000$ *ккал/кг*.

5. В стальном резервуаре находится сжатый воздух при температуре $t_1=-23°$ C. На резервуаре имеется предохранительный клапан. Клапан открывается, если давление в резервуаре увеличивается на 2 *атм*. При нагревании резервуара до $t_2=27°$ C из него вышло 10% массы газа. Какое давление газа было первоначально в резервуаре? Тепловым расширением резервуара пренебречь.

6. В двух объемах находятся в одном $N_1=10^{19}$, в другом $N_2=4\cdot10^{18}$ молекул одного и того же газа. Объемы приводятся в тепловой контакт. В исходном состоянии внутренняя энергия первого газа была на $W=1{,}9$ *дж* больше, чем у второго. В установившемся состоянии средняя энергия, приходящаяся на долю одной молекулы, в первом объеме уменьшилась на 25%. Какова внутренняя энергия газа в первом объеме? Газ считать идеальным. Теплообменом с окружающими телами пренебречь.

7. Стеклянный сосуд кубической формы, находящийся при температуре t, наполнен жидкостью, вес которой $\mathcal{P}$. При нагревании сосуда до температуры t_1 часть жидкости вытекает, и вес ее становится равным $\mathcal{P}_1$. Определить коэффициент объемного расширения жидкости α, если коэффициент линейного расширения стекла равен β.

8. В цепи, изображенной на рисунке 10, $\mathcal{E}_1=1$ *в*, $\mathcal{E}_2=2$ *в*, $C_1=10$ *мкф*, $C_2=20$ *мкф*. Найти заряд на обкладках конденсатора емкости C_2, если заряд на обкладках конденсатора емкости C_1 равен $Q_1=10^{-5}$ *к*.

9. От источника с напряжением 110 *в* необходимо передать полезную мощность 5 *квт* на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия электропередачи, чтобы потеря энергии в ней не превышала 10% от потребляемой полезной мощности?

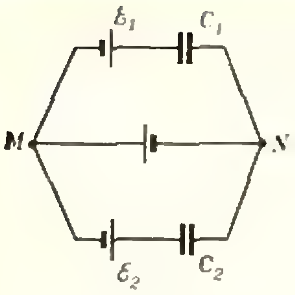


Рис. 10.

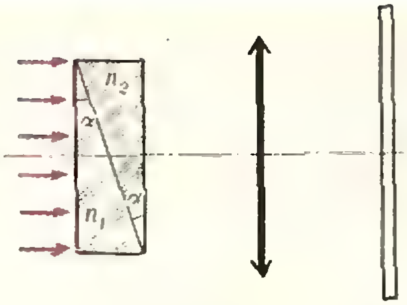


Рис. 11.

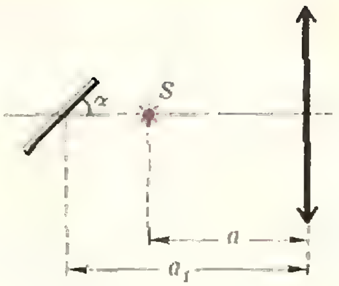


Рис. 12.

10. Плоскопараллельная пластинка составлена из двух стеклянных клиньев с малыми углами $\alpha=1^\circ$ и показателями преломления $n_1=1{,}5$ и $n_2=1{,}6$ (рис. 11). На эту пластинку, нормально к ее поверхности, падает параллельный пучок света. За пластинкой расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F=180$ *см*. В фокальной плоскости линзы находится экран. На сколько сместится светлая точка на экране, если стеклянную пластинку убрать из светового пучка?

11. Точечный источник света S расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $a=20$ *см* от нее (рис. 12). На расстоянии $a_1=30$ *см*, по ту же сторону от линзы, расположено плоское зеркало, которое наклонено под углом $\alpha=45^\circ$ к оптической оси. Линза дает два изображения источника S. Определить, чему равно расстояние между этими изображениями, если фокусное расстояние линзы $F=5$ *см*.

П. Булкин, И. Горев, С. Кротов

Число «пи» и роман «Война и мир»

На первой странице обложки журнала изображены двести восемьдесят последовательных знаков числа π (в десятичной системе счисления). Каждая цифра от 0 до 9 изображается цветным шестиугольником: 0 — коричневым, 1 — светло-красным, 2 — оранжевым, 3 — желтым, 4 — белым, 5 — светло-зеленым, 6 — зелено-голубым, 7 — синим, 8 — темно-синим и 9 — фиолетовым. Затем, двигаясь слева направо по десятичной записи числа π, мы каждой цифре в этом разложении ставим в соответствие цветной шестиугольник и помещаем его рядом с предыдущим, начиная в центре и «раскручиваясь» далее по спирали по часовой стрелке (3,141592...).

Этот рисунок позволяет сделать несколько интересных наблюдений. Легко проверить, что число многоугольников каждого цвета приблизительно равно $^{280}/_{10}=28$. Таким образом, на данном отрезке десятичной записи числа π различные цифры появляются примерно одинаково часто.

Есть предположение, что верно более общее и более сильное утверждение: *для любого l существует кусок десятичной записи числа π, в котором каждая комбинация цифр длины l появляется примерно одинаково часто.*

Из этого предположения вытекает, в частности, что в десятичной записи числа π встретится любая наперед заданная комбинация цифр.

А из этого в свою очередь можно сделать один парадоксальный вывод. Занумеруем все буквы алфавита и все знаки пунктуации, а также знак пробела парами цифр от 00 до 99 (фактически потребуется гораздо меньше пар). Затем возьмем какую-нибудь книгу и закодируем ее: вместо каждого знака (буквы, знака препинания, пробела) поставим его номер. Тогда вместо книги мы получим последовательность цифр, по которой исходная книга восстанавливается однозначно.

Если сделанное выше предположение верно, то в десятичной записи числа π где-то встречается код романа «Война и мир» (как, впрочем, и любой другой книги, даже еще не написанной!).

На рисунке много раз встречаются подряд два одноцветных шестиугольника, а несколько раз рядом расположены даже три одноцветных шестиугольника. Совсем недавно были вычислены, разумеется, при помощи ЭВМ, 100 000 знаков числа π. Среди них были обнаружены не только тройки 000, 111, ..., 999, но и несколько четверок одинаковых цифр и даже шесть девяток подряд!

В. Вавилов

Спрашивайте — отвечаем

В редакцию пришло письмо от десятиклассника Б. Ивякина. В нем он пишет:

«Просматривая старые номера «Кванта», я обратил внимание на приписку в конце решения задачи М115 «. . . эта задача впервые возникла в одной из работ известного советского алгебраиста А. И. Ширшова. Она понадобилась ему для построения серьезной математической теории». Интересно узнать, как она там решена? Использована ли для этого высшая математика, или решение вполне элементарно? Ведь если оно элементарно, то и школьники могли бы заниматься вполне серьезными математическими исследованиями».

Мы попросили ответить на эти вопросы члена-корреспондента АН СССР А. И. Ширшова.

Дорогой Боря!

Не так уж обязательно просматривать старые номера «Кванта», чтобы наткнуться на интересные математические идеи. Они вокруг нас.

Вас заинтересовала задача М115. Напомню ее условие:

В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Доказать, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду).

Я в свое время нашел излагаемое ниже решение.

Пусть (n, p, q) — некоторое начальное состояние сосудов, а γ — такое наибольшее натуральное число, что по крайней мере одно из чисел $n+p$, $n+q$, $p+q$ делится на 2^γ. Очевидно, что $\gamma>0$. Пусть $n+p=2^\gamma(2s+1)$, $n=2^\alpha(2t+1)$, $p=2^\beta(2r+1)$. Предположим, что $\alpha=\beta$. Тогда $\alpha<\gamma$. Если $n>p$, то сделаем переливание $(n, p, q)\Leftrightarrow(n-p, 2p, q)$; если же $n<p$, то переливание $(n, p, q)\Leftrightarrow(2n, p-n, q)$. Поскольку $n-p=2^{\alpha+1}(t-r)$ и $2p=2^{\alpha+1}(2r+1)$, на каком-то шаге показатели при двойках станут разными, или соответствующие числа сравняются. Поэтому можно считать, что $\alpha>\beta=\gamma$. Если $n<p$, то сделаем несколько переливаний $(n, p, q)\Rightarrow(2n, p-n, q)\Rightarrow\ldots$, пока n_i станет больше p_i (β при этом не изменится, а α — возрастет). Итак, $n>p$, $\alpha>\beta=\gamma$. Если $p<q$, $(n, p, q)\Leftrightarrow(n, 2p, q-p)$ и $n+2p=2^{\gamma+1}m$, т. е. число γ увеличивается. Если $p>q$, (n, p, q) $(n, p-q, 2q)\Leftrightarrow(n-p+q, 2(p-q), 2q)$ и $2(p-q)+2q=2p$. γ вновь увеличивается. Поскольку γ не может возрастать неограниченно, на каком-то шаге будет получен пустой сосуд.

Легко понять, что если бы речь шла, например, о 100 сосудах, то результаты были бы теми же. Опорожнить можно все сосуды, кроме, быть может, двух.

Разумеется, в моей работе (Математический сборник 45:2, 1958 год), не было и речи о сосудах.

Там шло обсуждение вопроса, как это в математике и бывает, с полным отвлечением от предмета. Легко понять, что сосуды можно заменить, например, автоколоннами или стадами слонов.

На самом же деле речь шла о возможности сведёния доказательства некоторого утверждения к доказательству более простого утверждения.

В математике такие ситуации встречаются очень часто, и «мостики», позволяющие это делать, обычно называются *леммами*.

В «сосудистом» же варианте я предложил эту лемму в «Математическое просвещение», где она и была напечатана в № 6 в 1961 году.

Бо́льшего внимания заслуживает ваше утверждение: «Ведь если оно элементарно, то и школьники могли бы заниматься вполне серьезными математическими исследованиями».

Школьники К. Ф. Гаусс и Э. Галуа занимались вполне серьезными математическими исследованиями, которые и сейчас трудно назвать элементарными.

На памятнике Гауссу высечен правильный семнадцатиугольник — дань уважения к его первой «школьной» теореме. Именем Галуа названа целая теория. Сейчас у нас в СССР есть ряд школьников, пишущих научные работы (не обязательно элементарные).

Для этого нужно много знать и много трудиться.

С уважением

Ширшов

---

26 = 27?!

Возьмем произвольный треугольник. Разделим каждую его сторону на три части одинаковой длины и соединим точки деления, как показано на рисунке 1. Мы видим, что в исходном треугольнике размещены три равных треугольника, каждые два из которых пересекаются по одному маленькому треугольничку. Все эти треугольники подобны исходному: большие — с коэффициентом подобия $^2/_3$, маленькие — с коэффициентом $^1/_3$. Площадь исходного треугольника обозначим через S; тогда площадь каждого из трех больших треугольников будет $(^2/_3)^2S$, а площадь каждого из трех маленьких $(^1/_3)^2S$. Площадь S исходного треугольника можно представить как сумму площадей больших треугольников минус сумма площадей маленьких — мы их сосчитали дважды. Мы получили тождество

$$S = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 S - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 S.$$

А теперь проделаем подобное построение для треугольной пирамиды объема V (рис. 2). Больших пирамид будет четыре (по одной у каждой вершины), объем каждой из них будет $(^2/_3)^3V$ (на рис. 2 показаны две из этих четырех пирамид). Каждые две такие пирамиды пересекаются по маленькой пирамидке объема $(^1/_3)^3V$, всего таких пирамидок будет шесть (по одной у каждого ребра исходной пирамиды). Получаем

$$V = 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 V - 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 V,$$

откуда

$$V = \frac{26}{27} V.$$

Рис. 1.

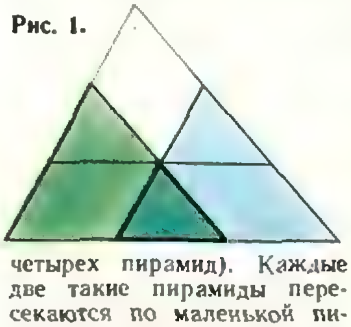
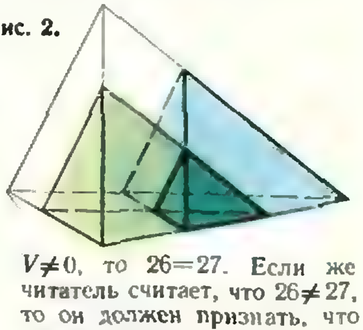


Рис. 2.



Последним равенством читатель может распорядиться по своему усмотрению. Если $V \neq 0$, то $26=27$. Если же читатель считает, что $26 \neq 27$, то он должен признать, что объем произвольной треугольной пирамиды равен нулю.

А. Кушниренко

5	У	Л	И	К	А
4	Л	А	К		
3					
2					
1					
	a	b	c	d	e

5	У	Л	И	К	А
4	Л	А	К	У	И
3	К	И	Л	А	У
2	А	К	У	И	Л
1	И	У	А	Л	К
	a	b	c	d	e

Сквэрворд

Сквэрворд (square — квадрат; word — слово) — это квадрат, разделенный на клеточки. В некоторых записаны буквы, бо́льшая часть клеточек пуста. Надо заполнить пустые клетки буквами из числа написанных так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали или большой диагонали не было двух одинаковых букв, то есть каждая буква встречалась бы по одному разу.

Рассмотрим рисунок сверху слева. Решение задачи лучше всего начинать с заполнения диагоналей. В клетку c3 можно поставить только букву Л, так как на вертикали c стоят буквы И, К, а на диагонали a5—e1— буквы У, А, и поэтому Л — единственная буква, дополняющая набор И, К, У, А до У, Л, И, К, А. Теперь на диагонали a5—e1 остались две свободные клетки, в которые нужно разместить буквы И, К. Букву К на d2 поместить нельзя, значит, К проставим на e1, И — на d2. На горизонтали 1 в клетки a1, b1, c1 букву Л вписать нельзя, клетка e1 занята, поэтому место буквы Л — d1. По вертикали d надо ставить А на d3 и У на d4, отсюда на e4 надо ставить И.

Далее вписываем: e2—Л, e3—У, b2—К, a1—И, c2—У, a2—А, a3—К, b3—И, b1—У, c1—А. Задача решена. Остальные задачи решите самостоятельно

Л. Мочалов

С	М	О	Л	А
		С	О	М

К	У	П	О	Л
		Л	У	К

З	А	Б	О	Р
	Б	О	Р	

Г	Л	О	Б	У	С
		Л	У	Г	
			Г	О	Л

М	А	С	Л	О
		Л	О	М

С	Л	И	Т	О	К
К	И	Т			
		Л	И	К	

С	М	Ы	Ч	О	К
		С	Ы	Ч	
		К	О	М	

Р	У	Б	А	Н	О	К
	К			Р	А	Б
			Б		У	Р
Б		О			К	

К	И	С	Л	О	Т	А
	С	О	К			
	А	К	Т			
Т	О	Л				

Сквэрворд и слова-оборотни

Занимательная математическая головоломка «сквэрворд», придуманная Л. Мочаловым, должна понравиться любителям многоходовых логических задач. К очень любопытным результатам приводит анализ этой игры.

Например, *сколько букв нужно вставить в квадрат, чтобы можно было однозначно заполнить оставшиеся клетки квадрата?* Рассмотрим квадрат 5×5, изображенный на рисунке 1. В нем к первой строке добавлено 12 букв, однако существует два разных заполнения оставшихся клеток (рис. 2, 3).

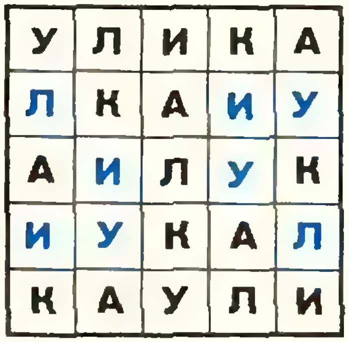
С другой стороны, добавив к буквам первой строки еще лишь две буквы в начале и в конце второй строки (рис. 4), получаем набор, при котором заполнение единственно. Убедиться в этом нетрудно, достаточно найти все различные заполнения квадрата 5×5 при заданной первой строке (их всего 8).

А каково минимальное количество заполненных клеток, которое полностью определяет дальнейшую расстановку букв в квадрате $n \times n$? Где эти клетки расположены?

Нетрудно проверить, что для квадрата 4×4 существует всего два различных заполнения при заданном первом слове (проверьте!), причем в каждой клетке не первой строки буква, поставленная при первом заполнении, отличается от буквы, которая туда ставится при втором заполнении. Поэтому заданием лишь одной дополнительной буквы заполнение квадрата определяется однозначно, если оно вообще возможно.

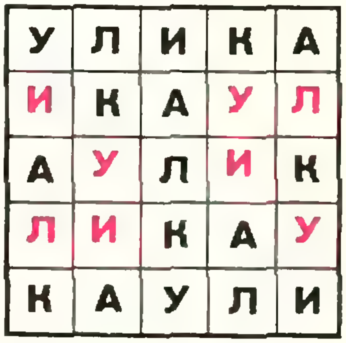
У	Л	И	К	А
	К	А		
А		Л		К
		К	А	
К	А	У	Л	И

Рис. 1.



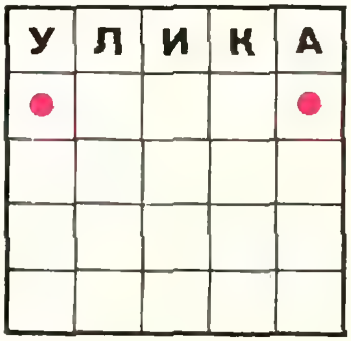
У	Л	И	К	А
Л	К	А	И	У
А	И	Л	У	К
И	У	К	А	Л
К	А	У	Л	И

Рис. 2.



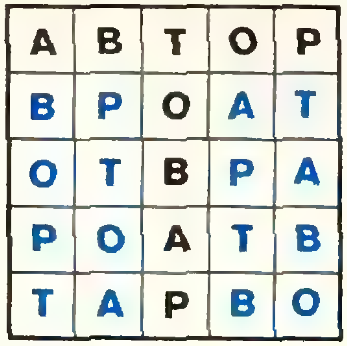
У	Л	И	К	А
И	К	А	У	Л
А	У	Л	И	К
Л	И	К	А	У
К	А	У	Л	И

Рис. 3.



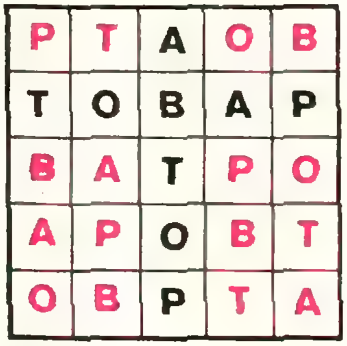
У	Л	И	К	А
●				●

Рис. 4.



А	В	Т	О	Р
В	Р	О	А	Т
О	Т	В	Р	А
Р	О	А	Т	В
Т	А	Р	В	О

Рис. 5.



Р	Т	А	О	В
Т	О	В	А	Р
В	А	Т	Р	О
А	Р	О	В	Т
О	В	Р	Т	А

Рис. 6.

Анализ игры на квадратах $n \times n$ при $n > 5$ гораздо более сложен. Его удобнее проводить не с буквами, а с цифрами 1, 2, 3, ..., n. Например, для квадрата 6×6 при заданной первой строке возможны 128 различных заполнений, то есть опять степень двойки (2^1 для квадратов 4×4, 2^3 для квадратов 5×5 и 2^7 для квадратов 6×6). Всегда ли так будет? Если вас заинтересовала эта тема, попробуйте разобраться с квадратами 7×7.

Однако буквенное заполнение квадрата наводит на идею еще одного типа головоломок. В русском языке существуют группы слов, отличающихся лишь перестановкой букв («смола» и «масло» или «автор», «товар», «тавро», «отвар»). Это — слова-«оборотни». На рисунках 5, 6 показаны два заполнения квадрата, в которых одновременно присутствуют слова «товар» и «автор». А можно ли одновременно расположить в квадрате слова «смола» и «масло»? Или сразу три из набора: «автор», «товар», «тавро», «отвар»? А все четыре? А как ведут себя в этом смысле другие группы слов-«оборотней»?

Ждем ваших писем!

А. Савин

К статье «Конусы в каркасах»

1. $a\sqrt{3}/3$. 2. $2:1$. 3. $2r\operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha/4)/\sqrt{3}$. 4. $2\operatorname{arctg}\sin(\pi/n)$.

К статье «Как решать задачи на механическое движение»

1. $|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{g}|(l + \Delta l) - k(\Delta l)^2/m} \approx 4{,}2$ *м/сек*.

2. $A = -m(|\vec{g}|h - |\vec{v}|^2/2) = -1\,000$ *дж*.

3. $|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{g}|l/2} = 10$ *м/сек*.

4. $A = -|\vec{g}|hV(\rho_{ст} - \rho_в) \approx -2\,000$ *эрг*.

5. $\Delta\varphi = m|\vec{v}|^2/2e \approx 25{,}5$ *в*.

6. $|\vec{v}| =$

$$= \sqrt{2|\vec{g}|(H-h) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H}\right)}.$$

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Математика

Механико-математический факультет

1. $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, k — целое.

2. $-\log_3 2 \leqslant x < 0$, $\frac{1}{2}\log_3 2 < x \leqslant 1$.

3. $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}) \approx 0{,}34$.

Указание. Убедиться, что $\widehat{CDF} = 105°$; $|CD| = 1$. По теореме синусов из $\triangle DFB$ вычислить $|DF|$.

4. $\cos\alpha = {}^1/_7$. Указание. Показать, что треугольник ABC с вершинами в точках касания шаров с плоскостью P — равнобедренный. Проверить, что вершина конуса M равноудалена от точек B и C касания с плоскостью P двух меньших шаров. Рассмотреть два случая:

а) точка M лежит на высоте треугольника ABC, опущенной из вершины A;

б) точка M лежит на продолжении этой высоты за вершину A.

5. Указание. Положив

$$F(x, y) = x^2 - (9 - y)x + y^2 - 9y + 15,$$

заметить, что $F(x, y) = F(y, x)$. Доказать, что уравнение $F(x, r) = 0$ имеет своими корнями числа s и t. (Допустим, например, что корнями уравнения $F(x, r) = 0$ являются числа s и $u \neq t$. Тогда $F(s, r) = 0$, а потому $F(r, s) = 0$; далее, $F(s, t) = 0$ ибо $F(r, t) = F(t, r) \neq 0$, а потому $F(t, s) = 0$. Следовательно, уравнение $F(x, s) = 0$ имеет корни r и t. Сравнивая равенства $s + u = 9 - r$, $r + t = 9 - s$, получающиеся по теореме Виета для уравнений $F(x, r) = 0$ и $F(x, s) = 0$, приходим к противоречию с предположением $u \neq t$). Решить систему неравенств

$$D > 0,\ F(r, r) > 0,\ r < \frac{9 - r}{2}$$

(так как уравнение $F(x, r) = 0$ имеет корни s и t, $s \neq t$, то его дискриминант D положителен; так как $r < s < t$, то значение трехчлена $F(x, r)$ в точке r положительно; так как $r < s$, то число r лежит левее абсциссы вершины параболы $F(x, r) = 0$, то есть левее числа $\frac{s + t}{2}$, которое, по теореме Виета, равно числу $\frac{9 - r}{2}$).

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Площадь параллелограмма больше площади квадрата.

2. $x = \frac{1}{25}$, $y = 0$.

3. $x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{13}}{2} + k\pi$, k — целое.

Указание. Заметить, что если положить

$$\frac{4}{17} - \sin^2 x = u,\quad \frac{30}{17} + \operatorname{ctg} x = v,$$

то данное уравнение записывается в виде

$$\sqrt{u + v} = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

4. $|KL| = |LM| = 2(1 + \sqrt{15})$, $|KM| = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{15})$. Указание. Доказать, что $\triangle KLM$ — равнобедренный. Записать теорему Пифагора для $\triangle KHN_2$, где H — точка пересечения хорды KM с линией центров.

5. $\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}(13 - 2\sqrt{22})$. Указание. Полагая

$$\frac{6x}{x^2 + 9} = z,$$

переписать данные условия в виде

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{a}{2}\right) \leqslant 0, \qquad (1)$$

$$z=\frac{1}{9y}+\frac{1}{3}ay+\frac{a}{6}, \qquad (2)$$

$$y>0 \qquad (3)$$

и заметить, что

$$|z|\leqslant 1. \qquad (4)$$

Показать, что если $0<a\leqslant 2$, то неравенство (1) выполнено при $-1/2\leqslant z\leqslant a/2$, а если $a>2$, то это неравенство (с учетом условия (4)) выполнено при $-1/2\leqslant z\leqslant 1$. Убедиться, что для $a>0$ наименьшее значение правой части равенства (2) (с учетом условия (3)) достигается при $y=1/\sqrt{3a}$ и равно $\frac{2\sqrt{3a}}{9}+\frac{a}{6}$. Требования задачи выполнены, если

$$\frac{a}{2}>\frac{2\sqrt{3a}}{9}+\frac{a}{6} \text{ при } 0<a\leqslant 2;$$

$$1>\frac{2\sqrt{3a}}{9}+\frac{a}{6} \text{ при } a>2.$$

Физический факультет

1. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}, \quad x_2=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$

(n, k — целые).

2. $-\frac{23}{10}<x<4$.

3. $x_1=6,\ y_1=-1;\ x_2=2,\ y_2=-3$.

Указание. Обозначить $2^{\frac{x-2y}{4}}$ через z.

4. $|AL|=\frac{a^2}{b}$. Указание. На продолжении стороны LK за точку K построить точку B такую, что $|KB|=|KN|$, так что $|LB|=b$. Доказать, что $\widehat{LAN}=\widehat{LNB}$, а потому $\triangle LAN \backsim \triangle LNB$.

5. $|BC|=14$. Указание. Рассмотреть точку B_1, зеркально симметричную точке B относительно плоскости PQS, и вычислить $|AB_1|=|AB|$.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $|\vec{a}_2|=|\vec{g}|\frac{m_2-2m_1\sin\alpha}{4m_1+m_2}=5\ м/сек^2$

(при решении этой и последующих задач считается, что $|\vec{g}|=10\ м/сек^2$); вектор $\vec{a}_2$ направлен вертикально вниз.

2. $|\vec{v}|=\sqrt{|\vec{g}|\,l\,(\sqrt{2}-1)/2}\approx 0{,}63\ м/сек$.

3. $\mu\geqslant\frac{r}{R\sin\alpha}=0{,}2$.

4. $|\vec{F}|=m|\vec{g}|=100\ н$.

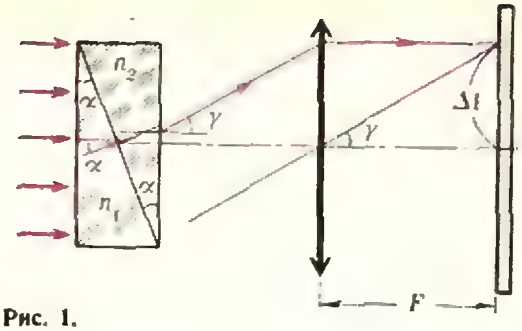


Рис. 1.

5. $|\vec{a}|=|\vec{g}|\sin\alpha+\frac{2pS(n-1)}{mn(2-n)}=$
$=25\ м/сек^2$.

6. $\frac{m_2}{m_3}=\frac{2+\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}=\frac{5}{3}$.

7. $U_1=\frac{C_2|\vec{B}|\,|\vec{v}|\,l}{C_1+C_2}=0{,}72\ в$.

8. $l=\frac{LF}{d}=1{,}25\ см$.

9. $t=\frac{M(a-F)}{F\sqrt{2|\vec{g}|h}}\approx 7\cdot 10^{-4}\ сек$.

10. $l=\frac{2d(d+|F|)}{2d+|F|}=7{,}2\ см$.

Физический факультет

1. $H_{\max}=3|\vec{g}|t^2=7{,}5\cdot 10^4\ м=75\ км$.

2. $x_{\max}=\frac{(m+M)|\vec{g}|}{k}+$
$+\sqrt{\frac{(m+M)^2|\vec{g}|^2}{k^2}+\frac{2m^2|\vec{g}|h}{k(m+M)}}$.

3. $s=H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\times$
$\times\left(\sqrt{1+\frac{h}{H}\frac{1}{(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha}}-1\right)\sin 2\alpha$.

4. $m=\frac{n^2|\vec{F}|L}{(n^2-1)\eta q}=2{,}9\cdot 10^3\ кг$.

5. $p_1=\frac{\Delta pT_1}{0{,}9T_2-T_1}=25\ атм$.

6. $W_1=\frac{W}{1{,}25-0{,}75N_2/N_1}=2\ дж$.

7. $\alpha=3\beta+\frac{\mathcal{P}-\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}(t_1-t)}$.

8. $Q_2=C_2(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1+Q_1/C_1)=4\cdot 10^{-5}\ к$.

Примечание. Заметим, что, если бы между точками M и N цепи не было включено дополнительного источника тока, то абсолютные значения зарядов Q_1 и Q_2 были бы одинаковыми.

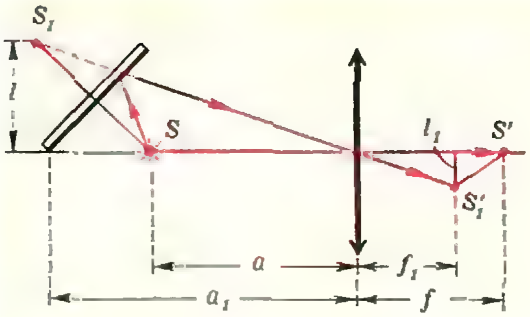


Рис. 2.

9. $R = \frac{0,1}{P}\left(\frac{U}{1,1}\right)^2 = 0,2$ *ом*.

10. $\Delta l = F\ \mathrm{tg}\,\gamma \approx F\alpha\,(n_2 - n_1) \approx 0,31$ *см* (см. рис. 1).

11. $S'S_1' = \sqrt{(f - f_1)^2 + l_1^2} =$

$= 2\sqrt{10/3}$ *см* $= 2,1$ *см* (см. рис. 2).

К задачам «Квант» для младших школьников

(*см. «Квант» № 1*)

1. Каждая партия кончается отъездом одного из игроков, поэтому чемпион определяется ровно за 9 партий. Поскольку 5×2=10>9, по две партии могли выиграть максимум четверо участников. Пример: Первый выиграл у Второго и Третьего, затем Четвертый — у Первого и Пятого, Шестой — у Четвертого и Седьмого, Восьмой — у Шестого и Девятого, Десятый — у Восьмого.
2. Н=3, Е=7.
3. 142 857×516 342=73 763 069 094.
4. $\sqrt{I} = I$.

Ответы к «Кроссворду»

(*см. «Квант» № 1, с. 64*)

По горизонтали: 5. Кеплер. 6. Марков. 9. Герц. 12. Коши. 13. Гаусс. 14. Дирак. 17. Савар. 18. Карно. 19. Шухов. 22. Галле. 23. Вуд. 25. Бор. 26. Герон. 30. Майер. 31. Винер. 32. Пикар. 36. Ампер. 37. Хаббл. 38. Буль. 39. Лауэ. 42. Кантор. 43. Гейгер.

По вертикали: 1. Виет. 2. Умов. 3. Нернст. 4. Валлис. 7. Крукс. 8. Попов. 10. Раман. 11. Галуа. 15. Паули. 16. Юнг. 20. Басов. 21. Кулон. 24. Непер. 27. Ферма. 28. Вин. 29. Гиббс. 30. Мозли. 33. Риман. 34. Петров. 35. Жансен. 40. Уатт. 41. Ленц.

К задачам

(*см. «Квант» № 1, с. 24*)

«Спиши и думай»

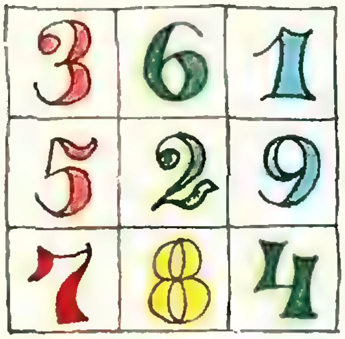
С=6, *П*=5, *И*=1, *Ш*=0, *Д*=7, *У*=3, *М*=4, *А*=9, *Й*=8.

«Ребус»

$\overline{one}=345$.

(*см. «Квант» № 1, с. 42*)

«Квадраты в квадрате»



3	6	1
5	2	9
7	8	4

«Звездочка»

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 4 & = & 7 \\ \times & & \times & & - \\ 3 & \times & 2 & = & 6 \\ \hline 9 & - & 8 & = & 1 \end{array}$$

«Ребусы»

а) 913×112=102 256; б) 783×319=249 777.

Номер готовили: В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шихванович

Номер оформили: М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, М. Терещенко

зав. редакцией Л. Чернова

художественный редактор Т. Макарова

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, *Б*. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/XI-76 г.
Подписано в печать 6/I-77 г.
Бумага 70×108$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,20 Уч.-изд. л. 6,19 Т-03402
Цена 30 коп. Заказ 2665 Тираж 294 885 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

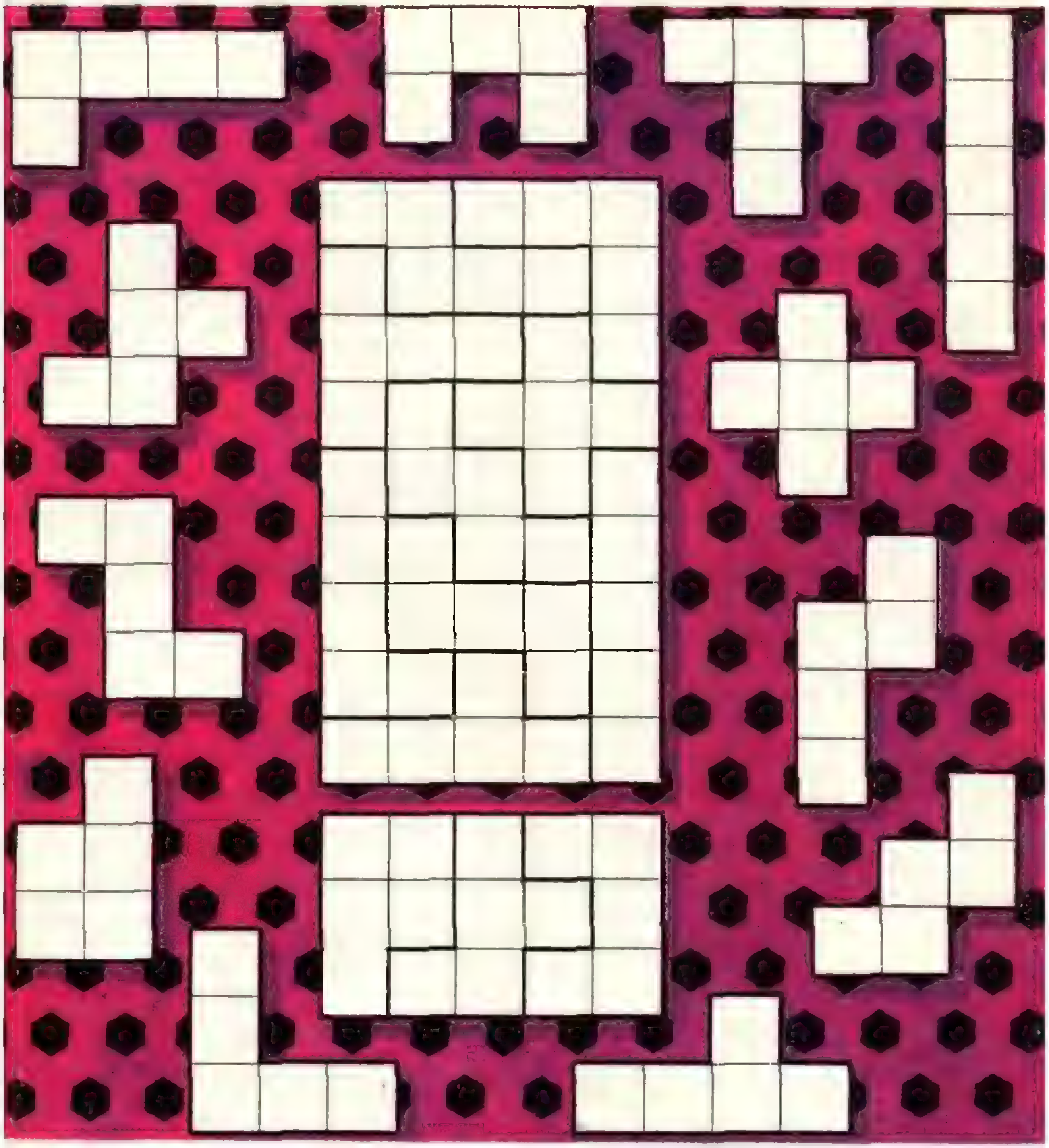
Рукописи не возвращаются

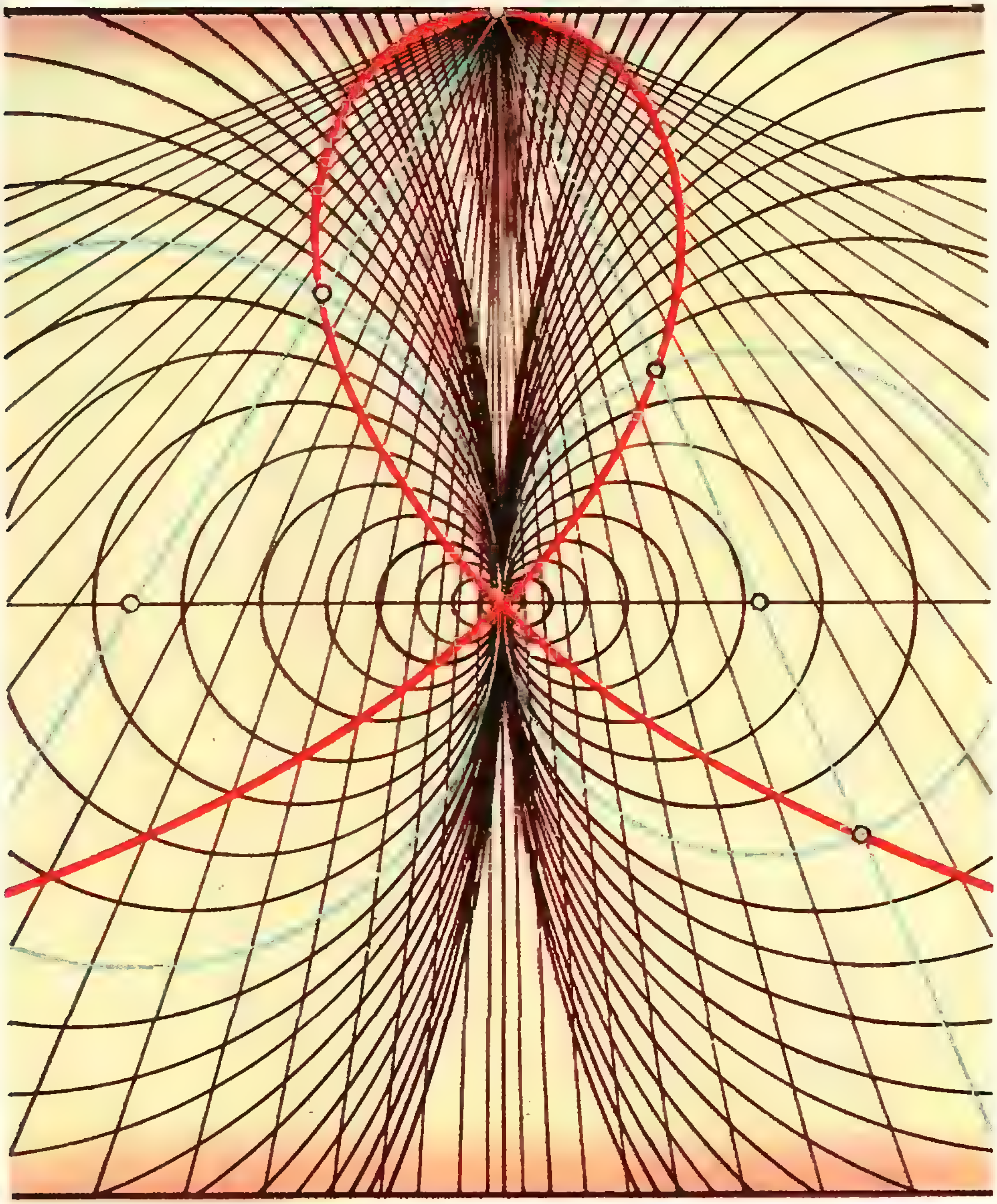
В 1975 году издательство «Мир» выпустило книгу С. В. Голомба «Полимино». Много места в этой книге посвящено выяснению того, какие фигуры можно, а какие нельзя покрыть так называемыми пентамино. (Полный набор пентамино вы видите на рисунке.) Есть в этой книге и задачи, решения которых автор не знал. Одну из них удалось решить нашему читателю из Москвы восьмикласснику Саше Разборову.

Постройте из полного набора пентамино одновременно два прямоугольника 3×5 *и* 5×9.

На рисунке вы видите полученное им решение. Вот еще несколько задач из этой книги.

Сложите (или докажите, что это невозможно сделать) из полного набора пентамино одновременно два прямоугольника размерами: а) 5×8 *и* 4×5, б) 4×5 *и* 4×10.



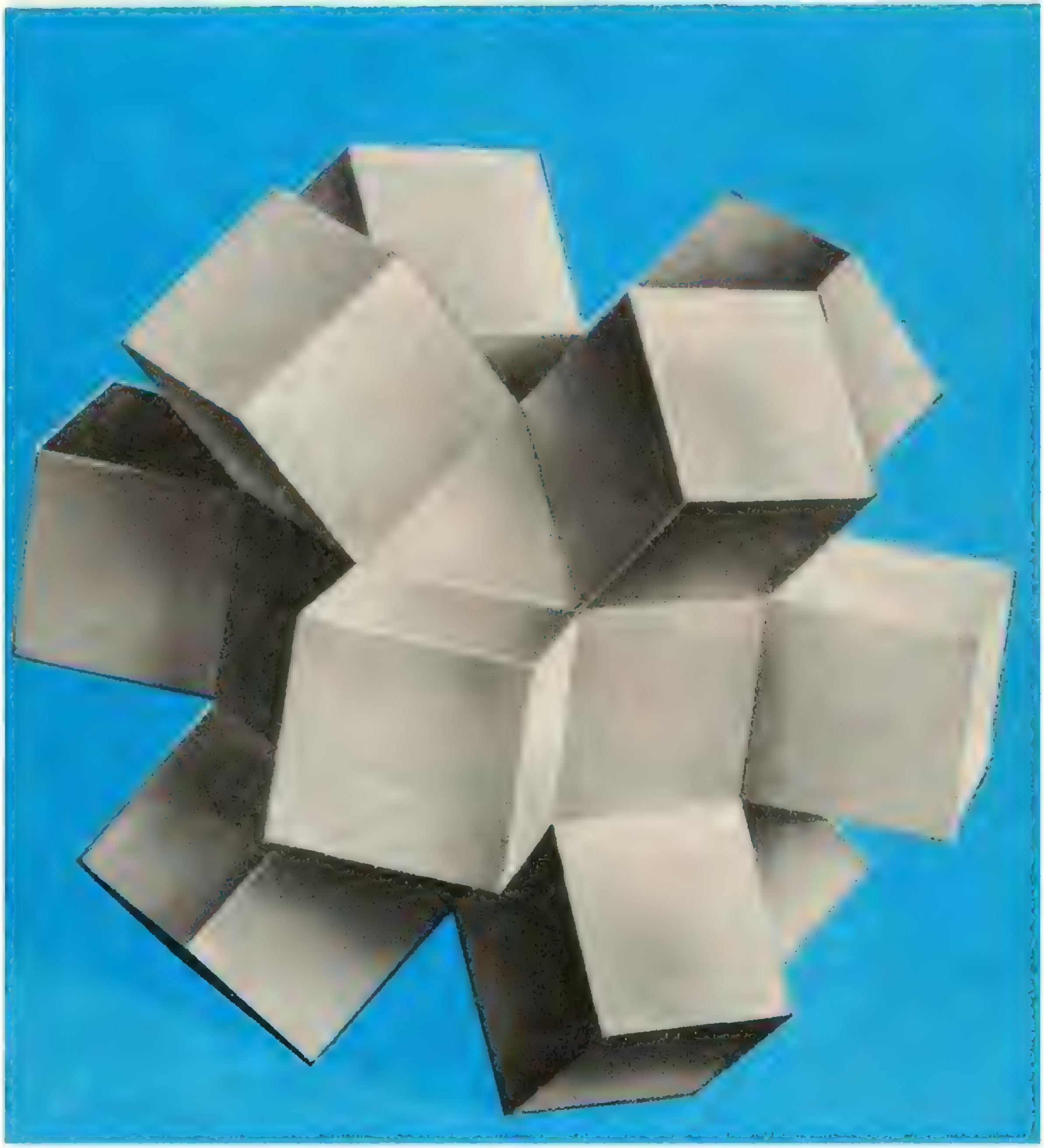


Здесь показан способ построения одной из замечательных кривых — строфонды. Подробнее об этой кривой читайте на с. 39.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

Эта фигура образована следующим образом: к некоторым квадратным граням ромбокубооктаэдра приклеены кубы.

Попытайтесь, мысленно откинув кубы, представить себе, как выглядит ромбокубооктаэдр и изобразить, как выглядит выпуклая оболочка нарисованного здесь многогранника (выпуклая оболочка фигуры F — это пересечение всех выпуклых фигур, содержащих фигуру F). Фигура, которая у вас должна получиться, называется «ромбоусеченным кубооктаэдром».



НОМЕР
3

Основан в 1970 году

Квант

3
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Лопшиц.* Задача Мёбиуса и ее продолжение
5 *В. Лишевский.* Александр Григорьевич Столетов
12 *С. Артемов, Ю. Гиматов, В. Федоров.* Много битов из ничего

Лаборатория «Кванта»

16 *С. Козел.* Модель опыта Резерфорда
19 *В. Березин.* Дельтоида

Математический кружок

20 *А. Земляков.* Орнаменты

Задачник «Кванта»

28 Задачи М431—М435; Ф443—Ф447
30 Решения задач М391—М394; Ф397—Ф402

По страницам школьных учебников

38 *В. Гутенмахер.* Расстояние от точки до плоскости

«Квант» для младших школьников

40 Задачи
41 *А. Орлов.* Ставь на минус!

Практикум абитуриента

46 *Л. Баканина.* Закон сохранения импульса при соударениях
51 Примерные варианты вступительных экзаменов по математике и вузы в 1977 году
53 *И. Горев, С. Кротов.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
56 **Спрашивайте — отвечаем**

Рецензии, библиография

58 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
63 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(11, 15, 18, 27, 45, 55)*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

А. Лопшиц

Задача Мёбиуса и ее продолжение

Полтора века назад (в 1823 г.) молодой тридцатилетний астроном обсерватории в Лейпциге Август Мёбиус обратил внимание математиков на то, что хотя уже Эйлер рассматривал не только простейшие геометрические преобразования (движения и подобия), но и более общие, которые он назвал аффинными[*], они все же недостаточно применяются геометрами.

Мёбиус указывает при этом, что многие геометрические задачи, содержание которых не использует ни понятия длины, ни измерения углов, решались и после Эйлера чуждыми их содержанию средствами, и высказывает свое убеждение[**], что следовало бы такие задачи по возможности полно представить, систематически их расположить и развить самостоятельное геометрическое направление, которое не использовало бы ни тригонометрии, ни Magister Matheseos (так называли в XVII веке теорему Пифагора). Далее он продолжает: «В первые годы моего пребывания здесь[*], когда мои обязанности оставляли мне больший досуг, я сделал попытку в этом направлении. Я был к этому подготовлен благодаря ранее изобретенному мною особого рода геометрико-аналитическому исчислению, с помощью которого я сразу обнаружил, что именно эти общие свойства фигур[**] и составляют, собственно, область его применения; благодаря этому исчислению я получил возможность обнаружить геометрические результаты, к которым другие методы меня привели бы на более трудном пути».

Полное изложение этого «исчисления» Мёбиус дал в 1827 году в своем обширном труде «Барицентрическое исчисление». Эту книгу Феликс Клейн назвал «подлинным кладом идей, изложенных с изумительной ясностью»; самого же Мёбиуса Клейн считал предшественником своей Эрлангенской программы, сделавшейся впоследствии программой многих основных направлений в области геометрии XIX и XX столетий (см. статью С. Гиндикина «Феликс Клейн», «Квант», 1975, № 12).

Мы не можем здесь подробно останавливаться на этой замечательной книге Мёбиуса; скажем только, что в ней отчетливо выявляются основы векторной алгебры и ее приложений к геометрии (все это теперь изучается в школе).

В этой небольшой заметке мы познакомим читателя с задачей Мёбиуса, которую он счел достойной того, чтобы привлечь внимание математиков своего времени к новому кругу геометрических проблем.

В своей первой работе (1823 г.) он пишет: «Из многочисленных, относящихся к этой области задач я разрешаю себе предложить читателю для самостоятельного решения следующую:

Каждые две из пяти произвольно заданных в плоскости точек A, B, C, D, E соединены прямой. Площади

---

[*] Так называют геометрические преобразования, которые прямые переводят в прямые, причем параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

[**] Эти и последующие высказывания Мёбиуса содержатся в его первой математической работе «Две геометрические задачи», напечатанной в качестве приложения в астрономическом издании: «Наблюдения Королевской Университетской Обсерватории» в Лейпциге в 1823 году.

---

[*] В Лейпцигской обсерватории.

[**] То есть свойства, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях и поэтому не зависящие от измерения длин и углов.

возникающих при этом пяти треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA заданы; требуется выразить через них площадь пятиугольника $ABCDE$. Вместо площадей этих пяти треугольников можно также считать заданными площади пяти четырехугольников: $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, $EABC$, $ABCD$, — и искать выражение через них площади пятиугольника $ABCDE$.

Обращение Мёбиуса к читателям сразу вызвало отклики: во втором томе журнала «Астрономические известия» (1825 год; редактор журнала — известный математик и астроном Шумахер) было опубликовано два решения этой задачи. Однако оба решения были «классическими», полученными методами элементарной геометрии — средствами, которые Мёбиус считал чуждыми содержанию своей задачи; и только в своей книге Мёбиус дал полное ее решение средствами «барицентрического исчисления»; мы бы теперь сказали — средствами векторной алгебры.

Читатель этой статьи с особым интересом займется решением задачи Мёбиуса, если мы сообщим ему окончательный результат:

Площадь x пятиугольника $ABCDE$, у которого площади треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA равны соответственно a, b, c, d, e, есть корень квадратного уравнения

$$x^2 - x(a + b + c + d + e) + $$
$$+ (ab + bc + cd + de + ea) = 0.$$

Не менее интересно и то, что площадь x пятиугольника $ABCDE$, у которого площади четырехугольников $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, $EABC$, $ABCD$ равны соответственно α, β, γ, δ, ε, есть корень «такого же» квадратного уравнения

$$x^2 - x(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) +$$
$$+ (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha) = 0.$$

Обратим внимание читателя на то, что Мёбиус рассматривает не только выпуклые многоугольники и что, например, в многоугольнике $ABCDE$, изображенном на рисунке 1, площади треугольников ABC и BCD Мёбиус измеряет положительными числами, а площадь треугольника CDE — отрицательным числом; он учитывает, что порядок, в котором следуют точки A, B, C и точки B, C, D, соответствует обходу по сторонам этих треугольников по часовой стрелке, а порядок, в котором следуют точки C, D, E — обходу по сторонам треугольника CDE против часовой стрелки.

Более того, Мёбиус рассматривает не только «обычные» многоугольники, но и такие, у которых стороны могут пересекаться не только в вершинах многоугольника (см. рис. 2). Площадь такого многоугольника (да и всякого другого) Мёбиус считает равной сумме площадей «ориентированных» треугольников PAB, PBC, PCD, PDE, PEA. Он доказывает (сумеет ли это сделать читатель самостоятельно?), что эта сумма не зависит от выбора точки P (в плоскости многоугольника).

Перечисляя новые геометрические идеи Мёбиуса, Ф. Клейн указывает, что Мёбиус первый совершенно последовательно пользуется принципом знаков в геометрии, притом не только для измерения отрезков, но и для измерения площадей и объемов,

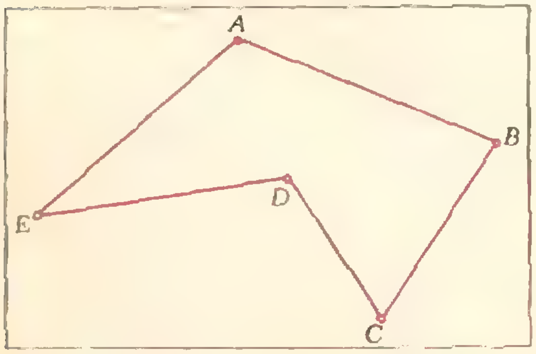


Рис. 1.

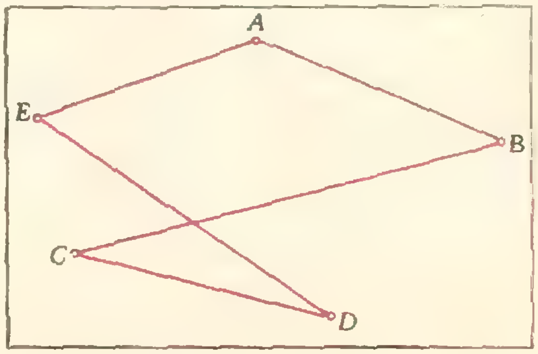


Рис. 2.

при котором он различает направление обхода *).

В конце своей небольшой статьи «Письмо профессора Мёбиуса к издателю журнала» («Астрономические известия», 1825, т. 3) Мёбиус по поводу предложенной им задачи пишет:

«Но довольно говорить о столь легкой задаче, которая, рассмотренная сама по себе, есть просто курьез; она заслуживает некоторого внимания лишь постольку, поскольку представляет пример следующей теоремы, которая мне кажется новой: *если каждые две точки какой-либо системы n точек, расположенных в плоскости, соединить прямой линией, и если считать заданными площади (независимые между собой) каких-либо 2n—5 многоугольников, возникающих от пересечения этих прямых, то через них можно выразить площадь каждого из остальных многоугольников*».

Доказательство этой теоремы может быть предметом самостоятельного исследования читателя (Мёбиус также опубликовал его в своей книге «Барицентрическое исчисление»).

Предложим еще одну задачу — она является своеобразным продолжением первой (и также, как она, представляет пример теоремы типа теоремы Мёбиуса).

В пятиугольнике ABCDE заданы площади p, q, r, s, t треугольников ACD, BDE, CEA, DAB и EBC. Нужно через них выразить площадь пятиугольника ABCDE.

А вот и ответ:

$$x^2 = (p + q + r + s + t)^2 - 4(pr + rt + tq + qs + sp).$$

Заметим еще, что и первая задача Мёбиуса, и ее «продолжение» являются частными случаями следующей задачи:

На сторонах AB, BC, CD, DE и EA пятиугольника ABCDE взяты точки A′, B′, C′, D′ и E′ так, что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} \cdot \lambda$; $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} \cdot \lambda$; $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CD} \cdot \lambda$; $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DE} \cdot \lambda$; $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{EA} \cdot \lambda$ (рис. 3; многоугольник $A'B'C'D'E'$ называют *λ-сопряженным* с многоугольником $ABCDE$). Требуется выразить площадь пятиугольника $ABCDE$, если заданы площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEA', EAB'. Легко видеть, что в случае, когда $\lambda = 0$, ответ следует из теоремы Мёбиуса, а в случае $\lambda = 1$ — из ее «продолжения»: ведь если $\lambda = 0$, то $A' = A$, $B' = B$, . . . ; если же $\lambda = 1$, то $A' = B$; $B' = C$; $C' = D$; $D' = E$; $E' = A$.

Последнее замечание: о многоугольнике, λ-сопряженном заданному многоугольнику, можно высказать много интересных предложений — вот одно из них (оно не связано с теоремой Мёбиуса):

Площадь n-угольника, λ-сопряженного с заданным многоугольником $A_1A_2 \ldots A_n$, *равна* $P\lambda^2 + Q\lambda + R$, *где числа P, Q, R определяются площадью многоугольника* $A_1A_2 \ldots A_n$ *и площадью многоугольника* $S_1S_2 \ldots S_n$, $^1/_2$-сопряженного с многоугольником $A_1A_2 \ldots A_n$ (его вершины являются серединами последовательных сторон многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$: S_1 — середина A_1A_2, S_2 — середина A_2A_3 и т. д.).

Мы надеемся, что эти задачи заинтересуют наших читателей. Их решения мы предполагаем опубликовать позже. А пока — ждем ваших писем.

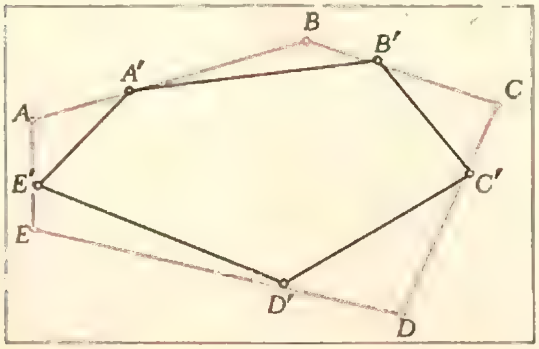


Рис. 3.

---

*) Подробное изложение теории измерения «площадей ориентированных фигур» вместе с приложениями этой теории (в геометрии и геодезии) читатель найдет в брошюре А. М. Лопшица — выпуск 20 серии «Популярные лекции по математике», М., 1956 год.

Александр Григорьевич Столетов (1839—1896)

В. Лишевский

Александр Григорьевич Столетов

Выдающийся русский физик А. Г. Столетов родился 29 июля (10 августа) 1839 г. в семье небогатого владимирского купца. Его отец — Григорий Михайлович — владел небольшой бакалейной лавочкой и мастерской по выделке кож. Мать — Александра Васильевна — была тоже купеческого звания, но семья Столетовых совершенно не походила на типичные купеческие семьи, мрачный мир которых так мастерски изобразил в своих пьесах А. Н. Островский. Александра Васильевна была образованной женщиной и сама преподавала своим детям (до их поступления в гимназию) русский язык и арифметику.

В доме была неплохая библиотека, и Саша, научившись читать в четырехлетнем возрасте, стал рано ею пользоваться. В пять лет он уже читал совершенно свободно.

В 1849 г. Александр Столетов поступил во Владимирскую гимназию, которую окончил в 1856 г. В свидетельстве об окончании сказано, что он «... признан окончившим Гимназический курс с предоставлением права на поступление в Университет без вторичного экзамена и с награждением за отличные успехи в науках ... золотой медалью».

В последние годы учебы в гимназии четко определились наклонности Александра. Его любимые предметы — математика и физика. Он с удовольствием занимается ими в классе, а дома мастерит самодельные физические приборы и ставит различные опыты. Решено. Он будет физиком!

Осенью того же 1856 г. А. Г. Столетова зачисляют на физико-математический факультет Московского университета «казеннокоштным» студентом (то есть получающим государственную стипендию). В то время в университете было много бездарных профессоров, но Александру повезло с учителями. Прикладную математику он слушал у Николая Дмитриевича Брашмана, воспитавшего великого П. Л. Чебышева, астрономию ему преподавал Федор Александрович Бредихин, а лекции по аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению, высшей алгебре и вариационному исчислению читал замечательный педагог Николай Ефимович Зернов. Но любимый предмет Александра по-прежнему физика. Его преподает большой ученый и прекрасный человек — Михаил Федорович Спасский.

Столетов живет бедно, денег мало, но несмотря на это он весьма неохотно соглашается на частные уроки и переводы, справедливо полагая, что эти дополнительные занятия отвлекают его от науки. Все время принадлежит и отдано только ей!

Выдающиеся научные способности Александра, его большая любовь к знаниям были замечены и оценены преподавателями. В 1860 г. А. Г. Столетов с отличием заканчивает университет, и сразу же руководство факультета начинает хлопотать об оставлении молодого кандидата (так назывались тогда окончившие полный курс) при университете. Но на просьбу приходит отказ. Столетов как казеннокоштный студент должен после университета отработать 6 лет «по учебной части Министерства Народного Просвещения».

Факультетское начальство повторяет свою попытку оставить А. Г. Столетова при университете. Переписка продолжается. А сам кандидат не теряет времени даром и целые дни проводит в библиотеке.

Только 5 сентября 1861 г. наконец приходит долгожданное разрешение. За истекшее время А. Г. Столетов успел подготовиться к магистерскому экзамену и 16 октября подает прошение ректору: «Желая получить степень магистра физики, покорнейше прошу ... допустить меня к устраиваемому испытанию».

Экзамен сдан успешно, но защита диссертации неожиданно откладывается. Профессора К. А. и С. А. Рачинские пожертвовали университету стипендию для посылки в заграничную командировку на два года достойного кандидата. Выбор пал на А. Г. Столетова, и летом 1862 г. он покидает Москву.

За границей Столетов пробыл три года. Он учился в Гейдельберге, Геттингене и Берлине у Г. Кирхгофа, Г. Гельмгольца, В.-Э. Вебера, Г.-Г. Магнуса и других известных ученых. Учился, как всегда, самозабвенно. К. А. Тимирязев позже вспоминал: «... когда через несколько уже лет, я в свою очередь провел в Гейдельберге несколько семестров, посещая, между прочим, и практические занятия у Кирхгофа, мне довелось слышать еще свежее предание об одном молодом русском, с виду почти мальчике, изумлявшем всех своими блестящими способностями». Кирхгоф называл Столетова самым талантливым своим учеником.

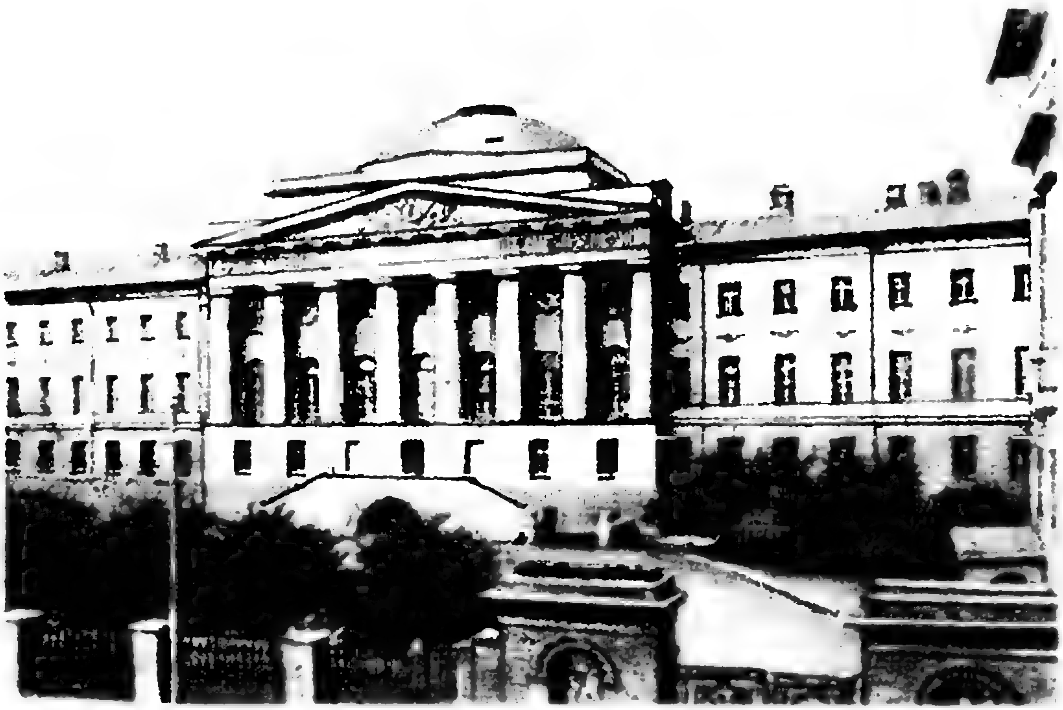
В декабре 1865 г. А. Г. Столетов возвращается на родину, а в следующем году получает место преподавателя математической физики и физической географии в Московском университете.

Студентам нравится новый молодой педагог. Его лекции так познавательны и интересны. А как увлекательно он говорит, какой он блестящий оратор. «Если бы застенографировать его лекцию, — вспоминал впоследствии учившийся у Александра Григорьевича профессор Б. М. Житков, — она, с первого до последнего слова, не нуждалась бы в редакционных поправках. Слушателям казалось, что Столетов читает им лекцию по очень хорошему учебнику».

Студенты не знали, чего стоила А. Г. Столетову эта отработанность, эта безукоризненность его лекций. До поздней ночи горит свет в кабинете. Александр Григорьевич просматривает последние научные журналы, книги, делает выписки, продумывает план будущей лекции. Слушателям должны быть сообщены самые свежие сведения, это должен быть рассказ о самых последних достижениях науки.

После подготовки к лекции Столетов берется за свою магистерскую диссертацию. Она посвящена «общей задаче электростатики». Смысл задачи в следующем.

Представьте себе незаряженный проводник, к которому подносят другой проводник, заряженный, например, отрицательно. Тогда на первоначально незаряженном проводнике появятся заряды: на ближайшей к заряженному телу стороне — положительные, на противоположной — отрицательные. Эти индуцированные заряды в свою очередь подействуют на



Старое здание Московского университета.

заряженный проводник, и заряды на нем перераспределятся. Это перераспределение зарядов вызовет в свою очередь изменение распределения зарядов на другом проводнике и т. д. Так будет продолжаться до тех пор, пока между двумя проводниками не установится электростатическое равновесие. Как при этом будут распределены заряды на проводниках? Для случая двух тел эта задача была решена Морфи и Дж. Томсоном. Столетов сумел решить задачу в самом общем виде: в случае взаимодействия между собой любого произвольного числа проводников.

В мае 1869 г. А. Г. Столетов блестяще защитил магистерскую диссертацию и был утвержден в звании доцента.

Бессонные ночи, чрезмерный труд и нервное напряжение сказываются на здоровье молодого ученого. Он заболевает и около года проводит в различных лечебницах. Ему запрещают читать, писать, заниматься какой бы то ни было умственной деятельностью. Это был самый тягостный период в жизни А. Г. Столетова. Наконец, консилиум профессоров разрешает ему приступить к занятиям со студентами. И сразу же забываются все наставления врачей щадить свое здоровье, Александр Григорьевич вновь полностью отдается педагогической и научной деятельности.

В то время Московский университет, как и другие высшие учебные заведения России, не имел физической лаборатории. Чтобы вести научные исследования, русские ученые были вынуждены уезжать за границу. А. Г. Столетов поставил перед собой цель создать такую лабораторию. Он пишет письма, прошения, обивает пороги чиновничьих кабинетов, доказывая, что университет не может не иметь своей лаборатории. Ведь физика — наука экспериментальная. Физик — не математик, он не может творить науку только за письменным столом.

Весь 1870 г. проходит в хлопотах по устройству первой в России физической лаборатории. В этом же году на квартире у Столетова для обсуждения различных физических проблем начинают собираться студенты Александра Григорьевича и его товарищи по работе. Возникает физический кружок, положивший начало физической школе Столетова, которая, в свою очередь, дала основание школе русских физиков.

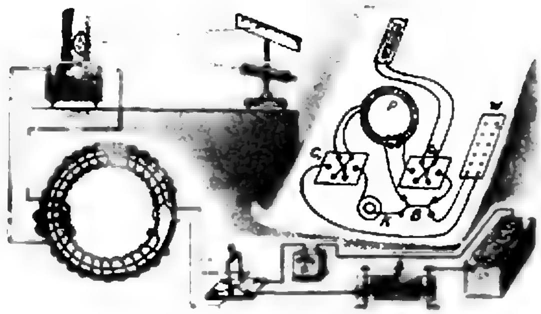


Схема установки, разработанная А. Г. Столетовым для постановки эксперимента по изучению магнитных свойств железа.

На железное кольцо намотаны две обмотки. Первая обмотка через переключатель соединена с батареей. В цепь второй включен баллистический гальванометр. В моменты включения (или выключения) тока, подаваемого в первичную обмотку, намагниченность железного кольца быстро растет (или убывает) до определенного значения, соответствующего данной силе тока и числу витков в первичной обмотке. Меняющееся в эти моменты магнитное поле индуцирует ток во вторичной обмотке. Измерив с помощью гальванометра количество электричества, протекающего за это время по вторичной обмотке, можно теоретически рассчитать величину магнитного поля, вызвавшего ток. А узнать магнитное поле, создаваемое кольцом, — это значит узнать степень намагничивания железного образца.

В 1871 г. А. Г. Столетов приступает к работе над докторской диссертацией. Теперь его интересуют магнитные свойства железа. Знать их очень важно для практики. Электротехника в то время не была еще наукой. Созданию хорошей электрической машины предшествовали бесчисленные опыты по подбору оптимальных конструктивных размеров. И одной из важнейших задач электротехники было узнать, как намагничивается железо.

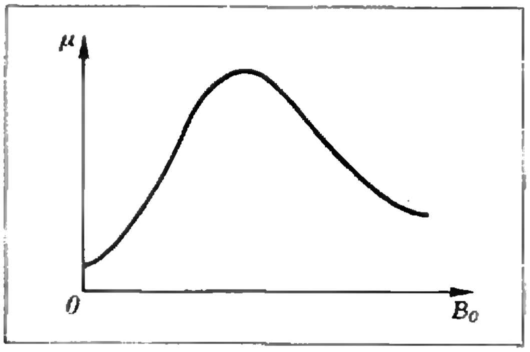


Рис. 1.

Физической лаборатории в университете по-прежнему нет, и для проведения необходимых экспериментов Столетов уезжает за границу. Всего четыре месяца проводит он в лаборатории Кирхгофа в Гейдельберге, но сколько сделано за эти четыре летних месяца! Продумана и сконструирована установка для исследования магнитных свойств железа, проведены все задуманные опыты.

Петля гистерезиса при намагничивании железа теперь знакома каждому ученику 9 класса. Но когда Столетов начинал свои опыты, о магнитных свойствах железа было известно немного. В частности, считалось, что намагниченность железа $I = (\mu - 1) B_0$ прямо пропорциональна индукции B_0 намагничивающего внешнего поля. Это означает, что магнитная проницаемость μ не зависит от намагниченности и постоянна. Эта теория, разработанная Пуассоном, не согласовывалась, однако, с последними опытами различных исследователей. Поэтому учителем Столетова Кирхгофом была разработана новая теория, в которую вместо постоянной величины μ входила функция, зависящая от B_0 и формы железного тела. Изучением того, как зависит μ от B_0, и занялся Столетов*). До работы Столетова было известно, что при больших индукциях намагничивающего поля магнитная проницаемость падает с ростом B_0. В слабых полях ее поведение не изучалось. Начав опыты, Столетов обнаружил поразительный факт: при слабых полях с ростом B_0 величина μ не постоянна, а быстро возрастает; достигает максимума при некотором значении B_0 и медленно убывает (рис. 1). Причем максимальное значение μ было в несколько раз выше, чем известное из опытов других исследователей.

Полученные Столетовым важные результаты давали в руки создателей электромашин ключ к решению многих стоящих перед ними задач. Сам Столетов так характеризовал практическую сторону своего исследования: «Изучение функции намагничивания железа может иметь практическую важность при устройстве и употреблении как электромагнитных двигателей, так и тех магнитно-электрических машин нового рода, в которых временное намагничивание железа играет главную роль. Знание свойств железа ... также необходимо здесь, как необходимо знакомство со свойствами пара для теории паровых машин. Только при таком знании мы получим возможность обсудить a priori [заранее] наивыгоднейшую конструкцию подобного снаряда и наперед рассчитать его полезное действие».

---

*) *В опытах Столетова изучалась зависимость не самого* μ, *а так называемой магнитной восприимчивости* $\varkappa = \frac{1}{4\pi}(\mu - 1)$.

В 1872 г. Столетов успешно защищает докторскую диссертацию «Исследование о функции намагничивания мягкого железа» и в следующем году утверждается в должности ординарного профессора Московского университета.

Осенью 1872 г. происходит другое знаменательное событие — наконец-то при университете открывается физическая лаборатория, на устройство которой Столетов потратил столько сил и средств.

Начинает свою первую экспериментальную работу на родине Столетов. Он ставит давно задуманный опыт по определению соотношения между электростатическими и электромагнитными единицами. Коэффициент пропорциональности оказывается близким к скорости света *c*. Это говорит не только о том, что свет — тоже электромагнитное явление, но и служит косвенным подтверждением справедливости теории Максвелла, которую многие ученые в то время не признавали.

Столетов широко открывает двери своей лаборатории для физиков, работающих в других высших учебных заведениях России. Из Киева, Одессы, других городов страны приезжают преподаватели учиться у него искусству эксперимента.

Ширится физический кружок Столетова. Вокруг него группируется талантливая молодежь, берущая со своего учителя пример бескорыстного служения науке. Десятки блестящих ученых воспитал А. Г. Столетов, ученых, составивших гордость нашей науки. Наиболее выдающиеся из них — Н. А. Умов, И. Ф. Усагин, А. П. Соколов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский.

Столетов ведет большую популяризаторскую работу в Обществе любителей естествознания, непременным членом которого он является, читает публичные лекции в Политехническом музее, публикует научно-популярные статьи в общедоступных журналах. Он хочет приобщить к науке как можно большее количество людей.

После работы о намагничивании железа имя А. Г. Столетова становится широко известно за границей. В 1874 г. его приглашают на торжества по случаю открытия при Кембриджском университете физической лаборатории. В 1881 г. Столетов достойно представляет русскую науку на I Всемирном конгрессе электриков в Париже. Он первый русский физик, участвующий в международном съезде.

На конгрессе Столетов делает доклад о своих исследованиях по определению коэффициента пропорциональности между электростатическими и электромагнитными единицами, активно участвует в работе по выбору электротехнических единиц измерения. (По предложению Столетова была утверждена единица электрического сопротивления «ом» и эталон сопротивления.)

В 1888 г. Александр Григорьевич Столетов начинает исследование фотоэффекта, открытого за год до этого Г. Герцем. Эти исследования принесли Столетову мировую известность. Они продолжались два года: с февраля 1888 г. по июль 1890 г., и можно только удивляться, как много было сделано за этот срок человеком, занятым в основном преподавательской деятельностью.

Что было известно до работ Столетова? В 1887 году Герц обнаружил, что проскакивание искры между электродами облегчается (происходит при большем расстоянии между электродами) при освещении электродов ультрафиолетовыми лучами. В том же году Видеман и Эберт показали, что эффект вызывает освещение не любого электрода, а только катода.

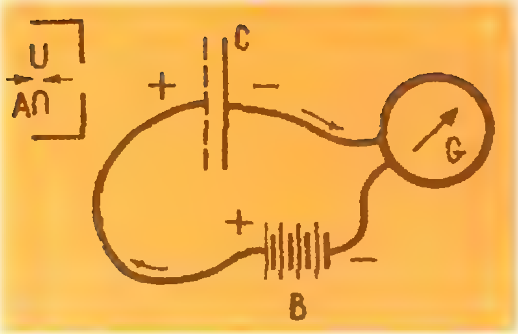


Рис. 2.

Вслед за ними Гальвакс упростил опыт, используя вместо искры «тихий разряд» предварительно заряженного электрода. Подсоединяя к этому электроду электроскоп, Гальвакс обнаружил, что освещение ультрафиолетовым светом приводит к разрядке электрода.

С помощью электроскопа, соединенного с незаряженным телом, Гальвакс показал, что в результате разрядки отрицательного электрода при *освещении его ультрафиолетовым* светом заряд переходит на окружающие тела.

Начав исследование явления, открытого Герцем (это явление получило название фотоэффекта), Столетов, повторив опыты Герца, Видемана, Эберта и Гальвакса, в дальнейшем разработал новую методику, позволившую *построить* количественную теорию фотоэффекта.

На рисунке 2 приведена схема установки, с помощью которой Столетов проводил свои опыты (этот рисунок Столетов приводил в своих рукописях). Основная часть установки — прибор, который Столетов называл сетчатым конденсатором. Он состоит из *металлической сетки* — анода и плоского металлического диска — катода (сетчатый конденсатор явился прообразом фотоэлемента). Этот прибор (*C*) включался последовательно с гальванометром (*G*) в цепь с батареей (*B*). При освещении катода сильным светом вольтовой дуги (*A*) гальванометр регистрировал наличие тока в цепи.

С помощью такой установки Столетов изучает различные стороны фотоэффекта. На основании результатов своих экспериментов он делает вывод, что необходимым условием фотоэффекта является поглощение света материалом катода; что каждый элемент поверхности катода участвует в явлении независимо от других; что явление фотоэффекта практически безынерционно («... ток проявляется и исчезает одновременно с освещением, и следовательно, при прерывистом освещении ток — также прерывистый с тем же периодом»). Меняя напряжение на электродах, Столетов получает вольт-амперную *характеристику* фотоэлемента (сетчатого конденсатора): фототок возрастает с увеличением напряжения между электродами, а малые токи пропорциональны напряжению; начиная с некоторого значения напряжения, фототок практически не меняется при увеличении напряжения, то есть фототок стремится к насыщению.

Поместив прибор в стеклянный цилиндр, из которого можно было откачивать воздух, Столетов обнаружил, что по мере уменьшения давления воздуха фототок возрастает, достигает максимума и затем убывает.

Будучи уверенным в том, что величина фототока определенно связана с освещением, Столетов проводит целую *серию опытов с целью* установить эту зависимость. Меняя силу света источника, он нашел, что величина фототока насыщения пропорциональна световому потоку, падающему на катод.

Исследования Столетова позволили выявить основные закономерности фотоэффекта и показали огром-

Этот прибор Столетов использовал для исследования фотоэффекта в разреженных газах.

ные возможности технического применения фотоэлементов.

Столетов — признанный первый физик России. В 1889 г. на II Международном конгрессе электриков в Париже ученые всех стран чествовали его как одного из самых выдающихся физиков современности.

В начале 1893 г. академики Чебышев, Бредихин и Бекетов предлагают избрать Столетова в члены Российской Академии Наук. Но президент Академии великий князь Константин не допускает кандидатуру Столетова до баллотировки.

В эти дни Александр Григорьевич получает много писем, в которых передовые ученые России высказывают ему свое сочувствие в связи с проявленной по отношению к нему несправедливостью. «Очень и очень возмущен я поступком Академии, — пишет профессор Петербургского университета И. Н. Боргман. — ... Впрочем, так поступает наша Академия уже не в первый раз. Теперь почетнее быть забаллотированным, чем попасть в число членов ее».

«То, что Вы сообщаете мне в последнем письме, — пишет Столетову из Одессы профессор Ф. Н. Шведов, — меня нисколько не поразило... Ведь забаллотировали же некогда Менделеева... Я бы утешался тем, что лучшие современные русские ученые — Менделеев, Мечников — не в богадельне. Быть в их компании совсем не стыдно».

Много писем приходит из-за рубежа. Столетову пишут Кельвин, Гельмгольц, Больцман.

Несмотря на сочувствие друзей, Столетов тяжело переживает нанесенное ему оскорбление. Да и университетское начальство все больше и больше начинает выказывать ему свою немилость. Все это сильно отражается на здоровье Александра Григорьевича.

Умер А. Г. Столетов в ночь с 14 на 15 мая 1896 года.

Значение Столетова как ученого для русской и мировой науки огромно. Он создал первую в России учебно-исследовательскую физическую лабораторию, основал школу русских физиков.

Работы Столетова по намагничиванию железа превратили электротехнику из науки эмпирической в теоретическую. Большой вклад в электротехнику внесли также его труды, посвященные разработке системы единиц для электрических измерений.

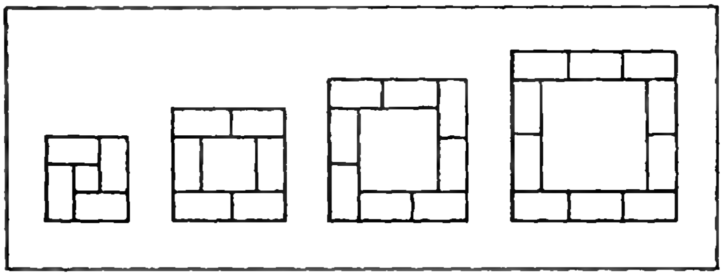
На основе изученного Столетовым явления фотоэффекта были созданы фотоэлементы, которые несут службу на заводах и фабриках, сортируя и считая продукцию, управляя прокатными станами и плавкой металла, читая чертежи и изготовляя по ним детали. Фотоэлементы превратили немое кино в звуковое, сделали возможным фототелеграф, работают в различных автоматических устройствах.

Вакуумная установка Столетова для изучения электрических явлений в разреженных газах явилась прообразом электронной лампы, которая совершила подлинную революцию в электротехнике. Радиоприемники и радиопередатчики, рентгеновские аппараты и газоразрядные трубки, радиолокаторы и электронные микроскопы, телевизоры и электронно-вычислительные машины — это далеко не полный перечень того, что стало возможным благодаря пионерским трудам Александра Григорьевича Столетова.

Рамки из домино

Из 28 косточек домино выложите четыре «рамки» (см. рисунок) так, чтобы сумма очков вдоль каждой стороны каждой рамки равнялась 13. (Прикладывать косточки друг к другу одинаковыми значениями очков не обязательно).

Л. Мочалов



С. Артемов,
Ю. Гиматов,
В. Федоров

Много битов из ничего

> *Он думал, что уснула я*
> *И все во сне стерплю,*
> *Иль думал, что я думала,*
> *Что думал он «я сплю».*
>
> С. Маршак. Из Ковентри Патмора.

Предлагаем вниманию читателей задачу, требующую для решения весьма изощренной логики:

Математик R сказал математикам P и S: «Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше ста. Математику P я сейчас сообщу — по секрету от S — произведение этих чисел, а математику S я сообщу — по секрету от P — их сумму». Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

— *Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа.* (π_1)

— *Я заранее знал, что Вы этого не сможете.* (σ_1)

— *А ведь тогда я их знаю.* (π_2)

— *А тогда и я их знаю.* (σ_2)

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

1. Неужели их можно отгадать?

При первом взгляде на задачу она представляется неразрешимой: как можно отгадать числа, когда про них ничего не сказано?

Попробуем на примере. Пусть R задумал 7 и 42. Тогда он сообщил P число 294, S — 49. Ну, а что дальше? P сказал, что он не может отгадать задуманные числа. Ну, конечно же не может — он знает только их произведение. Хотя, впрочем, он знает еще, что они натуральные, больше единицы и их сумма меньше ста. А что это дает?

Обозначим задуманные числа через k_0 и l_0, причем пусть — для определенности — $k_0 \leqslant l_0$. Обозначим еще произведение $k_0 \cdot l_0$ через p_0, сумму $k_0 + l_0$ — через s_0.

Итак, P сообщили, что $p_0 = 294$. Тогда k_0 может равняться 2, 3, 6, 7 и 14, а l_0 будет при этом равно, соответственно, 147, 98, 49, 42 и 21. Первые два значения для k_0 нам не подходят — при них $s_0 > 100$. Все равно остаются еще три возможности. Значит, P действительно не может отгадать задуманные числа.

Идем дальше. S утверждает, что он заранее знал, что P не сможет отгадать k_0 и l_0. Как S пришел к такому выводу? Наверняка он попробовал всеми возможными способами представить известное ему s_0 в виде суммы двух допустимых слагаемых:

$$49 = 2 + 47 = 3 + 46 = \ldots$$
$$\ldots = 24 + 25.$$

R мог задумать любую из этих пар чисел. Он сообщил P какое-то из произведений $i \cdot (49 - i)$, и S утверждает, что ни по одному из них P не может отгадать задуманные числа.

А если при некотором i оба числа i, $49 - i$ — простые? Например, если R задумал 2 и 47, то P он сообщил 94, и P прекрасно может отгадать задуманные числа.

Следовательно, если R задумал 7 и 42, то S, получив $s_0 = 49$, не имел бы права произнести (σ_1). Значит, R не мог задумать 7 и 42.

Таким образом, кое-что о задуманных числах сказать все-таки можно.

Преодолев первоначальные сомнения, подумаем, в каком направлении двигаться. Один способ отгадывания уже виден: брать всевозможные пары чисел k_0, l_0, удовлетворяющие

Бит — двоичная единица измерения информации (БСЭ, 3 изд., 2 т.).

неравенствам

$$2 \leqslant k_0 \leqslant l_0 \leqslant 97, \qquad (1)$$
$$4 \leqslant k_0 + l_0 \leqslant 99, \qquad (2)$$

и проверять, «выдерживают» ли они диалог (π_1) — (σ_2).

Поскольку перебор во всех случаях конечен, в принципе можно было бы действовать и так. Однако решать задачу таким образом скучно. Попробуем сократить перебор.

Прежде всего давайте сначала искать не k_0 и l_0, а их сумму s_0: для пары $\langle k_0, l_0 \rangle$ возможных вариантов больше двух тысяч, а для s_0 — меньше ста. Впрочем, и на этом пути лобовой перебор длинен и скучен.

2. Около гипотезы Гольдбаха—Эйлера

Какую информацию можно извлечь из (π_1) и (σ_1)? Что они означают?

(π_1), очевидно, означает, что

> *p_0 не однозначно разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам* (1), (2); (π_1')

(σ_1) означает, что

> *При любом разложении числа s_0 в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам* (1), *их произведение обладает свойством* (π_1'). (σ_1')

Высказывание (π_1') позволяет отбросить некоторые произведения, (σ_1') — некоторые суммы.

Из (σ_1') вытекает, что s_0 не представимо в виде суммы двух простых чисел: если $s_0' = q_1 + q_2$, где q_1, q_2 — простые, то число $q_1 \cdot q_2$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), и, следовательно, не обладает свойством (π_1').

Но любое четное число, удовлетворяющее неравенствам (2), представимо в виде суммы двух простых (это доказывается последовательной проверкой чисел 4, 6, 8, … , 98).

Следовательно, s_0 — нечетное. Кроме того, $s_0 - 2$ — составное: иначе $s_0 = 2 + (s_0 - 2)$ представлялось бы в виде суммы двух простых. После отбрасывания чисел, не удовлетворяющих этим двум условиям, для s_0 остается 24 возможности.

Выше мы воспользовались тем, что все четные числа от 4 до 98 представимы в виде суммы двух простых.

В 1742 г. член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах в письме к Леонарду Эйлеру высказал предположение, что любое нечетное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. В ответном письме Эйлер выдвинул гипотезу, что каждое четное число, большее двух, представимо в виде суммы двух простых чисел. (Из гипотезы Эйлера гипотезу Гольдбаха вывести очень легко — сделайте это!)

В течение почти двухсот лет гипотезы Гольдбаха и Эйлера казались совершенно недоступными для доказательства, хотя непосредственным перебором математик Миле проверил их до 9 000 000.

В 1930 г. замечательный советский математик Л. Г. Шнирельман доказал существование такого k, что каждое натуральное число $n > 1$ может быть представлено в виде суммы не более k простых чисел. Число k у Шнирельмана было довольно велико. В настоящее время доказано, что теорема Шнирельмана верна при $k = 20$.

В 1934 г. академик И. М. Виноградов доказал существование такого n_0, что любое нечетное число $n > n_0$ представимо в виде суммы трех простых чисел. Казалось бы, в век ЭВМ можно было бы поручить машине проверить «остальные» числа (от 7 до n_0), но «постоянная Виноградова» n_0 так велика (по последним оценкам $n_0 > 2^{2^{16}}$), что эта проверка превосходит возможности современных ЭВМ.

В доказательстве же гипотезы Эйлера до сих пор не достигнуто никакого существенного успеха.

3. Дальше в лес

Оказывается, из (σ_1') можно вывести

$$s_0 < 55. \qquad (3)$$

В самом деле, предположим, что $s_0 \geqslant 55$. Тогда s_0 не обладает свойством (σ_1'): можно так разложить его в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), что для их произведения не будет выполнено условие (π_1'). Это разложение: $s_0 = (s_0 - 53) + 53$. Из $s_0 \geqslant 55$ вытекает $s_0 - 53 \geqslant 2$. Произведение $(s_0 - 53) \cdot 53$ единственным образом разлагается на два множителя, сумма которых меньше ста: поскольку 53 — простое число, один из множителей обязательно имеет вид $53d$; так как $53 \cdot 2 > 100$, $d = 1$. Но по условию s_0 обладает свойством (σ_1'). Противоречие!

После (3) для s_0 остается уже 11 возможностей:

$$11, 17, 23, 27, 29, 35, \\ 37, 41, 47, 51, 53. \qquad (4)$$

Попробуем теперь без перебора установить, какие из чисел (4) удовлетворяют условию (σ_1'). Пусть s — произвольное из чисел (4). Поскольку s нечетно, всякое его разложение в сумму имеет вид $s = 2a + m$. Допустим, s не обладает свойством (σ_1'). Тогда найдется такое a, что произведение $2a \cdot m$ «расшифровывается» однозначно.

Это a не может равняться единице, так как в этом случае $s = 2 + m$, а произведение $2m$ двояко разлагается в произведение. В самом деле, поскольку $m = s - 2$ — составное нечетное число, $m = pq$, где $p > 2$ и $q > 2$. Оба разложения

$$2m = 2 \cdot pq = 2p \cdot q$$

годятся: $2 + pq = 2 + m = s < 100$ и $2p + q = 2 + pq - (p - 1)(q - 2) < 2 + pq < 100$.

Значит, $a \geqslant 2$.

Если $a \neq m$, то $s = 2a \cdot m$ и $s = 2m \cdot a$ — два различных разложения. Поскольку $2a + m = s < 100$ и s не обладает свойством (σ_1'), должно быть $2m + a \geqslant 100$. Так как $s = 2a + m \leqslant 53$, имеем $m \leqslant 53 - 2a$, $2m + a \leqslant 106 - 3a$. Из $2m + a \geqslant 100$ и $2m + a \leqslant 106 - 3a$ вытекает $a \leqslant 2$. Следовательно, $a = 2$. Из $2m + a \geqslant 100$ и $m \leqslant 53 - 2a$ получаем теперь $m = 49$. Итак, в этом случае $s = 53$, причем «подозрительным» является разложение $53 = 4 + 49$

Если же $a = m$, то $s = 3a$ делится на 3. В (4) таких чисел два: 27 и 51. «Подозрительными» являются разложения $27 = 9 + 18$ и $51 = 17 + 34$.

Число 51 действительно не обладает свойством (σ_1'): $51 = 17 + 34$, и произведение $17 \cdot 34$ при разложении на два множителя дает только одну сумму, меньшую ста. Таким образом, его можно выбросить из списка «кандидатов в s_0».

Числа 27 и 53 удовлетворяют условию (σ_1'): $9 \cdot 18 = 2 \cdot 81$ и $2 + 81 < 100$; $4 \cdot 49 = 7 \cdot 28$ и $7 + 28 < 100$.

Итак, для дальнейшего исследования осталось 10 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53, причем все они обладают свойством (σ_1').

4. «Тогда и я их знаю»

Используем, наконец, (π_2) и (σ_2).

Можно было бы истолковать (π_2) и (σ_2) подобно тому, как мы это сделали с (π_1) и (σ_1). Мы попробуем обойтись без этого.

Из (σ_2) и (3) можно вывести

$$s_0 < 33. \qquad (5)$$

Допустим противное: $s_0 \geqslant 33$. Тогда S, разлагая всеми возможными способами s_0 в сумму двух слагаемых, имел бы среди этих разложений $s_0 = (s_0 - 31) + 31 = (s_0 - 29) + 29$.

Если бы P было сообщено произведение $(s_0 - 31) \cdot 31$, то он мог бы, сообразив (3) и учтя, что 31 — простое число, понять, что $(s_0 - 31) \cdot 31$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, сумма которых удовлетворяет (3). В этом случае P отгадал бы k_0 и l_0.

Аналогичная возможность была у P, если ему было сообщено произведение $(s_0 - 29) \cdot 29$.

Значит, в случае $s_0 \geqslant 33$, S и после (π_2) не смог бы точно назвать k_0, l_0, т. е. не смог бы произнести (σ_2).

После (5) остается 5 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29.

Если p_0 имеет вид $2^n \cdot p$, где p — нечетное простое число, то P однозначно определяет k_0 и l_0, потому что из всех сумм $2^{n-t} + 2^t p$ нечетна только одна: $2^n + p$. Поэтому, если s_0 двумя способами представимо в виде $2^n + p$, то S опять-таки не может произнести (σ_2).

Это соображение позволяет отсеять еще 3 кандидата: $11 = 4 + 7 = 8 + 3$, 23 и 27.

Остались 2 кандидата: 17 и 29.

5. Тогда и мы их знаем

29 тоже не годится, поскольку $29 = 4 + 25 = 16 + 13$: если бы P имел $p_0 = 16 \cdot 13$, он бы отгадал k_0 и l_0, так как среди сумм $2^{4-t} + 2^t \cdot 13$ нечетна только одна; если бы P имел $p_0 = 4 \cdot 25$, он бы тоже отгадал k_0 и l_0: среди соответствующих сумм не-

четна, кроме 29, еще только 25 ($4\cdot 25 = 5\cdot 20$), но $25-2$ — простое число.

Итак, либо $s_0 = 17$, либо задача не имеет решений.

Какое же p_0 могло быть у P при $s_0 = 17$? Переберем все разложения числа 17 в сумму двух слагаемых:

$$17=2+15=3+14=\ldots=8+9.$$

При любом из произведений, кроме $4\cdot 13$, P не смог бы произнести (π_2). Например, если бы P имел $p_0 = 30$, он среди разложений числа 30 в произведение двух множителей увидел бы и $30=2\cdot 15$, и $30=5\cdot 6$, но как 17, так и 11 обладают свойством (σ_1').

Остается единственный кандидат для p_0: 52. Этот кандидат дает возможность P произнести (π_2): среди всех разложений числа 52 в произведение двух множителей существует ровно одно: $52 = 4\cdot 13$, дающее нечетную сумму.

Итак, $s_0 = 17$, $p_0 = 52$, $k_0 = 4$, $l_0 = 13$.

Задачи

1. Всякое ли нечетное число, большее трех, представимо в виде $2^n + p$, где p — простое число? В отрицательном случае укажите наименьшее непредставимое.

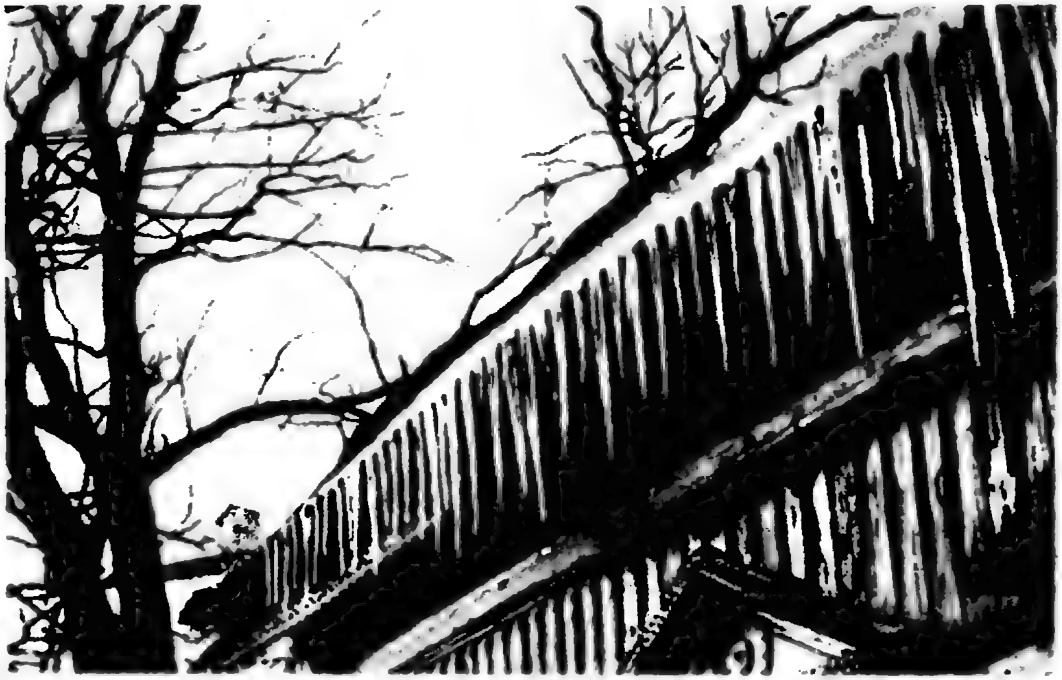
2. (Б. Кукушкин) Начало условия задачи — вплоть до (σ_1) — то же, что и на стр. 12. Дальше диалог меняется:

— *А я заранее знал, что Вы это будете знать заранее.* (π_2)

— *Я не знаю, чему равны задуманные числа.* (σ_2)

— *А я тогда их знаю.* (π_3)

Найти задуманные числа.



Мартовская капель

Поистине неизгладимое впечатление оставляет у каждого посещение подземных пещер-залов, украшенных сталагмитами и сталактитами! Поднимающиеся со дна или свешивающиеся с потолка кристаллические сосульки, возраст которых исчисляется сотнями тысяч и миллионов лет, играют всеми цветами радуги и создают сказочную картину волшебного царства.

Не менее красочными, хотя и созданными в течение всего лишь нескольких суток, являются ледяные сосульки. Посмотрите на фотографию. Не правда ли, знакомая картина, часто встречающаяся ранней весной, — свисающий с края крыши частокол ледяных сталактитов. Если придется, понаблюдайте за их образованием и постарайтесь ответить на такие вопросы: 1) Как происходит процесс образования ледяных сосулек? 2) Почему ледяная сосулька имеет вид заостренного книзу конуса? 3) Почему конусы бывают различной длины? 4) Почему некоторые из них изогнуты? 5) Почему ледяная сосулька прозрачна, а снег не прозрачен, хотя он тоже состоит из отдельных прозрачных кристалликов?

М. Т.

С. Козел

Модель опыта Резерфорда

Знаменитые опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц на тяжелых ядрах (1906—1911 гг.) сыграли исключительную роль в развитии представлений о строении атома. В этих опытах α-частицы, испускаемые радиоактивным источником, пропускались через тонкие пленки золота и других металлов. При прохождении через пленки α-частицы отклонялись от первоначального направления на различные углы. Рассеянные α-частицы попадали на экран, покрытый сернистым цинком, и вызывали вспышки (сцинтилляции). Наблюдая за этими сцинтилляциями в микроскоп, можно было определить, насколько изменяется траектория движения частиц при прохождении слоя металла.

Большинство α-частиц отклонялось от первоначального направления движения на очень незначительные углы. Но некоторые частицы отклонялись довольно значительно. И, что было совершенно поразительно, некоторые α-частицы (примерно 1 на 20 000) меняли направление движения почти на противоположное. (Регистрировались эти частицы по вспышкам на экране, расположенном так, что на него могли попадать «отраженные» от металла частицы.)

Было совершенно очевидно, что рассеяние α-частиц происходит в результате взаимодействия их с положительным зарядом атома (масса электрона примерно в 8000 раз меньше массы α-частицы, так что электроны не могли заметно влиять на характер движения α-частицы). Существовавшая в те годы модель атома, согласно которой положительный заряд был распределен равномерно по всему объему атома (эту модель предложил Дж. Томсон), была не в состоянии объяснить результаты экспериментов по рассеянию α-частиц. Размеры атомов к тому времени были уже оценены ($\sim 10^{-8}$ *см*). А основанный на модели Томсона расчет, проведенный для α-частиц, рассеивающихся на углы ~180°, приводил либо к невероятно большим значениям радиуса атома, либо к невозможно большим величинам положительных зарядов в атоме *).

Чтобы объяснить рассеяние на большие углы, необходимо было предположить, что положительный заряд сосредоточен в очень небольшой (по сравнению с размером атома) области внутри атома. Этот положительный заряд — ядро атома — создает сильное электростатическое поле, и на α-частицу, попадающую в поле ядра, действует кулоновская сила отталкивания.

Основываясь на таком представлении о строении атома, Резерфорд сделал теоретический расчет количественного распределения числа частиц по разным углам рассеяния. Его расчеты дали прекрасное согласие с результатами эксперимента.

Итак, мы кратко напомнили историю создания ядерной модели атома.

Перейдем теперь к моделированию опыта Резерфорда. Речь будет идти о механической модели, в которой α-частицы заменены небольшими стальными шариками. Шарики, которым сообщают скорость в горизонтальном направлении, катятся по горизонтальной плоскости, «взбираются» на горку определенного профиля, а затем скатываются с нее вновь на горизонтальную плоскость. Профиль горки должен быть таким, чтобы потенциальная энергия шариков изменялась по тому же закону, что и по-

---

*) Проведите сами расчет величины положительного заряда, сосредоточенного в сфере радиуса $\sim 10^{-8}$ *см*, способного отклонить α-частицу с энергией 5 *Мэв* на 180°.

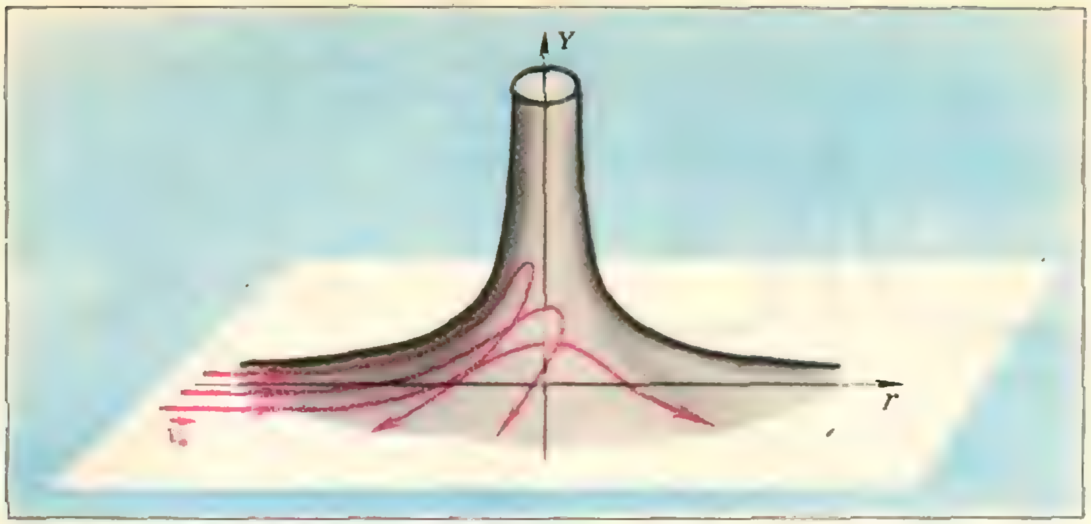


Рис. 1.

тенциальная энергия α-частиц в поле положительно заряженного атомного ядра. Так как для кулоновского поля $\Pi \sim \frac{1}{r}$, пик должен представлять собой гиперболоид вращения $y = \frac{A}{r}$, где A — некоторая постоянная (рис. 1).

Движение шариков в этой механической модели во многом аналогично движению α-частиц в кулоновском поле атомного ядра. По одинаковому закону будет изменяться потенциальная энергия в зависимости от расстояния до рассеивающего центра (в механической модели — до оси гиперболоида). Можно показать на основании законов механики, что одинаковой будет и зависимость минимального расстояния между частицей и рассеивающим центром от так называемого прицельного расстояния. Прицельным расстоянием называют расстояние от рассеивающего центра до первоначального направления движения частицы (рис. 2).

Но есть и отличие. Движение α-частицы в поле ядра является плоским — всегда можно указать плоскость, в которой лежит траектория α-частицы (в этой плоскости обязательно находятся ядро и начальная скорость частицы). В механической модели движение шариков более сложно; оно не является плоским. Если спроектировать траекторию шарика на горизонтальную плоскость, то получится кривая, очень похожая на траекторию α-частицы, но все же несколько от нее отличающаяся. При малых начальных скоростях, когда шарик не очень высоко «взбирается» на пик, эти траектории практически совпадают.

Имея «потенциальный пик» такой формы, можно на опыте изучить зависимость угла рассеяния θ от прицельного расстояния d при некоторой определенной начальной скорости (энергии) шариков. Зависимость θ от d определяется законом взаимодействия частицы с рассеивающим центром и в нашем случае определяется профилем пика.

При рассеянии α-частиц на ядрах атомов данного элемента угол рас-

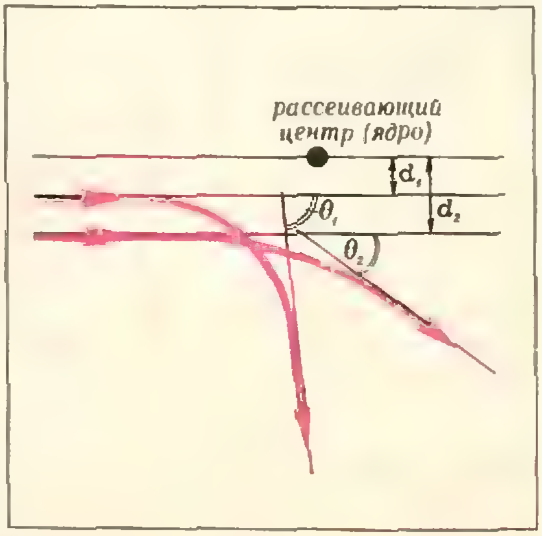


Рис. 2.

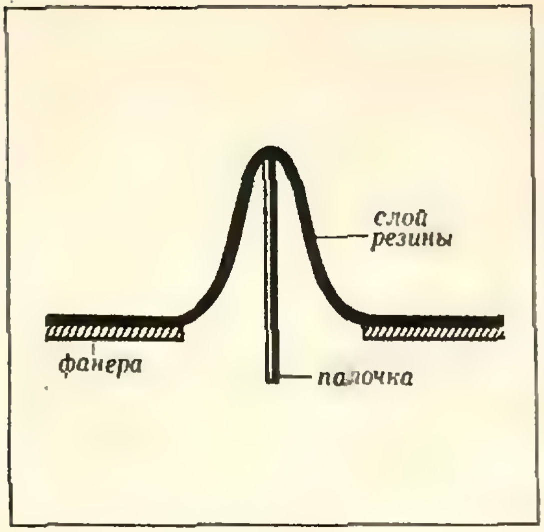


Рис. 3.

сеяния зависит от скорости частицы (ее энергии) и от прицельного расстояния:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=Cv^2d \tag{*}$$

(C — константа, зависящая от «сорта» атомов). Проверить эту формулу непосредственно в экспериментах по рассеянию α-частиц невозможно — прицельное расстояние d недоступно измерению. Но на нашей механической модели можно получить зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния. И если экспериментальные данные будут хорошо описываться формулой, аналогичной (*), это еще раз подтвердит правомерность нашего механического аналога опыта Резерфорда.

Один из технически несложных и доступных вариантов создания пика проиллюстрирован на рисунке 3. Здесь для устройства потенциального пика использован тонкий резиновый лист (толщиной 2—3 *мм*), прикрепленный к фанере, в которой вырезано круглое отверстие диаметром 20—25 *см* (чем больше модель, тем удобнее с ней работать). Следует помнить, что зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния должна сниматься при фиксированном значении скорости шариков. Так что следует продумать и устройство для «запуска» шариков (наклонная плоскость, пружинный пистолет и т. п.).

С помощью несложного приспособления, фиксирующего прицельное расстояние (например, направляющий желоб в горизонтальной плоскости), можно поставить на этой модели опыт, позволяющий получить зависимость угла рассеяния от скорости частицы.

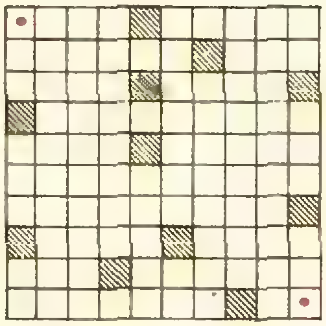
Редакция «Кванта» ждет от вас описаний придуманных и реализованных вами конструкций и результаты ваших экспериментов.

Задача из «примера»

```
П Р И М Е Р
  Р И М Е Р
    И М Е Р
      М Е Р
        Е Р
          Р
-----------
З А Д А Ч А
```

Каков «пример»? А?

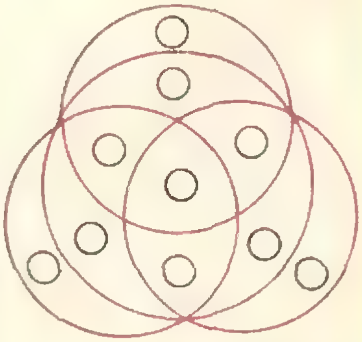
Извилистый путь



Начав с квадрата в верхнем левом углу, пройдите в нижний правый угол, переступая только через стороны квадратов (не через вершины!) и побывав в каждом белом квадрате ровно один раз (в цветные заходить нельзя).

Магические круги

Расставьте в черные кружочки на рисунке числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в четырех красных кругах были одинаковыми.



Л. Мочалов

Дельтоида

Кривую, изображенную на второй странице обложки, часто называют дельтоидой из-за ее сходства с буквой Δ греческого алфавита. Ее свойства впервые изучались Леонардом Эйлером в XVIII веке и Якобом Штейнером в XIX веке. Дельтоида здесь задана как кривая, касающаяся каждой из прямых семейства, которое строится так. Проекции любой точки окружности, описанной около произвольного треугольника, на его стороны (или их продолжения) лежат на одной прямой (докажите). Это прямая Симсона*). Семейство состоит из прямых Симсона, построенных для «красного» треугольника.

Рассмотрим еще одно определение дельтоиды. Если окружность катится без скольжения внутри другой окружности, то кривая, описанная фиксированной точкой подвижной окружности, называется гипоциклоидой. Дельтоида — гипоциклоида, для которой отношение радиусов этих окружностей равно 1:3.

Пусть сначала точка M меньшей окружности, за траекторией которой мы будем следить, находится в точке V большей (рис. 1). Затем подвижная окружность прокатилась по дуге VU неподвижной; положим $\widehat{VOU}=\varphi$. Покажем, что касательная к дельтоиде в точке M проходит через точку P пересечения OU с подвижной окружностью, и посмотрим, на какой угол повернулась касательная из начального положения OV.

Скорость $\vec{v}$ точки M равна $\vec{v}_1+\vec{v}_2$, где $\vec{v}_1 \perp OU$, $\vec{v}_2 \perp MO'$ и $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|$. Параллелограм скоростей — ромб, и $\vec{v}$ — его диагональ, $\widehat{MO'U}=3\varphi$ и $\widehat{MPU}=3\varphi/2$. Пусть P' — точка пересечения касательной к дельтоиде с прямой OU. Нетрудно сосчитать: $\widehat{MP'U}=3\varphi/2=\widehat{MPU}$. Точки P и P' совпадают, касательная проходит через P и угол $OWP=3\varphi/2$.

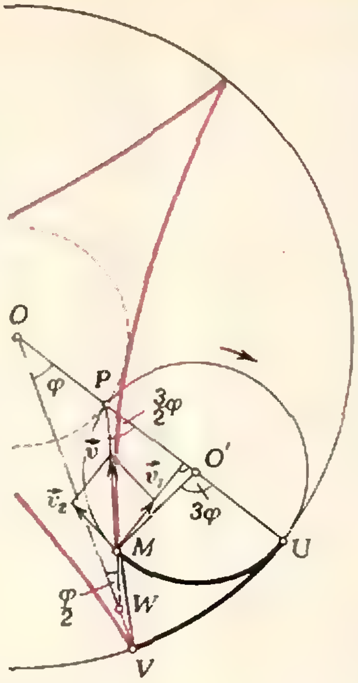


Рис. 1.

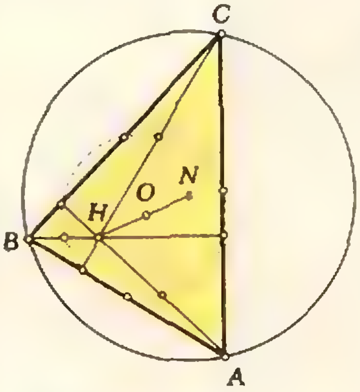


Рис. 2.

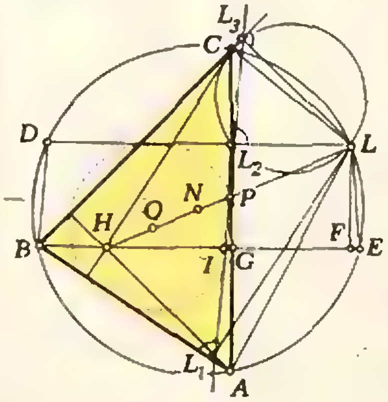


Рис. 3.

Наметим путь доказательства эквивалентности приведенных определений. Эйлер установил, что девять точек произвольного треугольника: основания его высот, медиан и середины отрезков от вершин до пересечения высот (рис. 2) лежат на одной окружности (докажите). Ее центром является середина O отрезка HN, где H — точка пересечения высот, N — центр описанной окружности, а радиус — вдвое меньше радиуса описанной окружности (докажите и это). Поэтому описанная окружность и окружность Эйлера гомотетичны с центром H и коэффициентом гомотетии 2.

Пусть L — точка описанной окружности (рис. 3). Покажем, что ее прямая Симсона проходит через середину отрезка HL, принадлежащую окружности Эйлера. Для этого опустим из точки L перпендикуляр на ближайшую сторону треугольника и продолжим его до встречи с окружностью в точке D. Прямая Симсона параллельна BD (с одной стороны, $\widehat{LCL_3}=\widehat{LL_2L_3}$, с другой, $\widehat{LCL_3}=\widehat{BAL}=\widehat{BEL}=\widehat{DBE}$). По построению, отрезок LL_2 конгруэнтен и параллелен FG и IH (точка пересечения высот и точка E симметричны относительно AC). Следовательно, точка P лежит на пересечении диагоналей HL и IL_2 параллелограмма LL_2HI, и $|HP|=|PL|$.

Поскольку описанная окружность и окружность Эйлера гомотетичны относительно точки H с коэффициентом гомотетии, равным 2, точка P лежит на окружности Эйлера.

Если на рисунке 3 построить окружность Эйлера, то в ней можно узнать окружность (O, OP) с рисунка 1, а в прямой Симсона — касательную WP. То, как поворачивается прямая Симсона, когда точка L перемещается по описанной окружности, предоставляется разобрать читателю.

В. Березин

---

*) Р. Симсон (1687—1768) — английский математик.

А. Земляков

Орнаменты

> *«Математик, так же как художник или поэт, создает узоры».*
>
> Г. Х. Харди

Эта статья касается одного из самых интересных вопросов геометрии — классификации орнаментов. Орнаменты с давних времен применяются в декоративном искусстве. Так, на рисунке 1 воспроизведены древнеегипетский орнамент (а), два мавританских орнамента (б и в), китайская оконная решетка (г), а также орнамент, украшающий окно мечети в Каире (д). С другой стороны, при исследовании геометрического строения кристаллов выяснилось, что их атомы расположены очень правильным образом, образуя как бы пространственный орнамент. На рисунке 2 изображены проекции пространственных решеток граната, кварца и каменной соли (химические формулы — $Ca_3Al_2(SiO_4)_3$, SiO_2, NaCl).

По сути, именно это открытие побудило в конце XIX века физиков и математиков подробнее изучить орнаменты (тогда и было дано точное математическое определение орнамента).

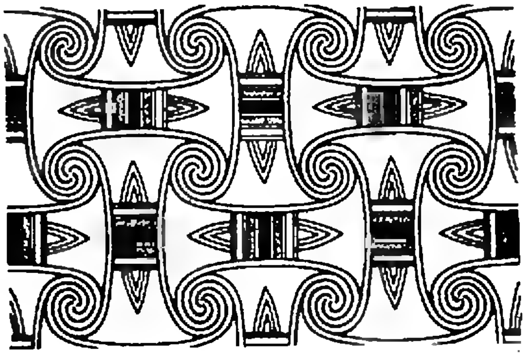


Рис. 1, а.

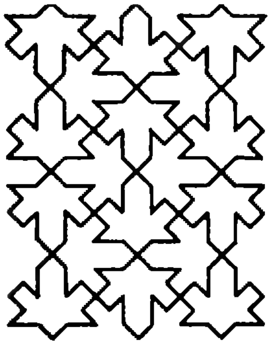


Рис. 1, б.

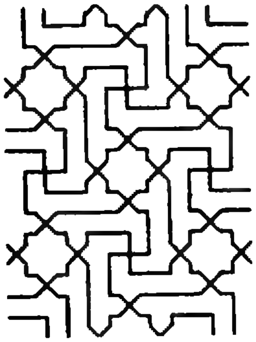


Рис. 1, в.

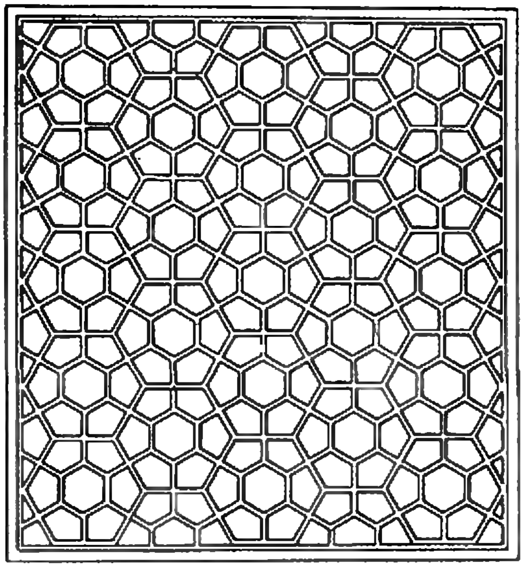


Рис. 1, г.

1. Как можно построить орнамент

Рассмотрим на плоскости фигуру Φ — квадрат с заштрихованной половинкой, как на рисунке 3, *а*, — а также два перемещения плоскости: $f_1 = R_A^{90^\circ}$ — поворот вокруг вершины квадрата A на 90°, и $f_2 = S_a$ — симметрию относительно прямой a — продолжения стороны квадрата (рис. 3, *а*). Применим к фигуре Φ всевозможные композиции перемещений f_1 и f_2 — в произвольном порядке и в любом числе. В результате мы получим совокупность плоских фигур, конгруэнтных Φ — так называемый *плоский орнамент* (*с фундаментальной областью* Φ *и порождающими перемещениями* f_1 *и* f_2): он изображен на рисунке 3, *б*.

Порядок построения этого орнамента показан на рисунке 4. Сначала мы забываем о заштрихованном треугольнике и применяем наши композиции только к квадрату. Повороты

$$f_1 = R_A^{90^\circ}, \quad f_1 \circ f_1 = R_A^{180^\circ}, \quad f_1 \circ f_1 \circ f_1 = R_A^{270^\circ}$$

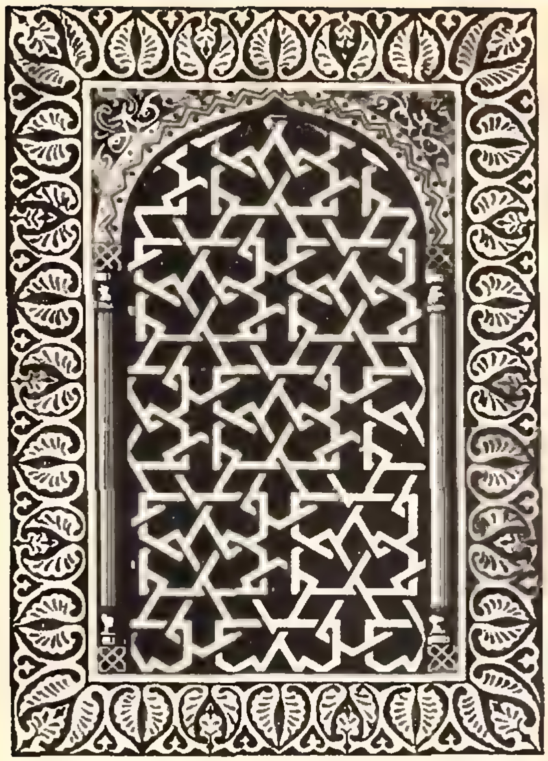


Рис. 1, д.

(рис. 4*а*) добавляют к исходному три квадрата. Применив к этим квадратам симметрию $f_2 = S_a$, получим уже 8 квадратов — см. рисунок 4, *б*. Повторив проделанную процедуру (последовательные повороты с последующей симметрией), получим картинку, изображенную на рисунке 4, *в*. Ясно, что применение к исходному квадрату всех возможных композиций перемещений f_1 и f_2 дает

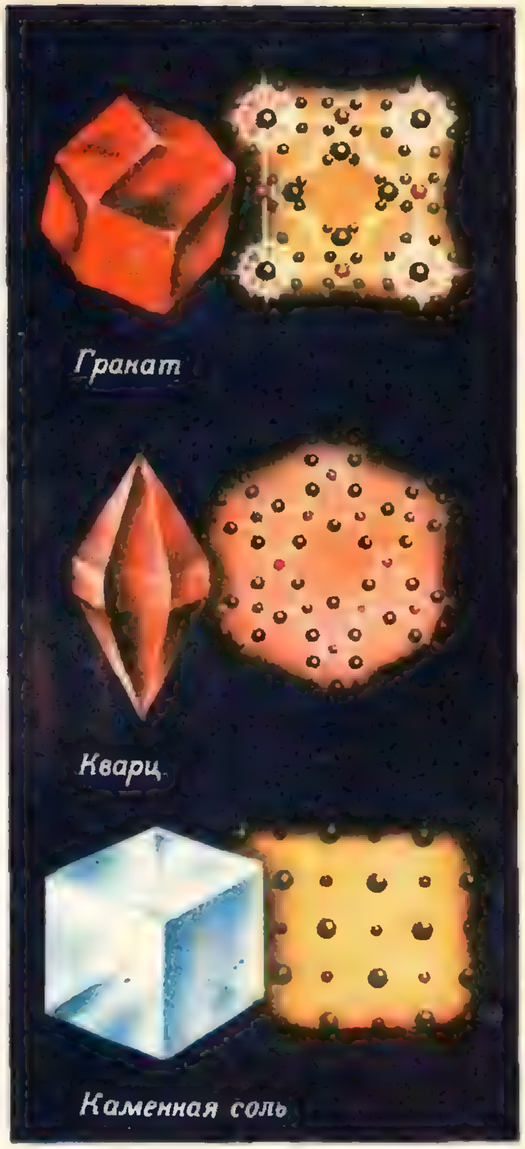


Рис. 2.

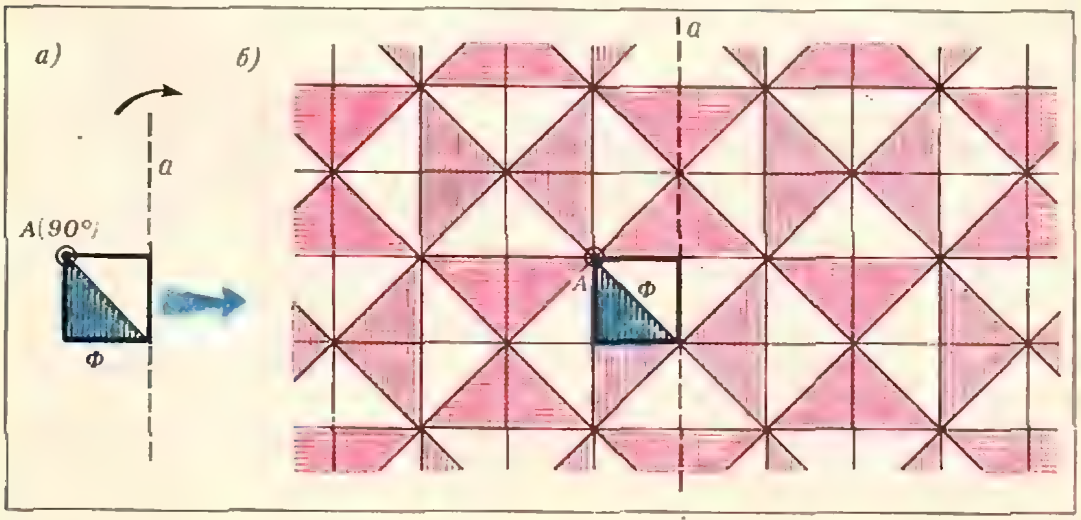


Рис. 3.

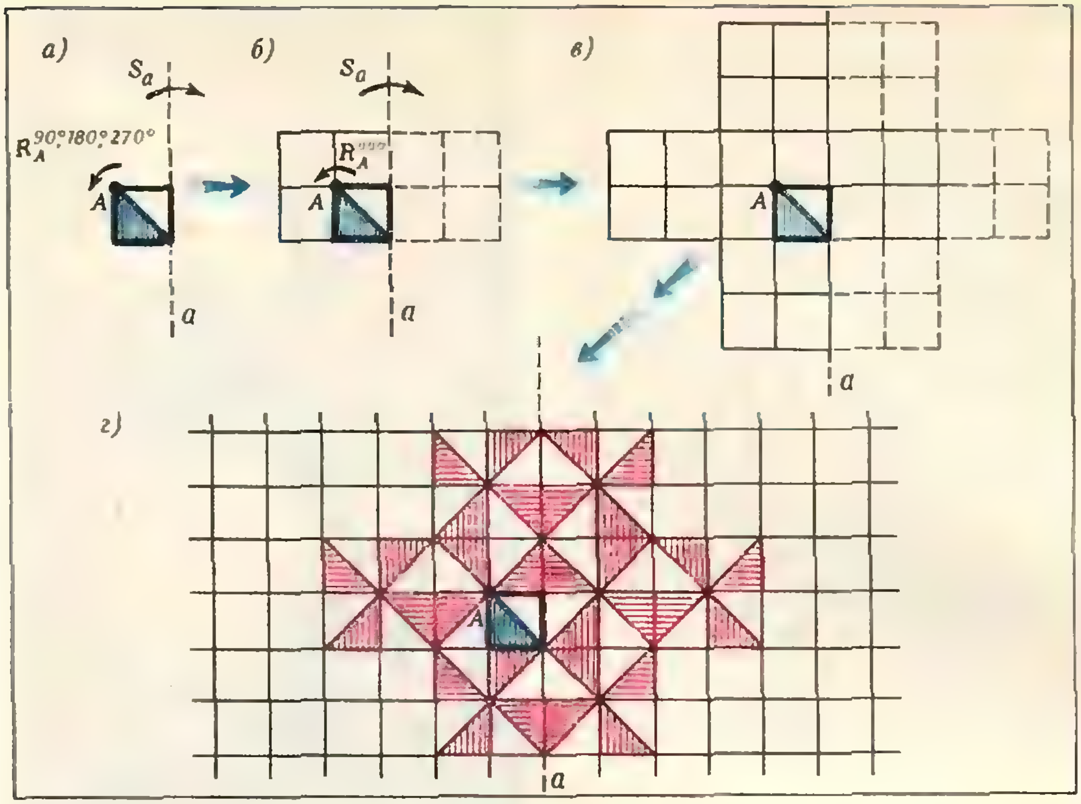


Рис. 4.

сетку квадратов на плоскости — см. рисунок 4, *г*. Теперь мы «вспоминаем» о заштрихованном треугольнике и перемещаем его по уже готовой сетке с помощью отображений f_1, f_2 и их композиций (рис. 4, *г*): получится как раз орнамент, изображенный на рисунке 3,*б*.

Кроме прямой *a*, этот орнамент имеет много других осей симметрии — на рисунке 5,*a* они выделены пунктиром. Очевидно, при поворотах вокруг точки *A* на углы, кратные 90° (т. е. на углы 90°, 180°, 270° и 360° или 0°), весь орнамент отображается на себя, поэтому говорят, что *A* — *центр симметрии порядка* 4 (здесь 4 = 360° : 90°). Наш орнамент имеет бесконечно много центров порядка 4 — на рисунке 5 это синие точки. Около каждой из них можно выделить состоящую из четырех треугольников фигуру «порядка 4» — две из них изображены на рисунке 5, *a*; весь орнамент можно представить в виде объединения таких фигур.

У данного орнамента есть еще и центры симметрии *порядка* 2, т. е. такие точки, при повороте вокруг которых только на угол 360° : 2 = 180° орнамент отображается сам на себя — на рисунке 5, *a* они отмечены кружочками. Около этих точек, можно выделить фигуры «порядка 2» — три из них изображены на рисунке. Наконец, рассматриваемый орнамент отображается сам на себя и при бесконечном числе параллельных переносов, три из которых показаны на рисунке 5, *б* стрелками. На рисунке 5, *б* изображен как бы «скелет» нашего орнамента — оставлены только сетка осей симметрии и две «решетки» центров симметрии, порядков 4 и 2 (заметим, что центры симметрии порядка 2 — это то же самое, что и обычные центры симметрии).

Множество всех перемещений плоскости, при которых орнамент отображается сам на себя, называется *группой симметрий орнамента* — в нее входят и осевые симметрии, и повороты, и параллельные переносы.

Такое название согласуется с определением группы, принятым в математике (о группах см. цикл статей в «Кванте», 1976, № 10) — множество перемещений плоскости, отображаю-

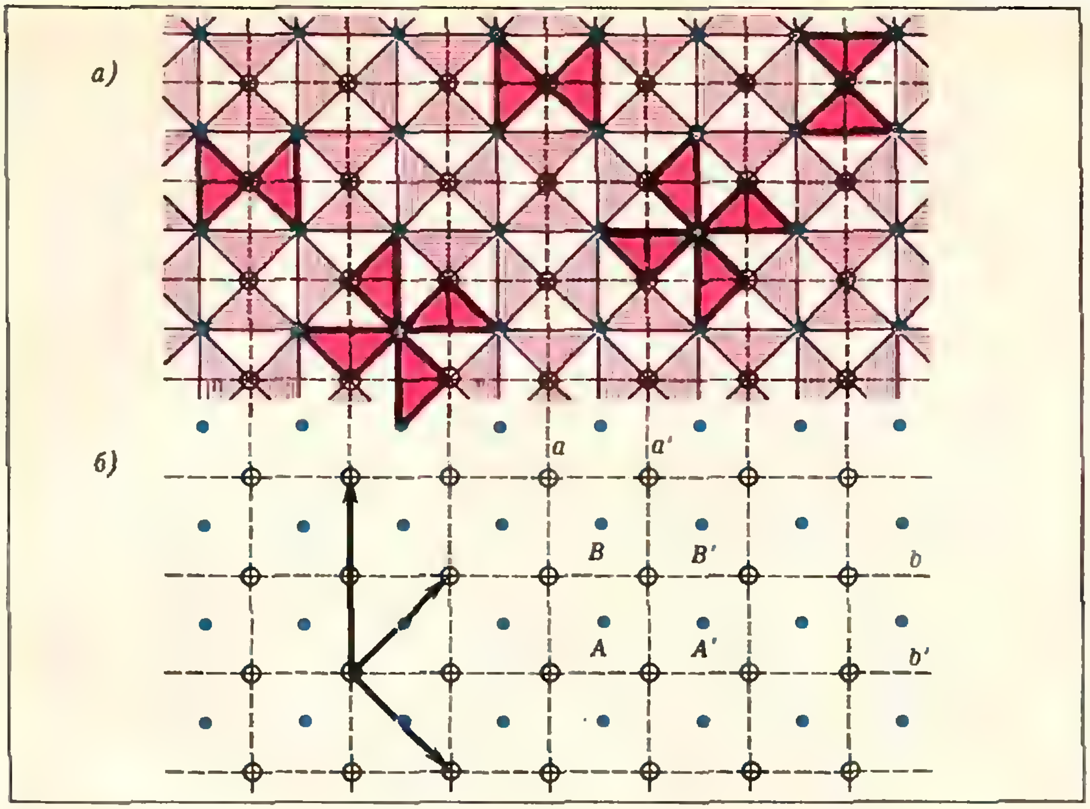


Рис. 5.

щих орнамент на себя, является группой относительно операции *композиции* перемещений. «Скелет» орнамента можно понимать как схему его группы симметрий (только на скелете не изображены переносы).

Заметим, что любую «симметричную» фигуру данного «порядка» (см. выше и рисунок 5, *а*) можно некоторым перемещением из группы симметрий отобразить на любую другую фигуру того же «порядка».

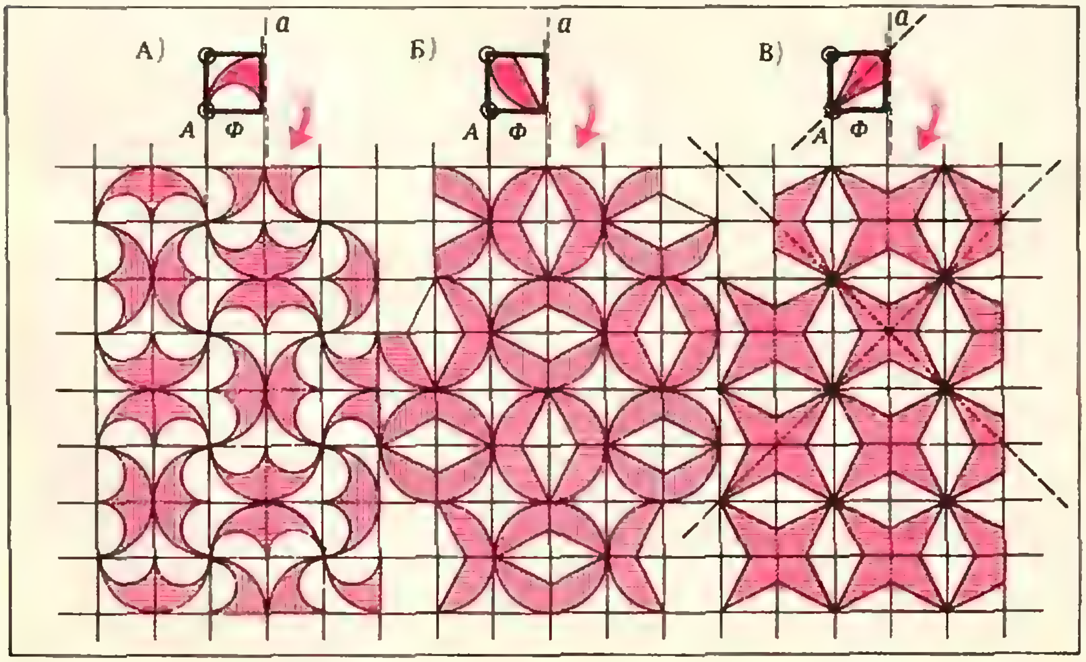


Рис. 6.

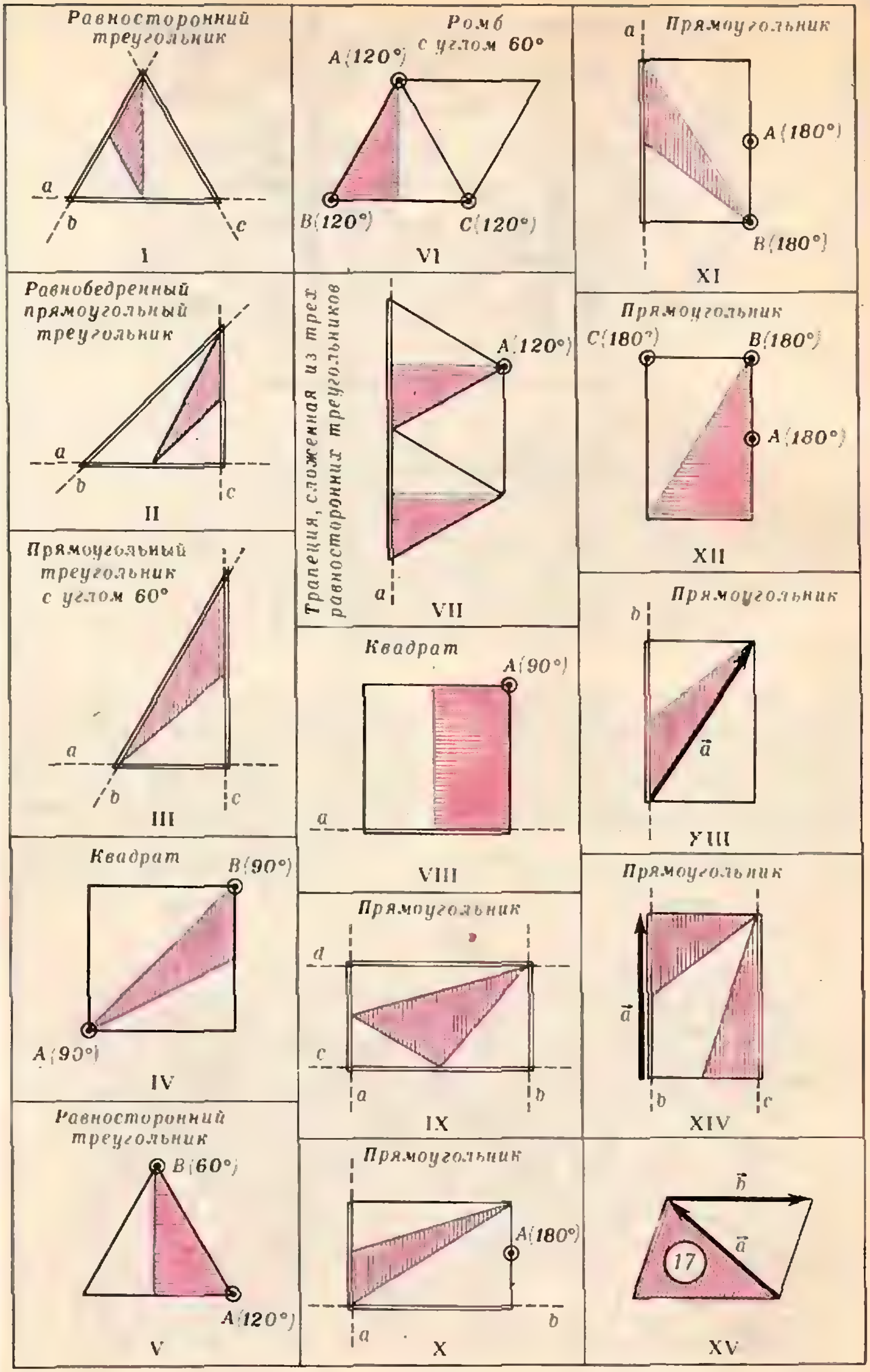

Равносторонний треугольник
a
b
c
I
Равнобедренный прямоугольный треугольник
a
b
c
II
Прямоугольный треугольник с углом 60°
a
b
c
III
Квадрат
B(90°)
A(90°)
IV
Равносторонний треугольник
B(60°)
A(120°)
V
Ромб с углом 60°
A(120°)
B(120°)
C(120°)
VI
Трапеция, сложенная из трех равносторонних треугольников
A(120°)
a
VII
Квадрат
A(90°)
a
VIII
Прямоугольник
d
c
a
b
IX
Прямоугольник
A(180°)
a
b
X
Прямоугольник
a
A(180°)
B(180°)
XI
Прямоугольник
C(180°)
B(180°)
A(180°)
XII
Прямоугольник
b
$\vec{a}$
XIII
Прямоугольник
$\vec{a}$
b
c
XIV
$\vec{b}$
$\vec{a}$
17
XV

Рис. 7.

Упражнение 1. Укажите перемещения, отображающие одну из выделенных на рисунке 5, *а* фигур на другую. Попробуйте для каждой пары фигур одного порядка найти все такие перемещения.

Упражнение 2. Найдите следующие композиции перемещений из группы симметрий рассматриваемого орнамента (см. рис. 5,*а*; на рисунке 5, *б* указаны оси симметрий центры поворотов):

а) $S_{a'}\circ S_a$; б) $S_b\circ S_a$; в) $S_{b'}\circ S_b\circ S_{a'}\circ S_a$;

г) $S_{b'}\circ S_{a'}\circ S_b\circ S_a$; д) $R_B^{180°}\circ R_A^{180°}$;

е) $R_B^{90°}\circ R_A^{90°}$; ж) $R_B^{90°}\circ R_A^{-90°}$;

з) $R_{A'}^{90°}\circ R_{B'}^{90°}\circ R_B^{90°}\circ R_A^{90°}$.

Указание. Проследите за перемещениями какой-нибудь фигуры орнамента (или просто пары точек) при последовательном применении отображений, входящих в композицию, — тогда будет понятно, как представить композицию одним перемещением. (Ответы к упражнениям см. в конце номера.)

Если вместо треугольника в фундаментальной области — в квадрате *Ф* — заштриховать какую-нибудь другую «подфигуру», то наши построения дадут геометрически новый орнамент; например, так получены орнаменты на рисунке 6. Однако орнаменты А) и Б) имеют ровно ту же группу симметрий, что и предыдущий, — все эти орнаменты относятся к одному типу. Орнамент В) уже не относится к этому типу: за счет добавочной симметрии заштрихованной подфигуры у этого орнамента появились наклонные оси симметрии, а «половина» центров симметрии порядка 2 превратилась в дополнительную решетку центров симметрии порядка 4 (нарисуйте «скелет»!).

2. Атлас орнаментов

На рисунке 7 изображены 15 фигур *Ф* и для каждой из них указаны некоторые перемещения f_1, f_2, …; оси симметрии отмечены пунктиром, центры поворотов обведены кружком, а в скобках указаны углы поворотов; стрелками показаны параллельные переносы. Если в каждом случае применить к фигуре *Ф* всевозможные композиции перемещений f_1, f_2, … (в любом порядке и количестве), то получится 15 орнаментов. Это будут орнаменты разных типов: их группы симметрий устроены по-разному (имеют разные сетки осей симметрий или разные наборы порядков центров симметрии — разные «скелеты», — или же разные множества переносов). Начертив эти 15 орнаментов и их скелеты, вы наверняка подметите много интересных закономерностей.

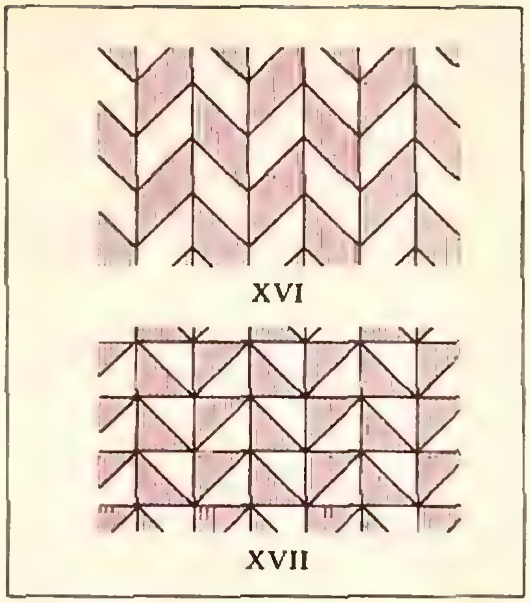


Рис. 8.

Самое замечательное, однако, в том, что если добавить к этим орнаментам еще два, изображенные на рисунке 8, то получится полный «атлас» плоских орнаментов! Оказывается, существует только 17 различных типов орнаментов, или ровно 17 различно устроенных групп симметрий плоских орнаментов. К этому факту мы еще вернемся (см. п. 3).

Фундаментальные области орнаментов I — XV (т. е. внешние контуры фигур *Ф* на рисунке 7) выбраны специальным образом, и в большинстве случаев изменять их нельзя (иначе при применении наших композиций образы фигур *Ф* могут оказаться перекрывающимися, и орнамент может не получиться). Поэтому мы указали на рисунке 7, какие именно многоугольники на нем изображены. Заштрихованные подфигуры можно изменять, но так, чтобы не получить добавочных симметрий — как в случае орнамента В) в рисунка 6.

Примечание. Орнаменты XVI и XVII изображены отдельно потому, что у них нет осей симметрии, однако есть оси так называемой *скользящей симметрии* — композиции $f=\vec{a}\circ S_a$ осевой симметрии с параллельным переносом по направлению этой оси. Укажите такие оси на рисунке 8.

Практическое задание. *Начертите орнаменты* I—XV.

Для каждого из орнаментов опишите его группу симметрий и начертите соответствующий скелет. Убедитесь, что группы симметрий построенных орнаментов устроены по-разному.

Упражнение 3. Выясните, к какому из типов I — XVII относятся орнаменты и проекции кристаллических решеток, изображенные на рисунках 1 и 2.

Упражнение 4. Какие из орнаментов I — XV имеют оси скользящей симметрии? Изобразите такие оси на скелетах этих орнаментов.

3. Что такое орнаменты?

Хотя орнаменты всех 17 типов применялись в украшениях еще художниками Древнего Египта, полную их классификацию дал лишь в 1891 году крупнейший русский ученый Е. С. **Федоров** (в частности, он доказал, что число различно устроенных групп симметрий плоских орнаментов в точности равно 17). Задача перечисления орнаментов возникла у Федорова в связи с потребностями кристаллографии — науки о геометрическом строении кристаллов. Как уже упоминалось, атомы и молекулы веществ, находящихся в кристаллическом состоянии, образуют так называемую кристаллическую структуру — пространственный аналог орнаментов. Сечения подобных структур различными плоскостями представляют собой в точности плоские орнаменты, и группы симметрий плоских орнаментов принято называть *плоскими кристаллографическими группами*. Федоровым была получена и полная классификация пространственных кристаллографических групп — оказывается, их существует ровно 230!

Подробнее об этом написано в книгах, указанных в конце статьи. Мы же пока ограничимся формулировкой одной замечательной задачи, решение которой является основным шагом в доказательстве теоремы Федорова о классификации орнаментов. Но прежде точно определим, что такое *плоский орнамент*.

Определение. *Бесконечная плоская фигура $\tilde{\Phi}$ называется плоским орнаментом, если выполнены следующие условия:*

(1) *среди перемещений, отображающих $\tilde{\Phi}$ на себя, существуют неколлинеарные параллельные переносы;*

(2) *среди всех векторов (параллельных переносов), отображающих $\tilde{\Phi}$ на себя, существует вектор наименьшей длины.*

Если плоский орнамент $\tilde{\Phi}$ отображается сам на себя при поворотах вокруг точки A на углы, только кратные $360°/n$, где n — натуральное число, большее 1, то точка A называется *центром симметрии порядка n* этого орнамента $\tilde{\Phi}$.

Задача 1. *Докажите, что произвольный плоский орнамент может иметь центры симметрии только порядков $n=2$, 3, 4 и 6.*

Дадим указание на два подхода к решению этой задачи.

Путь 1. Рассмотрите два центра симметрии орнамента одного и того же порядка n на наименьшем возможном расстоянии друг от друга (существование наименьшего расстояния между центрами нужно доказывать!). Предположив, что n отлично от 2, 3, 4, 6, покажите, что существуют два центра того же порядка n на еще меньшем расстоянии друг от друга!

Путь 2. Сначала докажите, что для произвольного орнамента центры фиксированного порядка $n \geqslant 3$ образуют *решетку из параллелограммов* — о таких решетках подробно рассказано в статье А. А. Егорова, «Решетки и правильные многоугольники», «Квант», 1974, № 12. Затем, используя свойства группы симметрий орнамента, постройте правильный n-угольник с вершинами в узлах решетки центров. В статье Егорова доказано, что это можно сделать лишь для $n = 3$, 4 и 6

4. Линейные орнаменты и паркеты

В заключение мы предложим еще две задачи, близкие к задаче о классификации плоских орнаментов, но более простые. Однако, тем не менее, решение каждой из них — это настоящее математическое исследование!

(А) Классификация линейных орнаментов.

Если плоская фигура отображается сама на себя при параллельных переносах только одного направления (и противоположного ему), причем среди этих переносов существует перенос наименьшей длины, то такая фигура называется *линейным*

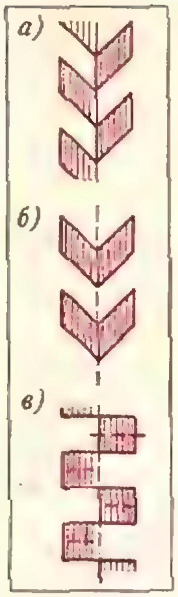


Рис. 9.

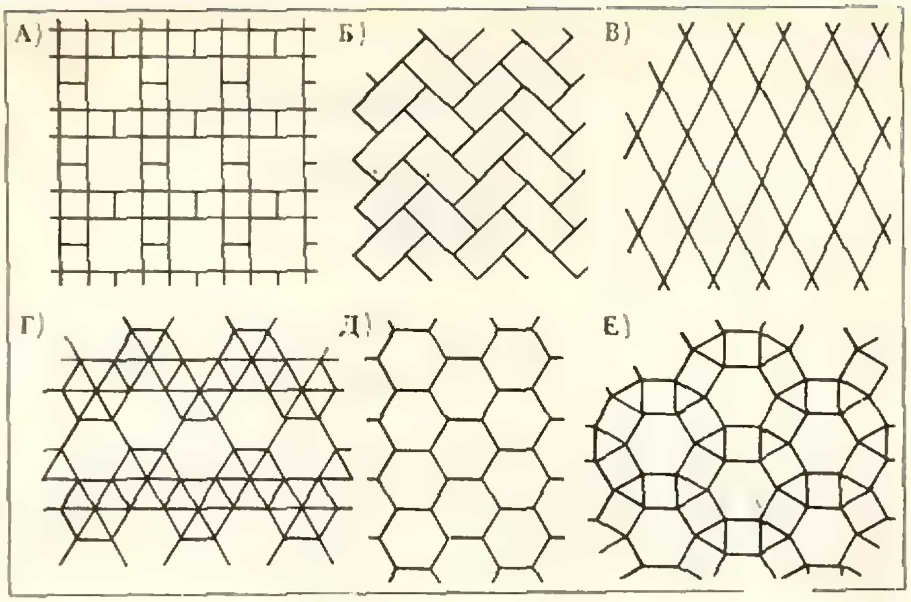


Рис 10

орнаментом. На рисунке 9 изображены три линейных орнамента, причем разного типа — с различно устроенными группами симметрий (объясните, в чем разница).

Задача 2. *Перечислите все возможные типы линейных орнаментов (и докажите, что других возможностей нет!).*

Сообщаем ответ: число различных линейных кристаллографических групп равно 7.

Б) Перечисление правильных паркетов.

Паркетом называется разбиение плоскости на многоугольники, при котором каждые два многоугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо имеют общую сторону, причем объединение сторон всех многоугольников является плоским орнаментом. Паркет называется *правильным*, если все многоугольники разбиения правильные (возможно, с различным числом сторон) и любую вершину паркета можно перевести в любую другую его вершину некоторым перемещением, отображающим весь паркет на себя. Изображенные на рисунке 10 разбиения А) и Б) вообще не являются паркетами в определенном выше смысле: разбиения В) и Г) — паркеты, но не правильные, и, наконец, разбиения Д) и Е) являются правильными паркетами (объясните).

Задача 3. *Найдите все возможные правильные паркеты.*

Эта задача уже была сформулирована в «Кванте»: в статье А. Н. Колмогорова «Паркеты из правильных многоугольников» («Квант», 1970, № 3). В этой статье изложен и возможный подход к перечислению всех правильных паркетов. Сообщаем ответ: число различных, с точностью до подобия, правильных паркетов равно 11.

Литература

Г. С. М. Кокстер, *Введение в геометрию*, главы 3, 4 и 15 (М., «Наука», 1966).

Г. Вейль, *Симметрия*, третья лекция (М., «Наука», 1968).

Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, глава II (М. — Л., ГТТИ, 1951).

Задачи наших читателей

Докажите следующее соотношение между элементами остроугольного треугольника ABC:

$$\frac{|C_0A_0|\cdot|A_0B_0|}{h_a^2}+\frac{|A_0B_0|\cdot|B_0C_0|}{h_b^2}+\frac{|B_0C_0|\cdot|A_0C_0|}{h_c^2}=1,$$

где A_0, B_0 и C_0 — основания высот, опущенных из вершин A, B, C соответственно; h_a, h_b, h_c — длины соответствующих высот.

У. Алла
(г. Выру Эстонской ССР)

задачник Кванта

Задачи

М431—М435; Ф443—Ф447

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 мая 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М431, М434» или «Ф447». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М376—М384, М386—М390, Ф383—Ф402 (см. с. 60).

М431. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели связисту достаточно иметь кусок провода длиной $1{,}6\,l$.

А. Альтшулер

М432. Существует ли полный квадрат, сумма цифр которого равна

а) 1977;

б) 1978?

в) * Выясните, какие натуральные числа могут быть суммами цифр квадрата целого числа.

А. Гришков

М433. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона BC параллельна диагонали AD, сторона CD — диагонали BE, сторона DE — диагонали AC и сторона AE — диагонали BD (рис. 1). Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE.

Э. Туркевич

М434. Число $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ представляется в виде несократимой дроби $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажите, что p_n — четное число.

б) Докажите, что если $n\geqslant 3$, то p_n делится на 8.

в) * Докажите, что для любого натурального k можно указать такое n, что числа p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, ... делятся на 2^k.

Д. Фаддеев

М435 *. В таблице размерами $m\times n$ записаны действительные числа, в каждой клетке по числу. В каждом столбце подчеркнуто k наибольших чисел ($k\leqslant m$), в каждой строке — l наибольших чисел ($l\leqslant n$). Докажите, что по крайней мере kl чисел подчеркнуты дважды. Разберите вначале случаи а) $k=l=2$; б) $k=l=3$.

С. Конягин

Ф443. Как известно, земной шар делает полный оборот вокруг своей оси за 23 *час* 56 *мин* 04 *сек*. Следовательно, за сутки все часы, циферблат которых разделен на 24 часа, должны отставать почти на 4 *мин*. Это составляет почти полчаса в неделю. Почему же мы не замечаем этого отставания и не подводим все часы непрерывно?

Б. Буховцев

Ф444. Тяжелый ящик массы M скатывается по роликам, образующим наклонную плоскость (рис. 2). Расстояние между роликами l, их радиусы r и массы m. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Найти скорость движения ящика, если известно, что она постоянная. Считать, что ролики полые и толщина их стенок $d \ll r$.

Ф445. Конденсатор емкости $C=0{,}04$ *мкф* с помощью ключа K периодически с частотой $\nu=50$ раз в секунду заряжается от источника с э. д. с. $\mathcal{E}=100$ *в* и внутренним сопротивлением r-5 *ом* и разряжается через сопротивление R-1*ком* (рис. 3). Определить мощность, выделяемую в нагрузке R, и к. п. д. такого устройства. Считать, что время замыкания контактов ключа достаточно, чтобы конденсатор успел полностью зарядиться (положение *I*) и полностью разрядиться (положение *II*).

Ф446. На шероховатой ленте транспортера лежит тело массой M, прикрепленное к стене пружиной жесткостью k (рис. 4). Ленту приводят в движение с постоянной скоростью v, и через некоторое время устанавливается периодическое движение тела. Нарисуйте график зависимости смещения тела, его скорости и ускорения от времени при этом движении.

Ф447. Вдоль оси, проходящей через центр двух жестко связанных концентрических цилиндров, натянута платиновая проволочка, покрытая слоем серебра (рис. 5). При прохождении тока по проволоке она нагревается, и слой серебра испаряется. Через узкую прорезь во внутреннем цилиндре часть атомов серебра пролетает во внешний цилиндр и осаждается на его внутренней поверхности.

Радиус внешнего цилиндра $R=30$ *см*, радиус внутреннего цилиндра пренебрежимо мал по сравнению с R; ширина щели в маленьком цилиндре $\delta=1$ *мм*. Температура паров серебра $T=1000$ K, плотность паров $\rho=10^{-5}$ *г/см*^{3}.

Цилиндры вращаются, делая $n=10$ оборотов в секунду. Найти распределение поверхностной плотности серебра в слое, осаждающемся на внутренней поверхности большого цилиндра за время $t=1$ *сек*.

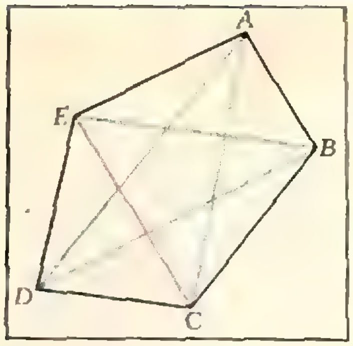


Рис. 1.

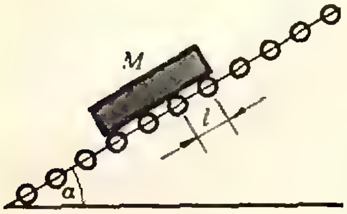


Рис. 2.

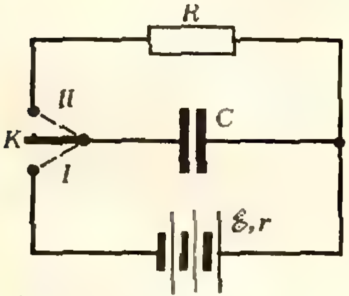


Рис. 3.

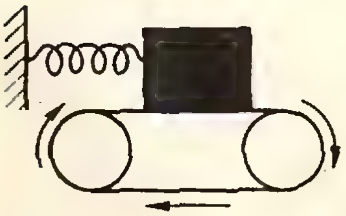


Рис. 4.

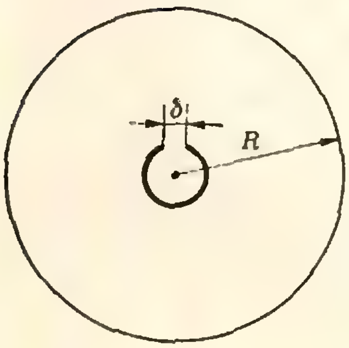


Рис. 5.

Решения задач

М391—М394; Ф397—Ф402

М391. *а) В последовательности* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *числа* x_0 *и* x_1 *— натуральные и меньше* 1000, *а каждое из остальных чисел равно модулю разности двух предыдущих. Докажите, что одно из чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_{1500}$ *равно* 0.

б) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *числа* x_0 *и* x_1 *— натуральные и меньше* 10 000, *а каждое из чисел* $x_2, x_3, \ldots$ *равно наименьшей из абсолютных величин разностей двух каких-то предыдущих чисел. Докажите, что* $x_{20}=0$.

а) Докажем индукцией по всем натуральным n, что если в такой последовательности x_0 и x_1 меньше $2n$, то одно из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}$ равно 0 (в условии задачи $n = 500$).

Случай $n = 1$ легко проверяется. Пусть для всех n, меньших данного, утверждение доказано. Поскольку $x_0 \leqslant 2n-1$, $x_1 \leqslant 2n-1$, $x_2 \geqslant 1$, то $x_3 \leqslant 2n-2$ и $x_4 \leqslant 2n-3$. Если $x_3 < 2n-2$ и $x_4 < 2n-2$, то из индуктивного предположения все следует. Если же $x_3 = 2n-2$, то $x_2 = 1$, $x_1 = 2n-1$, $x_0 = 2n-2$. Осталось доказать утверждение в этом случае. Имеем:
$x_3 = 2n-2$, $x_4 = 2n-3$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2n-4$, $x_7 = 2n-5$, $x_8 = 1, \ldots, x_{3k} = 2n-2k, \ldots, x_{3n} = 0$.

б) Сначала переставим члены x_0, x_1 и x_2 в порядке убывания. Получившаяся последовательность, возможно, будет отличаться от исходной лишь порядком первых трех членов (убедитесь в этом самостоятельно). Кроме того, она, очевидно, убывает: определяя член x_k, мы имеем все те разности, которыми пользовались для определения члена x_{k-1}, плюс еще разности между x_{k-1} и остальными членами последовательности (с меньшими номерами).

Заметим теперь, что для всякого целого $k > 0$

$$x_k \geqslant x_{k+1}+x_{k+2}. \qquad (*)$$

В противном случае мы имели бы

$$x_{k+2} > x_k-x_{k+1} = |x_k-x_{k+1}|,$$

что невозможно.

Предположим, что $x_{20} \geqslant 1$. Тогда, разумеется, $x_{19} \geqslant 1$, и в силу (*) имеем: $x_{18} \geqslant x_{19}+x_{20} \geqslant 2$, $x_{17} \geqslant x_{18}+x_{19} \geqslant 2+1 = 3$, $x_{16} \geqslant x_{17}+x_{18} \geqslant 3+2 = 5$, $\ldots$, $x_0 \geqslant x_1+x_2 \geqslant 4181+6765 = 10\,946 > 10\,000$, что противоречит условию задачи.

С. Фомин

◆

М392. *По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.*

Приведем два решения этой задачи. Первое (геометрическое) использует типичный для физики прием: переход в движущуюся систему отсчета; второе (аналитическое) удается коротко записать с помощью «псевдоскалярного произведения» векторов.

1. Условие, что точки P, Q, R находятся на одной прямой, будем записывать так: $R \in (PQ)$ (при $P \neq Q$).

Перейдем в систему координат, связанную с одним из пешеходов. Тогда задача сведется к следующей: на плоскости дана неподвижная точка A; доказать, что если точки P и Q движутся прямолинейно и равномерно, то событие $A \in (PQ)$ может произойти не более двух раз (если известно, что в начальный момент времени $t = 0$ оно не произошло).

Пусть в какой-то момент времени t_1 пешеходы P и Q находились в точках B и C таких, что $A \in (BC)$. Введем еще одного «фиктивного» пешехода Q': Q' находится в точке B при $t=t_1$ и движется параллельно пути пешехода Q так, что всегда $A \in (QQ')$ (рис. 1, *а*). Ясно, что условия $A \in (PQ)$, $A \in (PQ')$ и $Q' \in (AP)$ эквивалентны *). Очевидно, Q' движется равномерно. Поэтому прямая PQ' сохраняет одно и то же направление — перемещается параллельно самой себе — и может лишь в один момент времени t_2 (отличный от t_1) пройти через точку A (рис. 1, *б*). (Возможности, что точки P и Q' все время совпадают или что они движутся по прямой AB, исключены начальным условием.)

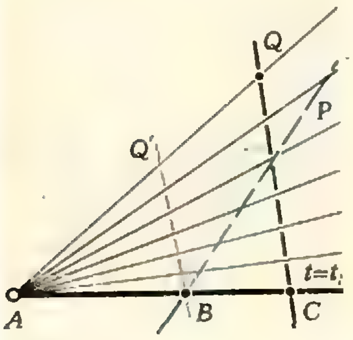


рис. 1, а

---

*) При $P \neq Q'$.

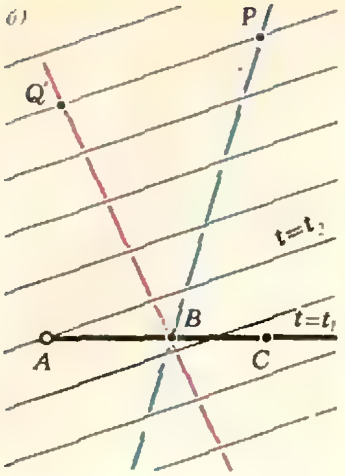


Рис. 1, б.

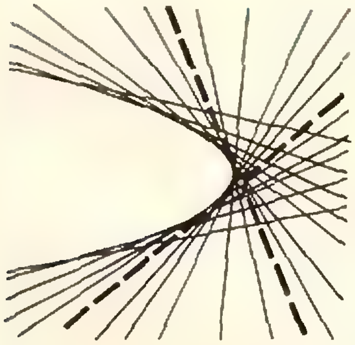


Рис. 2.

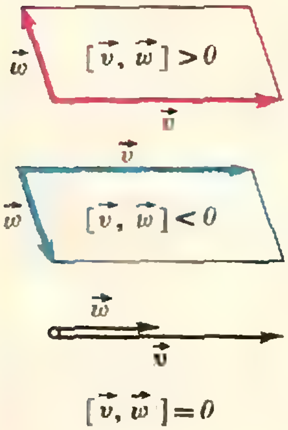


Рис. 3.

Нетрудно привести примеры, показывающие, что три пешехода действительно могут оказаться на одной прямой два раза, один раз или ни одного. Прежде чем перейти к решению II, отметим без доказательства один факт, из которого легко вытекает наша задача. Если две точки P и Q движутся равномерно по двум прямым, то все прямые PQ либо проходят через одну точку, либо параллельны одному направлению, либо (и это общий случай) — касаются одной параболы —«огибающей» этого семейства прямых (рис. 2). Ясно, что через каждую точку A плоскости проходит не более двух прямых этого семейства.

II. Введем систему координат Oxy. Условие, что два вектора $\vec{v}$ и $\vec{w}$ с координатами $(v_x;\ v_y)$ и $(w_x;\ w_y)$ коллинеарны (параллельны одному направлению), можно, очевидно, записать так: $v_xw_y = v_yw_x$. Введем обозначение

$$[\vec{v},\ \vec{w}] = v_xw_y - v_yw_x. \qquad (1)$$

Числовая функция от пары векторов $(\vec{v},\ \vec{w}) \rightarrow [\vec{v},\ \vec{w}]$ обладает, как нетрудно проверить, такими свойствами:

$$[\lambda\vec{v},\ \vec{w}] = [\vec{v},\ \lambda\vec{w}] = \lambda\,[\vec{v},\ \vec{w}];$$

$$[\vec{v}+\vec{w},\ \vec{u}] = [\vec{v},\ \vec{u}] + [\vec{w},\ \vec{u}],$$

$$[\vec{u},\ \vec{v}+\vec{w}] = [\vec{u},\ \vec{v}] + [\vec{u},\ \vec{w}] \qquad (2)$$

для любых векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и любого числа λ. Как уже говорилось, $[\vec{v},\ \vec{w}] = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{v}$ и $\vec{w}$ коллинеарны. (Величина $[\vec{v},\ \vec{w}]$ имеет простой геометрический смысл: ее модуль равен площади параллелограмма, стороны которого изображают векторы $\vec{v}$ и $\vec{w}$, а знак зависит от «ориентации» пары $(\vec{v},\ \vec{w})$, причем $[\vec{v},\ \vec{w}] = -[\vec{w},\ \vec{v}]$ (рис. 3); но эти свойства нам не понадобятся.)

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Пусть P, Q и R движутся прямолинейно и равномерно. Тогда

$$\vec{RP} = \vec{a} + t\vec{v},\ \vec{RQ} = \vec{b} + t\vec{w}, \qquad (3)$$

где t — время, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ — векторы, не зависящие от t. Получить формулы вида (3) нетрудно, пользуясь тем, что если какая-то точка M движется со скоростью $\vec{u}$, то $\vec{OM} = \vec{OM_0} + t\vec{u}$, где M_0 — положение M при $t = 0$, O — фиксированная точка плоскости. С учетом (1) — (3) условие $R \in (PQ)$ можно записать так:

$$[\vec{v},\ \vec{w}]\,t^2 + ([\vec{a},\ \vec{w}] + [\vec{b},\ \vec{v}])\,t + [\vec{a},\ \vec{b}] = 0. \qquad (4)$$

Мы получили квадратное уравнение относительно t. Хотя некоторые его коэффициенты и могут обращаться в 0, но при $t = 0$, как сказано в условии задачи, (4) не выполняется, так что (4) — не тождество. Следовательно, $R \in (PQ)$ не более чем при двух значениях t.

Н. Васильев

◆

M393. *Найти сумму*

$$\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \varphi(1),$$

если $\varphi(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$.

Мы решим более общую задачу, именно, когда $\varphi(x) = \dfrac{a^{2x+k}}{a^{2x} + a}$, где k — любое действительное число, и $a > 0$ (положив $k = 0$, $a = 2$, получим ответ задачи M393).

Найдем выражение для $\varphi(1 - x)$:

$$\varphi(1 - x) = \frac{a^{-2x+k+2}}{a^{-2x+2} + a} = \frac{a^{k+1}}{a^{2x} + a}.$$

Сложив $\varphi(1-x)$ и $\varphi(x)$, получим:

$$\varphi(x)+\varphi(1-x)=\frac{a^{2x+k}+a^{k+1}}{a^{2x}+a}=a^k.$$

Пусть искомая сумма равна S. Тогда

$$S=\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)+\varphi(1),$$

$$S=\varphi(1)+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi(0).$$

Складывая эти два равенства и принимая во внимание, что

$$\varphi(0)+\varphi(1)=\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)=\ldots=$$
$$=\varphi(x)+\varphi(1-x)=a^k,$$

получаем

$$2S=(n+1)a^k,$$

то есть $S=\frac{1}{2}(n+1)a^k$.

Итак, ответ в задаче М393 следующий:

$$S=\frac{1}{2}(n+1).$$

С. Берколайко

◆

М394. *а) На плоскости даны векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, *сумма которых равна* 0. *Докажите неравенство* $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

Докажите аналогичное неравенство:

б) для четырех чисел и

в) четырех векторов в трехмерном пространстве, сумма которых равна 0.

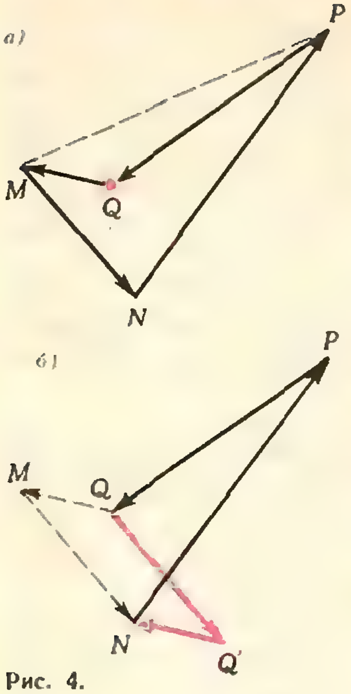


Рис. 4.

Мы сейчас решим только задачу а) (на олимпиаде школьникам 9—10 классов предлагалась именно она); решению же задач б) и в) будет посвящена заметка, которую мы опубликуем в одном из ближайших номеров журнала.

Откладывая последовательно векторы $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$, $\overrightarrow{NP}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PQ}=\vec{c}$, $\overrightarrow{QM}=\vec{d}$, мы получим замкнутую ломаную (так как $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$). Меняя порядок следования векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, можно получить несколько таких ломаных. Покажем, что среди этих ломаных есть самопересекающиеся. Для этого возьмем какую-нибудь из наших ломаных. Если одна из ее вершин, например Q, лежит внутри треугольника MNP, образованного тремя другими вершинами (рис. 4, *а*), то отложим вектор $\overrightarrow{QQ'}=\overrightarrow{MN}$. Так как при этом $\overrightarrow{Q'N}=\overrightarrow{QM}$, то ломаную $MNPQ$ можно заменить самопересекающейся ломаной $NPQQ'$ (рис. 4, *б*). Если же $MNPQ$ — выпуклая ломаная, то сначала проделаем построение, изображенное на рисунке 5.

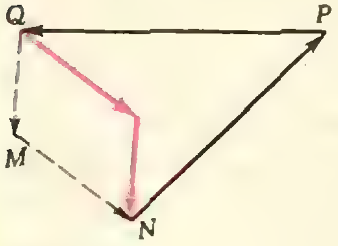


Рис. 5.

Итак, пусть $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$, $\overrightarrow{NP}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PQ}=\vec{c}$, $\overrightarrow{QM}=\vec{d}$, причем отрезки NP и QM имеют общую точку R (рис. 6). Тогда $|MR|+|PR|\geqslant|PM|$, $|NR|+|QR|\geqslant|QN|$, откуда $|MR|+|PR|+|NR|+|QR|\geqslant|PM|+|QN|$. Но

$$|PM|=|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}|=|\vec{c}+\vec{d}|,$$

$$|QN|=|\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MN}|=|\vec{a}+\vec{d}|,$$

а $|MR|+|PR|+|NR|+|QR|=|QM|+|NP|=|\vec{b}+\vec{d}|$. Следовательно,

$$|\vec{b}|+|\vec{d}|\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|. \qquad (1)$$

Кроме того, очевидно, что $|\vec{a}|+|\vec{c}|\geqslant|\vec{a}+\vec{c}|$ и что $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{d}|$ (см. рис. 6); поэтому

$$|\vec{a}|+|\vec{c}|\geqslant|\vec{b}+\vec{d}|. \qquad (2)$$

Складывая неравенства (1) и (2), получим то, что требовалось.

Ю. Ионин

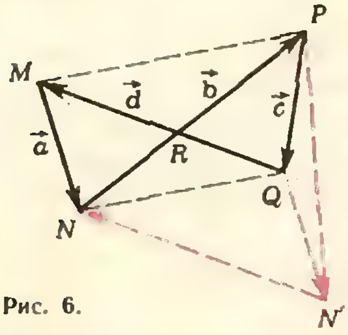


Рис. 6.

Ф397. *Имеется следующий проект летательного аппарата. Верхняя поверхность большой плоской пластинки поддерживается при постоянной температуре* 0°С, *а нижняя — при температуре* 100° С. *Изобретатель утверждает, что такая пластинка будет висеть в воздухе подобно дирижаблю. Объясните, почему. Оцените по порядку величины подъемную силу такой пластинки с площадью* 1 *м*^{2} *при температуре воздуха* 20°С.

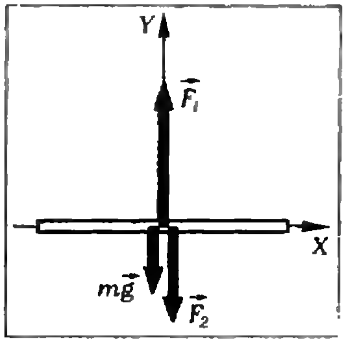


Рис. 7.

Налетающие на пластину молекулы воздуха имеют среднеквадратичную скорость, равную $\bar v_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, где T — температура воздуха, m — масса молекулы. Среднее значение абсолютных величин проекций скоростей молекул на ось OY, перпендикулярную к поверхности пластины, равно

$$\bar v_y \approx \frac{\bar v_{ср.кв.}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

При столкновении с пластиной «температура» молекул становится равной температуре пластины. Это означает, что после отражения от нижней поверхности пластины

$$\bar v'_y = \sqrt{\frac{kT_1}{m}},$$

а после отражения от верхней поверхности

$$\bar v''_y = \sqrt{\frac{kT_2}{m}}.$$

В результате проекция p_y импульса молекулы, попадающей на нижнюю поверхность пластины, меняется при соударении на величину

$$\Delta p'_y = m\left(\sqrt{\frac{kT}{m}} + \sqrt{\frac{kT_1}{m}}\right),$$

а молекулы, попадающей на верхнюю поверхность, — на величину

$$\Delta p''_y = m\left(\sqrt{\frac{kT}{m}} + \sqrt{\frac{kT_2}{m}}\right).$$

За время Δt на каждую из поверхностей попадают молекулы, находящиеся от пластины на расстоянии, равном $\bar v_y \Delta t$. Число этих молекул равно $N = n\bar v_y s\Delta t$, где n — число молекул в единице объема, s — площадь пластины.

В соответствии со вторым и третьим законами Ньютона на пластину в вертикальном направлении действуют силы, равные по абсолютным величинам изменениям проекций импульсов молекул в единицу времени. На нижнюю поверхность пластины действует направленная вверх сила (рис. 7)

$$|\vec F_1| = \frac{N\Delta p'_y}{\Delta t} = mn\bar v_y s\left(\sqrt{\frac{kT_1}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}}\right),$$

а на верхнюю — направленная вниз сила

$$|\vec F_2| = \frac{N\Delta p''_y}{\Delta t} = mn\bar v_y s\left(\sqrt{\frac{kT_2}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}}\right).$$

Так как $T_1 > T_2$, то равнодействующая $\vec R$ сил $\vec F_1$ и $\vec F_2$ направлена вверх и равна по абсолютной величине

$$|\vec R| = |\vec F_1| - |\vec F_2| = mn\bar v_y s\left(\sqrt{\frac{kT_1}{m}} - \sqrt{\frac{kT_2}{m}}\right) = nsk\sqrt{T}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right).$$

Число молекул, содержащихся в объеме V воздуха при давлении p и температуре T, равно $N_V = \nu \cdot N_A$, где ν — число молей воздуха в объеме V, N_A — число Авогадро. Но $\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Так что число молекул в единице объема

$$n = \frac{p}{RT} N_A .$$

Таким образом,

$$|\vec{R}| = \frac{pN_A sk}{RT}\sqrt{T}\,(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}) = \frac{ps}{\sqrt{T}}(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}).$$

Подставив в это выражение данные в условии величины (считая $p = 10^5 н/м^2$), получим

$$|\vec{R}| \approx 1{,}5\cdot 10^4 \quad н.$$

◆

Ф398. *При подключении в сеть трехламповой люстры с двумя выключателями была допущена ошибка. В результате этого при замыкании одного из выключателей все три лампы горели неполным накалом. При замыкании другого выключателя горела нормально только одна из ламп (две другие не горели), и тот же эффект давало замыкание обоих выключателей одновременно. При разомкнутых выключателях все три лампы не горели. Нарисуйте возможную схему выполненного монтажа, объясните наблюдаемые эффекты.*

Схема включения ламп показана на рисунке 8. При замкнутом ключе K_1 и разомкнутом ключе K_2 все три лампы оказываются включенными последовательно, и поэтому они горят неполным накалом. При одновременном замыкании обоих ключей лампа $Л_1$ оказывается включенной в сеть, а лампы $Л_2$ и $Л_3$ соединены параллельно участку цепи с очень маленьким сопротивлением. Напряжение на них мало, и лампы не горят. При замыкании одного ключа K_2 в сеть включается только лампа $Л_1$.

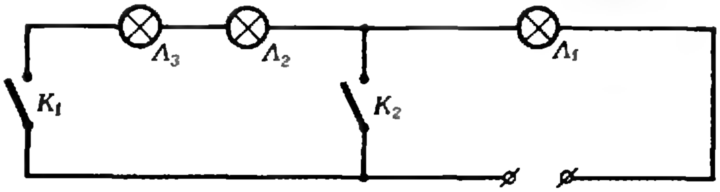


Рис. 8.

◆

Ф399. *Три небольших одинаковых металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд Q_1, а на втором — Q_2. Определить заряд третьего шарика.*

При соединении каждого из шариков с удаленным проводником, потенциал φ которого поддерживается постоянным, потенциал шарика становится равным φ.

Заряд Q_1, появляющийся на первом шарике, равен

$$Q_1 = C\varphi, \tag{1}$$

где C — емкость шарика

Потенциал φ второго шарика складывается из потенциала поля, создаваемого зарядом Q_1 на расстоянии l от первого шарика $\left(\varphi_1 = \frac{Q_1}{l}\right)$, и потенциала «собственного» поля заряда Q_2 $\left(\varphi_2 = \frac{Q_2}{C}\right)$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q_1}{l} + \frac{Q_2}{C}. \tag{2}$$

Потенциал φ третьего шарика равен

$$\varphi = \frac{Q_1}{l} + \frac{Q_2}{l} + \frac{Q_3}{C}, \tag{3}$$

где $\frac{Q_1}{l}$, $\frac{Q_2}{l}$ — соответственно потенциалы полей зарядов Q_1 и Q_2 на расстоянии l от них, $\frac{Q_3}{C}$ — потенциал «собственного» поля заряда Q_3.

Из равенства (2), воспользовавшись равенством (1), найдем l:

$$l = \frac{Q_1 C}{Q_1 - Q_2}.$$

Подставив это выражение для l в равенство (3), найдем Q_3:

$$Q_3 = C\left[\varphi - \frac{Q_1 + Q_2}{l}\right] = \frac{Q_2^2}{Q_1}.$$

Ф400. *Две заряженные частицы имели первоначально одинаковые по величине и направлению скорости. После того как на некоторое время было включено однородное электростатическое поле, вектор скорости одной из частиц повернулся на 60°, а численное значение скорости уменьшилось вдвое. Вектор скорости другой частицы повернулся на 90°. Во сколько раз изменилось численное значение скорости второй частицы? Определите отношение заряда к массе для второй частицы, если для первой частицы оно равно k_1.*

На рисунке 9 изображен треугольник скоростей частицы 1: $\vec{v}_1$ — первоначальная скорость частицы, $\vec{v}_1{}'$ — ее скорость после выключения поля, $\Delta\vec{v}_1$ — изменение скорости $\vec{v}_1$ за время действия поля. Так как $\alpha=60°$, а $|\vec{v}_1{}'|=\frac{1}{2}|\vec{v}_1|$, то треугольник скоростей — прямоугольный и $\beta=30°$ (рис. 10). Следовательно, $|\Delta\vec{v}_1|=|\vec{v}_1|\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{v}_1|$.

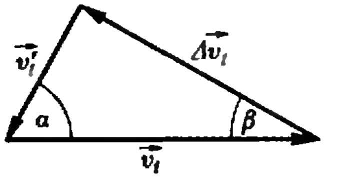


Рис. 9.

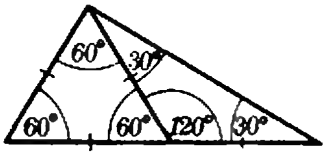


Рис. 10.

Импульс частицы 1 за время t, в течение которого было включено поле напряженности $\vec{E}$, изменился на величину $|\Delta m_1\vec{v}_1|=m_1\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{v}_1|$ (m — масса частицы 1). Согласно второму закону Ньютона

$$|\Delta m_1\vec{v}_1|=|\vec{E}|q_1 t, \qquad (1)$$

где $|\vec{F}|q_1 t=|\vec{F}_1|$ — абсолютное значение силы, действующей со стороны поля на частицу 1, заряд которой равен q_1. Направление силы $\vec{F}_1$ совпадает с направлением вектора $\Delta m_1\vec{v}_1$.

Следовательно, вектор изменения импульса частицы 2 составляет угол 30° с вектором первоначального импульса частицы 2.

На рисунке 11 изображен треугольник скоростей частицы 2, подобный треугольнику импульсов. Из этого треугольника находим:

$$\frac{|\vec{v}_2{}'|}{|\vec{v}_2|}=\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

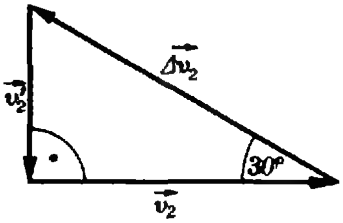


Рис. 11.

Сила $\vec{F}_2$, с которой поле действует на частицу 2, равна по абсолютной величине $|\vec{E}|q_2$, где q_2 — заряд частицы 2. Согласно второму закону Ньютона

$$|\Delta m_2\vec{v}_2|=|\vec{E}|q_2 t$$

(m_2 — масса частицы 2). Отсюда

$$\frac{q_2}{m_2}=\frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\vec{E}|t}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{E}|t} \qquad (2)$$

(см. рисунок 11). Из равенства (1) находим:

$$|\vec{E}|t=\frac{|\Delta m_1\vec{v}_1|}{q_1}=\frac{1}{k_1}\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{v}_1|.$$

Подставив это выражение в (2), получим:

$$\frac{q_2}{m_2}=\frac{4}{3}\frac{|\vec{v}_2|k_1}{|\vec{v}_1|}=\frac{4}{3}k_1.$$

◆

Ф401. *Схему, изображенную на рисунке 12 (мостик Уитстона), применяют обычно для измерения неизвестного сопротивления x. Как, используя подобную схему, измерить сопротивление R_G самого гальванометра G, если второго гальванометра нет?*

Включим гальванометр в цепь вместо неизвестного сопротивления (рис. 13), а точки A и B соединим через ключ K_1. Подбором переменного сопротивления R добьемся такого положения, что показания гальванометра не будут изменяться при замыкании и размыкании ключа K_1. В такой ситуации потенциалы точек A и B равны и сбалансированы: $\varphi_A=\varphi_B$.

Но $\varphi_A=\varphi_D-I_1R$ (I_1 — ток, текущий по участку DA), а $\varphi_B=\varphi_D-I_2r_2$ (I_2 — ток, текущий по участку DB). Так что

$$\varphi_D-I_1R=\varphi_D-I_2r_2,$$

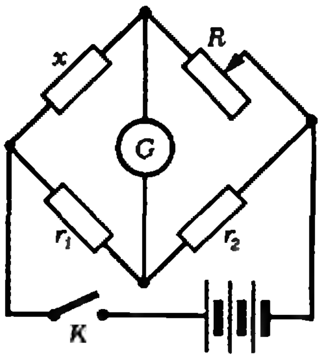


Рис. 12.

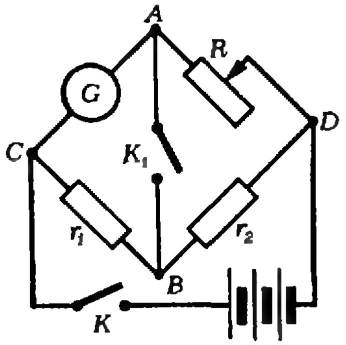


Рис. 13.

откуда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R}{r_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $\varphi_A = \varphi_C + I_1 r_G$ (r_G — сопротивление гальванометра), а $\varphi_B = \varphi_C + I_2 r_1$. Так что

$$\varphi_C + I_1 r_G = \varphi_C + I_2 r_1,$$

откуда

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_G}{r_1}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем:

$$\frac{R}{r_2} = \frac{r_G}{r_1},$$

или

$$r_G = \frac{r_1}{r_2} R.$$

Зная сопротивления r_1, r_2, R, можно найти сопротивление гальванометра r_G.

◆

Ф402. *Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = -0{,}6$ м расположена так, что один из ее фокусов совпадает с полюсом вогнутого зеркала. Каково фокусное расстояние F' зеркала, если известно, что система дает действительное изображение предмета, помещенного на любом расстоянии перед линзой? Изображение создается лучами, вторично прошедшими через линзу после отражения от зеркала.*

Рассеивающая линза всегда дает мнимое изображение действительного источника. Следовательно, для того чтобы система давала действительное изображение, промежуточное изображение, которое получается после отражения лучей от зеркала, должно быть мнимым источником для линзы, то есть должно находиться справа от линзы.

В самом деле, из формулы рассеивающей линзы в случае мнимого источника

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$$

следует, что

$$f = \frac{dF}{F-d}. \qquad (1)$$

(Напомним, что d — расстояние от линзы до источника, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы.) Из (1) видно, что $f \geqslant 0$, если d положительно и не превышает F.

Таким образом, промежуточное изображение S_2 источника после зеркала (рис. 14) должно находиться справа от зеркала на расстоянии f_2 таком, что

$$F \leqslant f_2 \leqslant 2F. \qquad (2)$$

Источником для зеркала служит промежуточное изображение S_1 — мнимое изображение источника S, даваемое линзой после первого преломления лучей (см. рис. 14). Из формулы линзы для этого случая —

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F}$$

— находим

$$f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 + F}. \qquad (3)$$

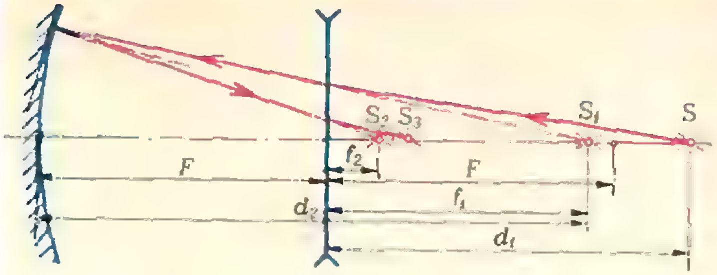


Рис. 14.

Расстояние d_1 от источника до линзы может меняться в пределах от 0 до ∞. При этом, как следует из формулы (3), f_1 меняется от 0 до F. Расстояние же $d_2 = F + f_1$ от изображения S_1 до зеркала меняется при этом от F до $2F$. Напомним, что это изображение служит источником для зеркала. Таким образом, нам нужно найти, при каком фокусном расстоянии F' зеркала изображение источника, находящегося от зеркала на расстоянии d_2 таком, что

$$F \leqslant d_2 \leqslant 2F, \tag{4а}$$

получается на расстоянии f_2 от зеркала таком, что

$$F \leqslant f_2 \leqslant 2F. \tag{4б}$$

Из формулы зеркала —

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F'}$$

— следует, что

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{d_2}. \tag{5}$$

Согласно условию (4б)

$$\frac{1}{2F} \leqslant \frac{1}{f_2} \leqslant \frac{1}{F},$$

так что правая часть равенства (5) лежит в пределах

$$\frac{1}{2F} \leqslant \frac{1}{F'} - \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{F}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{F'} \leqslant \frac{1}{F} + \frac{1}{d_2}.$$

Полученное неравенство должно выполняться при всех произвольных d_2, удовлетворяющих условию (4а). Согласно этому условию

$$\frac{1}{2F} \leqslant \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{F},$$

так что фокусное расстояние F' зеркала должно быть таким, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{F} \leqslant \frac{1}{F'} \leqslant \frac{1}{F} + \frac{1}{2F}.$$

Следовательно, $\frac{1}{F'} = \frac{3}{2F}$, или

$$F' = \frac{2}{3}F = 0{,}4 \text{ м}.$$

И. Слободецкий

В. Гутенмахер

Расстояние от точки до плоскости

В учебнике «Геометрия 10» есть несколько задач, в которых требуется найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости. Как ни странно, эти задачи вызывают некоторые затруднения у школьников (несмотря на то, что одна из таких задач — № 28, с. 10 — решена в тексте). Поэтому мы остановимся на этом вопросе немного подробнее.

Новая формула

Пусть $A\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка в координатном пространстве $Oxyz$ и α — плоскость, заданная уравнением $ax+by+cz+d=0$. Расстояние $\rho\,(A,\alpha)$ от точки A до плоскости α находится по формуле

$$\rho\,(A,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (*)$$

Эту формулу можно описать словами так:

Надо в выражение $ax+by+cz+d$ вместо переменных x, y, z подставить координаты точки A. Взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Вывод формулы

Вывод формулы (*) по существу повторяет решение задачи № 28, приведенной на с. 10—11 учебника «Геометрия 10».

Опустим из точки $A\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикуляр на плоскость α, заданную уравнением $ax+by+cz+d=0$; пусть B — точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью α; тогда $|AB|$ — расстояние от A до α (см. рисунок). Обозначим через $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ координаты точки B; тогда

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0),$$

откуда

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Поскольку вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен плоскости α, он коллинеарен вектору $\vec{n}$ с координатами $(a;\ b;\ c)$.

Это означает, что найдется такое число p, что

$$\overrightarrow{AB}=p\cdot\vec{n}. \qquad (1)$$

Из этого равенства следует, что

$$x_1-x_0=p\cdot a,\quad y_1-y_0=p\cdot b,\quad z_1-z_0=p\cdot c. \qquad (2)$$

Таким образом,

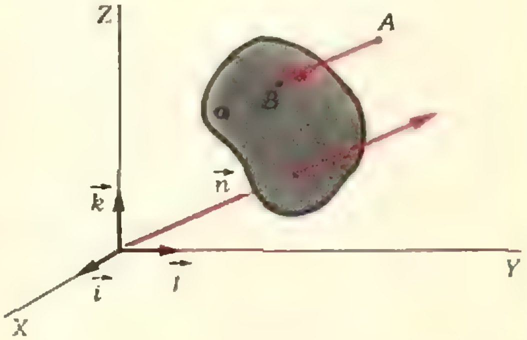
$$|AB|=\sqrt{p^2a^2+p^2b^2+p^2c^2}=|p|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \quad (3)$$

Осталось найти число $|p|$. Так как точка B принадлежит плоскости α, то $ax_1+by_1+cz_1+d=0$. Поскольку $x_1=x_0+pa$, $y_1=y_0+pb$, $z_1=z_0+pc$ (см. соотношение (2)), для p получаем уравнение

$$a\,(x_0+pa)+b\,(y_0+pb)+c\,(z_0+pc)+d=0,$$

из которого находим $|p|$:

$$|p|=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}.$$



Подставляя найденное значение $|p|$ в соотношение (3), получаем нужную формулу:

$$\rho(A, \alpha) = |AB| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Формула (*) позволяет уже легко решить любую задачу на вычисление расстояния от точки до плоскости. Приведем несколько примеров.

Задачи

Задача 1 *). *Найти расстояние от точки A $(-1; 3; 0)$ до плоскости α, заданной уравнением* $x - 3y - 2z + 5 = 0$.

Решение. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|-1 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Задача 2 **). *Вычислить расстояние от начала координат до плоскости* $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Решение. Нам надо найти расстояние от точки A $(0; 0; 0)$. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

Задача 3. *Вычислить расстояние между плоскостями α и β, заданными соответственно уравнениями:*

$$3x + 2y + 4z + 11 = 0$$

и

$$9x + 6y + 12z - 5 = 0.$$

Разделив обе части второго уравнения на 3, видим, что плоскости α и β: $3x + 2y + 4z + 11 = 0$ и $3x + 2y + 4z - \frac{5}{3} = 0$ параллельны.

Возьмем любую точку A $(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую плоскости β: положим, например, $x_0 = y_0 = 0$, тогда $z_0 = \frac{5}{12}$.

Легко понять, что расстояние между плоскостями α и β равно числу ρ (A, α), где $A = \left(0; 0; \frac{5}{12}\right)$. Применив формулу (*), получим

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \alpha) = \frac{\left|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{12} + 11\right|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{38}{3\sqrt{29}}.$$

Замечание. В общем случае расстояние между параллельными плоскостями α и β:

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

и

$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

находится по формуле

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (**)$$

Выведите формулу (**), повторив решение задачи 3.

В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. Вычислить расстояние от точки A $(1; 1; 1)$ до плоскости $x + y + z = 0$.
2. Вычислить расстояние от точки A $(1; 2; 3)$ до плоскости $x + y + z - 6 = 0$.
3. Найти расстояние от точки A $(x_0; y_0; 0)$ до плоскости $ax + by + d = 0$.
4. Найти уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 1 от плоскости $x + y + z = 0$.
5. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине — прямые. Найти длину ее высоты, если длины ее боковых ребер равны a, b и c.

---

*) Это задача № 298,1) из учебника «Геометрия 10». В учебнике опечатка — приведен неверный ответ.

**) Это задача № 29,2) из того же учебника.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Однажды в минуту отдыха друзья-мушкетеры Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян решили немного поразвлечься в перетягивании каната. Портос с д'Артаньяном легко перетянули Атоса с Арамисом. Но когда Портос стал в паре с Атосом, то победа против Арамиса с д'Артаньяном досталась им уже не так легко. А когда Портос с Арамисом оказались против Атоса с д'Артаньяном, то никакая из этих пар не смогла одолеть другую.

Определите, как мушкетеры распределяются по своей силе.

2. Будем подставлять в формулу

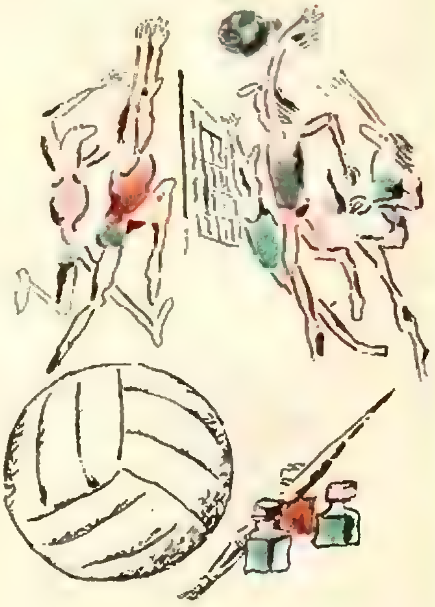
$$\frac{2n^2-1}{2n+1}$$

вместо n различные натуральные числа. При $n=1, 2, 3, 4, 5$ получим дроби $^1/_3$, $^7/_5$, $^{17}/_7$, $^{31}/_9$, $^{49}/_{11}$. Все эти дроби несократимы. А существует ли такое натуральное число n, при котором дробь будет сократимой?

3. Пете в домашнем задании надо было возвести некоторое целое число в квадрат. Петя по ошибке удвоил заданное число и получил двузначное число, записанное теми же цифрами, что и квадрат исходного числа, только в обратном порядке. Каков был верный ответ?

4. Найти наименьшее число, которое при последовательном делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, дает соответственно остатки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

5. Можно ли раскрасить волейбольный мяч, состоящий из 18 частей (см. рисунок), в три разных цвета так, чтобы соседние части не были раскрашены в один цвет? Если можно, то как?



СТАВЬ НА МИНУС!

Автор: Давайте поиграем...

Возмущенный читатель: Как? Я хочу заниматься математикой, а вы...

Автор: Но играть-то вы любите?

Недоумевающий читатель: Кто же не любит!? Но при чем здесь математика?

Автор: Вы увидите, как математика поможет вам найти беспроигрышную стратегию игры.

«Цзяньшицзы»

В двух кучках лежат камни, в первой — 7, во второй — 5. Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять либо любое число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Как играть, чтобы выиграть? Можно ли заранее предсказать, кто победит в этой игре — начинающий или его противник (если оба играют идеально)?

Как ответить на эти вопросы? Можно поставить эксперимент, то есть просто поиграть. Тогда вы быстро обнаружите, что начинающий всегда может выиграть, если он первым ходом возьмет 4 камня из большой кучки. А как вы думаете, какой будет ответ, если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4? А если в первой было 9, а во второй — 6?

«Ферзя — в угол!»

На поле f8 шахматной доски стоит ферзь (рис. 1). *Играют двое, ходят по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево по горизонтали, либо на несколько клеток влево-вниз по диагонали* (на рисунке 1 отмечены клетки, на которые можно попасть с поля f8 за один ход).

Проигрывает тот, кому некуда ходить (*и выигрывает, следовательно, тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол — на поле* a1). *Как играть, чтобы выиграть? Кто победит — начинающий или его партнер? И «кто — кого», если ферзь сначала стоял на поле* e8?

Можно опять попробовать поиграть. А можно поразмышлять.

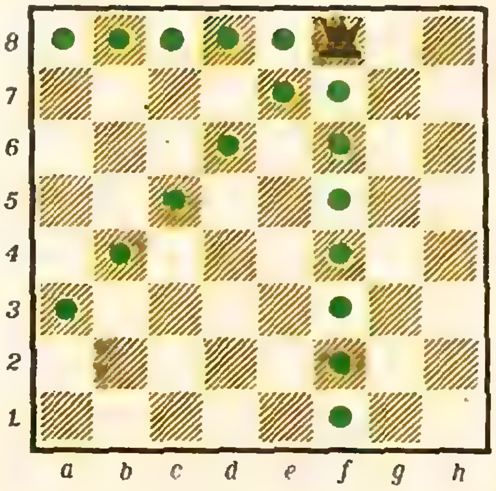


Рис. 1.

Строим теорию

Начнем со второй игры, причем с конца. Если ферзь стоит на поле a1, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле знаком «минус» (рис. 2).

Если ферзь стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на a1, то начинающий пойдет на a1 и выиграет. Поэтому отметим поля, с которых можно за один ход попасть на a1, знаком «плюс».

Пусть теперь ферзь стоит на поле c2. Проиграет начинающий или выиграет? Конечно, проиграет: при любом своем ходе он попадает на «плюс», после чего противник ставит ферзя на a1. Поэтому c2 отметим «минусом» (рис. 2).

А как поступать, если ферзь стоит на одной вертикали с c2, но выше? Конечно, идти на c2, на «минус»! Тогда, как мы уже выяснили, противник обязательно проиграет. Поля c3, c4, ..., c8 отметим плюсами, потому что игрок, который начинает с одного из этих полей, при правильной игре обязательно победит. По той же причине поставим плюсы на поля d2, e2, ..., h2 и d3, e4, ..., h7.

Можно ли более просто описать правила, по которым мы расставляем плюсы и минусы, не повторяя каждый раз рассуждений о том, какой из игроков выиграет? Конечно, можно! Вот они.

«Золотые правила»

(1) Если с поля некуда пойти — ставим минус.

(2) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное минусом,— ставим плюс.

(3) Если все ходы ведут на поля, отмеченные плюсами, — ставим минус.

Расстановка плюсов и минусов в соответствии с «золотыми правилами» для игры «ферзя — в угол!» приведена на рисунке 3.

Мы сформулировали правила, в соответствии с которыми начали расставлять плюсы и минусы, а затем уже по этим правилам закончили расстановку. Докажем теперь, что мы не ошиблись: *если ферзь стоит на поле, отмеченном плюсом, то начинающий выиграет, а в противном случае—проиграет.*

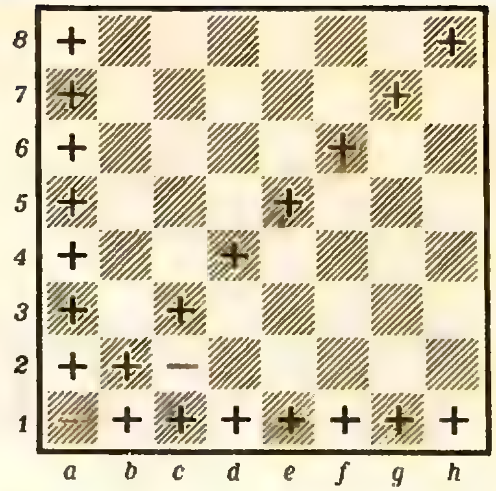


Рис. 2.

Доказать это очень легко, надо просто играть по правилу: «Ставь на минус!». По «золотому правилу» (2) первый ход можно сделать на минус. Тогда по «золотому правилу» (3) противник вынужден будет пойти на плюс. А начинающий — снова на минус, противник — опять на плюс. . . Так будет продолжаться, пока ферзь не попадет на поле, с которого никуда нельзя пойти — на a1. Попадет он туда как раз после хода начинающего, который тем самым выиграет.

Если же начальное поле отмечено минусом, то придется пойти на плюс. Тогда второй игрок применит правило «ставь на минус!» и выиграет.

Следовательно, если ферзь сначала стоял на f8, то начинающий при правильной игре победит, как бы хорошо ни играл его противник, а если на

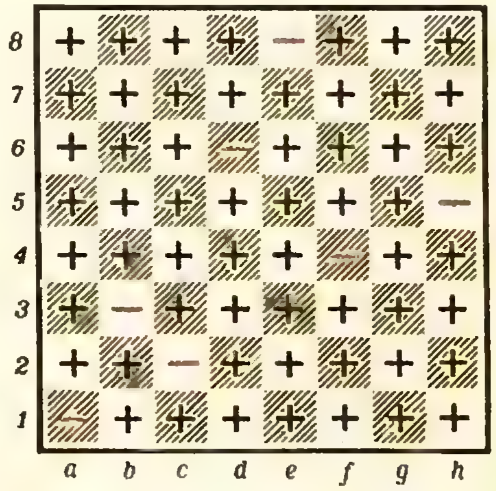


Рис. 3.

e8, то начинающий проиграет, если партнер достаточно умен.

Вернемся к «цзяньшицзы»

Автор: А зачем возвращаться? Мы уже знаем, как играть. Ведь игры «ферзя — в угол!» и «цзяньшицзы» одинаковы!

Читатель:???

Автор: Сейчас убедитесь.

На рисунке 1, относящемся к игре «ферзя — в угол!», под ферзем стоят 7 точек, а слева от ферзя — 5, как раз числа из игры «цзяньшицзы». Попробуем установить связь между этими двумя играми. Только камни расположим не как точки на рисунке 1, а так, как показано на рисунке 4, — за пределами доски.

Соответствие между позициями. Каждому положению ферзя на доске сопоставим две кучки камней: в первой — столько камней, сколько горизонталей находится под ферзем, а во второй — сколько вертикалей слева от ферзя. Тогда, обратно, каждый набор камней в двух кучках (но не более 7 в каждой) определяет положение ферзя на доске.

Контрольные вопросы

1. Каким полям доски соответствуют такие распределения камней по кучкам:

а) I — 5, II — 3;
б) I — 2, II — 7;
в) I — 6, II — 0;
г) I — 7, II — 7?

2. Какие распределения камней по кучкам соответствуют следующим полям доски:

а) e6;
б) c2;
в) a5?

Мы установили соответствие между позициями в двух играх: каждому распределению камней по кучкам соответствует поле шахматной доски и, наоборот, каждому полю доски соответствует пара кучек камней. Теперь легко установить соответствие и между возможными ходами. Если берется несколько камней из первой кучки, то ферзь сдвигается на столько же полей вниз, если из второй — ферзь сдвигается на столько же полей влево, а если камни взяты из обеих кучек сразу, то ферзь сдвигается влево-вниз по диагонали. Например, если первым ходом из каждой кучки берется по 2 камня, то ферзь ходит с f8 на d6.

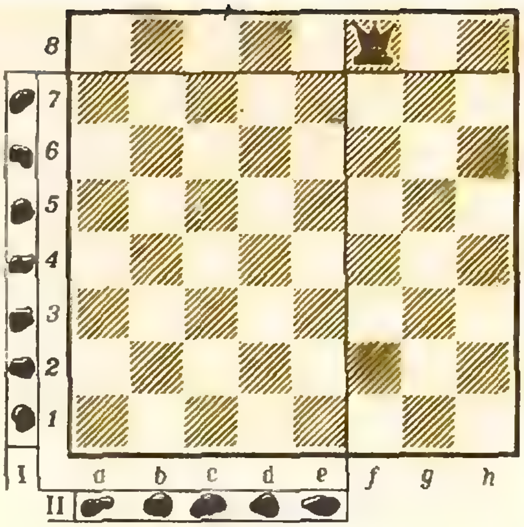


Рис. 4.

Изоморфизм игр

Вы видите, что совсем не нужно разрабатывать новую теорию для «цзяньшицзы», можно воспользоваться теорией для «ферзя — в угол!». Надо просто «перевести» позиции на шахматную доску и посмотреть, какие из них — выигрышные, а какие — проигрышные *).

Начальная позиция (7 камней в первой кучке, 5 — во второй) соответствует положению ферзя на f8. Начинающий выиграет, если он первым ходом пойдет на f4, или на e8, или на d6. На языке камней: если он возьмет четыре камня из первой кучки, или один — из второй, или по два из каждой. Теория помогла нам найти еще два способа выигрыша, которые не были обнаружены при эксперименте!

Если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4, то начинающий при разумной игре противника проиграет (почему?).

Пусть теперь в первой кучке — 9 камней, во второй — 6... Что делать? На шахматной доске эта позиция не умещается! Ну и что? Продолжим расстановку плюсов и минусов вправо и вверх, не ограничиваясь размерами доски (сделайте это сами на листе клетчатой бумаги). Начинающий выиграет, взяв по два камня из каждой кучки.

---

*) Честно говоря, игра «ферзя — в угол!» была придумана для того, чтобы придать наглядность разбору «цзяньшицзы» — легче смотреть на шахматную доску, чем на список позиций в «цзяньшицзы».

Итак, различие между играми «ферзя — в угол!» и «цзяньшицзы» — чисто внешнее: позиции и ходы одной игры соответствуют позициям и ходам другой. Такие игры называют «изоморфными».

Слово «изоморфизм» произошло от греческих слов «изос» (постоянный, неизменный) и «морфэ» (форма). В математике слово «изоморфизм» встречается очень часто — его употребляют, когда нужно отметить, что различие между объектами чисто внешнее, как между нашими двумя играми.

Одномерная теория

Мы научились расставлять плюсы и минусы на шахматной доске, но делаем это последовательно: начинаем с a1, потом отмечаем клетки, с которых можно попасть на a1, затем — те, с которых можно попасть только на уже отмеченные, и так далее. А нельзя ли указать правило, по которому можно сразу узнать, является поле выигрышным или проигрышным, не расставляя при этом плюсы и минусы на все предыдущие поля? Иногда можно. Мы разберем одну одномерную игру, то есть игру с одной кучкой камней (или, что то же самое, игру на полоске клетчатой бумаги).

Имеется полоска клетчатой бумаги длины n (клеток). На одной из клеток стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в передвижении фишки на 1, 2 *или* 3 *клетки влево. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Как играть, чтобы выиграть? При каких положениях фишки побеждает начинающий, а при каких — его партнер?*

Расстановка плюсов и минусов в этой игре проводится, конечно, по тем же «золотым правилам». Поле 1 — проигрышное, ставим на него минус (рис. 5); поля 2, 3, 4 — выигрышные (с них за один ход можно попасть на поле 1), ставим на них плюсы; поле 5 — проигрышное, ставим минус и так далее. Вы видите, что плюсы и минусы образуют периодическую последовательность с периодом из четырех знаков: — + + +, то есть на полях вида $4n+1$ стоят минусы, на остальных — плюсы.

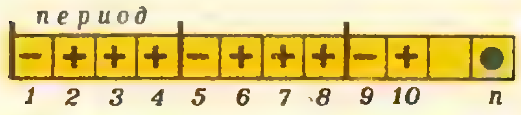


Рис. 5.

А будет ли периодичной последовательность плюсов и минусов в такой игре, если фишку можно передвигать лишь на 1 или 3 клетки влево? Этот и другие вопросы мы предоставим решить вам.

Задачи

Читатель: А они трудные?

Автор: Сначала идут легкие, потом — трудные, а последняя — проблема, ее и я решать не умею.

Читатель: А если я не смогу решить трудные задачи?

Автор: Тогда подождите следующего номера журнала, там будут указания к задачам.

Игры на шахматной доске

1 («Короля — в угол!»). *Король стоит на некотором поле шахматной доски. Играют двое, ходят королем по очереди (на 1 поле вниз, влево или влево-вниз по диагонали). Проигрывает тот, кому некуда ходить.*

Расставьте на доске «плюсы» и «минусы» по «золотым правилам» и тем самым выясните, когда выигрывает начинающий, а когда — его партнер. Можно ли узнать, плюс или минус стоит на данном поле, не нанося знаки на все предыдущие поля, то есть сразу по номеру вертикали и горизонтали данного поля?

2. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или на 1 или 2 клетки вниз (а по диагонали ходить нельзя).

3. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или вниз или на 1 клетку влево-вниз по диагонали.

4 («Короля — в угол дырявой доски!»). Из шахматной доски вырезали несколько полей (см. рис. 6). Условия игры — как в задаче 1, но ставить короля в «дырки» запрещается. Вопросы — те же.

5 («Коня — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля конем, которому разрешено ходить на 2 клетки вниз и затем на 1 влево или вправо или на 2 влево и затем на 1 вверх или вниз (но в пределах доски). Вопросы — те же.

6 («Ладью — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля ладьей, которая может ходить на любое число полей, но только либо вниз, либо влево (но не по диагонали). Вопросы — те же.

Одномерные игры

7. *На одном из полей полоски клетчатой бумаги длины n* (см. рис. 5) *стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Проигрывает тот, кому некуда ходить.*

Расставьте на полях «плюсы» и «минусы» (по «золотым правилам») и попробуйте найти период расстановки (если он есть), если ход

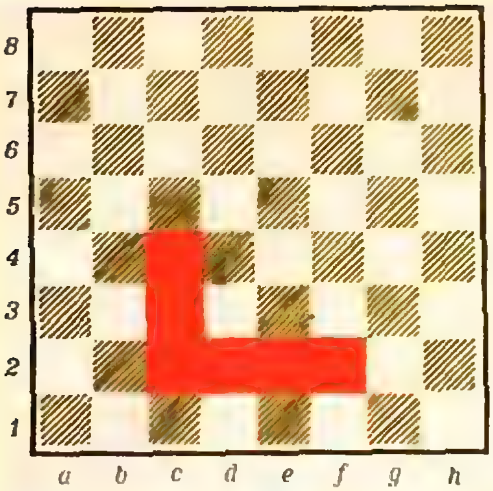


Рис. 6.

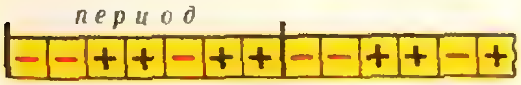


Рис. 7.

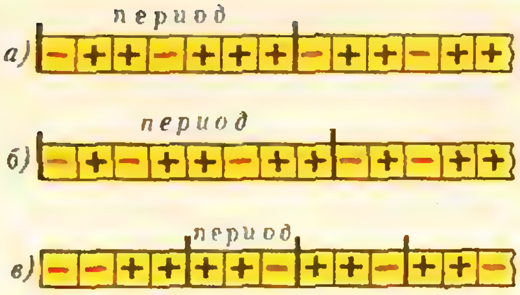

период
а) − + + − + + + − + + − + +
период
б) − + − + + − + + − + − + +
период
в) − − + + + + − + + − + + −

Рис. 8.

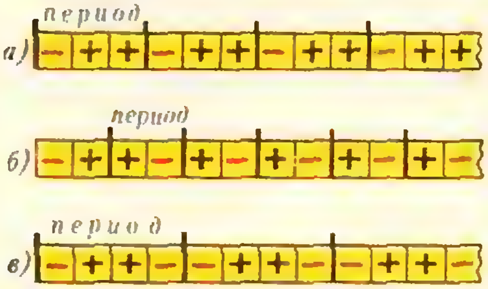

период
а) − + + − + + − + + − + +
период
б) − + + − + − + − + − + −
период
в) − + + − − + + − − + + −

Рис. 9.

состоит в перемещении фишки влево на

а) 1 или 3 клетки;
б) 2 или 5 клеток;
в) 2 или 4 клетки;
г) 2, 4 или 7 клеток;
д) 2, 3 или 5 клеток;
е) 2, 3, 5 или 7 клеток.

8. Пусть в условиях задачи 7 ходить можно лишь на a или b клеток влево.

а) Докажите, что расстановка «плюсов» и «минусов» периодична и повторяется, во всяком случае, через $a+b$ клеток.

б) Найдите формулу, выражающую длину наименьшего периода через a и b. Опишите строение этого периода.

9 (обратная задача). Для некоторых a и b нарисована полоска и на ней расставлены «плюсы» и «минусы». Можно ли по этой полоске определить a и b (например, для полоски на рисунке 7)?

10. Докажите, что, каков бы ни был набор возможных ходов, расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске имеет период (который начинается, быть может, не с самой первой слева клетки, а с некоторой другой).

11. Для некоторого набора возможных ходов на полоске расставлены «плюсы» и «минусы» (рис. 8). Можно ли по этой полоске восстановить набор возможных ходов? Однозначно ли он восстанавливается, то есть может ли разным наборам ходов соответствовать одна и та же расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске?

12. На полоске расставлены «плюсы» и «минусы», причем с некоторого места расстановка периодична (рис. 9). Всегда ли можно придумать набор возможных ходов, для которого расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске будет иметь именно такой вид?

13* (проблема). Попробуйте

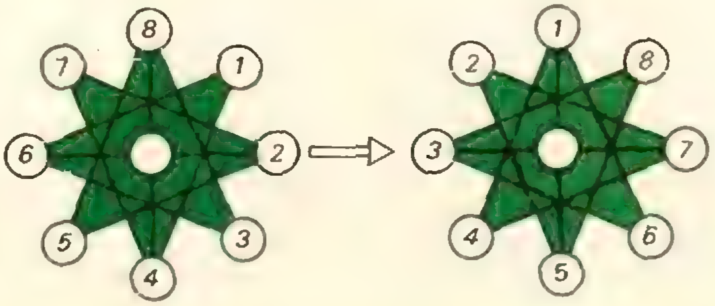
а) найти формулу, выражающую длину периода, если перемещать фишку можно влево на a_1, a_2, …, a_{k-1} или a_k клеток;

б) описать все игры, в которых период начинается с первой клетки.

Восемь фишек

На концах восьмиконечной звезды расположены фишки с номерами от 1 до 8 (см. рисунок). Передвигая фишки только по прямым линиям, расположите фишки в обратном порядке. Сколько ходов вам для этого потребуется?

Л. Мочалов



Л. Баканина

Закон сохранения импульса при соударениях

Закон сохранения импульса (количества движения) выполняется для замкнутых систем, то есть таких, которые включают в себя все взаимодействующие тела, так что ни на одно из тел системы не действуют внешние силы. Однако при решении многих физических задач оказывается, что импульс может оставаться постоянным и для незамкнутых систем. Правда, в этом случае количество движения сохраняется лишь приближенно. Попытаемся разобраться, в чем тут дело.

Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ незамкнутой системы равно суммарному импульсу внешних сил. Обозначим через $\vec{F}_{\text{ср}}$ среднее значение результирующей внешней силы, действующей на систему в течение промежутка времени Δt. Тогда

$$\Delta\vec{p}=\vec{F}_{\text{ср}}\Delta t.$$

Если абсолютная величина этой силы не слишком велика и время, в течение которого действует сила, мало, то произведение $|\vec{F}_{\text{ср}}|\,\Delta t$ тоже будет малым. В таком случае возникает необходимость оценки, с какой точностью можно считать импульс системы неизменным.

Кроме того, не следует забывать, что импульс — вектор, и, следовательно, можно говорить о сохранении проекции этого вектора на какое-либо направление. Действительно, если система не замкнута, но внешние силы таковы, что сумма проекций всех сил на некоторое направление равна нулю, то проекция импульса системы на это направление остается величиной постоянной. Незамкнутая система в этом направлении аналогична замкнутой.

Кратковременные взаимодействия возникают, например, при взрывах, выстрелах, соударениях. Такого типа задачи мы и обсудим. Постараемся в каждом конкретном случае выяснить, выполняется или не выполняется закон сохранения импульса и от чего это зависит.

Задача 1. *Из пушки, соскальзывающей без трения по наклонной плоскости и прошедшей уже путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении (рис. 1). При какой скорости снаряда пушка остановится после выстрела? Масса снаряда m много меньше массы пушки M, угол наклона плоскости α.*

Перед выстрелом пушка (вместе со снарядом), прошедшая путь l, имеет импульс $(M+m)\vec{v}_0$, направленный вдоль наклонной плоскости. Модуль этого импульса можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{(M+m)\,|\vec{v}_0|^2}{2}=(M+m)\,|\vec{g}|\,l\sin\alpha,$$

и

$$(M+m)\,|\vec{v}_0|=(M+m)\sqrt{2\,|\vec{g}|\,l\sin\alpha}.$$

Сразу после выстрела пушка остановилась, а снаряд полетел в горизонтальном направлении. Таким образом, несмотря на кратковременность взаимодействия пушки и снаряда, им-

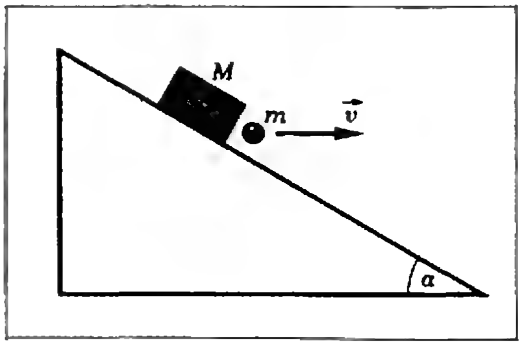


Рис. 1.

пульс этой системы не сохраняется. Почему же?

Во время выстрела резко возрастает сила давления пушки на наклонную плоскость, а значит, возрастает и сила реакции со стороны плоскости, так что импульс этой силы оказывается достаточно большим. Он-то и изменяет суммарный импульс пушки и снаряда.

Однако в направлении вдоль наклонной плоскости проекция силы реакции равна нулю, а проекция импульса силы тяжести ($(M+m)|\vec{g}|\times$ $\times\sin\alpha\cdot\Delta t$) за малое время выстрела Δt мала и при выстреле не увеличивается. Поэтому можно, с некоторой степенью точности, считать, что в направлении вдоль наклонной плоскости проекция количества движения системы пушка — снаряд сохраняется. Следовательно, проекция суммарного импульса пушки и снаряда до выстрела равна проекции снаряда после выстрела (пушка покоится):

$$(M+m)\sqrt{2|\vec{g}|l\sin\alpha}=m|\vec{v}|\cos\alpha.$$

Отсюда модуль скорости снаряда непосредственно после выстрела

$$|\vec{v}|=\frac{(M+m)\sqrt{2|\vec{g}|l\sin\alpha}}{m\cos\alpha}\approx$$

$$\approx\frac{M\sqrt{2|\vec{g}|l\sin\alpha}}{m\cos\alpha}.$$

При решении этой задачи мы полагали, что в направлении вдоль наклонной плоскости система пушка — снаряд ведет себя как замкнутая система. Однако оценить, с какой степенью точности это справедливо, мы не можем, так как система взаимодействующих тел сложная и нет необходимых данных для такой оценки.

Разберем теперь две задачи с более простым взаимодействием, где такую оценку можно сделать.

Задача 2. *В деревянный шар массы* $M=1$ *кг, падающий вниз со скоростью* $|\vec{V}_0|=1$ *м/сек, стреляют снизу из ружья и пробивают его насквозь. Какую скорость будет иметь шар сразу после этого? Скорость пули при подлете к шару* $|\vec{v}_0|=300$ *м/сек, после вылета из шара* $|\vec{v}|=100$ *м/сек, масса пули* $m=10$ *г.*

Оценим, с какой точностью можно считать систему шар — пуля замкнутой во время их взаимодействия. Другими словами, выясним, можно ли пренебречь импульсом силы тяжести за это время.

Время взаимодействия $\Delta t\approx\dfrac{d}{|\vec{v}_{\text{ср}}|}$,

где d — диаметр шара, а $\vec{v}_{\text{ср}}$ — средняя скорость пули внутри шара. Диаметр шара можно оценить, зная, что плотность дерева ρ приблизительно равна плотности воды $\rho_{\text{в}}=10^3$ *кг/м*^{3}:

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\rho=M,\ \text{и}$$

а $$d=\sqrt[3]{\frac{6M}{\pi\rho}}\approx0{,}1\ \textit{м},$$

$$|\vec{v}_{\text{ср}}|\approx\frac{|\vec{v}_0|+|\vec{v}|}{2}=200\ \textit{м/сек}.$$

Таким образом, $\Delta t\approx5\cdot10^{-4}$ *сек*. Импульс силы тяжести системы за это время (а значит, и изменение суммарного импульса шара и пули)

$$|\vec{p}|=(M+m)|\vec{g}|\Delta t\approx5\cdot10^{-3}\ \textit{н}\cdot\textit{сек}.$$

Количество движения системы перед взаимодействием

$$|\vec{p}_0|=m|\vec{v}_0|-M|\vec{V}_0|=2\ \textit{н}\cdot\textit{сек}.$$

Тогда отношение

$$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}_0|}=\frac{|\Delta\vec{p}_0|}{|\vec{p}_0|}\approx2\cdot10^{-3}=0{,}2\%,$$

и, следовательно, с точностью до 0,2% можно считать, что во время взаимодействия импульс системы не изменяется.

Запишем закон сохранения для проекции импульса на ось, направленную вертикально вверх:

$$mv_0+MV_0=mv+MV,$$

или

$$m|\vec{v}_0|-M|\vec{V}_0|=m|\vec{v}|+MV.$$

Отсюда проекция скорости шара после взаимодействия

$$V=\frac{m|\vec{v}_0|-M|\vec{V}_0|-m|\vec{v}|}{M}=1\ \textit{м/сек},$$

то есть шар начнет двигаться вверх со скоростью 1 *м/сек*.

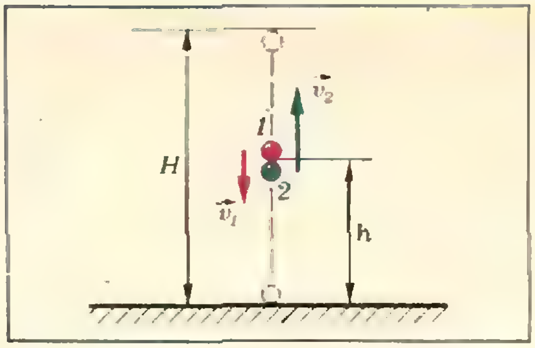


Рис. 2.

Задача 3. *Шарик бросают вертикально вверх со скоростью $|\vec{v}_0| = 1$ м/сек. Когда он достиг верхней точки своего подъема, бросают еще такой же шарик с начальной скоростью $2|\vec{v}_0|$. Определить скорости шариков после столкновения, если столкновение можно считать абсолютно упругим.*

Аналогично предыдущей задаче прежде всего оценим, с какой степенью точности систему двух шариков во время соударения можно считать замкнутой. Для этого найдем импульс системы до удара, импульс силы тяжести за время удара и сравним их между собой.

Пусть шарики столкнулись на высоте h через время t после начала движения второго шарика (рис. 2). Тогда для первого шарика

$$h = H - \frac{|\vec{g}|t^2}{2} = \frac{|\vec{v}_0|^2}{2|\vec{g}|} - \frac{|\vec{g}|t^2}{2},$$

где $H = \frac{|\vec{v}_0|^2}{2|\vec{g}|}$ — максимальная высота подъема. Для второго шарика

$$h = 2|\vec{v}_0|t - \frac{|\vec{g}|t^2}{2}.$$

Отсюда $t = \frac{|\vec{v}_0|}{4|\vec{g}|}$, и скорости обоих шариков непосредственно перед столкновением равны

$$|\vec{v}_1| = |\vec{g}|t = \frac{|\vec{v}_0|}{4}.$$

$$|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_0| - |\vec{g}|t = \frac{7|\vec{v}_0|}{4},$$

причем первый шарик движется вниз, а второй — вверх.

Итак, количество движения системы до взаимодействия

$$|\vec{p}_0| = m|\vec{v}_2| - m|\vec{v}_1| = 1{,}5\,m|\vec{v}_0|.$$

Теперь попытаемся оценить время взаимодействия и импульс силы тяжести за это время. Для этого мы должны представить себе, как происходит процесс соударения. Рассмотрим вначале соударение торцами двух одинаковых стержней. При ударе в торце возникает упругая деформация, которая распространяется вдоль стержня, то есть в стержне возникает звуковая волна. Дойдя до противоположного конца стержня, волна отражается и возвращается обратно. Можно сказать, что на этом процесс соударения заканчивается, и время взаимодействия стержней равно времени прохождения звуковой волны вдоль стержня и обратно. На самом деле картина взаимодействия гораздо сложнее, а в случае шариков, где возникающая упругая волна не плоская, — тем более. Однако для оценки и здесь будем считать, что с точностью до порядка величины время соударения равно времени распространения звуковой волны внутри шарика: $\Delta t \sim \frac{d}{v_{\text{зв}}}$. Скорость звука в твердых телах порядка нескольких километров в секунду. Если диаметр шарика порядка сантиметра, то $\Delta t \sim 10^{-5}$ *сек*, и импульс силы тяжести $\vec{p}$ по абсолютной величине во много раз меньше импульса шариков до взаимодействия:

$$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}_0|} = \frac{2m|\vec{g}|\Delta t}{1{,}5m|\vec{v}_0|} \sim 10^{-4}.$$

Таким образом, и в этом случае мы можем считать систему соударяющихся шариков замкнутой. (Конечно, дальнейшее движение шариков существенно зависит от силы тяжести.)

Так как удар шариков абсолютно упругий, воспользуемся законами сохранения механической энергии и проекции импульса на ось, направленную вертикально вверх:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(v_1')^2}{2} + \frac{m(v_2')^2}{2},$$

$$mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2'.$$

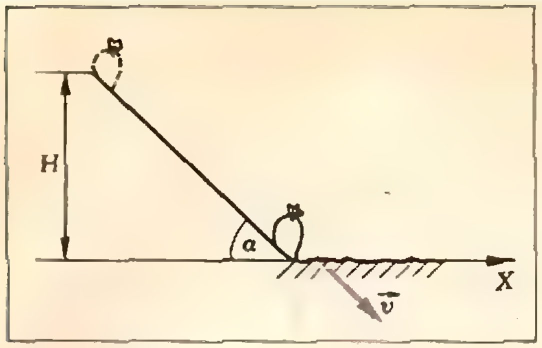


Рис. 3.

Подставив сюда соответствующие значения для v_1 и v_2:

$$v_1 = -|\vec v_1| = -\frac{|\vec v_0|}{4},$$

$$v_2 = |\vec v_2| = \frac{7|\vec v_0|}{4},$$

найдем

$$v_1' = v_2 = \frac{7|\vec v_0|}{4} \text{ и } v_2' = v_1 = -\frac{|\vec v_0|}{4}$$

— при упругом ударе шарики равных масс обмениваются скоростями.

Не следует, однако, думать, что всегда при соударениях можно пренебречь действием внешних сил и считать систему замкнутой. Для примера рассмотрим такую задачу.

Задача 4. *Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклоненной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный шероховатый пол. Коэффициент трения мешка о пол $\mu = 0{,}7$. Где остановится мешок?*

После спуска с доски мешок имеет скорость $\vec v$, направленную вдоль доски (рис. 3). Ее абсолютную величину можно найти из закона сохранения механической энергии, так как доска гладкая и потерь энергии нет:

$$|\vec v| = \sqrt{2|\vec g|H}.$$

Посмотрим, как меняются при соударении с полом проекции импульса мешка на горизонтальную и вертикальную оси. Вертикальная проекция после удара обращается в нуль — мешок неупругий и не подпрыгивает после удара. Это означает, что во время соударения на него действует направленная вертикально вверх сила, импульс которой как раз равен вертикальной проекции импульса мешка непосредственно перед соударением. Этой силой может быть только сила реакции $\vec N_{\text{ср}}$ со стороны пола, следовательно,

$$|\vec N_{\text{ср}}|\Delta t = m|\vec v|\sin\alpha.$$

В горизонтальном направлении на мешок действует сила трения скольжения, модуль которой $|\vec F_{\text{тр}}| = \mu|\vec N_{\text{ср}}|$. Импульс этой силы за время удара равен

$$|\vec F_{\text{тр}}|\Delta t = \mu m|\vec v|\sin\alpha,$$

то есть не зависит ни от того, по какому закону изменяется сила реакции опоры (а значит, и сила давления мешка на пол), ни от времени соударения. Найдем изменение горизонтальной проекции импульса мешка. Направим ось X по горизонтали вправо, тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$mv_x' - mv_x = -|\vec F_{\text{тр}}|\Delta t,$$

или

$$v_x' - |\vec v|\cos\alpha = -\mu|\vec v|\sin\alpha.$$

Отсюда проекция скорости, с которой мешок начнет двигаться по полу,

$$v_x' = |\vec v|(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = -0{,}1|\vec v|.$$

Что означает знак «минус»? Формально знак «минус» говорит о том, что после удара мешок должен двигаться влево, или, другими словами, что импульс силы трения оказался больше первоначальной горизонтальной проекции импульса мешка. Значит, в какой-то момент в процессе соударения проекция скорости мешка на ось X обратилась в нуль. Начиная с этого момента, наше решение становится неверным. Действительно, модуль силы трения равен $\mu|\vec N_{\text{ср}}|$ только при скольжении, а в состоянии покоя сила трения может принимать любые значения от 0 до $\mu|\vec N_{\text{ср}}|$ в зависимости от того, какие силы (кроме силы трения) действуют на тело. В нашем случае никакие другие силы не имеют проекций в горизонтальном направлении, следовательно, в тот момент, когда горизонтальная проекция скорости мешка обратилась в нуль, сила

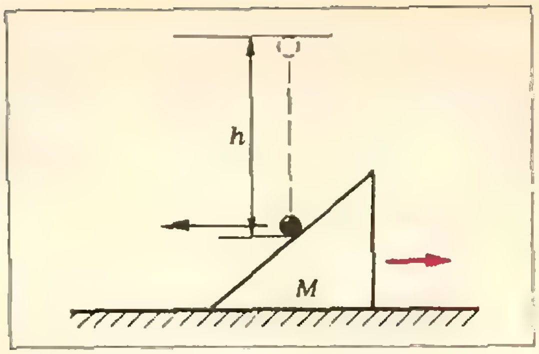


Рис. 4.

трения тоже обращается в нуль. Таким образом, мешок по полу вообще двигаться не будет!

Наконец, обсудим еще одну достаточно известную задачу на соударение тел. При решении этой задачи обычно используют довольно грубые приближения, никак не оговаривая при этом ни то, что это приближение, ни при каких условиях им можно пользоваться.

Задача 5. *На стоящий на гладкой горизонтальной поверхности клин массы M с высоты h падает шар массы m и отскакивает в горизонтальном направлении (рис. 4). Найти горизонтальную проекцию скорости клина $\vec{V}$ после удара. Трением пренебречь, удар считать абсолютно упругим.*

В отличие от всех предыдущих задач здесь нужно рассматривать соударение не двух, а трех тел — шарика, клина и горизонтальной плоскости. В общем случае, не делая никаких дополнительных предположений о механизме удара, решить эту задачу нельзя. В наиболее распространенном решении этой задачи неявно (без всяких оговорок) предполагается, что соударения шарика с клином и клина с горизонтальной плоскостью происходят одновременно, а клин после соударения имеет только горизонтальную проекцию скорости. Затем записываются уравнения законов сохранения механической энергии и импульса:

$$m|\vec{g}|h=\frac{MV_x^2}{2}+\frac{mv_x^2}{2},$$

$$MV_x+mv_x=0,$$

где V_x и v_x — соответственно проекции скоростей клина и шарика на горизонтальную ось, направленную вправо. Отсюда

$$V_x=\sqrt{2|\vec{g}|h\frac{m^2}{M(M+m)}}.$$

Однако в таком решении совершенно не ясно, куда делась вертикальная проекция импульса шарика. Ведь если соударение абсолютно упругое, вертикальная проекция импульса системы не исчезает, а лишь меняет знак! Шарик после удара отскакивает в горизонтальном направлении, плоскость вообще неподвижна. Значит, клин после удара обязательно должен подпрыгнуть. А энергия, связанная с этим движением, в приведенном решении не учитывается.

Физической картине удара больше соответствует предположение о том, что вначале шарик соударяется только с клином, а потом клин, получивший некоторую скорость в результате этого соударения, взаимодействует с горизонтальной плоскостью. После первого соударения вертикальная проекция скорости клина

$$V_y=\frac{m}{M}\sqrt{2|\vec{g}|h},$$

а горизонтальные проекции скоростей клина и шарика, как и в первом решении, связаны соотношением

$$MV_x+mv_x=0,\ \text{или}\ v_x=-\frac{M}{m}V_x.$$

Тогда закон сохранения энергии можно записать в виде

$$m|\vec{g}|h=\frac{mv_x^2}{2}+\frac{MV_x^2}{2}+\frac{MV_y^2}{2}.$$

Подставив сюда соответствующие выражения для v_x и V_y, найдем горизонтальную проекцию скорости клина:

$$V_x=\sqrt{2|\vec{g}|h\frac{m^2(M-m)}{M^2(M+m)}}$$

Таким образом, задачу о соударении трех тел мы свели к задаче двух последовательных попарных соударений (второе соударение для решения задачи нам не понадобилось). При этом мы считали, что клин после соударения с шариком движется чисто поступательно. Это может быть только в том случае, если сила давления шарика $\vec{N}$ во время удара проходит

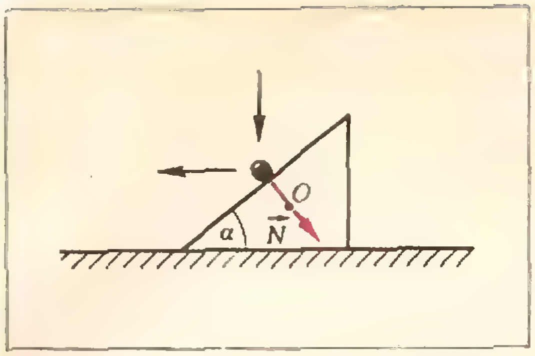


Рис. 5.

через центр тяжести O клина (рис. 5). Кроме того, заметим, что для того чтобы шарик после соударения отскочил горизонтально, угол клина α должен иметь вполне определенную величину, зависящую от масс шарика и клина.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. В центр шара массы $m_1 = 300$ *г*, лежащего на краю стола, попадает горизонтально летящая пуля массы $m_2 = 10$ *г* и пробивает его насквозь. Шар падает на пол на расстоянии $s_1 = 6$ *м* от стола, а пуля — на расстоянии $s_2 = 15$ *м*. Высота стола $H = 1$ *м*. Определить первоначальную скорость пули.

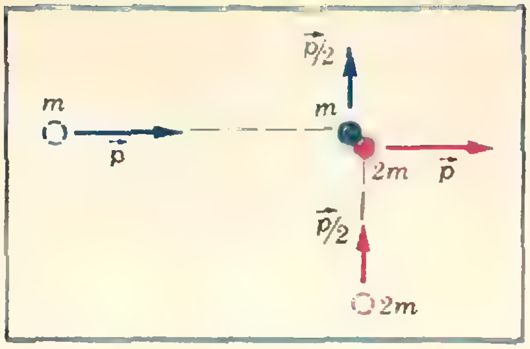


Рис. 6.

2. Две частицы с массами m и $2m$, имеющие импульсы $\vec{p}$ и $\vec{p}/2$, движутся по взаимно перпендикулярным направлениям. После соударения частицы обмениваются импульсами (рис. 6). Определить выделившееся при ударе количество теплоты.

3. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты $H = 2$ *м* по доске, наклоненной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения мешка о доску и горизонтальную поверхность $\mu = 0{,}5$. На каком расстоянии от конца доски остановится мешок?

Примерные варианты вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

Во втором номере нашего журнала была опубликована новая программа вступительных экзаменов в вузы по математике. Ниже мы приводим примерные варианты и задачи вступительных экзаменов по математике, проводимых по новой программе.

I. Для факультетов с повышенной математической подготовкой (факультеты прикладной математики втузов).

Вариант 1

1. По двум улицам движутся к перекрестку две автомашины с постоянными скоростями 40 *км/час* и 50 *км/час*. Улицы пересекаются под углом в 60°. В начальный момент времени машины находятся на расстоянии 5 *км* и 4 *км* от перекрестка соответственно. Через какое время расстояние между ними станет наименьшим? Рассмотрите два возможных случая.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

3. Найти все значения x, лежащие в интервале $]-\pi, \pi[$ и удовлетворяющие уравнению $4-10\cos^2 x = \sin 2x$.

4. В конус вписан цилиндр, у которого диагонали осевого сечения соответственно параллельны двум образующим конуса. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α, ее длина равна l. Найти объем фигуры, ограниченной основанием конуса и боковыми поверхностями цилиндра и конуса.

5. В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = 60°$. Найти величину угла между медианами BD и CF, если $|AB| = 6$ и $|AC| = 4$.

Вариант 2

1. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

2. Указать на координатной плоскости множество точек, координаты которых являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} y > x^2 - x, \\ 2x + y < 2. \end{cases}$$

3. Найти x, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{C_4^x} = \frac{1}{C_5^x} + \frac{1}{C_6^x},$$

где C_n^x — число сочетаний.

4. Правильный тетраэдр содержится в шаре радиуса R так, что три его вершины принадлежат сфере, а четвертая вершина отстоит от центра сферы на расстояние d. Найти ребро тетраэдра.

5. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.

Л. Садовский, Э. Шувалова

II. Для остальных факультетов втузов.

1. Найти область определения функций:

а) $y = \lg(x-1) - \arcsin\dfrac{x}{3}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-10x+9}}{\log_2(x+1)}$;

г) $y = \lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 14))$.

2. Дана функция $f(x) = x^4 + 5x^2 + 1$. Показать, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^4}$.

3. $f(x) = x^2$. Найти:

а) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

б) $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

4. Дана функция $f(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$. Показать, что $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

5. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^2+1}{x^3-x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

6. Найти экстремальные значения следующих функций и указать, при каком значении x они достигаются:

а) $y = 2x^2 + 4x + 7$;

б) $y = |8x^2 - 8x - 6|$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

9. Из всех цилиндров, у которых площадь полной поверхности равна 48 π *см*^{2}, найти тот, который имеет наибольший объем.

10. Требуется сделать из жести коробку без крышки с квадратным основанием наибольшего объема, площадь поверхности которой была бы равна 12 *см*^{2}. Определить размеры коробки.

11. В разложении бинома

$$\left(\frac{1}{2}a^2b - 2ab^3\right)^n$$

вычислить четвертый член, если отношение биномиального коэффициента третьего члена разложения к биномиальному коэффициенту пятого члена равно 2.

12. Доказать методом математической индукции формулы:

а) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$.

13. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные числа, не содержащие одинаковых цифр. Сколько среди них чисел, содержащих цифры 2, 4 и 5 одновременно?

14. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

15. В треугольнике ABC точка O есть точка пересечения трех медиан. Показать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

16. Цилиндр, радиус основания которого равен 1 *см* и высота 3 *см*, вписан в шар так, что его основания являются сечениями шара. Найти отношение площади поверхности шара к площади поверхности цилиндра.

17. Полукруг разделен на три конгруэнтных сектора двумя радиусами. Найти отношение объемов фигур, полученных при вращении этих секторов вокруг диаметра полукруга.

18. Дана трапеция $ABCD$, в которой $\widehat{BAD} = 60°$. Через большее основание AD проведена плоскость под углом 45° к боковой стороне AB. Найдите отношение площади данной трапеции к площади ее проекции на проведенную плоскость.

19. В трехгранном угле два плоских угла равны по 60°, третий равен 90°. Найдите угол наклона ребра, противолежащего прямому плоскому углу, к плоскости этого угла.

20. Треугольник ABC, у которого $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 60°$, вписан в единичную окружность с центром в точке O. Вычислите скалярные произведения:

1) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$; 2) $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$; 3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

В. Треногин, Н. Квачёва

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ниже приводятся образцы вариантов вступительного письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике для поступавших на некоторые факультеты МГУ в 1976 году.

Математика

Отделение политэкономии экономического факультета

1. Через 8 дней после того, как бригада лесорубов начала прокладывать просеку в тайге, к ней присоединилась вторая бригада, и они вместе выполнили оставшуюся часть работы. Если бы бригады поменялись ролями, то просека была бы прорублена на 2 дня быстрее. Сколько дней бригады работали вместе, если известно, что первая может выполнить 10% всей работы на 4 дня быстрее, чем вторая — треть работы.

2. Решить уравнение

$$5\,\mathrm{tg}\,x = 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD угла ABC. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BDC, если

$$|AB| = 42, \quad |BC| = 30, \quad \cos\widehat{BAC} = \frac{5}{7}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2-1)^{2/5}(\mathrm{tg}\,y+3)^3 = 32, \\ 2\log_{(\mathrm{tg}\,y+3)}(x^2-1) - \log_{(\mathrm{tg}\,y+3)}2 = 5. \end{cases}$$

5. Решить уравнение

$$\frac{7}{2}x^2 - \frac{7x}{\sqrt{3-x}} - 22x + 3|2-7x| + \frac{|2-7x|}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{2}x|2-7x| - \frac{2}{\sqrt{3-x}} - 6.$$

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. Решить неравенство

$$[\lg(x+1)]^3 - 4[\lg(x+1)]^2 + 3 \leqslant 0.$$

2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{ctg}^2(x-y) - (1+\sqrt{3})\,\mathrm{ctg}(x-y) + \sqrt{3} = 0, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

3. В треугольнике ABC точка M, лежащая на стороне AB, соединена с вершиной C отрезком MC. Известно, что $|AM| = 1$, $|MB| = 3$, $\widehat{ACM} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 60^\circ$. Найти периметр треугольника ABC.

4. Основание ABC треугольной пирамиды $KABC$ является прямоугольным треугольником ($\widehat{ACB} = 90^\circ$). Ребро KC перпендикулярно основанию ABC, а его длина равна $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; площадь грани AKB равна 5. Какова наибольшая возможная в этих условиях площадь основания ABC?

Факультет психологии

1. Поезд, двигаясь сначала один час в гору, а потом 10 часов по ровному месту, проходит 840 *км*. Если бы подъем был длиной 10 *км*, то за два часа поезд прошел бы 153 *км*. Найти скорости поезда при движении в гору и по ровному месту, если известно, что скорость по ровному месту больше, чем 110% скорости поезда в гору.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AD и CE. Известно, что $|AD| = 5$, $\widehat{DAC} = \frac{\pi}{8}$, $\widehat{ECA} = \frac{\pi}{4}$. Определить площадь треугольника ABC.

3. Решить уравнение

$$5\cdot x^{\log_{16} x} - 3\cdot 5^{\log_{16} x^2} = 0$$

Доказать, что все корни этого уравнения являются рациональными числами.

4. Найти все корни уравнения

$$\mathrm{tg}\,x + \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 4\,\mathrm{ctg}^2 x + 4} = 4.$$

5. Из всех решений (x, y) уравнения

$$x^2y - x^2 + 2xy - x + 2y = 1$$

найти те решения, для которых y принимает наибольшее значение.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготовляла только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой автоматической линии потребовалось бы не менее 2727 опе-

раций. Сколько операций требуется автоматической линии для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей?

2. Найти все целые числа z, удовлетворяющие неравенству $\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{6-z}$.

3. Решить уравнение

$$\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

4. Решить уравнение

$$\log_2(2\sin^2 2x+1) - 2\log_2\cos x = 1+\log_2 5.$$

5. В шар вписана прямая призма, в основании которой — правильный треугольник, а длина высоты призмы равна длине стороны основания. Найти отношение объема этой призмы к объему вписанной в тот же шар правильной шестиугольной пирамиды, длина бокового ребра которой равна удвоенной длине стороны основания.

Физика

Географический факультет и факультет почвоведения

1. В вертикальном цилиндре, закрытом сверху поршнем, находится газ при температуре $t_1 = 20°C$. Площадь поршня $S = 20$ *см*², его масса $m = 2$ *кг*. На поршень положили груз массой $M = 5$ *кг*. До какой температуры t_2 нужно нагреть газ, чтобы объем газа составил долю $k = 0{,}9$ первоначальной величины? Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м*².

2. Со дна водоема глубиной $H = 80$ *м* начал подниматься вверх шарообразный пузырек воздуха. На какой глубине h радиус этого пузырька увеличится в $k = 2$ раз? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м*². Температуру считать постоянной.

3. Шарик массы $m = 10$ *г*, имеющий электрический заряд $q = 10^{-4}$ *к*, брошен вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. Чему должна быть равна напряженность $\vec{E}$ горизонтально направленного электростатического поля, чтобы в высшей точке траектории кинетическая энергия шарика была равна начальной? Сопротивление движению отсутствует.

4. Тело имеет форму конуса, у которого угол между осью и образующей $\alpha = 60°$. Его погрузили целиком в прозрачную жидкость вершиной вниз. При этом оказалось, что боковую поверхность тела нельзя видеть ни из одной точки пространства над поверхностью жидкости. Каково должно быть минимальное значение показателя преломления жидкости n, чтобы выполнялось это условие?

5. Предмет находится на расстоянии $d = 6$ *см* от собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F = 4$ *см*. В фокальной плоскости линзы по другую сторону от нее находится плоское зеркало. Определить расстояние l между предметом и его изображением.

Геологический и химический факультеты

1. На обруче прикреплен маленький груз массы $m = 50$ *г*. Обруч может быть установлен неподвижно на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ так, что груз находится на одной горизонтальной линии с центром обруча O (рис. 1). Определить массу обруча M (без груза).

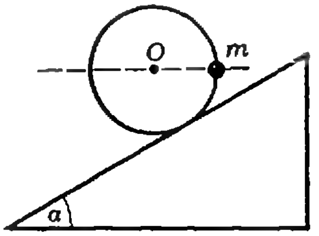


Рис. 1.

2. В лежащее на гладкой горизонтальной поверхности тело массы $M = 1$ *кг* попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью $|\vec{v}_1| = 200$ *м/сек*, и пробивает его насквозь. Скорость пули после вылета из тела стала $|\vec{v}_2| = 100$ *м/сек*. Масса пули $m = 20$ *г*. Определить количество теплоты Q, полученное телом.

3. Конденсатор включен в схему, показанную на рисунке 2. Э. д. с. элементов равны $\mathscr{E}_1 = 2$ *в* и $\mathscr{E}_2 = 6$ *в*, а их внутренние сопротивления одинаковы. На пластинах конденсатора находятся заряды величиной $|q| = 10^{-8}$ *к*. Найти емкость C конденсатора. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

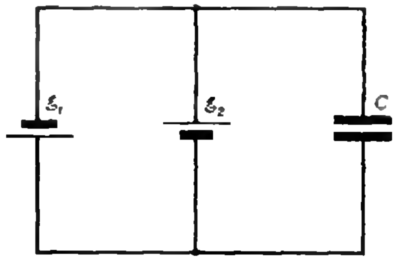
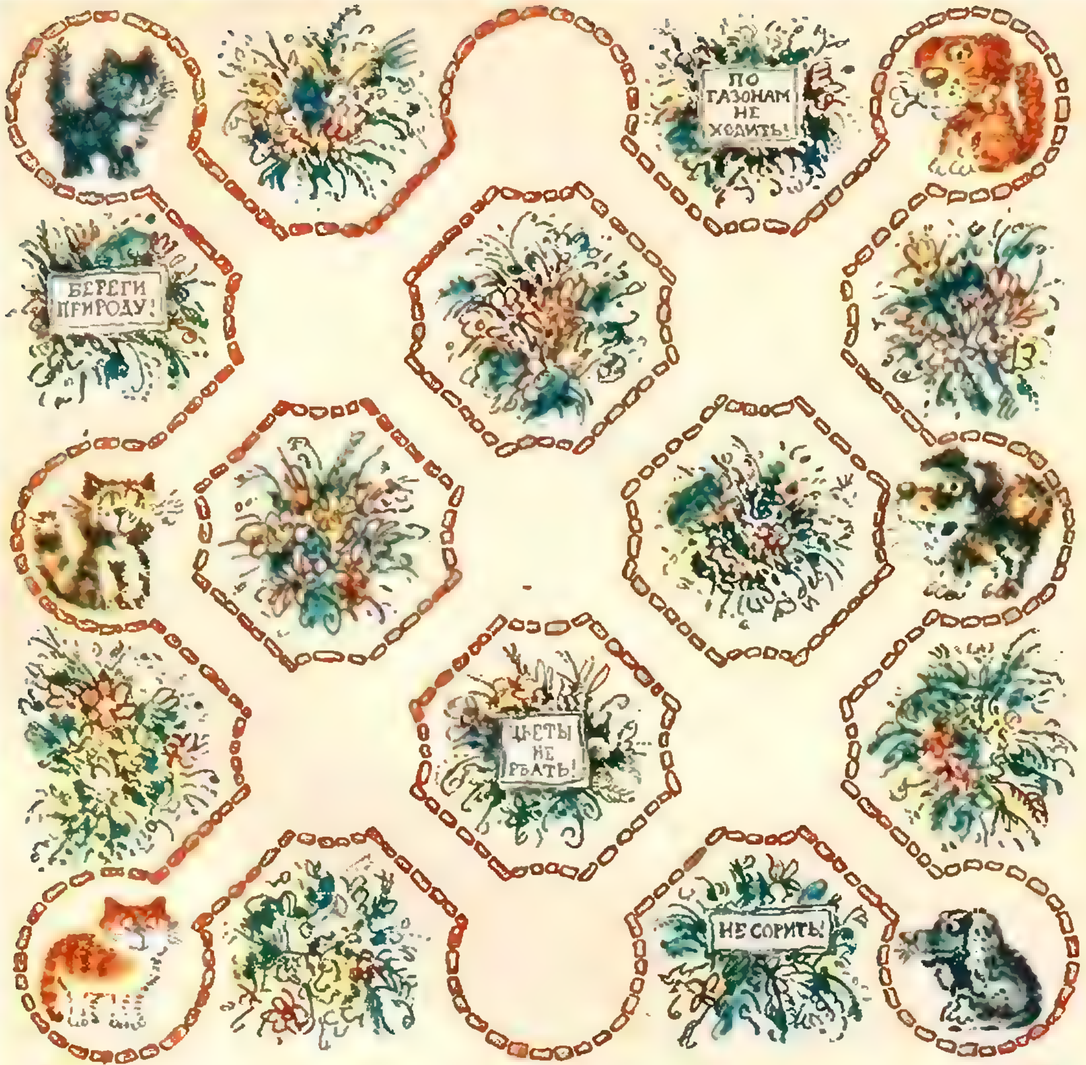


Рис. 2.

4. Колебательный контур генератора, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора емкости C_1, излучает электромагнитную волну длиной $\lambda_1 = 30$ *м*. Если параллельно конденсатору емкости C_1 подключить конденсатор емкости $C_2 = 3\cdot 10^3$ *пкф*, то длина волны, излучаемой контуром, становится $\lambda_2 = 60$ *м*. Найти значение емкости C_1 колебательного контура.

5. Точка движется со скоростью $|\vec{v}_1| = 1$ *м/сек* перпендикулярно к оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ *см*. При этом она пересекает оптическую ось на расстоянии $a = 60$ *см* от линзы. С какой скоростью $|\vec{v}_2|$ движется изображение точки?

И. Горев,
С. Кротов


ПО ГАЗОНАМ НЕ ХОДИТЬ!
БЕРЕГИ ПРИРОДУ!
ЦВЕТЫ НЕ РВАТЬ!
НЕ СОРИТЬ!

Кошки и собаки

Три умные собаки и три хитрые кошки после обоюдоострых контактов оказались на противоположных площадках сквера (см. рисунок) и занялись решением очень важной для обеих сторон задачи: *как им поменяться друг с другом местами, но при этом, чтобы не возникло новых потасовок, не только не встречаться друг с другом, но даже не оказываться на соседних площадках.*

В результате была избрана следующая стратегия: собаки и кошки сидят на площадках, но время от времени либо кошка, либо собака бежит по аллее на соседнюю площадку.

Кошки считают, что совместными усилиями за 32 перебежки (их и собачьих вместе) они смогут поменяться с собаками местами. Собаки с ними не согласны.

Кто прав?

Л. Мочалов

Спрашивайте — отвечаем

В редакцию пришло письмо из города Харькова от Степана Киржалова, ученика 9 класса. Вот что он пишет.

«В «Справочнике по элементарной математике» (Киев, 1973 год) я встретил любопытный способ решения иррационального уравнения

$$\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2. \quad (*)$$

Возведя обе части этого уравнения в куб, получим

$$(8x+4)-$$
$$-3\sqrt[3]{8x+4}\,\sqrt[3]{8x-4}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)-$$
$$-(8x-4)=8.$$

Учитывая, что по условию выражение в квадратных скобках должно быть равно 2, можем записать

$$-6\sqrt[3]{64x^2-16}=0,$$

откуда $x_1={}^1/_2$, $x_2=-{}^1/_2$. *Я таким же способом попробовал решить другое уравнение*

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1, \quad (**)$$

но оказалось, что из двух получившихся значений $x_1=1$, $x_2=0$ *только первое удовлетворяет уравнению. В чем же дело?»*

Поскольку ответ на письмо Степана Киржалова может представить интерес и для многих других читателей «Кванта», публикуем этот ответ на страницах журнала.

Прежде всего напомним читателям, что в математической литературе запись $\sqrt[3]{a}$ используется в двух смыслах (см. «Алгебра 8», М., «Просвещение», 1975, стр. 95).

Во-первых, символом $\sqrt[3]{a}$ обозначают неотрицательное число, куб которого равен a; тогда этот символ определен только для $a\geqslant 0$. В новых школьных учебниках знак $\sqrt[3]{a}$ имеет именно такой смысл, так что, например, выражение $\sqrt[3]{8x-4}$ при $x=-{}^1/_2$ не определено.

Во-вторых, символом $\sqrt[3]{a}$ обозначают число, куб которого равен a; тогда этот символ определен при любом a. В упомянутой в письме С. Киржалова книге Г. П. Бевза, П. Ф. Фильчакова, К. И. Швецова, Ф. П. Яремчука «Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы» (Киев, «Наукова думка», 1973, стр. 152—153) знак $\sqrt[3]{a}$ применяется в этом смысле, так что, например, выражение $\sqrt[3]{8x-4}$ при $x=-{}^1/_2$ существует и равно —2.

Способ решения иррациональных уравнений с радикалами третьей степени, о котором пишет автор письма, применяется довольно часто. О нем упоминается и в названном «Справочнике», однако, к сожалению, там не указано, что, *решая уравнения таким способом, мы можем приобрести посторонние корни, и потому всегда нужно делать проверку.*

Убедиться в этом нетрудно. Мы сейчас проведем соответствующие рассуждения, тем более, что они весьма поучительны и показывают, как конкретно исследуется вопрос о равносильности уравнений и выясняются причины ее нарушения. Предварительно приведем одно алгебраическое тождество:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$={}^1/_2(a+b+c)\,[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]; \qquad (1)$$

для его доказательства достаточно раскрыть скобки в правой части.

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x) \qquad (2)$$

и допустим, что x_0 — его корень, так что

$$\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)} = \varphi(x_0) \qquad (3)$$

Возводя обе части верного числового равенства (3) в куб и проделав очевидные преобразования, получим:

$$f(x_0) + 3\sqrt[3]{f(x_0)}\,\sqrt[3]{g(x_0)}\,\left[\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)}\right] + g(x_0) = \varphi^3(x_0).$$

Если снова воспользоваться верным числовым равенством (3), то получим равенство

$$f(x_0) + 3\sqrt[3]{f(x_0)}\,\sqrt[3]{g(x_0)}\,\varphi(x_0) + g(x_0) = \varphi^3(x_0), \qquad (4)$$

которое показывает, что x_0 — корень уравнения

$$f(x) + 3\sqrt[3]{f(x)}\,\sqrt[3]{g(x)}\,\varphi(x) + g(x) = \varphi^3(x) \qquad (5)$$

Таким образом, всякий корень уравнения (2) является корнем уравнения (5).

Рассмотрим теперь уравнение (5) и допустим, что x_0 — его корень, так что выполнено числовое равенство (4). Применяя тождество (1) при

$$a = \sqrt[3]{f(x_0)},\ b = \sqrt[3]{g(x_0)},\ c = -\varphi(x_0),$$

перепишем равенство (4) в виде

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)} - \varphi(x_0)\right) \times$$
$$\times \left[\left(\sqrt[3]{f(x_0)} - \sqrt[3]{g(x_0)}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{f(x_0)} + \varphi(x_0)\right)^2 + \left(\sqrt[3]{g(x_0)} + \varphi(x_0)\right)^2\right] = 0. \qquad (6)$$

Из равенства (6) видно, что число x_0 либо удовлетворяет равенству (3), то есть является корнем уравнения (2), либо удовлетворяет равенствам

$$\sqrt[3]{f(x_0)} = \sqrt[3]{g(x_0)} = -\varphi(x_0), \qquad (7)$$

то есть является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f(x) = -\varphi^3(x), \\ g(x) = -\varphi^3(x). \end{cases} \qquad (8)$$

Таким образом, уравнение (5) может иметь корни, не являющиеся корнями уравнения (2). Нетрудно убедиться, что корень x_0 уравнения (5) является посторонним для уравнения (2) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases} \varphi(x_0) \neq 0, \\ f(x_0) = g(x_0) = -\varphi^3(x_0). \end{cases}$$

Найденное автором письма значение $x = 0$ удовлетворяет этим условиям и потому будет посторонним корнем для уравнения (**).

В заключение еще раз отметим, что с точки зрения новой школьной программы значение $x = -{}^1/_2$ не является корнем уравнения (*), поскольку при этом значении левая часть уравнения (*) не определена.

Н. Розов

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, которые будут издаваться в этом году. Учитывая многочисленные просьбы, мы будем помещать также аннотации на некоторые книги, выходящие в издательствах «Молодая Гвардия» и «Детская литература».

В этом номере мы расскажем о книгах, выходящих в первом квартале 1977 года. Большинство из них можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. М. Гарднер. *Математические чудеса и тайны*, пер. с англ. Издание 3-е, стереотип. Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 30 к.

Имя Гарднера, ведущего автора американского научно-популярного журнала «Scientific American», по-видимому, известно большинству наших читателей. Эта книга — первая из его книг, переведенных на русский язык. Она представляет собой попытку обзора всей области современного математического фокуса. Большая часть материала книги взята из специальной литературы, посвященной фокусам, а не из развлекательной математической литературы.

По большей части сам автор не формулирует на языке математики закономерностей, лежащих в основе его экспериментов. Он лишь описывает действия «фокусника» — явные и тайные. Но читателю, несомненно, доставит удовольствие самому восстановить по объяснениям автора соответствующую алгебраическую или геометрическую идею. В наиболее же интересных случаях изложение автора сопровождается небольшими примечаниями редактора, выявляющими математическую суть построений. Эти примечания помещены в конце книги.

Книга М. Гарднера будет интересна и участникам школьных математических кружков, и их руководителям, и взрослым любителям математики.

Издательство «Мир»

2. Г. Фрейденталь. *Математика в науке и вокруг нас* (В мире науки и техники). Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 95 к.

Ганс Фрейденталь — член Королевской Нидерландской академии, автор более чем 200 работ по топологии, теории групп, анализу, геометрии, математической логике, философии и истории наук. Он — блестящий популяризатор математики.

Настоящая его книга состоит из семи замкнутых глав.

В первой главе («*Человек измеряет Вселенную*») рассказывается об измерении мира. Сначала — маленького мира, в котором мы живем, нашей Земли; затем бóльшего мира, вмещающего Солнце и Луну, и наконец, — всей огромной Вселенной.

Вторая глава («*До бесконечности*») начинается историей о гостинице с бесконечным числом комнат (которую любил рассказывать знаменитый математик Давид Гильберт). Затем говорится о счетных и несчетных множествах, о мощности множеств, о сравнении бесконечных множеств, о числах; обсуждается вопрос, правильно ли мы обращаемся с натуральными числами.

Третья глава начинается с рассказа о системах счисления, о том, как записывали числа древние египтяне, жители Вавилона, греки, европейцы эпохи Карла Великого и наши современники. Рассказывается об играх, допускающих строгую законченную теорию (в частности, описывается игра «Ним»), об азартных играх, создании автоматических вычислительных машин, о «думающих» машинах, играющих в различные игры (в частности, и в шахматы), о машинах, занимающихся переводом с одного языка на другой. Обсуждается вопрос, могут ли машины *мыслить*.

Четвертая глава — «*Азбука жизни*» — открывает перед читателем совершенно особый мир — мир биологической клетки.

Пятая глава («*Искусство рисовать плохо*») посвящена топологии. Здесь определяется, что такое *поверхность*, *род поверхности*, *многообразие*, *проективная плоскость*; что такое взаимно-однозначные и непрерывные отображения, *степень* отображения. Рассматриваются отображения окружности и сферы на себя. В заключение строится замечательная кривая, покрывающая весь квадрат (кривая Пеано).

В шестой главе автор от конкретных гирь и весов переходит к абстрактным грузам, рассматривая самые знаменитые задачи линейного программирования: транспортную задачу, задачу о коммивояжере и задачу о составлении наилучшего расписания стирки скатертей и салфеток в ресторане.

Последняя глава называется «*Мир в зеркале*». Здесь рассказывается о симметрии и симметричных фигурах, об отражениях, переносах и поворотах на плоскости и в пространстве. Вводится понятие группы; определяется, что такое *автоморфизм* и что такое движение и какие есть движения в пространстве; определяется, что такое *ориентация*.

Несомненным достоинством книги является отсутствие того, что в математике принято называть «техникой»: автору удалось подобрать темы математически содержательные и в то же время достаточно доступные.

Эта книга рассчитана на самые широкие читательские круги. Но особый интерес представляет она для школьников - старшеклассников.

Издательство «Вища школа»

3. **Г. И. Дринфельд.** *Квадратура круга и трансцендентность числа π.* Объем 3 л., тираж 13 000 экз., цена 10 к.

Эта книга вышла в конце 1976 года в серии «Библиотечка физико-математической школы». В ней рассказывается об известной задаче «квадратуры круга», которой на протяжении многих столетий интересовались еще с древних времен. Вывод, что эта задача неразрешима, принадлежит знаменитому Леонарду Эйлеру; он же предположил, что число π не может быть корнем ни одного алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, допустив тем самым существование трансцендентных чисел и трансцендентность числа π. Доказательства всех этих фактов и приводятся в книге.

Книга рассчитана на школьников старших классов, увлекающихся математикой. Помимо изложения теории, в ней содержится много интересных упражнений и задач.

4. **А. А. Бельский, Л. А. Калужнин.** *Деление с остатком.* Объем 5 л., тираж 25 000 экз., цена 15 к.

Эта книга также из серии «Библиотечка физико-математической школы». В ней разбираются некоторые важные вопросы теории чисел. Приводится доказательство теоремы о единственности разложения на простые множители, рассказывается об алгоритме Евклида, диофантовых уравнениях, вычетах. Рассматриваются представления чисел в различных позиционных системах счисления.

Книга, безусловно, будет интересна школьникам-старшеклассникам и учителям математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. **Григорьев В. И., Мякишев Г. Я.** *Силы в природе.* Издание 5-е. Объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 83 к.

Эта книга, написанная легким и доступным для школьников языком, вводит читателя в мир физических представлений. Рассматривая различные типы взаимодействий в природе, авторы показывают единство и разнообразие мира физических явлений.

Эту книгу с интересом прочтут школьники старших классов, интересующиеся физикой.

2. **Сибрук В.** *Роберт Вуд — современный чародей физической лаборатории.* Издание 3-е, испр. Объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 04 к.

Книга посвящена жизни выдающегося американского физика Роберта Вуда, которого часто называют «отцом современной физической оптики». В книге рассказывается не только о чисто научных исследованиях Вуда, но и о его путешествиях, о разгадке тайны пурпурного золота царя Тутанхамона, об участии Вуда в раскрытии преступлений и разоблачении «изобретателей» «*N*-лучей» и «лучей смерти» и о других не менее интересных вещах.

Книга предназначена для самого широкого круга читателей.

3. **Компанеец А. С.** *Что такое квантовая механика?* Издание 2-е, испр. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 33 к.

Эта книга представляет собой сборник научно-популярных статей, посвященных квантовой механике. О квантовой механике рассказать так, чтобы ее удивительные законы были понятны широкому кругу читателей, очень трудно: положения квантовой механики противоречат непосредственному человеческому опыту. Автору книги «Что такое квантовая механика?» удается, не прибегая к вульгаризации и не пользуясь математическим аппаратом, ответить на вопрос, вынесенный в заглавие книги. Важная черта статей, вошедших в сборник, состоит в том, что автор не ограничивает изложение «классическими» положениями квантовой механики. В книге рассказано и о симметрии в микромире, о слабых взаимодействиях, и ядерных силах.

Книга написана простым и доступным языком. Основные положения книги вполне доступны школьникам старших классов.

Издательство «Просвещение»

4. **Лукашик В. И.** *Физическая олимпиада.* Пособие для учащихся. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 28 к.

Книга предназначена для учащихся 6—7 классов, интересующихся физикой и желающих участвовать в физических олимпиадах. Содержащийся в книге материал поможет школьникам расширить свои знания по физике и проверить их на задачах, требующих сообразительности и большого внимания.

5. **Зигель Ф. Ю.** *Лунные горизонты.* Пособие для учащихся. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Эта книга выходит в серии «Мир знаний», она рассчитана на школьников 8—10 классов. В ней увлекательно рассказывается о движении Луны, ее происхождении и природе, а также о перспективах ее освоения средствами космонавтики. Автор обобщает все новейшие данные о Луне, полученные, в частности, советскими луноходами и американскими космонавтами.

6. **Темко С. В., Соловьев Г. А., Милантьев В. П.** *Физика раскрывает тайны Земли.* Объем 7 л., тираж 100 000 экз., цена 25 к.

Авторы в интересной и доступной для учащихся средней школы форме рассказывают о современных физических методах исследования Земли и разведки залежей полезных ископаемых. Читатели найдут в книге сведения о применении в геофизике физических явлений и закономерностей, известных из школьного курса физики.

И. Клумова, М. Смолянский

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М376—М384, М386—М390, Ф383—Ф402. Жирные цифры после фамилий — две последние цифры номеров решенных задач.

Математика

Почти все читатели, приславшие нам решения задач **М376, М377**, успешно справились с этими задачами. Остальные задачи решили: *С. Абоджян* (с. Дарков ГССР) **81—83, 86**; *З. Абдукадыров* (Нефтекамск) **83—84**; *В. Ажоткин* (Ленинград) **80а), 81—84**; *А. Алексеев* (Пермь) **81, 83**; *А. Амелин* (Москва) **86**; *В. Ансоткин* (Ленинград) **86, 87, 89**; *С. Антонов* (Киев) **80а), 83**; *Б. Аронов* (Саратов) **82—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Арсктин* (В. Валда) **83**; *В. Атамась* (с. Худяки Черкасской обл.) **83, 86—88, 90**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **86**; *П. Бийорский* (Польша) **86, 87**; *Е. Баликина* (Москва) **84**; *П. Баньковский* (Уральск) **83, 84, 86**; *А. Бер* (Ташкент) **82—84, 86, 89**; *П. Билер* (Польша) **80а), 82—84, 86, 87, 90**; *И. Биляцкий* (Рогатин) **83**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **83, 84, 86, 87**; *Б. Блок* (Москва) **81—84, 86—89**; *А. Бобылев* (Днепропетровск) **83**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **82—84, 86**; *В. Бондаренко* (Тростянец) **84**; *Н. Бондаренко* (Ленинград) **81, 83, 84, 86, 89**; *Т. Боровина* (Сочи) **86**; *А. Бочкарев* (Оренбург) **84**; *В. Бугаенко* (Киев) **79, 81—84, 86—90**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **83, 86**; *А. Вахтеров* (Орджоникидзе) **86**; *В. Вирясов* (Павлоград) **83**; *А. Власов* (Камышин) **86**; *В. Воеводов* (Березинки) **86**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **79, 82—84, 86**; *Л. Гандельсман* (Ленинград) **80а), 81—84, 87—89**; *М. Гандельсман* (Ленинград) **80а), 81—84, 86, 88, 89**; *А. Гарчиев* (Таллин) **82—84, 86, 89**; *Р. Гиссиев* (с. Сунжа СОАССР) **83, 86**; *А. Гатилов* (Воронеж) **82, 83, 86, 87**; *А. Георгиев* (Болгария) **84**; *Б. Гисин* (Ленинград) **80а), 81—84, 86—89**; *Г. Гительсон* (Ленинград) **80а)**; *Е. Глемин* (Ленинград) **79, 80а), 81—84, 86, 87, 89**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **86**; *Л. Гольденберг* (Ленинград) **80а), 84**; *И. Гонин* (Новосибирск) **83**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **82, 83**; *А. Грицук* (Дрогичин) **82—84**; *С. Гришечкин* (Москва) **80а), 82—84, 86, 89**; *Е. Гришин* (Пермь) **86—90**; *Н. Грищук* (Дрогичин) **86**; *В. Гроссман* (Одесса) **80а), 81—83, 86, 89**; *М. Грунтович* (Н. Двор Гродненской обл.) **83, 84, 86, 89**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **81—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **83, 86**; *М. Двойненко* (с. Нетечинцы Хмельницкой обл.) **82—84**; *Б. Дворкина* (Ленинград) **83**; *А. Делофф* (Польша) **82, 83**; *А. Диденко* (Краснодар) **83, 84, 86, 87, 89**; *В. Дмитриев* (Брест) **82, 83, 86**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **89**; *И. Ермаков* (Киев) **80а)**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **82—84**; *А. Ефошкин* (Оренбург) **81—84, 86—90**; *А. Заен* (Одесса) **86**; *Л. Зильберман* (Москва) **90**; *О. Зиневич* (Хотин) **83**; *Э. Зубов* (Красногоровка) **86**; *Б. Иванов* (Челябинск) **87, 89**; *Р. Измайлов* (Баку) **86, 87, 89**; *В. Изюсимов* (Кириши) **83, 86**; *М. Израилевич* (Тбилиси) **86, 87**; *И. Калика* (Киев) **80а), 82—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Каплин* (Сумгаит) **83**; *Б. Каплан* (Киев) **78б), 80а), 81—84, 88, 89**; *А. Карнаухов* (Ижевск) **83, 84**; *А. Карпов* (Ленинград) **82—84, 86, 89**; *В. Карташев* (Елец) **89**; *В. Каскевич* (Н. Двор Гродненской обл.) **83, 84, 86, 89**; *А. Касянчук* (Николаев) **79, 80а), 81—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Качуровский* (п. Средний Иркутской обл.) **86, 87**; *В. Ким* (Фрунзе) **86**; *Ф. Киньябулатов* (Азнаево БАССР) **83**; *А. Кирилов* (Мичуринск) **81—83**; *А. Кирилюв* (с. Козловка Воронежской обл.) **86—90**; *И. Кисель* (Кролевец) **84, 86**; *А. Князюк* (Киев) **78б), 80а), 82, 83, 87, 89**; *В. Кобельков* (Мстера) **83, 86**; *В. Кованов* (Горький) **81, 83, 86**; *С. Козявкин* (Киев) **87, 89**; *И. Кондрашкин* (Ленинград) **80а), 82—84, 86, 87, 89, 90**; *Л. Корельштейн* (Москва) **79, 80а), 81—84, 86—89**; *В. Костусяк* (Запорожье) **86, 89**; *В. Коц* (Тбилиси) **83**; *В. Кривец* (Новогрудок) **81, 83**; *В. Кузьменко* (Чернигов) **83**; *А. Кулеско* (Донецк) **81—83, 86, 87, 89**; *В. Куликов* (Калинин) **83**; *Е. Купершмидт* (Черновцы) **82—84**; *М. Кутеркин* (Алма-Ата) **82, 83**; *С. Лабутин* (Калинин) **84, 86, 87**; *С. Лавренченко* (Москва) **80а), 81—84, 86—89**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **81—84, 86, 87, 89**; *А. Лалаян* (Красноводск) **83, 84**; *Г. Левко* (с. Верхняя Стинева Львовской обл.) **84, 86, 89**; *Р. Леманн* (ГДР) **86—90**; *И. Лесюк* (д. Юхновичи Брестской обл.) **82—84**; *И. Ломицкий* (Ганцевичи) **83, 84, 86**; *В. Локоть* (Череповец) **83**; *В. Любимов* (Харьков) **83**; *С. Майский* (Москва) **83, 84, 86, 87**; *В. Малинин* (Н. Тагил) **78б), 86, 87**; *В. Мальцева* (Пермь) **84, 86**; *Г. Мамедов* (Баку) **81—84**; *Г. Манвеляни* (Гори) **82, 83**; *М. Манелис* (Киев) **86, 87, 89**; *Л. Медведев* (Москва) **86**; *В. Медведь* (Молодечно) **79, 80а), 81—84**; *С. Мелихов* (Донецк) **82—84, 86, 87, 89, 90**; *И. Молчанов* (Киев) **83**; *И. Морозова* (Ульяновск) **86**; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) **81—84, 86, 87, 89, 90**; *В. Мысик* (Донецк) **80а)**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **86, 89**; *Н. Наймарк* (Николаев) **80а)**; *В. Никонецкий* (Нижнекамск) **86**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **80а), 82—84, 86—90**; *В. Нейман* (Ленинград) **82, 83, 86, 87, 89, 90**; *А. Ненашев* (Ленинград) **79, 80а), 81, 83, 84**; *А. Неугодников* (Каменец-Уральский) **86**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **83**; *А. Оганесян* (Ереван) **83, 84, 86**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **82—84**; *О. Огилько* (с. Михайловка Целиноградской обл.) **83**; *А. Палев* (Н. Тагил) **86**; *А. Панченко* (Поворино) **83, 86**; *Д. Папуш* (Харьков) **82, 83**; *Т. Пастухова* (Опалиха Московской обл.) **86**; *Ю. Петров* (Воронеж) **83, 84**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **82, 86, 88**; *С. Письменная* (Куйбышев) **83, 84**; *П. Побылица* (Ленинград) **79, 83, 86, 89**; *А. Полев* (Н. Тагил) **82—84**; *С. Полыгалов* (Пермь) **82—84, 86, 89**; *Р. Портной* (Черновцы) **79, 80а)**; *В. Поспелов* (Очер) **84**; *С. Путинцев* (Краснодар) **86—89**; *А. Рабинович* (Харьков) **83, 86**; *А. Радул* (Кишинев) **80а)**; *А. Разборов* (Москва) **81, 83, 84, 86—90**; *И. Райзман* (с. Калинов Винницкой обл.) **86, 89**; *В. Резцов* (Астрахань) **86**; *П. Ровках* (Москва) **80а), 81—84**; *В. Рогава* (Тбилиси) **83, 84**; *А. Родионов* (Москва) **81—84**; *А. Родников* (Москва) **86, 87, 89**; *С. Розенштейн* (Киев) **86**; *И. Ройзман* (Калиновка Винницкой обл.) **84**; *А. Романов* (Ташкент) **83**;

Л. Рубинштейн (Калининград) 83, 84; *А. Саблин* (р. п. Хольский Воронежской обл.) 83; *Я. Савчук* (Березовка Ивано-Франковской обл.) 83; *Д. Самощенко* (Свердловск) 86; *В. Свинцов* (Москва) 82—84; *В. Свиридов* (Воронеж) 84, 86; *Р. Севдималыев* (Шаифлин АзССР) 83, 84; *М. Селектор* (Ленинград) 81—84, 86, 87, 89, 90; *С. Сергеев* (Минск) 83; *А. Сердюк* (Херсон) 83, 86, 89; *А. Сесса* (Днепропетровск) 84; *М. Симунин* (Уфа) 84; *В. Смирнов* (Уфа) 84; *М. Соколовский* (Москва) 79, 80а), 81—84, 86, 87, 89; *А. Соловьев* (Ульяновск) 84, *А. Старк* (Сумгаит) 86; *В. Стовба* (Москва) 81—83, 86—89; *И. Стойменович* (Югославия) 82—84; *А. Сьятов* (Черногорск) 83; *А. Тачников* (пос. Полярные Зори Мурманской обл.) 87; *Ю. Тикунов* (Новосибирск) 88; *Н. Тренев* (Москва) 81—84, 86, 87, 89; *Н. Трифонов* (Канск) 84, 87; *В. Трофимов* (Москва) 80а), 81—84; 86, 87, 89; *Э. Туркевич* (Черновцы) 86—90; *О. Тюрпенко* (Фрунзе) 83, 86; *И. Тютюнник* (Киев) 86; *В. Угриновский* (Хмельник) 82—84, 86, 87; *У. Умирбаев* (с. Туркуль Чимкентской обл.) 86; *С. Уразов* (Куйбышев) 84; *Н. Файзуллин* (с. Чекмагуш БАССР) 82; *В. Фалько* (Харьков) 82—84, 86, 90; *А. Хайкин* (Тула) 82, 83, 86, 89; *С. Харенко* (Ангарск) 86; *С. Хаскель* (Павлово-Посад) 86; *И. Хаучл* (ЧССР) 82—84; *С. Хосид* (Алма-Ата) 83; *С. Хрулев* (Калинин) 86; *И. Царьков* (Москва) 80а), 82, 83, 86—89; *М. Цевелев* (Челябинск) 89; *В. Чесноков* (Победное Рязанской обл.) 84; *А. Чигинин* (Новосибирск) 84; *Б. Шаборяс* (Рига) 86, 88, 89; *С. Шапиро* (Курск) 86; *А. Шафир* (Челябинск) 83; *Ю. Шафир* (Челябинск) 86, 89; *Л. Шерстенева* (Нововолынск) 84; *А. Шкуропатов* (Яншабад Ташкентской обл.) 83, 84; *В. Шпильрайн* (Москва) 83, 87, 89; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) 79, 80а), 82—84, 86, 87, 89; *В. Штепин* (Челябинск) 86, 88, 89; *С. Штерник* (Ленинград) 86; *В. Шумилов* (Череповец) 83, 86, 89; *В. Щукин* (Ленинград) 81, 83, 84, 86—89; *Л. Энтин* (Москва) 79, 80а), 81—84, 86—90; *В. Эткин* (Москва) 84; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой об.) 84.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф383—Ф402**, справились с решениями задач **Ф383, Ф388** и **Ф398**. Остальные задачи правильно решили: *Ш. Абдуллаев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 91; *А. Абрамян* (Ереван) 84, 85, 95, 99—01; *М. Акопян* (Ереван) 85; *Р. Акопян* (Ереван) 92; *Д. Алиев* (Орджоникидзевский р-н Ташкентской обл.) 00; *Н. Алтухов* (Калинин) 91, 92, 99, 00; *М. Альперович* (Ивано-Франковск) 85; *Б. Амосов* (Мытищи) 91; *А. Андриевский* (Минск) 84, 90, 91; *Ю. Антонов* (Чебоксары) 91, 96; *С. Актонюк* (Киев) 84, 85, 91; *О. Анышкова* (Винница) 95; *Т. Аскарян* (п. Нор-Аджи АрмССР) 85; *А. Атамуратов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 84, 91; *М. Бабаев* (Баку) 84, 85; *Б. Багаутдинов* (с. Мугерган ДАССР) 95, 01; *М. Багаутдинов* (Магнитогорск) 84—86, 90, 91, 94—97, 99, 00; *Ф. Багдасарян* (Баку) 86, 91, 92, 94, 95, 97, 99, 00; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) 90; *К. Балашов* (д. Клишева Московской обл.) 92, 93, 95—97, 99—01; *Ю. Балашов* (Москва) 00; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) 84, 91, 92; *С. Баркуев* (Иркутск) 84, 85; *А. Барташ* (Симферополь) 91; *М. Бартишевич* (Свердловск) 99—01; *О. Батищев* (Череповец) 84, 85, 92—97, 99—01; *С. Батуев* (Ангарск) 85; *Т. Бейко* (Киев) 93, 96, 97, 99; *А. Беликов* (Москва) 85—87, 89, 91; *В. Белоцерковский* (Харьков) 94, 95; *В. Бессонов* (Москва) 91, 92; *Г. Бетин* (с. Счастливцево Херсонской обл.) 90, 92, 94, 95; *П. Билер* (Вроцлав, ПНР) 84, 85, 91, 94, 99, 00; *А. Бобров* (Пермь) 90, 91, 92—97, 01; *А. Бобылев* (Днепропетровск) 96; *О. Болтенков* (Днепропетровск) 84—87, 00; *И. Болтунов* (Ленинград) 85, 99, 00; *А. Бондарев* (Львов) 91, 92, 00; *В. Бондарев* (Курск) 84—87, 91, 92—94, 96, 97, 99, 01; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) 94, 96, 00, 01; *В. Боднарюк* (с. Стрелецкий Кут Черновицкой обл.) 84, 97, 99; *Л. Бордюгов* (Кишинев) 00; *А. Бочек* (Шостка) 92, 95; *А. Бочкарев* (Оренбург) 84, 99, 00; *Л. Браверман* (Пермь) 99—01; *О. Будиловский* (Киев) 91; *Л. Булатова* (Казань) 90, 91, 96; *В. Буртовой* (Килия) 84—86; *В. Варлыгин* (Москва) 95; *Б. Васиев* (Самарканд) 85, 87, 90—92; *В. Ващенко* (Туапсе) 99,00; *В. Вирясов* (Павлоград) 86, 87, 95, 96; *Н. Волохин* (Лисаковск) 99, 00; *П. Воронин* (Рига) 85, 99; *И. Газизов* (Москва) 84—86; 92, 99, 00; *А. Ганопольский* (Минск) 94—97; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) 84, 85, 93, 96, 99—01; *В. Гаркавый* (Лида) 84, 91, 92, 94—97, 00, 01; *В. Гармаш* (Запорожье) 84—86, 90—97, 99, 00; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) 85, 91, 92; *М. Глазунов* (Старый Оскол) 85; *Е. Глуз* (Черкесск) 95; *Ю. Глумов* (Талды-Курган) 90, 95, 99,00; *О. Глушко* (Москва) 84, 85, 90—92, 96, 97, 99, 00; *В. Головлев* (Самарканд) 92; *Э. Гологорский* (Кишинев) 96; *О. Голощапов* (с. Архангельское Тульской обл.) 95—97, 99, 01; *В. Гончаров* (Андижан) 90; *Ю. Гончаров* (Ставрополь) 85, 86; *Е. Горбатый* (Одесса) 84, 99, 00; *Е. Гордиенко* (Кишинев) 85, 90, 95, 99—01; *А. Грайфер* (Запорожье) 84, 85, 99, 00; *Б. Грибов* (Воронеж) 84—86, 90—92; *А. Григорьев* (Дзержинск Горьковской обл.) 84, 00; *А. Грицук* (Дрогичин) 97, 00; *С. Гузовский* (Рига) 95; *И. Давлетшин* (с. Апастово ТАССР) 84; *О. Дадысян* (Ереван) 84, 85; *М. Двойненко* (с. Нетеченцы Винницкой обл.) 94, 96; *В. Демидович* (Гадяч) 92, 99; *П. Демкин* (Донецк) 84, 85, 87, 91, 92, 95, 96, 01; *О. Денисов* (Баку) 85, 90, 96, 00; *А. Деражне* (Киев) 00—02; *В. Дмитриев* (Брест) 91, 92, 95, 99,00; *С. Дохоян* (Ереван) 91; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) 91, 95; *М. Ерихов* (Курган) 86; *В. Ерофеев* (Новосибирск) 84—87, 90, 92—96, 99—01; *В. Житарь* (Кишинев) 84, 00; *В. Жураковский* (Стрый) 92; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 84, 91, 92—96, 99—01; *В. Запевский* (Новогрудок) 99—01; *Г. Засеев* (с. Заманкул СОАССР) 93, 00; *В. Засимчук* (Киев) 84; *А. Захаров* (Брест) 96—01; *В. Здоренко* (Капустин Яр) 01; *И. Зеленин* (Ленинград) 84; *В. Зильберг* (Новгород) 96, 00; *Т. Ибраев* (Шахтинск) 85; *И. Иванов*

(Ростов-на-Дону) 93; *С. Иванов* (Харьков) 84,85; *А. Иоаннисян* (Ереван) 91, 92; *А. Ишхамян* (Джермук) 95, 96; *Е. Казарова* (Ереван) 94—96, 01; *А. Каланович* (Пермь) 84, 85, 89—97, 99, 01; *Н. Капзитдинов* (с. Карабугазкент ДАССР) 92, 95; *А. Карнаухов* (Ижевск) 93, 94, 96; *В. Кастусян* (Запорожье) 84; *В. Катин* (Даугавпилс) 85, 86; *В. Киреев* (Саратов) 91, 92; *В. Кириаков* (Тбилиси) 85, 99; *М. Кирсанов* (Тула) 86, 90; *Ю. Киселев* (Ленинград) 84; *А. Клековкин* (с. Селты УдмАССР) 99, 01; *Ю. Кобылинский* (Севастополь) 91; *В. Кованов* (Горький) 93, 96—00; *С. Козявкин* (Киев) 00; *А. Колесников* (Ташкент) 84, 91, 92; *А. Комаров* (Наволоки Ивановской обл.) 95; *В. Комов* (Александров) 91, 92; *В. Кондратьев* (п. Малышев Калининской обл.) 91, 92; *И. Кондрашкин* (Ленинград) 99, 00; *В. Конотоп* (Харьков) 84, 96, 99—01; *В. Коробов* (Саратов) 95, 01; *С. Корчачов* (Ангарск) 91; *Г. Корчанский* (Кишинев) 84, 91, 92; *А. Косолапов* (Курск) 96; *В. Коток* (Харьков) 84, 89, 91, 92, 94—97, 99, 00; *И. Кочкарев* (Рига) 91, 92; *А. Кречетников* (Сумы) 93, 95; *С. Кулагин* (Москва) 85, 86, 91, 92; *Г. Куликова* (Егорьевск) 90; *А. Кумахов* (с. II Лескен КБАССР) 84, 91; *Е. Купершмидт* (Черновцы) 91, 95, 96; *Л. Куравский* (Калуга) 86, 95, 96, 99—01; *М. Курбатов* (Москва) 93, 94, 96, 99—02; *С. Курдюков* (Москва) 84, 85, 87; *Е. Курмангалиев* (Уральск) 94, 99—01; *С. Лавреченко* (Москва) 84, 90—97, 99—01; *А. Ладоненко* (п. Агаповка Челябинской обл.) 91; *В. Лахин* (Черкесск) 85, 99; *Ю. Лебединский* (Могилев) 84, 85; *Я. Лернер* (Кишинев) 84; *А. Листовничий* (Киев) 84, 90—97; *О. Лищенко* (Киев) 84—86; 89, 91, 92, 99—01; *В. Лобзин* (Свердловск) 84, 86, 87, 91—97, 99—02; *Л. Лознер* (Минск) 84, 85, 90—92, 99, 00; *А. Лопатин* (Химки) 91, 92; *В. Лубневский* (Москва) 93—96, 99—01; *А. Лунинский* (Харьков) 99—01; *С. Ляхимец* (Киев) 84, 85, 94, 99, 00; *А. Магадеев* (д. Карачаево БашАССР) 84; *С. Майский* (Москва) 91, 93, 96, 99—01; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 84; *В. Малинин* (Нижний Тагил) 84—86; 92, 99,00; *А. Мальцев* (Запорожье) 00; *Е. Мартынова* (Курск) 86; *А. Масягин* (Смоленск) 85, 86, 94—97, 99—01; *М. Матвеев* (Канаш) 90—92, 95, 01; *Ю. Матрухович* (Минск) 84, 91, 93, 95, 96, 99, 01; *Е. Матусов* (Москва) 91, 92; *А. Мацкевич* (Димитровград) 00; *Г. Метревели* (Цхинвали) 85, 91, 92, 99, 00; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 84, 85, 87, 91, 94—97; *Ю. Минаев* (Киев) 84—86, 91, 92, 99,00; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) 84, 85, 89, 92, 00; *М. Мирзоев* (Нахичевань) 94, 95; *Н. Михайлов* (Караганда) 84; *М. Молдовский* (Тбилиси) 84, 94—96; *В. Молофеев* (Ивацевичи) 91; *А. Морозов* (Москва) 91, 92; *И. Морозов* (Горький) 91, 92; *К. Морозов* (Пермь) 93—97, 99—01; *А. Морозовский* (Киев) 85, 87, 91, 92—95; *А. Мосичев* (Пучеж) 91, 94—96; *М. Муллаяров* (с. Малый Ашап Пермской обл.) 84, 99—01; *Г. Муравлева* (Москва) 99, 00; *Г. Мурашов* (Свердловск) 84—86; *О. Мусаев* (Баку) 84—86, 91, 92—94, 96, 97, 99—02; *Ю. Мухирский* (Киев) 84—86, 90—95, 97, 99—02; *А. Наговицын* (Ижевск) 85; *Д. Надежин* (Курган) 00; *С. Назаренко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 85; *С. Назин* (Красногорск) 84, 91—95, 97, 99, 00; *Ю. Наумов* (Новосибирск) 93; *И. Нескоромный* (Симферополь) 91; *А. Никандров* (Ленинград) 93, 94; *А. Никитенков* (Великие Луки) 84, 85, 91—96, 99—02; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 99; *В. Николаев* (Тула) 95; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 85, 91, 93, 94, 96, 97, 99, 00; *Б. Нимбуев* (Улан-Удэ) 84, 85, 87; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) 84, 85, 92—94, 96, 97; *М. Орджалиев* (Баку) 92, 00; *Л. Ореховская* (Волгоград) 91; *М. Ортемберг* (Караганда) 84, 85; *М. Османов* (ст. Акстафа АзССР) 95, 01; *Т. Павеликина* (Киев) 92; *В. Палей* (Харьков) 84, 85, 89, 91, 92, 95, 96, 00—02; *С. Панин* (Тула) 99, 00; *Д. Папуш* (Харьков) 95; *Д. Патарая* (Тбилиси) 92; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 84, 85, 91, 92, 95, 97, 00; *И. Пелецкий* (Москва) 84, 85; *С. Перфилов* (Сердобск) 91, 92; *М. Петухов* (Магнитогорск) 01; *В. Писецкий* (Запорожье) 91, 92, 96, 97, 00; *А. Платонова* (Тула) 91; *Д. Плахта* (Яремча) 95, 96, 01; *П. Побылица* (Ленинград) 84, 85, 97, 00; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 84, 89, 92—96, 99—01; *С. Попов* (Москва) 84, 85, 89, 92, 94, 95, 99; *В. Потемкин* (Великие Луки) 84—86, 95, 99—02; *П. Приймак* (Курск) 99; *А. Проценко* (Спасск-Дальний) 92; *А. Романов* (Киев) 84, 85, 99; *Ю. Ростовцев* (Горький) 84, 85, 91, 92, 99; *А. Рудерман* (Ленинград) 84—86, 91—93, 96, 97, 99, 00, 02; *А. Рябов* (Майкоп) 90, 93, 99,00; *И. Савченко* (п. Н. Водолага Харьковской обл.) 85, 91, 99—01; *А. Саргазаков* (Новосибирск) 96, 97; *А. Сахарук* (Брест) 84, 85, 91, 92, 95, 99, 00; *А. Святченко* (Кишинев) 84, 85, 91, 92, 99, 00; *В. Семак* (Кишинев) 91; *Ю. Семенов* (Одесса) 84, 91; *Г. Сербачинов* (Ленинград) 01; *В. Серебрянный* (Харьков) 85, 92, 97; *М. Симушин* (Пермь) 96; *Л. Скатков* (Харьков) 84—86, 91, 92, 95, 96, 99—01; *А. Смирнов* (Москва) 00; *В. Смирнов* (Уфа) 89, 91, 92, 96, 97, 01; *Т. Смирнова* (Губаха Пермской обл). 99, 00; *Г. Смыков* (Тольятти) 00, 01; *А. Соловьев* (Ульяновск) 93; *В. Сорокин* (Днепропетровск) 90—92, 97, 01; *С. Соскин* (Киев) 84, 85, 92, 99, 00; *О.Спицын* (с. Нов. Усмань Воронежской обл.) 99, 00; *И. Степанов* (Рига) 85; *В. Степович* (с. Васильевское Ивановской обл.) 95; *В. Стовба* (Москва) 90—95; *М. Стойнов* (Москва) 84—86, 91, 94, 95, 00; *С. Субботин* (Алма-Ата) 84; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 91, 95, 97, 99, 00; *М. Сухарь* (Москва) 91, 95, 96, 00; *А. Тикиляйнен* (Курск) 99, *Ю. Тикунов* (Новосибирск) 91, 99; *А. Тимофеев* (Москва) 90—92; *О. Токарь* (Харьков) 85; *И. Толох* (Жидачов) 91, 92, 96; *К. Третьяченко* (Киев) 84, 85, 90, 92—97, 99, 00; *К. Трутнев* (Казань) 84, 85, 90—92, 94—97, 99—02; *В. Тужилкин* (Зеленодольск ТАССР) 92; *Е. Тузбекова* (Кумертау) 85, 94; *И. Усатов* (Ахалцихе) 99.00; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 99, 00; *А. Фарбер* (Тамбов) 84, 85, 96, 99,00, *Н. Федин* (Омск) 84, 85, 89—92; *А. Фомин* (Новосибирск) 96; *И. Фонарев* (Сумгаит) 96; *М. Ханагян* (Ереван) 85; *А. Хапиков* (Ижевск) 00, 01; *А. Хачатуров* (Баку) 90; *А. Худошин*

(Харьков) 94, 96, 00; *В. Цветков* (п. Комсомольск Кустанайской обл.) 01; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 84, 85, 99; *И. Цуркис* (Калининград) 93, 96, 99, 00; *В. Чеканов* (Быхов) 85, 96, 00; *Е. Червоненко* (Днепропетровск) 84, 85; *В. Черненко* (Ленинград) 84—86; *Г. Черников* (Калуга) 92—94, 97, 99, 00; *Л. Черных* (Лида) 84, 85, 95, 99, 01; *Н. Черняк* (Конотоп) 92; *А. Чурилов* (Харьков) 84—86, 90, 95; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 91—93, 97, 99, 00, 02; *А. Шафаренко* (Караганда) 84, 85, 91—96, 00; *А. Шафир* (Челябинск) 00; *К. Шахназарян* (Баку) 91, 01; *А. Шведов* (Запорожье) 84, 85; *А. Швейдель* (Великие Луки) 95, 96; *А. Шептовецкий* (Москва) 90—94, 96, 99—02; *И. Шибут* (Барановичи) 84, 87; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 84, 85, 92, 94, 95, 97, 99—01; *И. Шиян* (Киев) 84, 85, 92, 96—02; *В. Шлегель* (Ашхабад) 99,00; *О. Шлыгин* (Новосибирск) 92, 97, 99; *С. Штейнер* (Гомель) 00; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) 84, 90—97, 99, 00; *Р. Шувар* (п. Рогатин Ивано-Франковской обл.) 84, 85, 87, 90, 91, 94—97, 99—01; *В. Щукин* (Ленинград) 94, 96, 99—02; *С. Эмурадов* (Шаартузский р-н ТаджССР) 95; *Л. Юферева* (Советский р-н Марийск. АССР) 00, 01.

Ответы, указания, решения

К статье «Орнаменты»

(к упражнениям)

1. Для фигур «порядка 4» существует четыре перемещения: параллельный перенос и три поворота. Для фигур «порядка 2» — тоже четыре; два из них — повороты или переносы, а два другие — скользящие симметрии (см. примечание на с. 25).

2. а), в), г), д), ж), з) — параллельные переносы; б) и е) — повороты на 180°.

3. Рисунки 1,*а* и 1,*в* — орнаменты типа VIII, рисунок 1, *б* — типа IV, 1,*г* — типа III, 1,*д* — типа V.

Рисунки 2, *а* и 2, *в* — орнаменты типа II, рисунок 2, *б* — орнамент типа III.

4. Оси скользящей симметрии есть у всех орнаментов, у которых среди порождающих перемещений встречается и осевая симметрия (для некоторых орнаментов оси скользящей симметрии — это в точности оси обычной симметрии).

К статье «Закон сохранения импульса при соударениях»

$$1.\ |\vec{v}_0| = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{2H}\left(s_2 + s_1\frac{m_1}{m_2}\right)} \approx$$

≈ 435 *м/сек*.

$$2.\ Q = \frac{3}{16}\frac{|\vec{p}|^2}{m}.$$

$$3.\ s = \frac{H(1-\mu)^3}{2\mu} = 0{,}25\ м.$$

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Математика

Отделение политэкономии

1. Вместе бригады работали 12 дней. 2. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \pm 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 4n\pi$, где k и n — целые числа. 3. $r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(15 - \sqrt{105})$, $r_2 = \sqrt{6}(10 - \sqrt{70})$. 4. $x_1 = 3$, $y_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = -3$, $y_2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, где k и n — целые числа. 5. $\frac{2}{7} \leqslant x < 3$.

Отделение планирования и экономической кибернетики

1. $-1 + 10^{-\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant -9/10$, $9 \leqslant x \leqslant 10^{\sqrt{3}} - 1$. 2. $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $y_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{12}$, $y_2 = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{\pi}{12}$, $y_3 = \frac{11\pi}{6}$.

3. $2(3 + \sqrt{3})$. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника *ACB* и теоремой синусов для треугольника *AMC*. 4. 3.

Факультет психологии

1. Скорость поезда при движении в гору 60 *км/час*, скорость поезда при движении по ровному месту 78 *км/час*. 2. $S_{ABC} = 25/3$. Указание. Доказать, что $S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOC}$, где O — точка пересечения медиан. 3. $x_1 = 5/3$, $x_2 = 15$. 4. $x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, где k и n — целые числа. Указание. Заметить, что

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{ctg}^2 x + 4} = |\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x|.$$

5. $x = -2$, $y = 3/2$. Указание. Рассматривая при $y \neq 1$ данное уравнение как квадратное относительно x (с коэффициентами, зависящими от y), выписать условие существования его решений.

Отделение структурной и прикладной лингвистики

1. 27 операций. 2. $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$. Указание. Вычислить О. Д. З. данного неравенства. 3. $x = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi$, где n — целое число. Указание. Заметить, что $5 + 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 2$, и

$\sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\leqslant 1$. 4. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где k — целое 5. $32\sqrt{21}:147$. Указание. Выразить объемы призмы и пирамиды через радиус R шара. Доказать, что центр шара лежит внутри шестиугольной пирамиды.

Физика

Географический факультет и факультет почвоведения

1. $T_2=kT_1\left(1+\frac{M|\vec{g}|}{p_0S+m|\vec{g}|}\right)=324°$ K; $t_2=51°$ C.

2. $h=\frac{H}{k^3}-\frac{(k^3-1)\,p_0}{k^3\rho|\vec{g}|}=1{,}25$ *м*.

3. $|\vec{E}|=\frac{m|\vec{g}|}{q}=10^3$ *в/м*.

4. $n_{\min}=\frac{1}{\sin\alpha}=1{,}16$.

5. $l=4$ *см*.

Геологический и химический факультеты

1. $M=m\,\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}=50$ *г*.

2. $Q=\frac{m(|\vec{v}_1|-|\vec{v}_2|)}{2M}\,[(M-m)|\vec{v}_1|+(M+m)|\vec{v}_2|]=298$ *дж*.

3. $C=\frac{2|q|}{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}=5\cdot10^{-3}$ *мкф*.

4. $C_1=C_2\,\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=10^3$ *пкф*.

5. $|\vec{v}_2|=|\vec{v}_1|\,\frac{F}{a-F}=0{,}5$ *м/сек*.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см «Квант» № 2

1. а) Первый чудак не проиграет, если будет «тянуть» ломаную все время вниз. Далее, если очередной ход невозможен, то ломаная замкнулась (докажите это), а замкнуться она может лишь после четного числа ходов, поэтому второй чудак проиграть не может.

б) Выиграет первый чудак при нечетных n и второй при четных n. Указание. Поставим в каждом узле сетки число, равное количеству целых ниток, исходящих из этого узла. Сумма всех чисел в узлах для целой сетки равна $3\cdot4\cdot(n-1)+4(n-1)^2$, что делится на 4. Для «максимально порезанной», но не распавшейся сетки (она имеет вид «дерева» с ветками) эта сумма равна $2n^2+4n-8$, что не делится на 4 при нечетных n и делится на 4 при четных n. Но каждый разрез нитки уменьшает сумму чисел в узлах на 2.

2. Решение. Если $x=1976k+76=1977p+76$, то $x+2=13(152k+6)=3(659p+26)$, поэтому $x+2$ делится нацело на 39, а x — дает остаток 37.

3. Нет, не может. Указание. Предположим, что кентавр может обойти доску. Тогда в какой-то момент он окажется на поле h8. Попасть туда он мог только с поля f7. Но и выйти из этого угла он может только на поле f7. Значит, попав в угол, кентавр там останется.

4. Первым ходом Люся переносит одну из пуговиц на крайнее справа поле. Затем она «дублирует» ходы Саши, так что после ее хода две оставшиеся пуговицы оказываются на одном поле.

5. Спроектируем деревья на одну из сторон квадрата. Каждому дереву будет соответствовать отрезок длины 50 *см* — его проекция. По условию объединение этих отрезков совпадает со стороной квадрата. Значит, сумма их длин не менее 1 *км*. Но 1 км : :50 *см* = 2000.

Над номером работали:
В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова,
Т. Петрова, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили художники:
М. Дубах, Г. Красников,
Э. Назаров, И. Смирнова

(зав. редакцией) Л. Чернова

(художественный редактор) Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 24/XII 1976 г.
Подписано в печать 31/I 1977 г.
Бумага $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ л. 5,20 Уч.-изд. л. 6,63 Т-03441
Цена 30 коп. Заказ 2910 Тираж 296 295 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

«Квантово-волновые» ребусы

В каждом из этих ребусов буквами зашифрованы некоторые цифры, вместо звездочек могут стоять любые цифры. Расшифруйте примеры.

В. Радунский

①
```
     КВАНТ
    ×КВАНТ
    В****Т
   О****Н
  Л****А
 Н****Ю
А****Н
**********
```

②
```
    КВАНТ
   ×КВАНТ
    ****А
  *****Н
 *****Л
*****О
****В
*********
```

③
```
     КВАНТ
    ×ВОЛНА
     ****Т
   *****Н
   ****А
 *****В
*****К
**********
```

④
```
    ВОЛНА
   ×ВОЛНА
    ****Т
  *****Н
  ****А
 ****В
****К
*********
```

⑤
```
    ВОЛНА
   ×ВОЛНА
    Ы****
  *Т****
  Н****
*А****
В****
К********
```

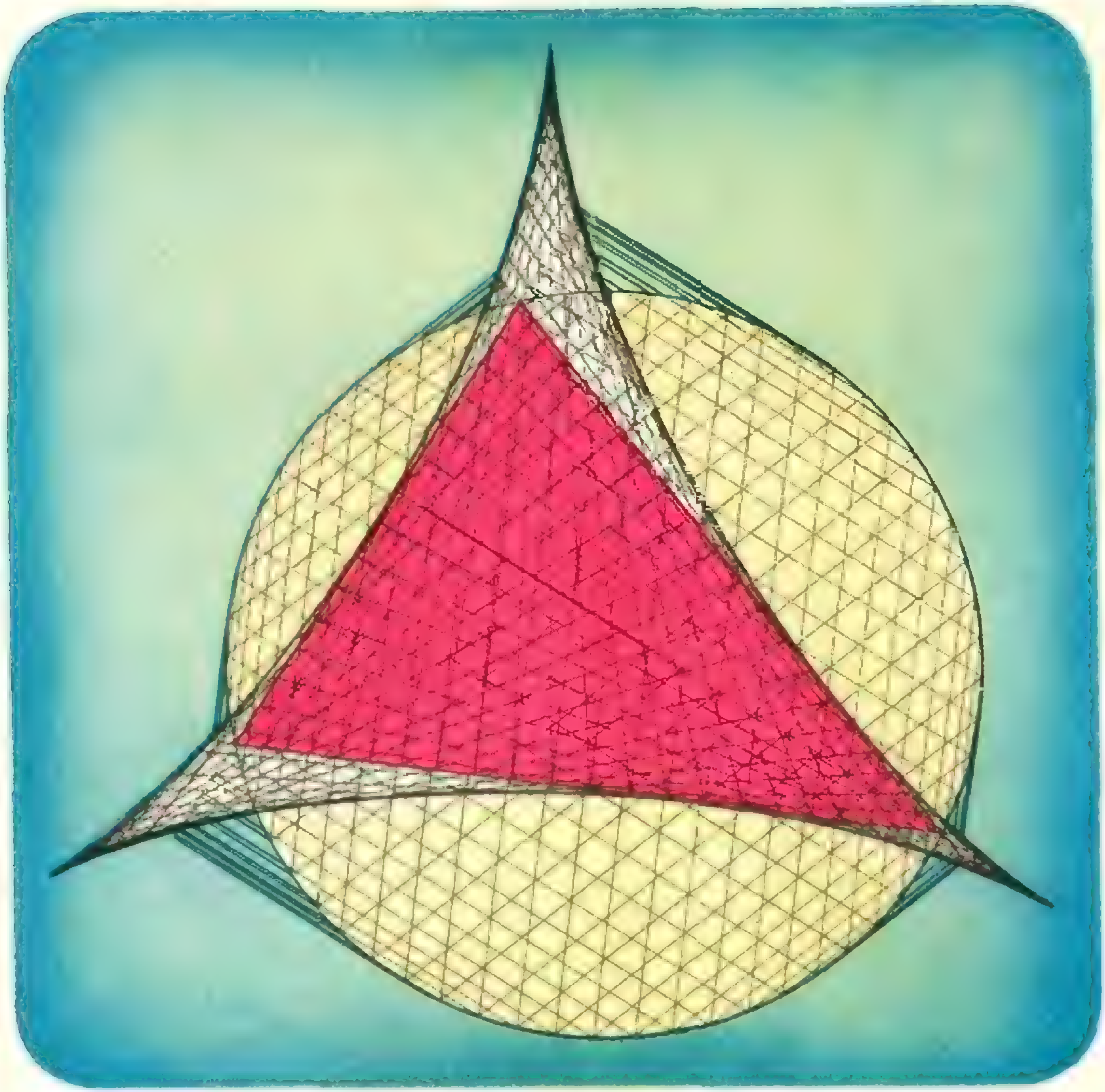
⑥
```
     ВОЛНА
    ×КВАНТ
     ****А
   *****Н
  *****Л
 *****О
 ****В
**********
```

⑦
```
     КВАНТ
    ×КВАНТ
    ******
  ******
 ******
******
*****ВОЛНА
```

⑧
```
     ВОЛНА
    ×ВОЛНА
    ******
    *****
 ******
******
*****КВАНТ
```

⑨
```
КВ×А=НТ
ВО×Л=НА
```

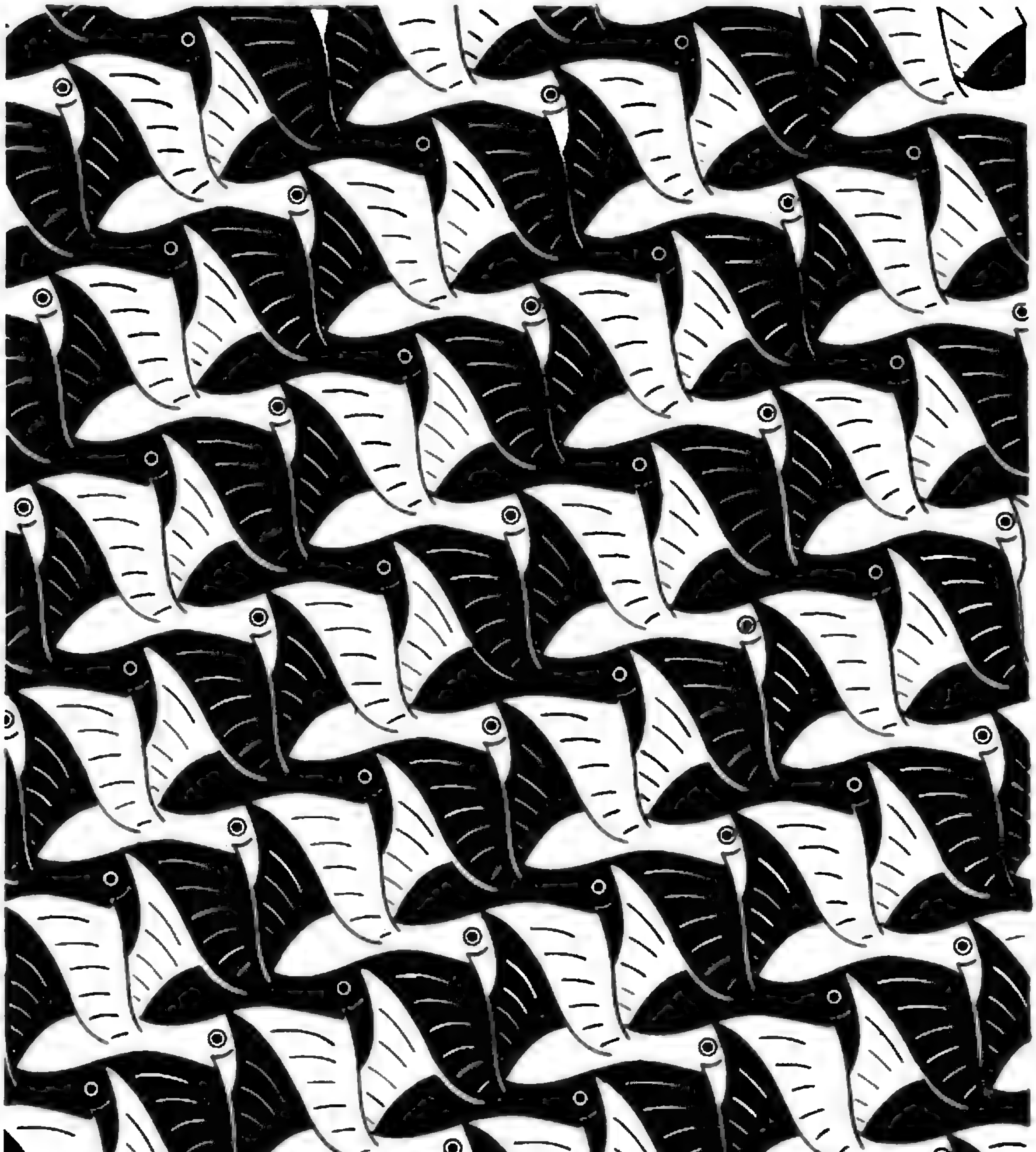
⑩
```
КВ+А=НТ
ВО:Л=НА
```



Здесь вы видите один из способов построения замечательной кривой — дельтоиды. Иногда ее называют кривой Штейнера по имени выдающегося немецкого геометра девятнадцатого века Якоба Штейнера. Подробнее о дельтоиде читайте в заметке В. Березина на с. 19.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

На первой и четвертой страницах обложки вы видите орнаменты, придуманные голландским художником М. Эшером. Об орнаментах вы можете прочесть в статье А. Землякова на с. 20.



НОМЕР
4

Основан в 1970 году

Квант

4
1977

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *Л. Гольдин.* Ускорители
13 *А. Кушниренко.* Целые точки в многоугольниках и многогранниках
21 *А. Ширшов.* Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$

Лаборатория «Кванта»

24 *В. Шефер.* Наблюдения над утренней чашкой кофе

Математический кружок

27 *И. Яглом.* О хордах непрерывных кривых

Задачник «Кванта»

30 Задачи М436—М440; Ф448—Ф452
31 Решения задач М385 г), М395; Ф403—Ф406

По страницам школьных учебников

38 *А. Земляков.* Четные и нечетные функции

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *Е. Пальчиков.* Почему в холодильнике сохнут продукты?

Практикум абитуриента

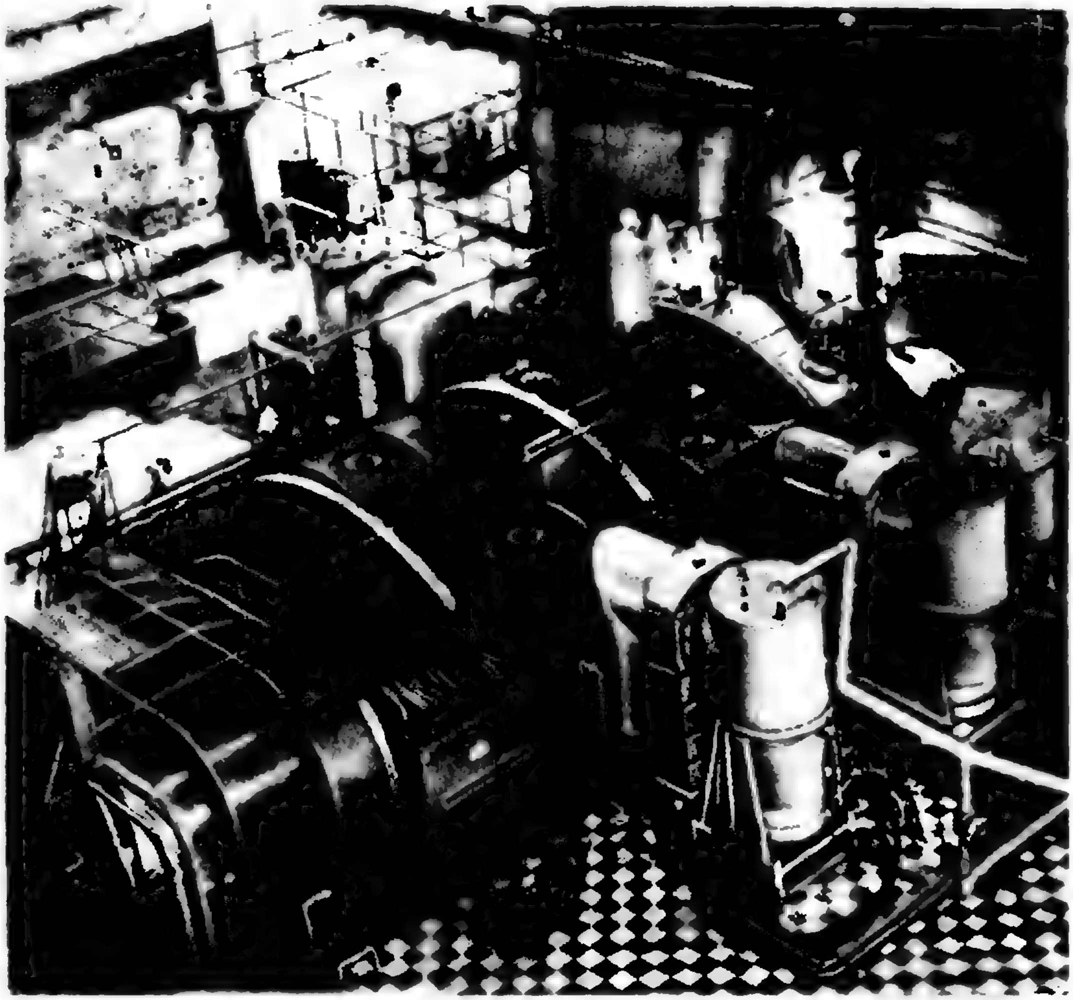
46 *В. Болтянский.* Метод отделяющих констант
50 *Е. Кузнецов.* Линзы и системы линз
55 *И. Бержина, В. Коровин.* Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Информация

58 *В. Лешковцев.* Научное общество учащихся «ВНИТОРУЛ»
60 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 12, 23, 26, 42, 57, 59)*

На первой странице обложки — рисунок к заметке В. Березина «Равноугольная спираль» (см. с. 42).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977



УСКОРИТЕЛИ

Л. Гольдин

Редколлегия журнала «Квант» уже давно просила меня написать статью об ускорителях. Я тянул с этим несколько лет. Нужно ли знать читателям журнала о почти военных хитростях, которые непрерывно придумываются физиками и инженерами для того, чтобы заставить работать эти колоссальные, ни с чем не сравнимые сооружения: не слишком ли все это специально? Потом я все-таки решился, поняв, что материал можно изложить так, чтобы читатель не только усвоил строение зоологического древа ускорительного семейства, но и почерпнул для себя сведения и идеи, которые ему всегда пригодятся. Насколько мне это удалось, скажут мои читатели.

Уже несколько десятилетий развитие физики атомных ядер и физики элементарных частиц определяется тем, какие ускорители имеются в распоряжении ученых. И сегодня ввод в строй каждого нового крупного ускорителя предвещает новые открытия и пересмотр основных теоретических положений. Для изучения глубин Вселенной строят гигантские приборы. Многометровые зеркала оптических телескопов и растянувшиеся на километры антенны радиотелескопов ни у кого не вызывают удивления. Однако еще более крупные установки — огромные многокилометровые ускорители — создают для изучения самых малых объектов современной науки — элементарных частиц.

Привычный нам мир состоит из небольшого числа частиц. Протоны, нейтроны, электроны, фотоны — вот, собственно говоря, и весь их список. Исследование радиоактивного распада позволило, кроме того, обнаружить нейтрино. Все остальные известные нам частицы — а их мы знаем уже около двухсот — крайне недолговечны. Чтобы их изучать, надо изготовлять их неподалеку от физической лаборатории. Для этого-то и сталкивают друг с другом обычные частицы — протоны и атомные ядра или электроны, ускоренные до больших энергий.

Небольшие ускорители сейчас широко используются в медицине и в технике для производства радиоактивных изотопов, для улучшения свойств полимерных материалов, для стерилизации медицинского оборудования, для лечения раковых больных и для многих других целей. Однако самые крупные, поражающие человеческое воображение ускорители строятся с чисто научными целями — чтобы изготовлять и изучать новые частицы.

Если перейти к определениям, то ускорителями принято называть установки, в которых заряженным частицам сообщается энергия при помощи электрических или электромагнитных полей. Незаряженные частицы мы ускорять не умеем. Когда необходимо получить быстрые незаряженные частицы — даже самые обычные, например, нейтроны — это приходится делать при помощи ускоренных заряженных частиц.

В простейших ускорителях разгон частиц производится в постоянном электрическом поле (*ускорители прямого действия*). Ускорение электронов в постоянном поле происходит также в рентгеновских трубках и в кинескопах телевизионных установок. Эти давно нам знакомые и столь полезные приборы не принято называть гордым именем ускорителей, хотя они вполне того заслуживают. В особенности это относится к рентгеновским трубкам, где электроны разгоняют с той же целью, что и в самых крупных современных ускорителях — для генерации новых частиц (фотонов рентгеновского диапазона) при соударении ускоренной частицы с материалом мишени. Кинетическая энергия K, которую приобретает ускоряемый электрон, равна

$$K=eV,$$

где e — заряд электрона, V — разность потенциалов, которую он проходит.

В ускорителях прямого действия не удается достичь энергии большей, чем несколько миллионов электронвольт *). Это происходит потому, что между электродами, расположенными на обычных расстояниях — до нескольких метров, — не удается создать разность потенциалов больше, чем несколько миллионов вольт. При больших напряжениях между электродами начинают происходить электрические пробои, с которыми никто не умеет бороться. Развитие всей современной ускорительной техники основано на преодолении этой трудности: заряженной частице нужно сообщить большую энергию, действуя на нее не очень сильными электрическими полями.

В небольшой — по необходимости — статье, конечно, не могут быть затронуты все вопросы ускорительной техники. Мы не будем, в частности, говорить о проблемах, связанных с получением вакуума. Читатель, однако, всегда должен помнить, что ускорение возможно только в высоком вакууме, иначе всю полученную энергию частицы в бесчисленных столкновениях будут передавать молекулам газа. В ускорителях обычных типов достаточно снизить давление на пути ускоряемых частиц до 10^{-9} *атм*. Такой вакуум давно освоен в технике.

Линейные ускорители

Линейные ускорители позволяют ускорять заряженные частицы до очень больших энергий, принципиально — до сколь угодно больших.

---

*) Электронвольт — это энергия, которую электрон (или другая частица с таким же зарядом) приобретает, пройдя разность потенциалов в 1 *в*; 1 *эв* = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

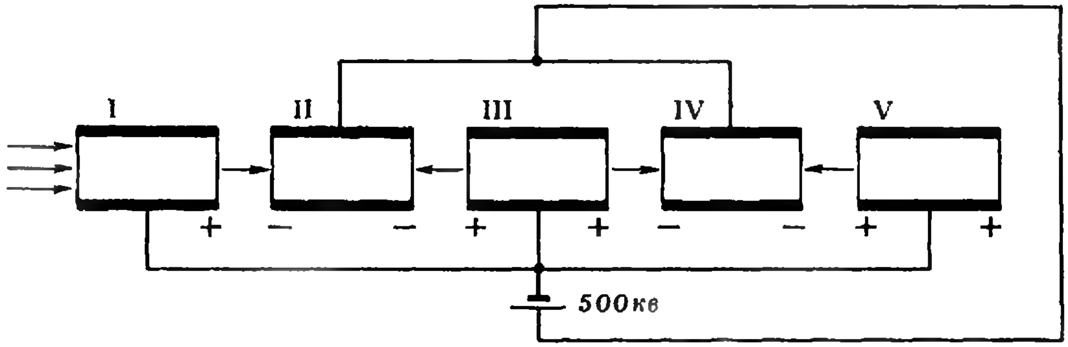


Рис. 1.

Пусть требуется ускорить протоны до энергии 30 *Мэв* *). В ускорителе прямого действия для этого потребовалось бы пропустить их между электродами, к которым приложена разность потенциалов 30 миллионов вольт. Как уже было выяснено, сделать этого нельзя из-за электрических пробоев. Однако ту же энергию протон приобретает, пройдя через 60 последовательно расположенных промежутков с напряжением 500 киловольт каждый. Такое напряжение к электродам приложить можно.

Попробуем нарисовать схему ускорителя с несколькими ускоряющими промежутками. Не удастся ли нам обойтись одним электрическим генератором? На рисунке 1 сделана такая попытка. Пучок протонов (или других ускоряемых частиц) проходит через систему расположенных друг за другом трубчатых электродов. Электроды попеременно присоединены к положительному и к отрицательному полюсам батареи. Внутри трубок частицы движутся с постоянной скоростью и их энергия не меняется (внутри проводящей трубки электрическое поле равно нулю). Проходя промежуток между трубками, они испытывают действие электрического поля, в результате чего их кинетическая энергия меняется.

Рассмотрим нашу схему более подробно. В промежутке между первой и второй трубкой направление электрического поля совпадает с направлением скорости протонов, и следовательно, поле их ускоряет. Однако в следующем промежутке поле направлено навстречу летящим частицам и замедляет их. В третьем промежутке частицы ускоряются, а в четвертом снова замедляются. Ускоритель, таким образом, у нас не получился. Чтобы заставить протоны непрерывно ускоряться, нужно сделать так, чтобы во всех промежутках между трубками электрическое поле было направлено в одну сторону. Если попытаться достичь этого при помощи батарей, потенциал трубок должен монотонно изменяться вдоль ускорителя. Разность потенциалов между первой и последней трубками должна достигать — в нашем случае — тех же 30 миллионов вольт, чего, как уже объяснялось, сделать нельзя. Этот путь оказывается, таким образом, закрытым.

Попробуем решить эту задачу, воспользовавшись источником переменного напряжения. Соберем схему так, как это показано на рисунке 2. Пусть протоны пересекают промежуток между первой и второй трубками в тот момент, когда знаки потенциалов на трубках соответствуют красным обозначениям. Проходя этот промежуток, протоны ускоряются. Как мы уже говорили, во время движения внутри трубки частицы не испытывают действия электрических сил. В это время можно изменить напряжение на трубках так, чтобы к моменту, когда протоны вылетят из второй трубки, знаки потенциалов соответствовали не красным, а синим обозначениям. В зазоре между второй и третьей трубками протоны снова приобретут энергию и затем «спрячутся» в третьей трубке. За то время, пока они летят сквозь нее, поменяем снова знаки потенциалов так, чтобы вернуться к красным обозначениям, и т.д. Таким образом, пролетая сквозь всю

---

*) 1 *Мэв* = 10^6 *эв*.

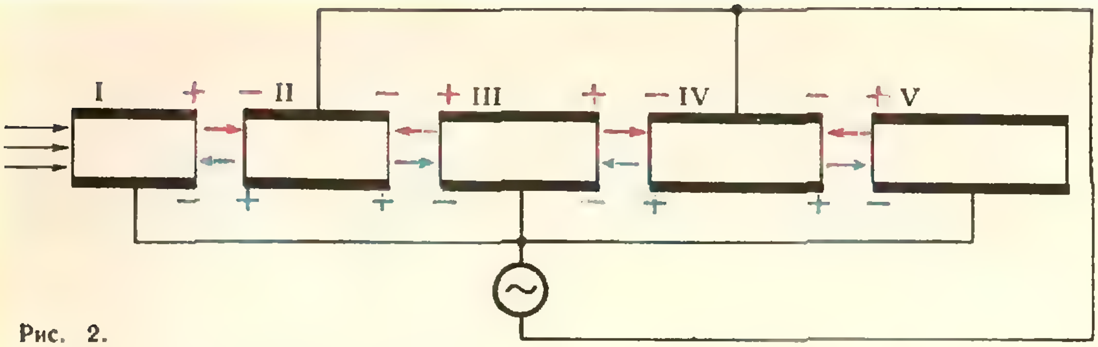


Рис. 2.

систему электродов, частицы непрерывно приобретают энергию.

Ускорители, построенные по рассмотренной схеме, называют *линейными ускорителями*, поскольку электроды в них располагаются вдоль прямой линии. Трубчатые электроды линейных ускорителей называют *трубками дрейфа* (вместо того чтобы говорить, что частицы внутри электродов движутся без ускорения, принято говорить, что они в них дрейфуют). Промежутки между трубками дрейфа называют *ускоряющими промежутками*.

В ускорителях прямого действия частицы летят непрерывной струей. В линейном ускорителе они движутся сгустками: ускоряются только те частицы, которые прошли ускоряющий промежуток в тот момент, когда электрическое поле имело нужное направление.

Легко видеть, что длина трубок дрейфа в линейном ускорителе должна постепенно возрастать. Частицы движутся вдоль ускорителя со все возрастающей скоростью. Они должны пролетать все трубки за одно и то же время, равное половине периода переменного напряжения. Длина n-й трубки равна, следовательно,

$$l_n = v_n \frac{T}{2}, \qquad (1)$$

где v_n — скорость, с которой ускоряемые частицы ее пролетают, а T — период изменения переменного напряжения. Скорость v_n нетрудно рассчитать по кинетической энергии, которую имеет ускоряемая частица. Это особенно просто сделать в том случае, когда можно пользоваться обычной нерелятивистской формулой

$$K = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Массу частицы мы обозначили здесь через m_0. Эта формула применима в тех случаях, когда кинетическая энергия много меньше энергии покоя частицы E_0 —

$$E_0 = m_0 c^2,$$

где c — скорость света. Энергия покоя E_0 для электрона равна 0,5 *Мэв*, а для протона — 938 *Мэв*. Мы видим, что в диапазоне энергий, в котором работают линейные ускорители, (до нескольких сот *Мэв*), пользоваться формулой $K = \frac{m_0 v^2}{2}$ для электронов нельзя, а для протонов — при не слишком больших ускорителях — можно.

Кинетическая энергия, которую имеет протон, проходящий n-ю трубку дрейфа, равна

$$K_n = \frac{m_0 v_n^2}{2}. \qquad (2)$$

В n-ю трубку протон попадает, пройдя $(n-1)$ ускоряющий промежуток, то есть приобретя энергию $(n-1)\,eV$ (*эв*). Если начальная энергия, с которой протон вводится, или, как обычно говорят, *инжектируется* в линейный ускоритель из какого-нибудь предварительного ускоряющего устройства, равна K_0, то

$$K_n = K_0 + (n-1)\,eV. \qquad (3)$$

Найдя из (2) и (3) значение v_n и подставив его в (1), получим

$$l_n = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{2}{m_0}\,[K_0 + (n-1)\,eV]}. \qquad (4)$$

Энергия инжекции K_0 обычно невелика, так что член K_0 играет роль поправки. Длина трубок дрейфа, грубо говоря, растет как корень из порядкового номера ускоряющего промежутка, за которым она расположена.

Рассчитаем для примера, какой должна быть длина трубки дрейфа, в которую попадает протон с энергией 10 *Мэв*. Напишем формулу (2) в виде

$$K_n = \frac{m_0c^2}{2}\left(\frac{v_n}{c}\right)^2.$$

Из этой формулы найдем

$$v_n = c\sqrt{\frac{2K_n}{m_0c^2}}.$$

Подставляя $K_n = 10$ *Мэв* и $m_0c^2 = 938$ *Мэв*, найдем $v_n = 0{,}146\ c = 4{,}4 \times 10^7$ *м/сек*. Мы видим, что при энергии 10 *Мэв* скорость протона всего в 7 раз меньше скорости света. При бóльших энергиях она еще выше.

Какую же длину должны иметь трубки дрейфа? С помощью формулы (4) найдем, что при частоте колебаний напряжения $f = 1/T = 100$ *гц* длина трубки дрейфа, которую пролетает протон с энергией 10 *Мэв*, должна составлять $2{,}2 \cdot 10^5$ *м* = 220 *км*, при частоте 1 *Мгц* — 22 *м*, при частоте 10 *Мгц* — 2,2 *м*. Все эти значения слишком велики. Чтобы понять это, достаточно вспомнить, что мы «конструировали» ускоритель на очень небольшую энергию 30 *Мэв* и речь все-таки шла о 60 трубках дрейфа! Чтобы получить линейный ускоритель разумных размеров, нужны существенно более высокие частоты.

В протонных ускорителях выбирают обычно частоты от 150 до 300 *Мгц*, а в электронных — еще выше. Для сравнения укажем, что длинноволновые радиостанции работают на частотах порядка 200 *кгц*, диапазон средних волн лежит при частотах ~ 1 *Мгц*, а коротковолновые радиостанции работают при частотах ~ 10 *Мгц*. Частота, с которой приходится менять потенциалы на трубках дрейфа линейного ускорителя, в 10÷20 раз выше, чем высота, на которой работают коротковолновые радиостанции! При таких частотах волновые свойства полей оказываются очень существенными и даже выступают на первый план.

Заметим, что частотам 150÷÷300 *Мгц* соответствуют длины волн $\lambda = c/T = cf$ от 1 до 2 *м*. В этих условиях схема, изображенная на рисунке 2, оказывается очень наивной. Утверждая, что длина волны равна 1 *м*, мы, тем самым, говорим, что направления вектора напряженности электрического поля в один и тот же момент времени противоположны в точках, разнесенных на 0,5 *м*. Это утверждение одинаково справедливо для точек, разделенных воздушным промежутком или соединенных между собой проводом, так что на протяжении проводника длиной в несколько метров напряжение несколько раз меняет свой знак. Поэтому нельзя считать, что, соединяя трубки I, III и V проводом, как это изображено на рисунке 2, мы обеспечиваем одновременную перемену знака напряжения на всех ускоряющих промежутках.

Поговорим подробнее о свойствах высокочастотных электромагнитных колебаний. Прежде всего, следует разъяснить, почему мы говорим об электромагнитных колебаниях, когда для ускорения достаточно одного только электрического поля. Связь электрических и магнитных явлений проявляется не только при высоких частотах. Даже при постоянных токах вокруг несущих ток проводников возникает магнитное поле. Однако, чем выше частота, тем теснее переплетаются электрические и магнитные поля, так что говорить о них порознь становится бессмысленно. Поэтому мы и ведем здесь речь об электромагнитных, а не об электрических колебаниях.

При низких частотах электрические и магнитные явления определяются зарядами и токами, то есть расположением и потенциалами близлежащих проводников. Электромагнитные колебания высоких частот хорошо распространяются и без проводников, как мы это знаем на примере радиоволн.

Электромагнитные колебания могут существовать не только в открытом пространстве, но и в замкнутых объемах (которые принято называть *резонаторами*). «Поведение» электромагнитных волн в резонаторах очень похоже на поведение звуковых волн. Вспомним (в качестве полезной аналогии), как происходят акустические колебания в трубах органа. Музыкант вызывает эти колебания, исполняя, например, фуги Баха. Воздух, проходящий через трубу, раскачива-

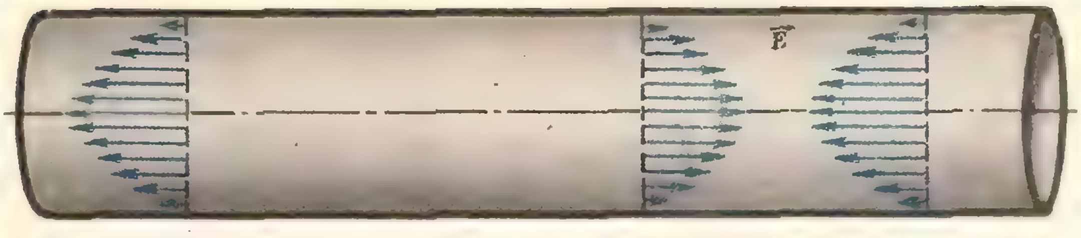


Рис. 3.

ет язычки, движение которых возбуждает в воздухе звуковые колебания.

В трубе можно возбудить не любые колебания, а только такие, на которые труба настроена. Настройка трубы определяется соотношением между ее длиной и длиной волны. В трубе, закрытой с обоих торцов, можно возбудить только такие волны (стоячие), для которых половина длины волны укладывается в трубе целое число раз. Чтобы исполнять на органе музыкальные произведения, нужно возбуждать в трубах самые разные звуки. Органы содержат поэтому тысячи труб.

Аналогичным образом устанавливаются электромагнитные колебания в замкнутых металлических трубах. Длина трубы должна быть хорошо согласована с частотой электромагнитных колебаний, на которых она должна работать. В эту тщательно сделанную полированную изнутри трубу — в резонатор линейного ускорителя — и помещают вдоль ее оси трубки дрейфа. Чтобы возбудить колебания, в трубу вводят излучатель — антенну или виток.

На рисунке 3 изображена картина силовых линий высокочастотного поля, которое создается в резонаторе в некоторый момент времени. Стрелками изображены силовые линии электрического поля. Силовые линии магнитного поля на рисунке не показаны. Они имеют вид колец, окружающих пучки линий электрического поля. Через половину периода электромагнитных колебаний силовые линии изменят свое направление на обратное.

Напряженность электрического поля, создаваемого в резонаторе, максимальна около его оси и падает почти до нуля у стенок. Если бы это было не так, то электрическое поле создавало бы в стенках большие токи, которые приводили бы к нагреву стенок — к бесполезной затрате мощности. Поле такой конфигурации можно создать в трубе лишь в том случае, если ее диаметр согласован с длиной волны. Мы видим, что как длина, так и поперечные размеры резонатора должны подбираться очень тщательно.

Помещенные в резонатор трубки дрейфа несколько искажают картину электромагнитных колебаний. Внутри трубок возникает свободное от колебаний пространство, так как поле не может проникнуть сквозь их проводящие стенки. Поле вытесняется из трубок дрейфа в ускоряющие промежутки.

При ускорении частиц до очень больших энергий отпадает необходимость «прятать» частицы в трубки дрейфа. Через ускоритель можно пропускать обычные электромагнитные волны. Если скорость частицы близка к скорости света, то, попав на удачный участок волны, где вектор напряженности электрического поля достаточно велик и имеет нужное направление, частица все время будет ускоряться.

«Очень большие» энергии, о которых мы говорили, для разных частиц могут сильно отличаться друг от друга. Для протонов и других тяжелых частиц это энергии порядка многих тысяч *Мэв*. А для электронов энергия порядка нескольких *Мэв* является уже очень большой.

Ускорители, о которых мы сейчас говорили, называются *ускорителями с бегущей волной*. Большой линейный ускоритель с бегущей волной для ускорения электронов до энергии 2000 *Мэв* построен в физико-техническом институте АН УССР в Харькове.

Циклические ускорители

Линейные ускорители на большие энергии оказываются очень дорогими. Для примера укажем, что линейный ускоритель электронов в Стенфорде (США) на энергию 20 000 *Мэв* имеет длину более 3,5 *км*. На всем этом протяжении непрерывной чередой расположены уникальные по мощности и очень дорогие высокочастотные станции.

Более экономным оказывается свернуть траекторию ускоряемых частиц в спираль или в кольцо, непрерывно возвращая их к одним и тем же ускоряющим станциям. Такие ускорители называются *циклическими*. Для искривления траектории применяются магнитные поля. Как ни дороги магниты, как ни велики расходы на электроэнергию, необходимую для их питания, эти затраты с лихвой перекрываются экономией на высокочастотных устройствах.

Напишем несколько простых формул. Искривление траектории вызывается силой Лоренца, действующей на частицу со стороны магнитного поля. Эта сила, как известно, равна

$$F = evB, \qquad (5)$$

где e — заряд частицы, v — ее скорость, а B — индукция магнитного поля (предполагается, что направление $\vec{v}$ перпендикулярно направлению $\vec{B}$). Сила Лоренца перпендикулярна как направлению магнитного поля, так и направлению скорости частицы. Она сообщает частице центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{R}$, так что движение происходит по кругу. Величина силы F и радиус окружности связаны, как известно, формулой

$$F = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6)$$

Приравнивая правые части формул (5) и (6), найдем

$$evB = \frac{mv^2}{R},$$

или

$$p = mv = eBR, \qquad (7)$$

где $p = mv$ — импульс частицы. Если понимать под массой релятивистскую массу частицы, определяемую формулой

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (8)$$

то соотношение (7) оказывается справедливым и при релятивистских энергиях.

Формула (7) показывает, что с индукцией магнитного поля и с размерами ускорителя простым соотношением связана не привычная нам энергия частицы, а ее импульс. Импульс и кинетическая энергия в релятивистской механике связаны довольно сложной формулой

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}.$$

Под корнем этого выражения стоит величина, имеющая размерность квадрата энергии. Если умножить это выражение на c, то получим

$$pc = \sqrt{K(K + 2m_0c^2)}.$$

Эта формула показывает, что вместо импульса p удобно рассматривать пропорциональную ему величину pc, имеющую размерность энергии (pc принято измерять в электрон-вольтах). При $K \ll m_0c^2$ (нерелятивистский случай) это выражение переходит в знакомую формулу $p = \sqrt{2m_0K}$, а при $K \gg m_0c^2$ (большие энергии) имеем просто $pc = K$. В этих единицах формула (7) принимает знакомый всем физикам вид

$$pc\ (\text{эв}) = 3 \cdot 10^8\ BR\ (\text{тл} \cdot \text{м}). \qquad (9)$$

При помощи формулы (9) можно оценить размеры циклических ускорителей. Магнитные поля всегда стремятся выбирать посильнее, чтобы иметь ускоритель меньших размеров и веса. Но при индукции 2 *тл* железо, из которого делают электромагниты, насыщается. Поэтому получать более сильные поля в ускорителях с железными магнитопроводами не удается. В вакуумной камере ускорителей индукция поля обычно не превосходит 1,6 *тл*. Обычно в ускорителях между магнитами приходится оставлять промежутки, необходимые для размещения ускоряющих станций, корректирующих устройств, аппаратуры для ввода и вывода частиц и т. д. В результате этого среднее значение $|\vec{B}|$ оказывается еще ниже — около 1,2 *тл*. Подставляя в формулу (9) $B=1{,}2$ *тл*, найдем

$$R \approx 3 \cdot 10^{-9}\, pc. \qquad (10)$$

Приведем некоторые оценки для протонов. Для ускорения протонов до энергии 20 *Мэв* ($pc=200$ *Мэв*) необходим ускоритель с радиусом $R \approx 60$ *см*. При энергии 600 *Мэв* ($pc=1200$ *Мэв*) $R \approx 3{,}6$ *м*. При ускорении до 10 *Гэв* * ($pc=11$ *Гэв*) $R=30$ *м* (ускоритель Института теоретической и экспериментальной физики в Москве, ускоритель Лаборатории высоких энергий в Дубне). При энергии 70 *Гэв* (Серпуховский ускоритель) $R \approx 200$ *м*, а при энергии 500 *Гэв* (ускоритель Лаборатории имени Ферми, США) $R \approx 1{,}5$ *км*. Эти оценки определяют масштаб сооружений и ставят жесткие экономические преграды на пути повышения предельной энергии ускорителей. Размеры, а вместе с ними и стоимость циклических ускорителей в конце концов определяются просто магнитными свойствами железа.

Возможен ли здесь какой-либо прогресс? Предельные индукции, достижимые при использовании различных ферромагнетиков, очень близки друг к другу, так что надеяться на изобретение сплава с существенно большей индукцией насыщения не приходится. Единственным реальным путем является отказ от обычных магнитов и переход к магнитам на сверхпроводниках. При этом индукция может быть поднята в 2—3 раза. Как ни дороги сверхпроводники и как ни сложно работать с низкими температурами, ускорительная техника должна начать двигаться в эту сторону. Сооружение первого сверхпроводящего ускорителя уже осуществляется в Лаборатории имени Ферми.

Вернемся к формуле (9). По мере ускорения частиц их импульс p увеличивается, а значит, должны возрастать либо радиус траектории R, либо индукция поля B. Проще всего, конечно, работать в постоянном магнитном поле. Траектория ускоряемых частиц имеет в этом случае вид раскручивающейся спирали. Формула (10) определяет радиус ее наружного витка. Магнитные полюсы электромагнита имеют форму дисков, перекрывающих всю спираль. Так устроены *циклотроны*. Сделать сплошной магнитный полюс радиусом 60 *см* или 3,6 *м* еще можно. Однако для ускорения протонов до энергии 10 *Гэв* необходим полюс радиусом около 30 *м*. Делать такие сплошные полюсы невозможно. Именно это обстоятельство ограничивает предельные энергии, достигаемые при помощи циклотронов.

В ускорителях на большие энергии магнитное поле создается только на узкой кольцевой дорожке. Радиус R, по которому должны двигаться частицы, таким образом, задан, и траектория частиц в конце и в начале ускорения одна и та же. Увеличение импульса частиц должно при этом сопровождаться возрастанием магнитного поля. Ускорители с кольцевым возрастающим во времени полем носят название *синхротронов* (магнитное поле возрастает синхронно с импульсом).

Циклотроны, фазотроны и микротроны

Циклотроны применяются для ускорения протонов и тяжелых ионов. Они были придуманы Дж. Лоуренсом. Схема устройства циклотрона изображена на рисунке 4. Магнитное поле, «заворачивающее» частицы, создается в зазоре между полюсами электромагнита. В этот зазор помещается вакуумная камера, напоминающая по форме гигантскую консервную банку. В вакуумной камере расположены электроды, между которыми создается ускоряющее электрическое поле. Они тоже похожи на консервную банку. Чтобы получить электроды, эту банку надо разрезать по диаметру и слегка раздвинуть половинки так, чтобы между ними образовалась щель. Каждая из половинок и образует электрод. К ним подводится высокочастотное ускоряющее напряжение. Как видно из рисунка 4, *б*, электроды напоминают по форме латинскую букву *D*. Они называются *дуантами*. Щель между дуантами выполняет функцию ускоряющего промежутка.

Дуанты в циклотроне играют ту же роль, что и дрейфовые трубки в

---

*) 1 *Гэв* 10^3 *Мэв*.

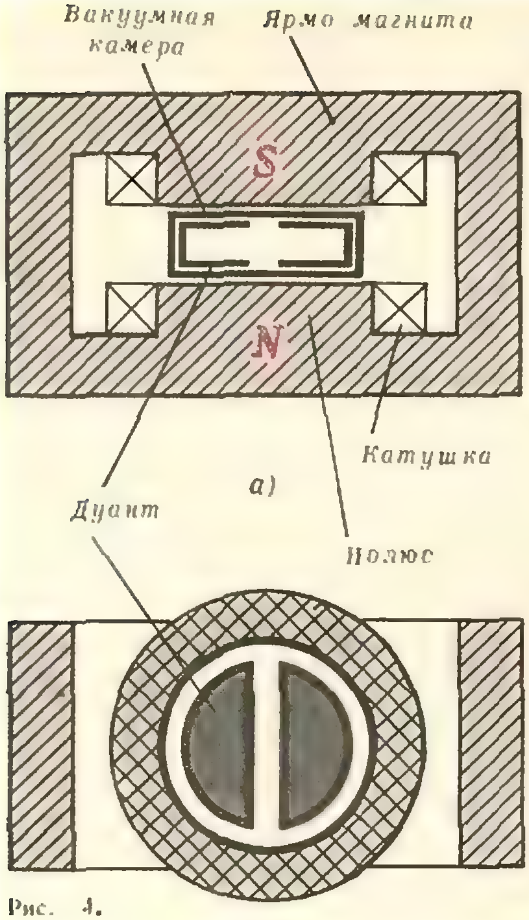


Рис. 4.

линейном ускорителе. Пока траектория частиц проходит внутри дуантов, они защищены от действия электрического поля, а когда поле между дуантами приобретает нужное направление и величину, частицы вылетают в зазор, ускоряются в нем и вновь прячутся внутрь дуантов. Таким образом происходит ускорение.

От чего зависит период T обращения частицы в циклотроне? Частица, движущаяся со скоростью v, проходит окружность радиуса R за время $2\pi R/v$. Так как $v = \frac{eBR}{m}$ (см. (7)), то

$$T = 2\pi\frac{m}{eB}. \qquad (11)$$

Период обращения определяется массой частицы и величиной индукции магнитного поля. При небольших энергиях вместо релятивистской массы m можно подставлять массу покоя m_0. Если магнитное поле постоянно во всем промежутке между дуантами (плоские магнитные полюсы), правая часть равенства (11) превращается в константу и период обращения оказывается постоянным. Этот результат имеет важнейшее значение. Частота питающего циклотрон высокочастотного напряжения неизменна, неизменен и период обращения частиц. Если частота выбрана правильно, то в течение всего цикла ускорения частицы вовремя попадают в ускоряющий промежуток между дуантами и вовремя прячутся внутрь дуантов.

Частицы непрерывно вводятся в камеру циклотрона вблизи от ее центра. Приобретая энергию, они раскручиваются по виткам спирали и покидают циклотрон. Пока одни частицы заканчивают цикл ускорения, другие находятся на середине пути, а третьи его еще только начинают. Вылетающая из циклотрона «струя» ускоренных частиц состоит из следующих друг за другом сгустков частиц, пролетающих ускоряющие промежутки в подходящие для ускорения моменты времени.

На странице 2 приведена фотография циклотрона для ускорения многозарядных ионов, который находится в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне.

Обратимся к подводным камням, которые пока ускользнули от нашего внимания. Главное затруднение связано с релятивистскими поправками. Заменять m на m_0, как мы это делали до сих пор, можно только при небольших энергиях. Формула (8) показывает, что с увеличением скорости масса частицы постепенно растет. Как это сказывается на синхронности обращения частиц и колебаний ускоряющего поля?

Вернемся к формуле (11). Не первый взгляд не представляет труда обеспечить постоянство периода обращения и в этом случае. Масса частицы m постепенно возрастает. Вместе с тем возрастает радиус описываемого витка спирали. Казалось бы, нетрудно обеспечить постоянство отношения m/B, а значит, и постоянство T. Для этого достаточно создать между полюсами в циклотроне поле, индукция которого увеличивалась бы от центра к периферии. Однако этот путь закрыт. Оказывается, что при такой форме магнитного поля движение частиц становится неустойчивым:

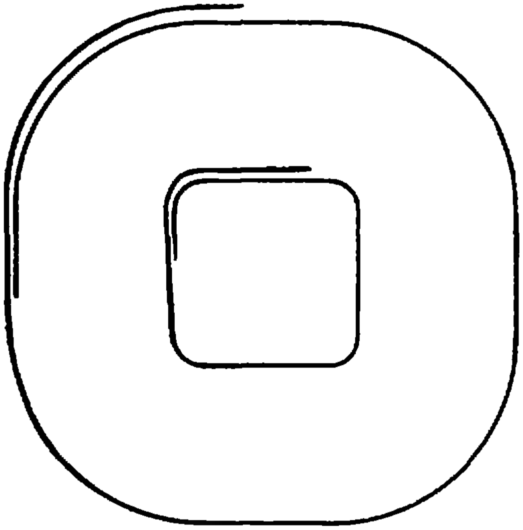


Рис. 5.

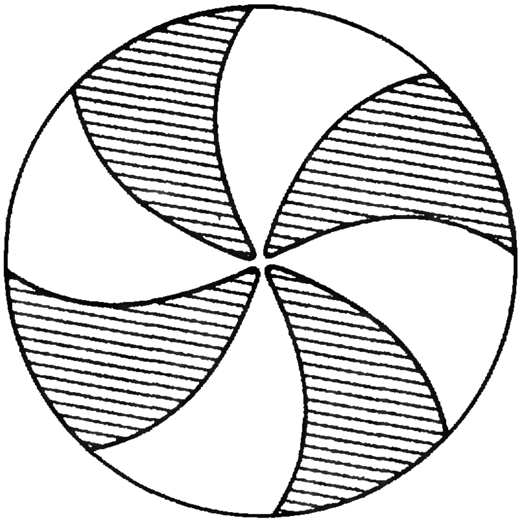


Рис. 6.

даже при небольших отклонениях от средней горизонтальной плоскости ускоряемые частицы быстро уходят вверх или вниз и ударяются о крышки дуантов. Поэтому обычные циклотроны, в которых не принимается мер для компенсации эффектов, связанных с релятивистским возрастанием массы, могут ускорять протоны только до небольших энергий — приблизительно до энергии 20 *Мэв*.

Второй путь заключается в том, чтобы примириться с тем, что период обращения частиц постепенно возрастает, и соответственно изменять период ускоряющего напряжения. Именно так чаще всего и поступают. При этом, однако, циклотрон уже не может работать непрерывно. В тот момент, когда период высокочастотного напряжения увеличился в соответствии с энергией ускоряемых частиц, впускать новые частицы не имеет смысла — их период обращения не равен периоду изменения высокочастотного поля. Когда цикл ускорения закончен, частоту можно снова поднять и инжектировать новые частицы. Циклотрон, таким образом, будет выдавать отдельные порции или, как часто говорят, «плевки» ускоренных частиц. Ускорители подобного типа строят до энергии порядка 1 *Гэв* (при ускорении до больших энергий применяют кольцевые машины). Такие ускорители называют *фазотронами*.

Есть и третий путь. Можно добиться того, чтобы период обращения не зависел от энергии частицы, усложнив форму ее траектории. Так поступают в *изохронных циклотронах*. Как мы выяснили, при круговой (или, точнее говоря, спиральной) форме траектории период обращения частиц возрастает с радиусом. Чтобы избежать этого, искусственно увеличим время движения частицы при малых энергиях. Это можно сделать, удлинив траекторию, например, придав ей вместо окружности форму многоугольника со скругленными углами. Траектории такого вида изображены на рисунке 5. По мере увеличения энергии частицы углы многоугольника все более скругляются, и траектория частицы приближается к круговой.

Чтобы заставить частицу двигаться по такой траектории, надо создать магнитное поле сложной конфигурации. Для этого электромагнит изохронного циклотрона делают из нескольких отдельных магнитов, располагающихся на участках, где траектория должна скругляться. Полюсы электромагнита имеют сложную форму (см. рисунок 6).

Указанный путь — при кажущейся его привлекательности — очень сложен. Но по нему приходится идти, если нужны большие интенсивности, а значит, не отдельные «плевки», а добротная «струя» ускоренных частиц.

Заканчивая обзор ускорителей, использующих постоянные во времени магнитные поля, скажем несколько слов о *микротронах*. Так называются ускорители электронов, придуманные

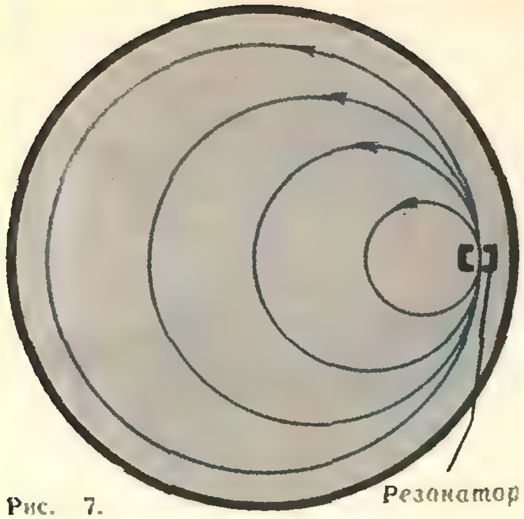


Рис. 7.

в свое время академиком В. И. Векслером, затем незаслуженно забытые и, наконец, недавно вновь возвращенные к жизни. Траектории электронов в таких ускорителях имеют вид окружностей, касающихся друг друга в одной точке, как это изображено на рисунке 7. В общей для всех окружностей точке помещен ускоряющий промежуток (резонатор). Пройдя через него очередной раз, частица ускоряется и переходит на следующую окружность. Другие электроны при этом движутся по предыдущим окружностям.

Для успешной работы микротрона необходимо, чтобы электроны приходили к ускоряющему промежутку в тот момент, когда поле имеет нужное направление. Можно показать, что это условие выполняется, если частица при прохождении ускоряющего промежутка приобретает энергию, равную (или кратную) ее энергии покоя m_0c^2. (Этот расчет очень прост, и, пользуясь уже приведенными нами формулами, читатель может сделать его самостоятельно.) Тогда каждый следующий виток траектории электроны будут проходить дольше, чем предыдущий, на время, равное одному или нескольким периодам колебаний ускоряющего поля. И каждый раз они будут попадать в резонатор в тот момент, когда ускоряющее поле будет направлено в нужную сторону.

Такие ускорители можно построить только для электронов, потому что для более тяжелых частиц необходимый прирост энергии оказывается фантастически большим. А для ускорения электронов микротроны с успехом применяются и позволяют получать почти непрерывные пучки большой интенсивности.

Упражнения

1. В технике линейных ускорителей длину трубок дрейфа выражают не через период электромагнитных колебаний, а через длину их волны. При этом вместо скорости частиц вводят относительную скорость $\beta = v/c$, где c — скорость света. Получите соответствующую формулу.

2. Рассчитайте величину pc для протонов с кинетической энергией $K = 20$, 200 и 2000 *Мэв* при помощи соотношения Эйнштейна

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4.$$

В этой формуле E — полная энергия, равная $K + m_0c^2$. Покажите, что формула

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)},$$

которой мы пользовались, эквивалентна этому соотношению. (Напоминаем, что для протонов $m_0c^2 = 938$ *Мэв*.)

3. Фазотрон в Дубне ускоряет протоны до энергии 680 *Мэв*. Во сколько раз должна измениться частота ускоряющего высокочастотного поля за время ускорения? Считать, что магнитное поле от радиуса не зависит.

4. Покажите, что для успешной работы микротрона нужно, чтобы при каждом прохождении ускоряющего промежутка частица приобретала энергию m_0c^2 (или несколько m_0c^2).

Задачи наших читателей

1. Даны две окружности с радиусами R и r. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной к данным окружностям.

Ж. Лев (г. Черновцы)

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $|AD|=a$, $|BC|=b$. Прямая l параллельна основаниям и пересекает сторону AB в точке M, сторону CD в точке N, причем $(MC) \parallel (AN)$. Найти $S_{AMCN} : S_{ABCD}$.

В. Ленкарев
(г. Луховицы)

3. Решите следующие уравнения ($\overline{xy}$ — число, записанное цифрами x, y и т.п.):

а) $\overline{xy}\cdot\overline{0,yz}=1$;

б) $\frac{1}{x} = 0,\overline{1\,xxx\,\ldots}$,

в) $\overline{xx}\cdot\overline{yy}=\overline{(x-1)\,xx\,(x-1)}$.

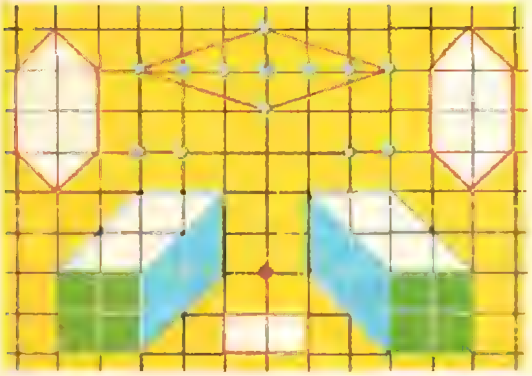
И. Михалкович
(Минская обл.)

4. Найти все действительные корни уравнения $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 1977x^{1976} = 0$.

П. Парамонов
(г. Москва)

А. Кушниренко

Целые точки в многоугольниках и многогранниках



В этой статье мы будем заниматься многоугольниками, все вершины которых лежат в целых точках координатной плоскости — в узлах клетчатой бумаги. Пусть F — такой многоугольник, а $S(F)$ — его площадь. Если $N(F)$ — число узлов, попавших внутрь и на границу многоугольника F, то $S(F) \approx N(F)$. Для $S(F)$ есть и точные формулы, например, формула Пика («Квант», 1974, № 12):

$$S(F) = N(F) - B(F)/2 - 1,$$

где $B(F)$ — число узлов, попавших на границу F.

Формула Пика обладает одним недостатком: она не имеет прямого аналога в пространстве. Приведенный на рисунке 1 пример показывает, что объем $V(F)$ многогранника F с вершинами в узлах кубической решетки нельзя выразить через $N(F)$ — число узлов, попавших внутрь и на границу F, и через $B(F)$ — число узлов, попавших на границу F. Можно, однако, придумать похожие формулы, которые прекрасно обобщаются на пространственный случай.

В этой статье будет построена небольшая теория, которая позволяет *угадать и доказать* все мыслимые аналоги формулы Пика на плоскости и в пространстве *).

Такие формулы понадобились автору этих строк при решении математической проблемы, о которой будет кратко рассказано в § 1.

§ 1. Введение

Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где P и Q — многочлены от x, y с действительными коэффициентами?

Чтобы ответить на этот вопрос, для каждого одночлена $x^m y^n$, входящего с ненулевым коэффициентом хотя бы в один из многочленов P или Q, отметим на координатной плоскости точку с координатами $(m; n)$. Возьмем *выпуклую оболочку* отмеченных точек — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все отмеченные точки. Этот многоугольник называется *многоугольником Ньютона* *) системы (1). Его удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Решив пару десятков систем вида (1), я стал подозревать, что справедлива такая

Теорема 1. *Число ненулевых решений системы (1) либо бесконечно, либо не превосходит удвоенной площади ее многоугольника Ньютона.*

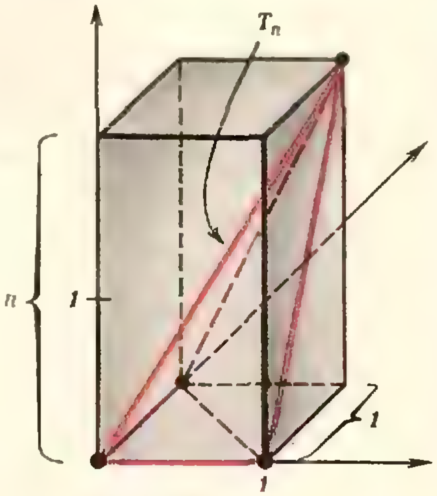


Рис. 1. $N(T_n) = 4$, $B(T_n) = 4$, $V(T_n) = n/6$.

---

*) См. задачу М385, «Квант», 1976, № 5.

*) Подробнее мы расскажем о многоугольниках Ньютона в июньском номере нашего журнала.

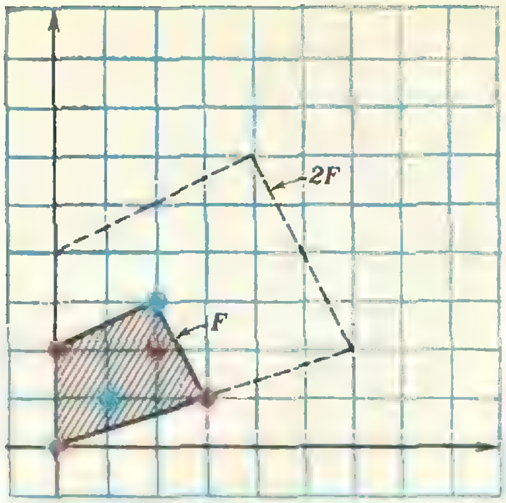


Рис 2. $N(F)=9$, $N(2F)=28$, $B(F)=5$, $S(F)=5{,}5$.

(Решение (x_0, y_0) называется ненулевым, если $x_0\neq 0$ и $y_0\neq 0$.) Пытаясь доказать теорему 1, я почти доказал, что справедлива похожая на нее

Теорема 2. *Число ненулевых решений системы* (1) *либо бесконечно, либо не превосходит* $N(2F)-2N(F)+1$, *где* $2F$ — *многоугольник, полученный из* F *растяжением в два раза относительно начала координат* (рис. 2).

Чтобы окончить довольно длинное доказательство теоремы 2, мне оставалось показать, что

а) для любого целочисленного многоугольника F *функция* $N(nF)$ — *многочлен второй степени от* n *при целых* $n\geqslant 0$ (я называю многоугольник целочисленным, если его вершины лежат в узлах).

Пытаясь понять, какая из теорем — 1 или 2 — сильнее, я убедился что

б) для любого целочисленного многоугольника

$$2S(F)=N(2F)-2N(F)+1,$$

т. е. теоремы 1 и 2 по существу совпадают.

Оказывается, что и *а*) и *б*) в два счета выводятся из формулы Пика.

Упражнение 1. Выведите *а*) и *б*) из формулы Пика.

Задача 1. Сформулируйте аналог теоремы 1 для системы уравнений $P(x, y, z)=Q(x, y, z)=R(x, y, z)=0$ и аналог формулы *б*) для многогранников. Придуманную формулу проверьте, глядя на рисунок 3.

$2S(F)=N(2F)-2N(F)+1$

§ 2.

Мы начнем построение обещанной выше теории с того, что честно докажем эту простую формулу. Обозначим ее правую часть через $P(F)$. Покажем, что если целочисленный многоугольник F разбит диагональю I на многоугольники F_1 и F_2, для которых формула *б*) верна, то она верна и для F. Действительно, так как $N(F)=N(F_1)+N(F_2)-N(I)$, то и $P(F)=P(F_1)+P(F_2)-P(I)$. Очевидно, что $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$. Поэтому $2S(F)=2S(F_1)+2S(F_2)=P(F_1)+P(F_2)=P(F)+P(I)$. Легко проверить непосредственно, что для любого целочисленного отрезка I (т. е. отрезка, концы которого — целые точки) $P(I)=0$. Значит, $2S(F)=P(F)$. Таким образом, из справедливости *б*) для треугольников по индукции вытекает справедливость *б*) для n-угольников: целочисленный четырехугольник можно разрезать на два целочисленных треугольника, пятиугольник — на четырехугольник и треугольник и т. д.

Формулу *б*) легко проверить непосредственно для прямоугольников, составленных из целых клеток (рис. 4). Возьмем «половинку» такого прямоугольника F — прямоугольный треугольник F_1. Мы уже знаем, что $2S(F)=P(F)$. По симметрии $S(F_1)=S(F_2)=S(F)/2$ и $P(F_1)=P(F_2)$. Так как $P(I)=0$, то $P(F)=2P(F_1)$, откуда $2S(F_1)=P(F_1)$. Таким образом, формула *б*) доказана нами

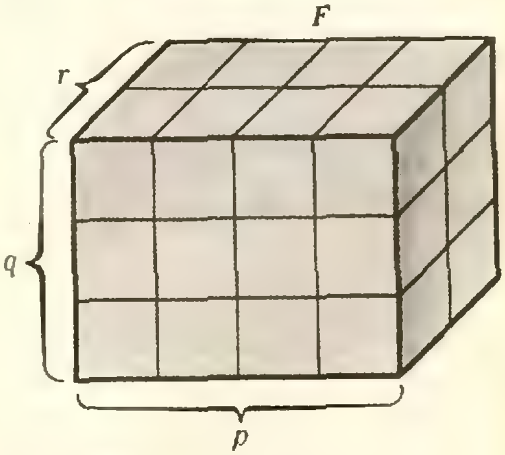


Рис 3. $N(F)=(p+1)(q+1)(r+1)$, $B(F)=N(F)-(p-1)(q-1)(r-1)$, $V(F)=pqr$.

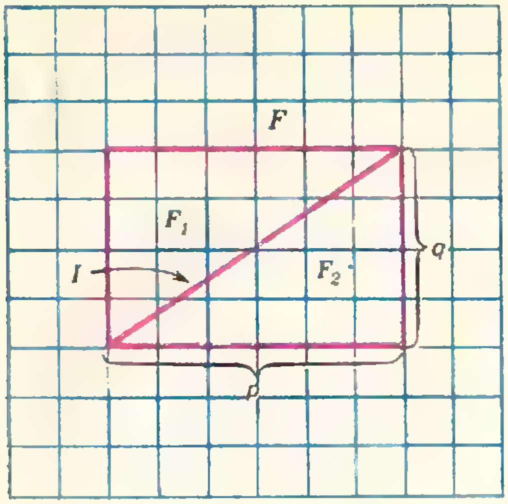


Рис. 4 $N(F)=(p+1)(q+1)$. $N(2F)=(2p+1)(2q+1)$, $S(F)=pq$.

для прямоугольных треугольников (с катетами, параллельными осям).

Произвольный целочисленный треугольник можно получить, последовательно отрезая от подходящего прямоугольника прямоугольные треугольники (рис. 5). Значит, формула *б*) верна для любого целочисленного треугольника, что и оставалось доказать.

§ 3. Как мы будем обобщать рассуждения из § 2

Для того, чтобы доказать другие формулы, например, формулу Пика, мы могли бы повторять рассуждения § 2 и *доказывать совпадение двух функций, определенных на множестве всех целочисленных многоугольников*. В § 2 такими функциями были $2S(F)$ и $P(F)$ для доказательства формулы Пика мы взяли бы $S(F)$ и $N(F)-B(F)/2-1$ и т. д. Такой подход плох по трем причинам. Во-первых — это очень скучно. Во-вторых — так можно доказывать уже угаданные формулы, но нельзя придумать новые. В третьих — действуя таким образом, мы никогда не будем уверены в том, что получили все интересные формулы.

В духе аксиоматического подхода, выработанного математикой XX века, мы постараемся сразу описать весь класс функций, к которым применимы рассуждения § 2. Для этого нужно хорошенько проанализировать решение задачи *б*). Стандартная схема такого анализа в нашем случае выглядит так:

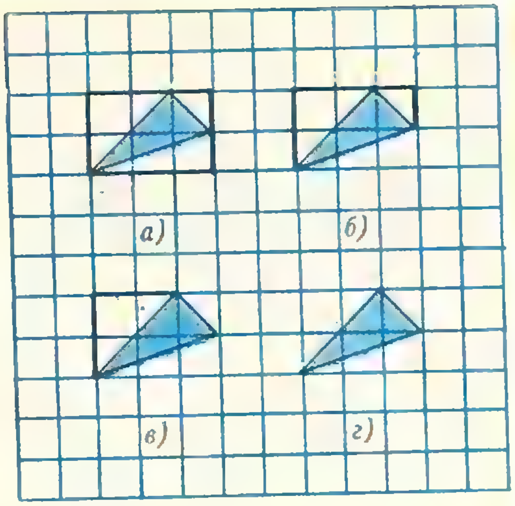


Рис. 5.

Шаг 1. Нужно перечислить те свойства функций, определенных на множестве целочисленных многоугольников, которые использовались при решении исходной задачи.

Шаг 2. Нужно изучить все функции, обладающие этими свойствами. (Мы назовем их *удобными*.)

Шаг 3. Нужно доказать *критерий совпадения* удобных функций и описать все удобные функции. (Критерий должен быть простым, и его применение должно сразу решать исходную задачу.)

Шаг 4. Нужно применить полученный критерий для обобщения исходной задачи.

§ 4. Замечательные функции на множестве плоских целочисленных фигур

Одними многоугольниками не обойтись

Читатель, вероятно, уже заметил, что в рассуждениях § 2 встречались не только многоугольники, но и отрезки.

Определение. *Плоской целочисленной фигурой (или просто фигурой) мы будем называть целую точку, целочисленный отрезок или целочисленный многоугольник. Множество всех плоских целочисленных фигур обозначим через Ф.*

Мы будем рассматривать отображения множества Ф в множество действительных чисел — функции на множестве Ф.

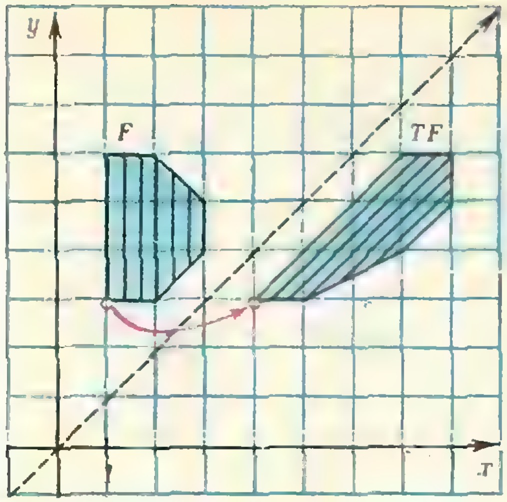


Рис. 6. «Перекос». $T(x,\ y)=(x+y;\ y)$; $T(1;\ 3)=(4;\ 3)$.
Каждая горизонтальная прямая $\{(x;\ y)|y=c\}$ под действием «перекоса» T сдвигается сама по себе на расстояние c. Каждая вертикальная прямая «перекашивается» подобно оси y, которая переходит в пунктирную прямую.

Шаг 1 — какие функции на Ф мы будем рассматривать.

Функцию f на множестве Φ будем называть *аддитивной*, если она обладает следующим свойством:

А) *если целочисленные фигуры* F, F_1, F_2 *таковы, что* $F=F_1\cup F_2$, *а* $F_1\cap F_2$ — *точка или отрезок, то*

$$f(F)=f(F_1)+f(F_2)-f(F_1\cap F_2).$$

Введем на плоскости координаты x, y. *Допустимыми* будем называть преобразования четырех типов:

1°. параллельные переносы на целочисленный вектор $(a;\ b)$: $T\ (x;\ y)=(x+a;\ y+b)$;

2°. симметрии: $T\ (x;\ y)=(\pm x;\ \pm y)$;

3°. перестановку координат: $T\ (x;\ y)=(y;\ x)$;

4°. «перекосы»: $T\ (x;\ y)=(x+ay;\ y)$, где a — произвольное целое число (рис. 6).

Функция f на множестве Φ называется *инвариантной относительно преобразования* T, если для любой фигуры $F\in\Phi$ выполнено равенство $f(TF)=f(F)$.

Функцию f будем называть *инвариантной*, если она инвариантна относительно любого допустимого преобразования.

Упражнение 2. Докажите, что функция R, принимающая на любой целой точке значение 0, на любом целочисленном отрезке значение 2, и на любом целочисленном n-угольнике — значение n, инвариантна, но не аддитивна.

Основное определение. *Функцию* f *на множестве* Φ *будем называть удобной, если она аддитивна и инвариантна.*

Примеры удобных функций

Множество всех удобных функций на Φ мы обозначим через У. Удобные функции существуют. Например, функция E, сопоставляющая каждой целочисленной фигуре число 1, является удобной. Очевидно, что функция N, сопоставляющая каждой целочисленной фигуре F число $N(F)$, является удобной. Ясно, что функция S — аддитивна. Очевидно также, что $S(TF)=S(F)$ для любой фигуры F и для любого допустимого преобразования T типов 1°—3°. Интуитивно очевидная инвариантность функции S относительно «перекосов» следует из принципа Кавальери (см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 107). Значит, функция S — удобная. Из уже известных удобных функций можно получать новые по следующему правилу.

Упражнение 3. Для любой фигуры $F\in\Phi$ обозначим через nF фигуру, полученную из F растяжением в n раз относительно начала координат. Докажите, что если $f\in Y$, то функция f_n, сопоставляющая каждой фигуре F число $f\,(nF)$, также является удобной.

В частности, функция N_n, сопоставляющая фигуре F число $N\,(nF)$, является удобной.

Задача 2. Докажите, что всякая удобная функция f обладает следующим свойством:

Б) f *принимает одинаковое значение на всех целочисленных отрезках* I *таких, что* $N(I)=2$.

Заметим, что выбор аксиом, описывающих множество удобных функций, является в значительной степени произвольным. Мы предпочли такой набор аксиом, который легче всего обобщается на трехмерный случай; но можно было бы обойтись и меньшим числом аксиом. Вот пример.

Задача 3. Обозначим через У′ множество аддитивных функций, инвариантных относительно преобразований типа 1°—2° и обладающих свойством Б). Докажите, что У′ = У.

Эту задачу стоит решать после того, как будут найдены все удобные функции.

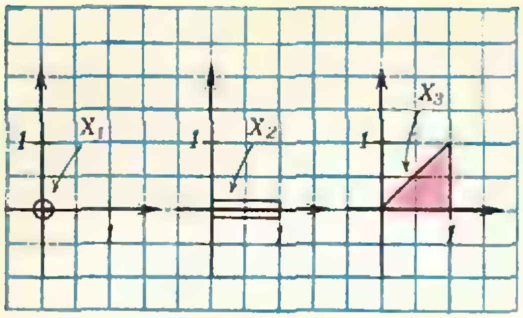


Рис. 7.

Шаг 2 — изучаем удобные функции.

Если f и g — удобные функции, а c и d — действительные числа, то функция $cf+dg$, которая, по определению, принимает на фигуре F значение $cf(F)+dg(F)$, очевидно, является удобной.

Итак, с удобными функциями можно обращаться как с векторами: их можно умножать на действительные числа и складывать. Положим, например, $P=N_2-2N+E$ (т. е. $P(F)=N(2F)-2N(F)+1$). Так как функции N_2, N и E — удобные, то и функция P — удобная.

Сопоставим теперь каждой удобной функции $f\in\mathcal{Y}$ вектор в трехмерном пространстве, а именно, вектор $(f(X_1);\ f(X_2);\ f(X_3))$, где X_1, X_2, X_3 — три целочисленные фигуры, изображенные на рисунке 7. Этот вектор мы будем обозначать через $\vec{f}$. В первых пяти строках таблицы 1 записано, какие векторы сопоставляются уже известным нам удобным функциям.

Таблица 1

	f	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$
1	S	0	0	1/2
2	N	1	2	3
3	E	1	1	1
4	N_2	1	3	6
5	P	0	0	1
6	?	0	2	3
7	$e_1=2E+2S-N$	1	0	0
8	$e_2=N-E-4S$	0	1	0
9	$e_3=2S$	0	0	1

А всякий ли вектор соответствует какой-нибудь удобной функции (например, вектор (0; 2; 3) из шестой строки)? Положительный ответ на этот вопрос дают строки 7—9 таблицы 1. Из них видно, что удобным функциям e_1, e_2, e_3 соответствуют базисные векторы в трехмерном пространстве. Поэтому для любых чисел c_1, c_2, c_3 мы можем указать удобную функцию, которой соответствует вектор $(c_1;\ c_2;\ c_3)$, а именно — удобную функцию $c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$. Например, вектор из шестой строки таблицы 1 соответствует функции $2e_2+3e_3=2(N-E-4S)+3\cdot 2S=2N-2E-2S$.

Шаг 3 — критерий совпадения удобных функций.

До сих пор мы нигде не пользовались тем, что имеем дело с удобными функциями. Любой функции на Φ можно было бы таким же способом сопоставить вектор трехмерного пространства. Например, функции R из упражнения 2 соответствует вектор из шестой строки таблицы 1. Особое «удобство» удобных функций заключается в том, что между ними и векторами трехмерного пространства имеется *взаимно однозначное соответствие*. Иными словами, *если f и g удобные функции и если $\vec{f}=\vec{g}$, то функции f и g совпадают.*

Обозначим разность $f-g$ через h. Тогда утверждение о взаимной однозначности соответствия между удобными функциями и векторами примет такой вид.

Основная теорема. *Если $h\in\mathcal{Y}$ и вектор $\vec{h}$ равен нулю, то и функция h есть тождественный нуль.*

Мы рекомендуем читателю доказать основную теорему самостоятельно или прочесть доказательство в приложении к статье.

Из основной теоремы сразу следует формула б). Действительно, из первой и пятой строк таблицы 1 мы получаем, что вектор, соответствующий функции $P-2S$ — нулевой. Так как функция $P-2S$ удобная, то по основной теореме $P-2S=0$, т. е. $P(F)-2S(F)=0$ для любой фигуры F.

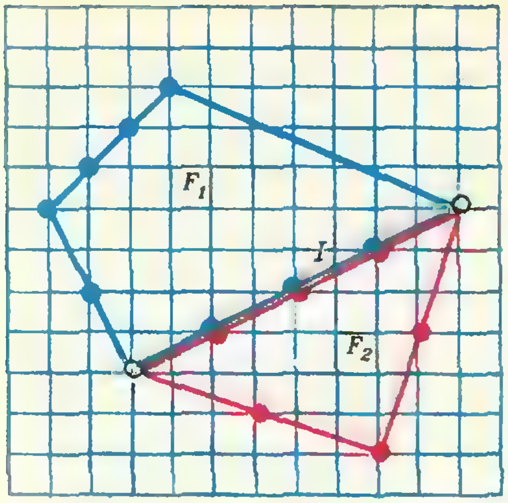


Рис 8. $F = F_1 \cup F_2$.

Еще один пример удобной функции

Можно ли применить основную теорему для доказательства формулы Пика? Беда в том, что функция B определена пока лишь на множестве настоящих целочисленных многоугольников. Как определять ее на отрезках и точках? Если мы хотим *продолжить B до удобной функции на Φ*, то из рисунка 8 видно, что нам следует положить $B(I) = B(F_1) + B(F_2) - B(F)$, и из этого же рисунка ясно, что правая часть этого равенства есть $2 + 2 \cdot$(*число неконцевых точек отрезка I*). Наконец, если X — точка, то по тем же причинам нам следует положить $B(X) = 0$.

Упражнение 4 (устное). Докажите, что определенная выше функция B действительно является удобной.

Докажем теперь формулу Пика. Из определения функции $\vec{B}$ вытекает, что вопросительный знак в шестой строке таблицы 1 можно заменить на B. Но выше мы выяснили, что эта строка соответствует функции $2N - 2E - 2S$. Значит, по основной теореме, $N - E - B/2 = S$.

Вопрос — предостережение. Почему из равенства $\vec{R} = \vec{B}$, где R — функция из упражнения 2, не вытекает, что $R = B$?

Шаг 4 — обобщаем формулу 6) и формулу Пика.

Пусть e, f, g, h — четыре удобные функции, $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ — соответствующие им четыре вектора в пространстве. Один из них всегда можно представить как сумму трех других с действительными коэффициентами. По основной теореме то же верно и для исходных функций. Выбирая в качестве e, f, g, h различные удобные функции (определенные чисто геометрически), мы будем получать новые геометрические формулы. Выразим, например, $B(F)$ через $N(F)$ и $N(2F)$. Возьмем четыре удобные функции B, E, N, N_2. Будем искать числа c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что $B = c_1E + c_2N + c_3N_2$. Эта задача сводится к решению следующей системы уравнений (см. таблицу 1):

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + c_3, \\ 2 = c_1 + 2c_2 + 3c_3, \\ 3 = c_1 + 3c_2 + 6c_3. \end{cases}$$

Решая ее, получим $c_1 = -3$, $c_2 = 4$, $c_3 = -1$, т. е. $\vec{B} = 4\vec{N} - \vec{N}_2 - 3\vec{E}$. Значит, для любого целочисленного многоугольника F

$$B(F) = 4N(F) - N(2F) - 3.$$

Упражнения

5. Выразите $N(3F)$ через $N(F)$ и $N(2F)$.

6. Пусть $p(n) = N(nF) = a + bn + cn^2$. Докажите, что число внутренних целых точек в многоугольнике nF равно $p(-n)$. Попробуйте сформулировать аналогичное утверждение в трехмерном случае.

§ 5. Замечательные функции на множестве пространственных целочисленных фигур

Целочисленной фигурой (или просто фигурой) в трехмерном пространстве мы назовем целую точку, целочисленный отрезок, целочисленный многоугольник или целочисленный многогранник. Множество целочисленных фигур обозначим, как и в двумерном случае, через Φ.

Строгое определение удобной функции на множестве Φ мы дадим в «Приложении». Сейчас для нас будет важно только то, что функции E, N, N_n, V окажутся удобными. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — точки трехмерного пространства с координатами $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$. Пусть X_1 — точка A_1, X_2 — отрезок A_1A_2, X_3 — треугольник $A_1A_2A_3$, X_4 — тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$.

Каждой удобной функции f сопоставим четверку чисел — ее значения на фигурах X_1, X_2, X_3, X_4. Какие четверки получаются для известных нам функций V, E, N, N_2, N_3 показано в строках 1—5 таблицы 2.

Предположим еще, что для удобных функций на множестве Φ справедливо обобщение основной теоремы из § 4:

Если h — удобная функция на Φ, и $h(X_1) = h(X_2) = h(X_3) = h(X_4) = 0$, то функция h есть тождественный нуль.

	f	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$	$f(X_4)$
1	V	0	0	0	1/6
2	E	1	1	1	1
3	N	1	2	3	4
4	N_2	1	3	6	10
5	N_3	1	4	10	20
6	B	2	2	3	4

Таблица 2

Постарайтесь придумать такое определение удобных функций на Φ, чтобы функции E, N, N_n, V оказались удобными и чтобы была справедлива пространственная основная теорема. Сравните ваше определение с определением на с. 20.

Пользуясь обобщенной основной теоремой и таблицей 2, получаем формулу

$$6V = N_3 - 3N_2 + 3N - E,$$

аналогичную формуле *б*).

Для того, чтобы получить из основной теоремы аналог формулы Пика, доопределим функцию B, которая пока определена только на настоящих многогранниках:

если F — многоугольник, то мы положим $B(F) =$ (число граничных точек F) $+$ $+2\cdot$(число внутренних точек F);

если F — отрезок или точка, то мы положим $B(F) = 2$.

Упражнение 7. Покажите, что если фигура F покрыта двумя фигурами F_1 и F_2, пересекающимися по многоугольнику M (рис. 9), то

$$B(F) + B(M) = B(F_1) + B(F_2).$$

Задача 4. Докажите, что функция B удобная.

Снова пользуясь обобщенной основной теоремой и таблицей 2, получаем одно из возможных обобщений формулы Пика:

$$6V(F) = N(2F) - 2N(F) - B(F) + 3.$$

Точно также можно доказать и многие другие формулы.

Упражнение 8. Докажите, что $B(2F) = 4B(F) - 6$ для любого целочисленного многогранника F.

Упражнение 9. Выразите $N(4F)$ через $N(F)$, $N(2F)$ и $N(3F)$.

Задача 5. 1) Вычислите явно числа $N(nX_1)$, $N(nX_2)$, $N(nX_3)$, $N(nX_4)$.

2. Покажите, что $N_n = c_1E + c_2N + c_3N_2 + c_4N_3$.

3) Докажите, что для $F \in \Phi$ функция $N_n(F)$ — многочлен не более, чем третьей степени от n (при целых $n \geqslant 0$).

4) Покажите, что коэффициенты этого многочлена — удобные функции от n, и выясните геометрический смысл коэффициентов при n^3 и n^2.

Задача 6*. Докажите обобщенную основную теорему.

§ 6. Приложение

Доказательство основной теоремы

Если X — целая точка, то параллельным переносом ее можно перевести в точку X_1. Поэтому $h(X) = h(X_1) = 0$.

Если I — целочисленный отрезок и $N(I) = 2$, то согласно решению задачи 2 $h(I) = h(X_1) = 0$.

Если $N(I) > 2$, то разобьем отрезок I точкой X на два отрезка I_1 и I_2 такие, что $N(I_1) < N(I)$, $N(I_2) < N(I)$. Согласно А), $h(I) = h(I_1) + h(I_2) - h(X) = h(I_1) + h(I_2)$. Применяя индукцию, получаем, что $h(I) = 0$ для любого отрезка I.

Пусть теперь F — произвольный целочисленный многоугольник. Разбивая F диагональю I на два многоугольника F_1 и F_2 с меньшим, чем у F, числом сторон, мы получаем, согласно А), что $h(F) = h(F_1) + h(F_2) - h(I) = h(F_1) + h(F_2)$. Применяя индукцию, получаем, что достаточно доказать равенство $h(F) = 0$ для любого целочисленного треугольника F. Из свойства А) и рисунка 5 следует, что это равенство будет справедливо, если h обращается в нуль на всех прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат, и на всех прямоугольных треугольниках (с катетами, параллельными осям координат).

Оказывается, если h обращается в нуль на прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат, то h обращается в нуль и на прямоугольных треугольниках с катетами, параллельными осям координат. Действительно, разобьем такой прямоугольник F диагональю I на треугольники F_1 и F_2. Тогда $h(F) = h(F_1) + h(F_2)$. Предположим, что $h(F) = 0$, тогда $h(F_1) + h(F_2) = 0$. Докажем, что $h(F_1) = h(F_2)$. Пусть F_1' — треугольник, симметричный F_1 относительно одной из координатных осей, а F_2' — треугольник, симметричный F_2 относительно другой координатной оси. Поскольку h инвариантна относительно симметрий, получаем $h(F_1) = h(F_1')$, $h(F_2) = h(F_2')$. Но F_1' можно перевести в F_2' па-

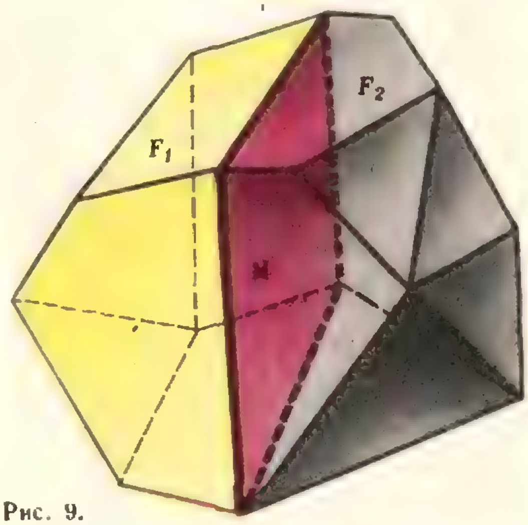


Рис. 9.

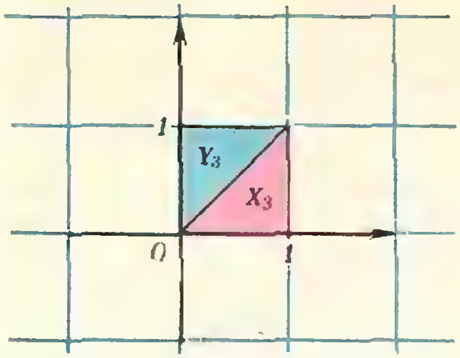


Рис. 10.

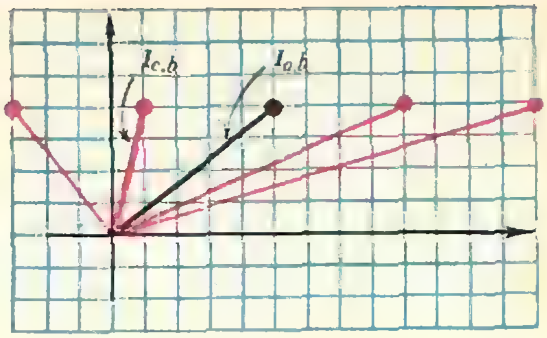


Рис. 11.

раллельным переносом, поэтому $h(F_1') = h(F_2')$. Отсюда $h(F_1) = h(F_2)$ и, значит, $h(F_1) = h(F_2) = 0$.

Осталось показать, что h обращается в нуль на прямоугольниках со сторонами, параллельными координатным осям. Разбивая такой прямоугольник на меньшие прямоугольники, мы получаем по индукции, что достаточно доказать обращение h в нуль на единичном квадрате $X_3 \cup Y_3$, изображенном на рисунке 10. Согласно А), $h(X_3 \cup Y_3) = h(X_3) + h(Y_3)$. По условию теоремы $h(X_3) = 0$. Выше мы доказали, что $h(Y_3) = h(X_3)$, поэтому и $h(Y_3) = 0$. Отсюда $h(X_3 \cup Y_3) = 0 + 0 = 0$. Доказательство теоремы закончено.

Решение задачи 2.

Будем говорить, что фигуры F_1 и F_2 *эквивалентны* (обозначается: $F_1 \sim F_2$), если фигура F_1 получается из фигуры F_2 цепочкой допустимых преобразований. Ясно, что всякая удобная функция принимает одинаковое значение на эквивалентных фигурах. Обозначим через $I_{a,b}$ отрезок с концами (0; 0) и (a; b). Покажем, что всякий отрезок $I_{a,b}$ эквивалентен отрезку $I_{n,0}$. Преобразованием 1° любой отрезок I переводится в $I_{a,b}$. Сделав преобразования 2° и 3°, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant 0$. Если $b > 0$, то рассмотрим все отрезки, которые можно получить из $I_{a,b}$ с помощью «перекосов». Из рисунка 11 видно, что среди таких отрезков обязательно есть отрезок $I_{c,b}$, где $0 \leqslant c < b$. Сделав 3°, получаем, что $I_{a,b} \sim I_{b,c}$. Повторив несколько раз те же рассуждения, мы получим, что $I \sim I_{n,0}$. Если дополнительно известно, что $N(I) = 2$, то $N(I_{n,0}) = 2$, т. е. $n = 1$. Таким образом, удобная функция f на любом отрезке I, для которого $N(I) = 2$, принимает такое же значение, как и на отрезке $I_{1,0}$.

Определение удобных функций на Ф в пространственном случае.

Аддитивность. Функцию f на множестве Φ назовем *аддитивной*, если

А) *для любого разбиения фигуры* $F \in \Phi$ *на фигуры* $F_1, \ldots, F_k \in \Phi$, *удовлетворяющего условиям* $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \neq \varnothing$ и $V(F_i \cap F_j) = 0$ *при* $i \neq j$, *выполнено равенство*

$$f(F) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} f(F_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} f(F_i \cup F_j) + \ldots$$
$$\ldots - (-1)^k f(F_1 \cap \ldots \cap F_k).$$

Примеры.

1) Функция V аддитивна, так как если $V(F_i \cap F_j) = 0$ при $i \neq j$, то $V(F_1 \cup \ldots \cup F_k) = V(F_1) + \ldots + V(F_k)$.

2) Аддитивность функции E следует из тождества $1 = C_k^1 - C_k^2 + \ldots - (-1)^k C_k^k$ (вытекающего из равенства $(1-1)^k = 0$).

3) Аддитивность функции N следует из так называемой «формулы включений и исключений» (см. «Квант», 1974, № 2, с. 13).

Инвариантность. Введем в пространстве координаты x, y, z. *Допустимыми* будем называть преобразования четырех типов:

1°. параллельные переносы на целочисленный вектор (a; b; c):

$T(x; y; z) = (x + a; y + b; z + c)$;

2°. симметрии:

$T(x, y, z) = (\pm x; \pm y; \pm z)$;

3°. перестановку координатных осей:

$T(x; y; z) = (y; z; x)$;

4°. «перекосы»:

$T(x; y; z) = (x + ay + bz; y + cz; z)$,

где a, b, c — произвольные целые числа.

Функцию f на множестве Φ назовем *инвариантной*, *если для любой фигуры* $F \in \Phi$ *и любого допустимого преобразования* T *выполнено равенство* $f(TF) = f(F)$.

Инвариантность функций E, N, N_n, B, B_n очевидна. Инвариантность функции V следует из пространственного принципа Кавальери.

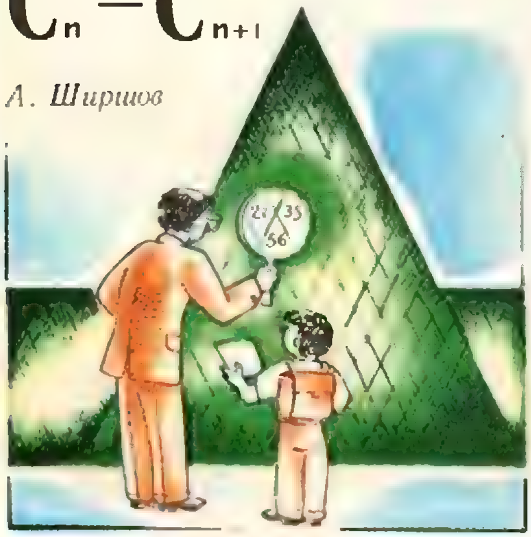
Основное определение. *Функция* f *на множестве* Φ *называется удобной, если она аддитивна и инвариантна.*

Ясно, что функции E, V, N_n, B_n — удобные.

В «Кванте» № 2 за 1977 год помещено письмо десятиклассника Б. Ивякина и ответ на это письмо члена-корреспондента АН СССР А. И. Ширшова.
В своем ответе Анатолий Илларионович Ширшов, в частности, указал, что всегда можно «натолкнуться на интересные математические идеи. Они (эти идеи) вокруг нас». Редакция попросила Анатолия Илларионовича проиллюстрировать это положение каким-либо примером из элементарной математики.

Об уравнении $C_n^m=C_{n+1}^{m-1}$

А. Ширшов



К уравнению, указанному в заглавии, я пришел, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля:

1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

О треугольнике Паскаля рассказывается в пунктах 7 и 8 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9».

Коротко расскажем о нем тем, кто с ним еще не знаком.

В n-й строке треугольника Паскаля на m-м месте стоит число C_n^m, причем нумерация как строк, так и чисел в каждой строке начинается с нуля (первые 15 строк треугольника Паскаля приведены на рисунке).

Для понимания статьи достаточно о числах C_n^m знать только одно:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{1}$$

($n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$; $0!=1$). Из (1) легко выводится

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}. \tag{2}$$

С помощью этого соотношения можно строить треугольник Паскаля, не пользуясь формулой (1) (см. рисунок).

В 14-й строке бросается в глаза, что $1001+2002=3003$, то есть

$$C_{14}^4+C_{14}^5=C_{14}^6.$$

Ввиду (2) это равенство можно переписать так:

$$C_{15}^5=C_{14}^6. \tag{3}$$

Равенство (3) показывает, что пара $\langle 6,14\rangle$ является решением уравнения, указанного в заглавии.

А какие еще пары чисел являются решением этого уравнения? В статье дается ответ на этот вопрос. Чтобы ответ имел более красивую форму, заменим в нашем уравнении m на y, а n — на $x-1$. Тогда верна такая

Теорема. *Все решения уравнения $C_x^{y-1}=C_{x-1}^y$ имеют вид*
$x_k=\gamma_{2k}\gamma_{2k+1}$; $y_k=\gamma_{2k-1}\gamma_{2k}$, $k=1,2,3,\ldots$, *где γ_n — n-й член последовательности Фибоначчи**): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Доказательство.

1. Воспользуемся формулой (1) и перепишем наше уравнение:

$$\frac{x!}{(y-1)!\,(x-y+1)!}=\frac{(x-1)!}{y!\,(x-y-1)!}.$$

После очевидных преобразований оно приводится к такому виду:

$$(x-y+1)(x-y)=xy. \tag{4}$$

Обозначим через w наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x=uw$, $y=vw$, где u и v взаимно просты. Подставив выражения для x и y в (4), после сокращения на w получим, что

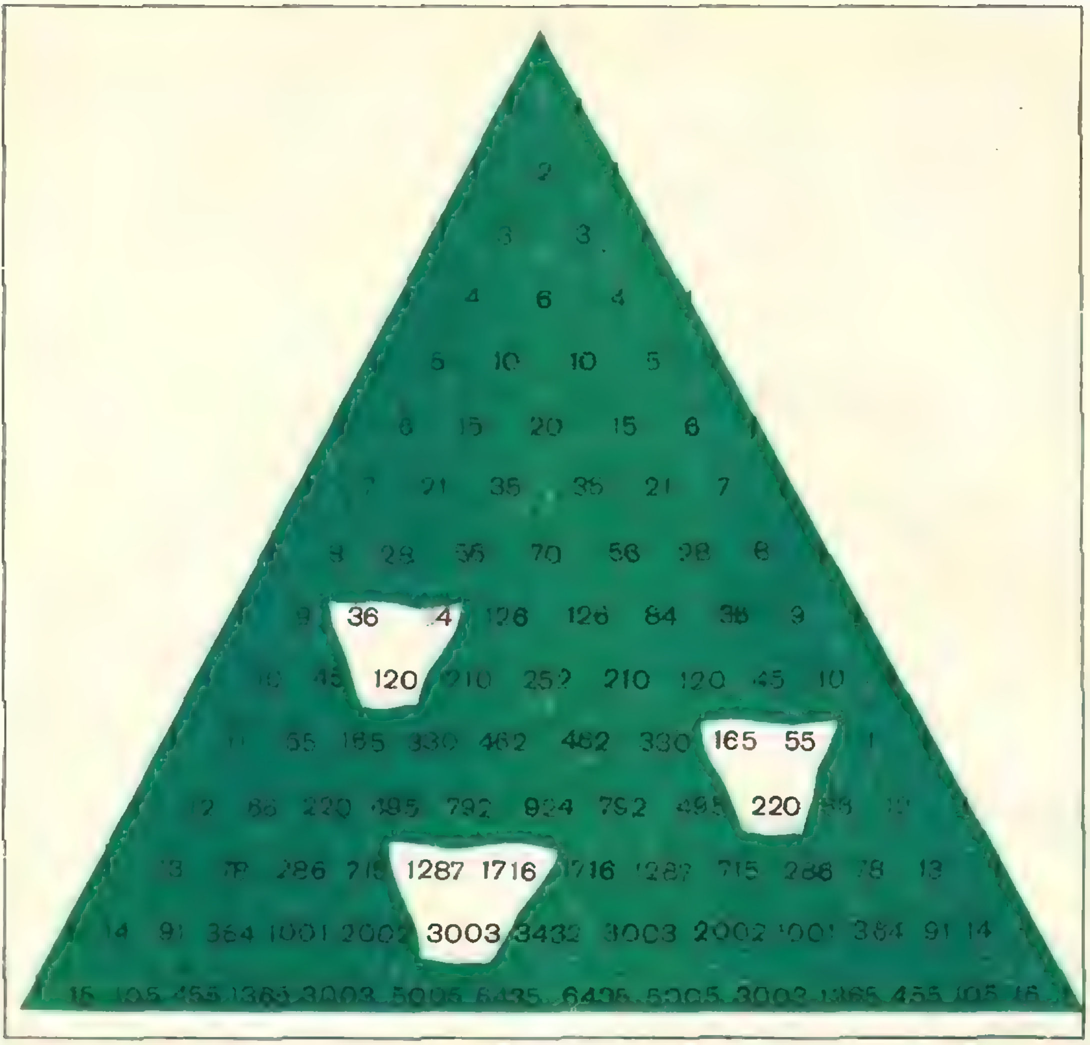
$$(u-v)\,[(u-v)\,w+1]=uvw. \tag{5}$$

Числа u и v взаимно просты. Поэтому $u-v$ и uv тоже взаимно просты. Взаимно просты и числа w и $(u-v)w+1$. Но тогда должны выполняться такие равенства:

$$\begin{cases}(u-v)\,w+1=uv,\\ u-v=w.\end{cases}$$

---

*) Для этой последовательности $\gamma_n=\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}$ для $n>2$.


2
3 3
4 6 4
5 10 10 5
6 15 20 15 6
7 21 35 35 21 7
8 28 56 70 56 28 8
9 36 84 126 126 84 36 9
10 45 120 210 252 210 120 45 10
11 55 165 330 462 462 330 165 55 11
12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12
13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13
14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14
15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15

Эта система равносильна такой системе:

$$\begin{cases} v^2+vw-w^2=1, \\ v+w=u. \end{cases} \qquad (6)$$

Поэтому решение нашего уравнения сводится к решению уравнения

$$v^2+vw-w^2=1 \qquad (7)$$

в натуральных числах.

2. Сделаем три простых замечания о решениях уравнения (7). Пусть пара $\langle v,\ w\rangle$ является решением уравнения (7). Тогда

а) v и w взаимно просты;

б) если $v=w$, то $v=w=1$;

в) $v\leqslant w<2v$;

г) пары $\langle v+w,\ v+2w\rangle$ и $\langle 2v-w,\ w-v\rangle$ являются решением уравнения.

Напоминаем, что v и w — натуральные числа.

в) вытекает из равенства $w=\frac{v+\sqrt{5v^2-4}}{2}$, получающегося, если (7) рассмотреть как уравнение относительно w, а г) можно проверить, подставив соответствующие пары в уравнение (7).

С помощью преобразования

$$\langle v,\ w\rangle \Rightarrow \langle v+w,\ v+2w\rangle, \qquad (*)$$

исходя из решения $\langle 1,\ 1\rangle$, построим последовательность решений $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 5,\ 8\rangle$, $\langle 13,\ 21\rangle$, $\langle 34,\ 55\rangle$, … Выписанные решения имеют вид

$$v_k=\gamma_{2k-1},\ w_k=\gamma_{2k}. \qquad (8)$$

Докажем, что других решений уравнение (7) не имеет. Допустим, что пара $\langle \bar{v},\ \bar{w}\rangle$ является решением уравнения (7). Докажем, что она является одной из пар (8).

Если $\overline{v} \neq \overline{w}$, то с помощью преобразования

$$\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle \Rightarrow \langle 2\overline{v}-\overline{w}, \overline{w}-\overline{v} \rangle \qquad (**)$$

перейдем от этой пары к паре $\langle \overline{v}_1, \overline{w}_1 \rangle$ с меньшими компонентами. Если $\overline{v}_1 \neq \overline{w}_1$, то проделаем такой переход еще раз. Если $\overline{v}_2 \neq \overline{w}_2$, еще раз... Каждый раз мы будем получать пару меньших натуральных чисел. Поэтому после конечного числа шагов мы получим пару $\langle \overline{v}_l, \overline{w}_l \rangle$ из одинаковых чисел — по нашим правилам процесс может оборваться только на такой паре. Но, как мы уже знаем, тогда $\overline{v}_l = \overline{w}_l = 1$. Заметим теперь, что переходы (*) и (**) взаимно обратны: если $\overline{v} = 2v - w$, $\overline{w} = w - v$, то $v = \overline{v} + \overline{w}$, $w = \overline{v} + 2\overline{w}$. Поэтому наша пара $\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle$ может быть получена из пары $\langle 1, 1 \rangle$ с помощью (*) за l шагов, то есть $\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle = \langle v_l, w_l \rangle$.

Итак, множество решений уравнения (7) состоит из пар $\langle \gamma_{2k-1}, \gamma_{2k} \rangle$.

3. Теперь мы можем подвести итоги: $u_k = v_k + w_k = \gamma_{2k+1}$, значит, $x_k = u_k v_k = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}$, $y_k = v_k w_k = \gamma_{2k-1}\gamma_{2k}$. Теорема доказана.

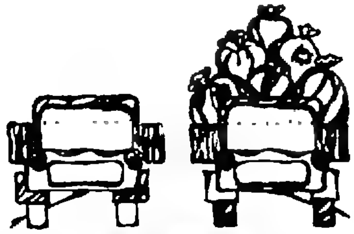
4. Последнее замечание. Если мы захотим проверить наше решение и посмотреть, какому k соответствует 14 строка, то окажется, что $k=2$. А чему же соответствует $k=1$? Не получили ли мы лишнего решения? $k=1$ соответствует равенство $C_2^0 = C_1^1$, но стоящих подряд трех чисел как будто не видно. Однако на самом деле они есть, просто первое из них — нуль — не написано.

Историческая справка. Рассматриваемое уравнение уже встречалось в математической литературе, правда, в несколько иной форме. (The American Mathematical Monthly, т. 37, с. 508, автор задачи —Norman Anning.) Решение ее, опубликованное в томе 38, с. 351, ничего общего ни по методам, ни по форме ответа не имеет с решением, приведенным в этой заметке.

Задачи наших читателей

1. По дороге едут с одинаковыми скоростями две одинаковые автомашины. Одна машина везет тяжелый груз, а другая идет порожняком. Если машины одновременно начнут тормозить так, что пойдут «юзом» (колеса у них не будут крутиться), то какая из них остановится раньше?

Б. Коган
(Москва)



2. Однородный стержень закреплен в центре тяжести так, что он может легко вращаться в вертикальной плоскости. К концам стержня прикреплены одинаковые грузы. Такая система в любом положении находится в состоянии равновесия. А рычажные весы, на обеих чашках которых лежат одинаковые грузы, устанавливаются только горизонтально. Как вы думаете, почему?

Е. Гудесблат
(Одесса)

3. Доказать, что если в треугольнике ABC для длин a, b, c его сторон выполняются неравенства $c > b > a$ и β_A, β_B, β_C — длины биссектрис внутренних углов, β'_A, β'_B, β'_C — длины биссектрис внешних углов, h_a, h_b, h_c — длины высот, то справедливы следующие равенства:

а) $$\frac{1}{a\beta_A\beta'_A} + \frac{1}{c\beta_C\beta'_C} = \frac{1}{b\beta_B\beta'_B};$$

б) $$\frac{h_a}{\beta_A\beta'_A} + \frac{h_c}{\beta_C\beta'_C} = \frac{h_b}{\beta_B\beta'_B}.$$

У. Алла
(г. Выру)

Наблюдения над утренней чашкой кофе

В. Шефер

Эта статья заимствована нами из журнала «Успехи физических наук» (1972 г., том 108, выпуск 3).
Автор статьи Винсент Дж. Шефер является директором Исследовательского центра по изучению атмосферы при Университете штата Нью-Йорк в Олбэни, США.
Статья печатается с некоторыми сокращениями.

> *Внимательные наблюдения над повседневными явлениями позволяют узнать многое о природе физических процессов.*

Можно наблюдать много чрезвычайно интересных химических и физических явлений, если чашку очень горячего черного кофе осветить сильным пучком света, параллельным поверхности жидкости. Первый раз я наблюдал эти явления, глядя вдоль края кипящих источников зимой в Йеллоустонском парке*). Через несколько лет я обнаружил их вновь за утренней чашкой кофе, вскоре после восхода Солнца. На этот раз все происходило в сухом воздухе Северной Аризоны.

В Йеллоустоне наблюдение было часто затруднено влагой, поднимающейся от горячей воды, которая конденсировалась в воздухе и бо́льшую часть времени скрывала от глаз наблюдателя поверхность жидкости. В Аризоне, наоборот, чистый воздух раннего утра и яркий свет восходящего Солнца создавали идеальные условия для наблюдения интересных эффектов, к описанию которых я и хочу приступить.

Если наполнить чашку до краев черным кофе (быстрорастворимым или обычным), близким к закипанию, и посмотреть на него при подходящем освещении, то первое, что бросится в глаза, это причудливые ячейки, которые образуются на поверхности кофе под поднимающимся паром (см. рисунок). Ячейки поперечным размером от 1 до 3 *см* имеют форму неправильных многоугольников и выглядят как пыльные светлые пятна, ограниченные узкими темными линиями. Пятнами отмечаются места выхода на поверхность восходящих потоков горячей жидкости. Затем эти потоки растекаются по поверхности, слегка охлаждаются и в тех местах, которые отмечены темными линиями, вновь погружаются внутрь кофе, образуя структуру, известную под названием вихревых ячеек Бенара.

Эти ячейки присутствуют во всех жидкостях и газах в тех случаях,

---

*) Йеллоустонский Национальный парк известен своими горячими источниками и особенно гейзерами. (*Прим. перев.*)

если их нижние слои имеют более высокую температуру, чем верхние. Не важно, чем создан такой перепад температуры: тем ли, что жидкость подогревается снизу или охлаждается сверху,— существенно только, чтобы температура уменьшалась снизу вверх. Явление может проявляться в самых разных масштабах. Француз Анри Бенар, который в 1900 году впервые заметил его, пользовался для наблюдений микроскопом*). Однако это явление можно видеть и в облаках над землей, и на поверхности воды в морях, и даже в структуре фотосферы Солнца.

На поверхности горячего кофе ячейки Бенара хорошо видны благодаря следующему явлению. Интенсивный поток молекул водяного пара, поднимающегося от горячей поверхности кофе, действует на непосредственно прилегающие к поверхности жидкости слои более холодной атмосферы с силой, направленной вверх. Бо́льшая часть водяных капель, конденсирующихся в насыщенном влагой воздухе, либо опускается назад в жидкость, либо поднимается в атмосферу и испаряется в ней. Однако имеются и такие капельки, которые слишком велики, чтобы подняться в верхние слои воздуха, и одновременно — слишком малы, чтобы их сила тяжести могла преодолеть давление восходящего потока молекул воды, поднимающихся с поверхности горячей жидкости. В результате сила тяжести этих сконденсированных капелек уравновешивается силой давления вылетающих с поверхности жидкости молекул, так что капельки оказываются взвешенными в воздухе над поверхностью горячего кофе. На границах же ячеек Бенара имеется нисходящий поток пара, капельки оседают, и здесь черная поверхность кофе обнажается. Если воспользоваться микроскопом, обладающим небольшим увеличением, то можно заметить, что пылевидные пятна над восходящими потоками горячего кофе состоят из плотно упакованных крошечных однородных водяных капелек. Размеры капелек и высота их локализации над уровнем жидкости определяются давлением паров воды, числом центров конденсации в данном объеме и силой тяжести.

То, что число и размеры капелек определяются наличием центров конденсации, можно доказать с помощью зажженной спички, поднесенной ниже края чашки. Пламя спички создает, как известно, дополнительные центры конденсации*), в результате чего концентрация капелек резко уменьшается, размеры их становятся заметно меньше, и они локализуются ближе к поверхности горячей жидкости.

Если поверхность жидкости осветить ярким горизонтальным параллельным пучком света (например, лучами восходящего Солнца, световым пучком из проектора для диапозитивов или из яркого фонаря) и вести наблюдение в направлении освещения и близко к оси светового пучка, то над поверхностью темной жидкости можно увидеть спектрально разложенный свет. Явление дифракции света на мелких капельках в высоких слоях атмосферы приводит иногда к появлению окраски венцов вокруг Солнца или Луны, когда они закрываются облаками, состоящими из почти однородных капелек**).

Искусный и настойчивый экспериментатор может заметить также характерное и довольно любопытное электрическое явление. Если к поверхности жидкости поднести наэлектризованный предмет (например, эбонитовую гребенку), то взвешенные в воздухе капельки влаги исчезают. Это показывает, что капельки сильно заряжены. Если же наэлектризованный предмет заряжен не очень

---

*) При отсутствии посторонних возмущений на поверхности жидкости видна почти правильная сетка шестиугольных завихрений, причем по оси каждой ячейки жидкость поднимается, а вдоль ее внешних границ стекает вниз. (*Прим. ред.*)

*) Под действием пламени спички часть молекул воздуха ионизируется. Образовавшиеся ионы действуют как центры конденсации. (*Прим. ред.*)

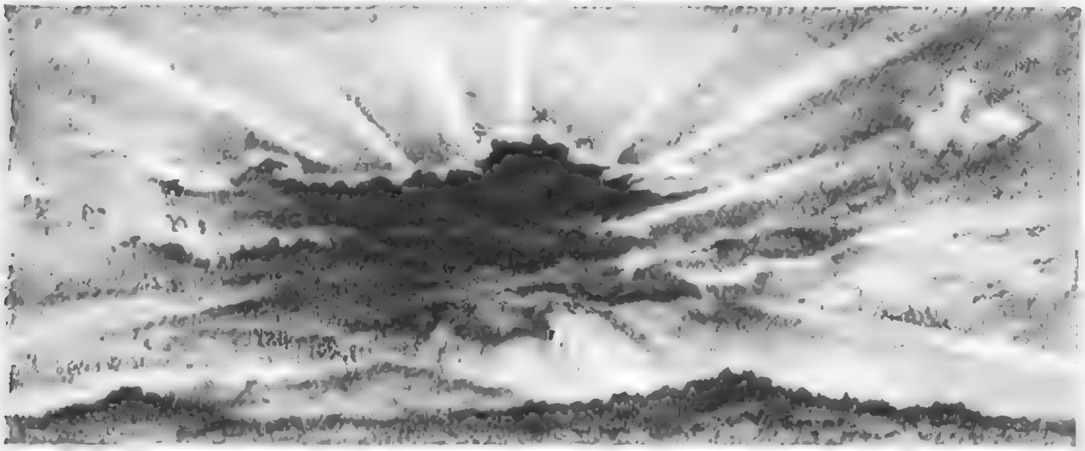
**) Более подробно о явлении дифракции света на мелких капельках можно прочитать, например, в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе» (М., «Наука», 1969 г., с. 222 и далее). Заметим только, что дифракция света на капле происходит точно так же, как на круглом отверстии в экране. (*Прим. ред.*

сильно, то одновременно с наличием вблизи поверхности жидкости стабильной зоны уравновешенных капелек возникает поток капелек, конденсирующихся на ионах, распространяющихся от заряженного тела.

Чашка горячего кофе является идеальным прибором для наблюдения всех или некоторых из описанных явлений. Однако по мере остывания кофе эффекты быстро ослабевают. Для более продолжительных наблюдений я пользовался следующим устройством. Чисто вымытая жестянка из-под консервов наполнялась водой, подкрашенной черными чернилами, и подогревалась на горячей подставке. В качестве горячей подставки служил электрический утюг, перевернутый вниз ручкой, которая зажималась в настольные тиски. Это приспособление позволяло проводить наблюдения сколь угодно долго. Прекрасным источником света служил проектор для показа диапозитивов, а наблюдать расположение, размеры и другие характеристики «плавающих» капелек можно было в микроскоп. Впоследствии я обнаружил, что горячий глицерин еще лучше подходит для продолжительных исследований.

Грязь на поверхности жидкости в некоторых случаях может подавить интересующие нас эффекты, однако ее легко удалить. Для этого к поверхности жидкости нужно прикоснуться кусочком газетной или другой бумаги и тут же его убрать. Загрязняющая поверхность жидкости мономолекулярная пленка постороннего вещества (или пыль) высадится на поверхности бумаги и останется на ней. Для очистки поверхности горячей жидкости может потребоваться несколько таких операций, выполняемых каждый раз с новым куском бумаги. Разумеется, не представляет труда намеренно загрязнять поверхность кофе или другой жидкости для того, чтобы исследовать влияние постороннего молекулярного покрытия на описанные явления.

Начать опыты, по-видимому, лучше всего с глицерином или с подкрашенной чернилами водой, не расходуя кофе.



«Иззаоблачное» сияние

Когда в солнечный день на небе бывают облака, нередко можно наблюдать следующее явление: от солнца, закрытого облаком, в разные стороны расходятся пучки лучей. По мере удаления от облака пучки постепенно расширяются. Если их мысленно продолжить за облако до взаимного пересечения, то они «сойдутся» в том месте, где находится солнце.

В то же время известно, что лучи от солнца идут на землю почти параллельно (угловой диаметр солнца около 30′).

Почему же лучи от солнца, закрытого облаком, так широко расходятся? И почему столь заметно расширение отдельных световых лучей «иззаоблачного» сияния?

А. Митрофанов

И. Яглом

О хордах непрерывных кривых

Обобщая понятие хорды окружности, *хордой* произвольной кривой α мы будем называть любой отрезок, концы которого принадлежат α. Например, у кривой α, изображенной на рисунке 1, хордами являются не только отрезки PQ и RS, но и составляющий часть кривой α отрезок TU.

1. О задаче М413

В этой задаче («Квант», 1976, № 11) предлагалось выяснить, для каких положительных чисел a верно следующее утверждение: *для любой функции f, определенной на отрезке $[0, 1]$, непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что $f(0)=f(1)=0$, уравнение*

$$f(x+a)-f(x)=0 \qquad (1)$$

имеет решение.

Решим ее. Перепишем уравнение (1) в равносильной форме

$$f(x+a)=f(x). \qquad (2)$$

Мы считаем (см. условие задачи), что в уравнениях (1), (2) $a>0$, а функция f определена на отрезке $[0, 1]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка и $f(0)=f(1)=0$.

График α функции f — это непрерывная кривая, соединяющая точки $A\ \langle 0, 0\rangle$ и $B\ \langle 1, 0\rangle$. График β функции $y=f(x+a)$ получается параллельным переносом кривой α вдоль оси абсцисс влево (поскольку $a>0$) на a (рис. 2).

Существование решения у уравнения (2) означает, что графики α и β пересекаются: если $f(x_0+a)=f(x_0)=y_0$, то точка с координатами $\langle x_0, y_0\rangle$ принадлежит и α, и β (рис. 3).

Оказывается, для того чтобы кривые α и β пересекались, необходимо и достаточно, чтобы у α была параллельная оси абсцисс хорда длины a. Это утверждение вытекает из такой леммы (докажите ее самостоятельно):

Лемма. *Кривая α, соединяющая точки A и B, тогда и только тогда имеет параллельную AB хорду длины r, когда кривая β, полученная из α параллельным переносом в направлении BA на расстояние r, пересекается с α.*

Таким образом, мы можем «перевести» задачу М413 на «язык хорд»: требуется выяснить, при каких положительных a *график любой функции f, определенной на отрезке $[0, 1]$, непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что $f(0)=f(1)=0$, имеет параллельную оси абсцисс хорду длины a.*

2. «Плохие» числа: $a\neq\frac{1}{n}$.

Покажем, что для любого положительного a, не равного $\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, 4, \ldots$), существует функция описанного вида, график которой не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины a.

Очевидно, у любой такой функции для любой хорды CD ее графика, параллельной оси абсцисс, $|CD|\leqslant|AB|=1$ (рис. 4). Поэтому можно дальше считать, что $0<a<1$.

Если $\frac{1}{2}<a<1$, проведем через A и B любые прямые $u_1\|u_2$ и через середину R_1 отрезка AB — любую пересекающую их прямую v_1. Легко видеть, что функция f_2, графиком которой является ломаная $\alpha_2=AP_1Q_1B$ (рис. 5),— искомая, поскольку для любой хорды CD ее графика, параллельной оси абсцисс, $|CD|\leqslant\frac{1}{2}$ или $|CD|=1$.

Пусть теперь $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$. Разделим отрезок AB точками R_1, R_2 на три равные части и, независимо от этого, точкой S_1— пополам. Проведем через A, S_1 и B любые параллельные между собой прямые $u_1 \| u_2 \| u_3$ и через R_1, R_2 — любые пересекающие их параллельные между собой прямые $v_1 \| v_2$. Функция f_3, графиком которой является ломаная $\alpha_3 = AP_1Q_1P_2Q_2B$ (рис. 6),— искомая: для любой хорды CD ее графика, параллельной оси абсцисс, либо $|CD| \leqslant \frac{1}{3}$, либо $|CD| \geqslant \frac{1}{2}$. В самом деле. Если точки C и D лежат на соседних звеньях ломаной α_3 (т. е. на AP_1 и P_1Q_1 или на P_1Q_1 и Q_1P_2 и т. д.), то, очевидно, $|CD| \leqslant \frac{1}{3}$. Если точки C и D лежат «через одно звено», то либо $|CD| = \frac{1}{3}$ (когда $C \in P_1Q_1$, $D \in P_2Q_2$), либо $|CD| = \frac{1}{2}$. В остальных случаях $|CD| > \frac{1}{2}$.

Аналогично строится ломаная α_n (график функции f_n), соединяющая A и B и не содержащая никакой параллельной оси абсцисс хорды CD такой, что $\frac{1}{n} < |CD| < \frac{1}{n-1}$. Разделим отрезок AB точками $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ на n равных частей и, независимо от этого, точками $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ — на $n-1$ равных частей. Проведем через $A, S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ и B любые параллельные между собой прямые $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и через $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ — любые пересекающие их параллельные между собой прямые $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. Ломаная $\alpha_n = AP_1Q_1P_2Q_2 \ldots P_{n-1}Q_{n-1}B$ (на рисунке 7 изображена ломаная α_6) — искомая. Устанавливается это опять-таки перебором различных возможных положений точек C и D (проверьте!).

Упражнение 1. Проверьте, что при $n = 2, 3, 4, \ldots$ график функции g_n:

$$g_n(x) = \sin(2\pi(n-1)x)$$

на отрезке $[0, 1]$ не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины $\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n-1}$. Нарисуйте этот график.

Упражнение 2. Докажите, что при любом положительном a, не равном $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$, график функции h_a:

$$h_a(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) \cdot x$$

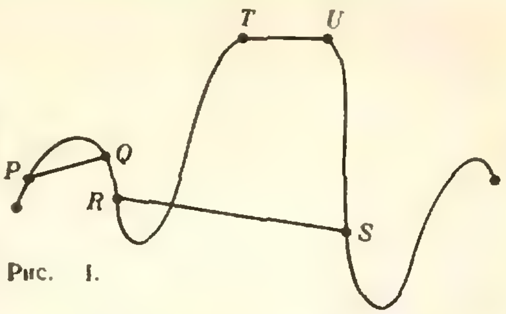


Рис. 1.

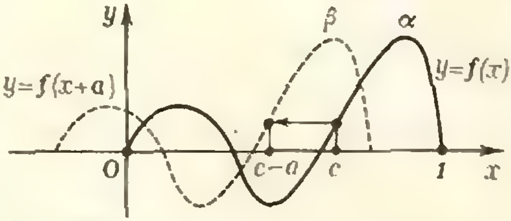


Рис. 2.

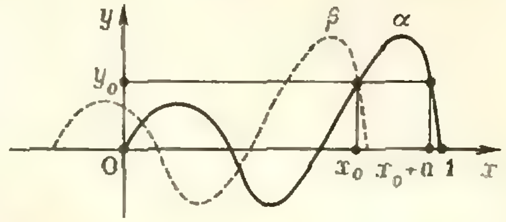


Рис. 3.

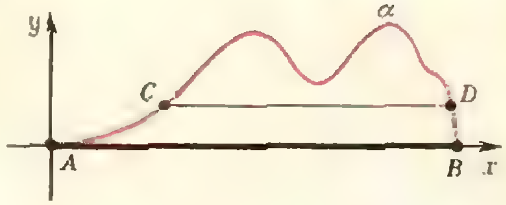


Рис. 4.

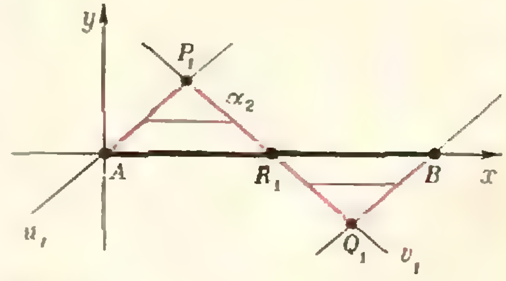


Рис. 5.

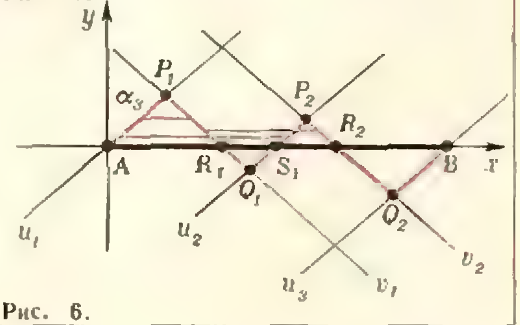


Рис. 6.

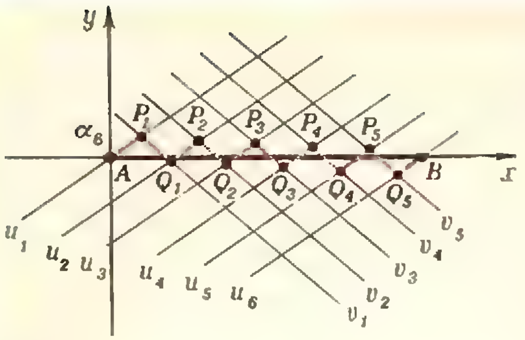


Рис. 7.

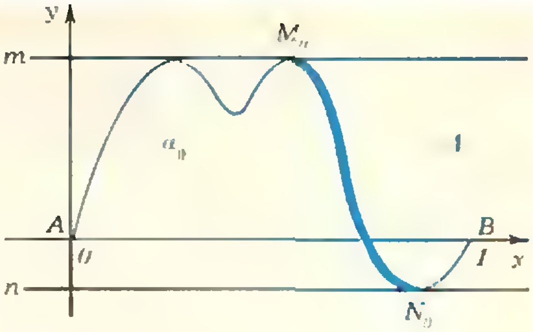


Рис. 8.

на отрезке [0, 1] не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины a.

3. «Хорошие» числа: $a=\frac{1}{n}$

Мы докажем, что при $a=\frac{1}{n}$ ($n=1$, $2, 3, 4, \ldots$) график любой функции f рассматриваемого вида имеет на отрезке [0, 1] параллельную оси абсцисс хорду длины a.

В самом деле: пусть M_0 и N_0 — точки на графике функции f, соответствующие наибольшему и наименьшему значению этой функции. Проведем через M_0 и N_0 прямые m и n, параллельные оси абсцисс. Ясно, что весь график функции f расположен в полосе Δ, ограниченной прямыми m и n (рис. 8).

Допустим теперь, что график функции f не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины $a=\frac{1}{n}$. Обозначим через α_0 график рассматриваемой функции f, а через α_k — линию, получающуюся из α_0 параллельным переносом в направлении оси абсцисс вправо на расстояние ka ($k=1, 2, \ldots, n$).

Согласно лемме, кривые α_0 и α_1 не имеют общих точек. Дуга M_0N_0 графика α_0 (на рисунке 8 она выделена жирно) делит полосу Δ на две части — правую и левую. Так как кривая α_1 не пересекается с α_0 и непрерывна, она целиком расположена в правой из этих частей.

Следовательно, если M_kN_k — дуга линии α_k, получающаяся из M_0N_0 параллельным переносом, то при $l>k$ вся линия α_l расположена в полосе Δ справа от дуги M_kN_k, а при $l<k$ — слева от M_kN_k. В частности, линия α_0 расположена в полосе Δ слева от M_1N_1, а линия α_n — справа от M_1N_1, и потому линии α_0 и α_n *не имеют общих точек*.

С другой стороны, линия α_n получается из α_0 параллельным переносом на расстояние $na=1$. При этом переносе точка $A\in\alpha_0$ переходит в точку B, то есть $B\in\alpha_n$. Так как, кроме того, $B\in\alpha_0$, то линии α_0 и α_n *имеют общую точку*.

Полученное противоречие и доказывает, что линия α_0 имеет параллельную оси абсцисс хорду длины $1/n$. Тем самым задача М413 решена полностью.

Упражнение 3. Докажите, что это утверждение (о существовании хорды длины $1/n$, параллельной оси абсцисс) справедливо не только для линии α_0, являющейся графиком функции, но и для произвольной непрерывной кривой, соединяющей точки $A=\langle 0, 0\rangle$ и $B=\langle 1, 0\rangle$.

4. Обобщение

Проведенное в предыдущем пункте рассуждение можно осмыслить следующим образом. Пусть α_0 — произвольная непрерывная кривая, соединяющая точки A и B. Предположим, что число $a=\frac{1}{n}$ является для этой кривой «плохим», то есть при параллельном переносе на расстояние a получается линия α_1, не имеющая с α_0 общих точек. Тогда числа $2a, \ldots, na$ также являются для линии α_0 «плохими», откуда и получается противоречие, завершающее доказательство.

Читатель может самостоятельно проверить (повторяя то же рассуждение), что справедливо следующее более общее утверждение:

Если непрерывная кривая α, соединяющая A и B, не имеет параллельной AB хорды длины p и не имеет параллельной AB хорды длины q, то она не имеет также и параллельной AB хорды длины $p+q$.

задачник Кванта

Задачи

M436 — M440; Ф448 — Ф452

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июня 1977 года по адресу: 113035, Москва М—35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например; «M436, M440» или «Ф48». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M436. Дано 20 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}, b_1, b_2, \dots, b_{10}$. Докажите, что множество из 100 чисел (не обязательно различных) $a_1+b_1, a_1+b_2, \dots, a_{10}+b_{10}$ можно разбить на 10 подмножеств, по 10 чисел в каждом так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве была одной и той же.

С. Берколайко

M437. Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых множителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

О. Гончарик,
С. Сергей

M438. В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (рис. 1). Для каждой пары окружностей через точку касания проводится касающаяся их прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

З. Скопец

M439*. а) Докажите, что уравнение

$$ax^k + bx^l + cx^m = 1$$

(где a, b, c — действительные, k, l и m — натуральные числа) имеет не более трех положительных корней.

б) Докажите, что уравнение

$$a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_nx^{k_n} = 1$$

(где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — действительные, $k_1, k_2, \dots, k_n$ — натуральные числа) имеет не более n положительных корней.

в) Докажите, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p + bx^l(x+1)^q + cx^m(x+1)^r = 1$$

(где a, b, c — действительные, k, l, m, p, q, r — натуральные числа) имеет не более 14 положительных корней.

А. Кушниренко

M440. Куб $100\times100\times100$ составлен из миллиона единичных кубиков. Назовем шампуром прямую, проходящую через центры кубиков и параллельную ребрам куба.

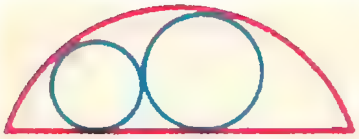


Рис. 1.

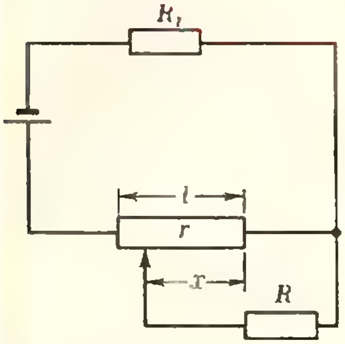


Рис. 2.

а) При каком наименьшем K можно провести K непересекающихся шампуров так, чтобы к ним нельзя было добавить еще один не пересекающий их шампур?

б) При каком наибольшем K можно провести $3K$ непересекающихся шампуров так, чтобы среди них было K шампуров каждого направления?

Ф448. Почему бревна, плывущие по реке, ориентированы всегда по течению, а не поперек его?

Ф449. Продолжительность контакта двух соударяющихся шаров можно определить, измеряя уменьшение заряда конденсатора при мгновенном замыкании присоединенного к нему сопротивления, соединенного с шарами. Какие меры предосторожности необходимо предусмотреть при выполнении этого опыта? Пусть $C=0{,}1$ *мкф*, $R=10\,000$ *ом*, отброс гальванометра после мгновенной утечки 10,11 *см*, без утечки — 11,94 *см*. Найти время столкновения.

Ф450*. Ядро массы m, летящее со скоростью $\vec{v}_0$, распадается на лету на два одинаковых осколка. Определить максимально возможный угол между вектором скорости одного из осколков и вектором $\vec{v}_0$, если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость $v<v_0$.

Ф451. Нарисуйте примерный график зависимости тока через сопротивление R от положения движка (рис. 2). При каком значении $y=x/l$ этот ток максимален?

Ф452. Для чего делают рессоры у автомобиля?

Решения задач

М385 г), М395; Ф403—Ф406

М385. *г) Докажите, что для любых двух выпуклых многоугольников F и G с вершинами в узлах выражение $N(nF+mG)$ является многочленом от n и m (здесь имеется в виду сумма Минковского).*

В «Кванте» № 5 за прошлый год была опубликована не совсем обычная задача М385. Про нее было написано, что она — тема для настоящего математического исследования. Поэтому присылать ее решения можно было в течение шести месяцев.

В этом номере журнала мы помещаем статью автора задачи М385 *А. Кушниренко*, в которой разработана небольшая теория, позволяющая решить все пункты задачи, кроме пункта г) *).

---

*) Число целых точек, попавших на границу многоугольника (многогранника) F, которое в условии задачи М385 обозначается через $N(\overline{F})$, в статье А. Кушниренко обозначается через $B(F)$.

До получения писем редакции было известно два решения задачи г): n-мерное обобщение этой задачи было рассказано *Мак-Мулленом* на Международном математическом конгрессе в 1974 году и — с другим решением — опубликовано *Д. Н. Бернштейном* в журнале «Функциональный анализ и его приложения», № 3 за 1976 год.

Читатели *А. Касянчук* из Николаева и *М. Народицкий* из Куйбышева прислали решение этой задачи, отличающееся от известных решений (см. ниже).

Э. Туркевич из Черновиц прислал очень красивое доказательство формул для трехмерного случая. Стоит заметить, что доказательству одной из этих формул посвящена большая часть научной статьи *Дж. Рива* «Об объеме решеточных полиэдров», опубликованной в журнале «Proceedings of London Mathematical Society» 7, № 7, 1957 год.

В. Медведь из Молодечно и *Э. Туркевич* прислали несколько новых формул для трехмерного случая (одну из них читатель найдет на с. 19 в упражнении 8), а *В. Стовбе* из Москвы и *М. Народицкий* прислали обобщения задачи М385 на n-мерный случай.

Приведем план решения задачи г), присланного Касянчуком и Народицким.

Шаг 1. Если F и G — выпуклые многоугольники и m и n — натуральные числа, то

$$S(nF+mG)=n^2S(F)+m^2S(G)+cnm, \qquad (*)$$

где c — некоторая константа, не зависящая от n и m. (Это утверждение есть задача 2,а) из статьи Н. Васильева «Сложение фигур», «Квант», 1976, № 4).

Шаг 2. Если F_1 и F_2 — целочисленные многоугольники, то

$$N(\overline{F_1+F_2})=N(\overline{F_1})+N(\overline{F_2}). \qquad (**)$$

Шаг 3. По формуле Пика: $S(nF+mG)=N(nF+mG)-$

$-\frac{1}{2}N(\overline{nF+mG})-1$. Применяя формулы (*) и (**), получаем: $n^2S(F)+m^2S(G)+cnm=N(nF+mG)-$

$$-\frac{1}{2}N(\overline{nF})-\frac{1}{2}N(\overline{mG})-1.$$

Поскольку $N(\overline{nF})=nN(\overline{F})$, получаем, что $N(nF+mG)=$

$=n^2S(F)+m^2S(G)+cnm+\frac{n}{2}N(\overline{F})+\frac{m}{2}N(\overline{G})+1$ — многочлен от m и n.

Л. Гаврилов

◆

М395. *В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1). За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и (-1), что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$:*

а) $n=15$,
б) $n=30$,

Заметим, что конечная расстановка зависит от исходной расстановки и того, какие многоугольники выбирались, но не зависит от порядка, в котором это делалось. Действительно, в каждой вершине стоит то же число, что и в начальной расстановке, если эта вершина попала в четное число многоугольников, и число, противоположное по знаку, — если в нечетное; порядок, тем самым, несуществен. Кроме того, ясно, что в одном и том же многоугольнике производить замену знаков более одного раза не имеет смысла.

Назовем две расстановки *эквивалентными*, если они могут быть получены друг из друга (если расстановка N может быть получена из расстановки M, то и наоборот, M может быть получена из N). Множество всех расстановок, эквивалентных какой-нибудь расстановке, называется *классом эквивалентности* (или просто «классом»), порожденным этой расстановкой. Расстановки, попавшие в один класс эквивалентности, эквивалентны (так как от любой из них можно перейти к любой через расстановку, порождающую этот класс), а расстановки из разных классов — не эквивалентны.

в) n — любое целое число, большее 2.

г) Попробуйте выяснить для произвольного n, сколько существует различных расстановок (+1) и (—1) таких, что никакую из них нельзя получить ни из какой другой за несколько шагов. Докажите, например, что для $n=2100$ существует 2^{4}) таких расстановок.*

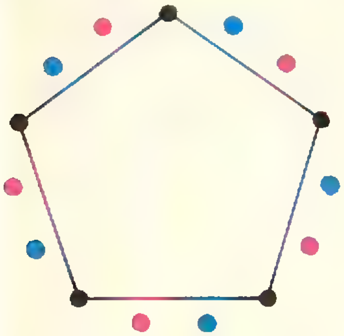


Рис. 1. 15-угольник разбит на три 5-угольника.

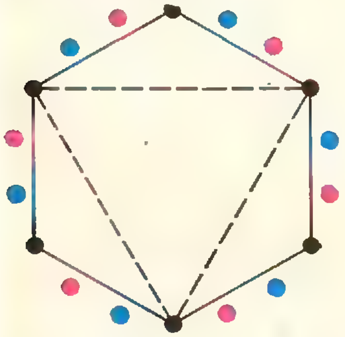


Рис. 2. 18-угольник разбит на три 6-угольника. Любой 3-угольник содержится в 6-угольнике.

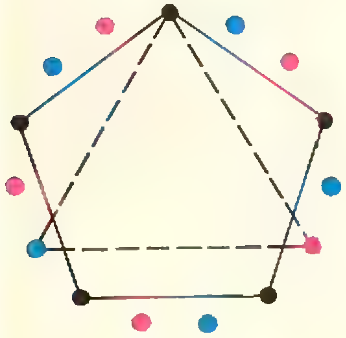


Рис. 3. В 15-угольнике 3-угольник и 5-угольник пересекаются по одной вершине.

Оказывается, что во всех классах эквивалентности поровну расстановок. Действительно, пусть один класс порожден расстановкой N, а другой — расстановкой M. Тогда элементу первого класса — расстановке, получающейся из N в результате замен знаков в каких-то многоугольниках, мы сопоставим элемент второго класса — расстановку, получающуюся из M в результате замен знаков в тех же многоугольниках. Полученное соответствие между элементами этих двух классов дает возможность утверждать, что в этих классах поровну элементов.

В задачах а) — в) утверждается, что не все элементы попали в один класс, а в г) спрашивается, сколько всего классов. Обозначим общее количество классов через $F(n)$, а количество элементов в (каком угодно) классе через $f(n)$. Поскольку всего расстановок 2^n, то $F(n) = 2^n/f(n)$, так, что для нахождения $F(n)$ достаточно найти количество расстановок в каком-нибудь одном классе. Подсчитаем число различных расстановок в классе, порождаемом расстановкой из одних единиц.

Заметим, что всякий pq-угольник (p и q — натуральные числа, большие 1) можно разбить на p штук q-угольников *); как это сделать, видно из рисунка 1. Мы можем ограничиться выбором многоугольников лишь с простым числом вершин: остальные многоугольники можно разбить на такие, и вместо замены знаков в вершинах «непростого» многоугольника произвести ее во всех его, уже «простых», многоугольниках «разбиения».

Заметим теперь, что если p — простое число, то $f(p) = 2$, и стало быть

$$F(p) = 2^{p-1}. \tag{1}$$

Начнем с решения задачи г).

Пусть $n = bp$, где b — натуральное, p — простое. Попытаемся *выразить $f(n)$ через $f(b)$, пользуясь разбиением n-угольника на b-угольники.* Прежде всего выясним, что представляют собой пересечения b-угольников с выбираемыми многоугольниками. Если в выбранном многоугольнике q вершин, и b делится на q, то, очевидно, этот выбранный q-угольник целиком содержится в некотором b-угольнике (рис. 2 — напоминаем о смысле, в котором употребляется слово «многоугольник»!).

Если же b не делится на (простое!) q, то, как нетрудно доказать, этот q-угольник с каждым b-угольником имеет ровно одну общую вершину.

Пусть сначала *b делится на p.* Тогда b делится на все простые делители n, и каждый выбираемый многоугольник целиком содержится в некотором b-угольнике, так что в этом случае можно считать, что операции перемены знаков происходят независимо в p b-угольниках; следовательно,

$$f(n) = [f(b)]^p. \tag{2}$$

Пусть теперь *b не делится на p.* Раскрасим каждый из b p-угольников в свой цвет, как на рисунке 3. Тогда каждый из b-угольников будет иметь по одной вершине каждого цвета.

Разобьем наш процесс на два этапа — на первом этапе будем выбирать p-угольники, на втором — остальные q-угольники (q — простые делители n, $q \neq p$). На первом этапе изменение знака происходит одновременно для всех вершин одного цвета; тем самым после первого этапа во всех b-угольниках будет одна и та же расстановка чисел +1 и —1, причем эта расстановка может быть какой угодно. (Напомним, что начинаем мы с расстановки из одних единиц. Здесь и ниже мы считаем, что b-угольники совмещаются друг с другом поворотом так, что вершины одного цвета совпадают.)

На втором этапе все операции происходят уже внутри отдельных b-угольников (так как все простые делители n, отличные от p, являются и делителями b). Поэтому после второго этапа расстановки внутри b-угольников эквивалентны (поскольку они получаются из одной и той же), и вообще всякая расстановка, для которой расстановки внутри всех b-угольников эквивалентны, может быть получена из исходной расстановки. Подсчитаем число $f(n)$ таких расстановок. Внутри первого b-угольника $+1$ и -1 можно расставить 2^b способами, после чего в каждом из $(p-1)$ оставшихся b-угольников можно изменить расстановку $f(b)$ способами. Итак,

---

*) Здесь и далее мы для удобства употребляем слово «многоугольник» в смысле «множество вершин правильного многоугольника».

$$f(n) = 2^b \cdot [f(b)]^{p-1}. \qquad (3)$$

Мы доказали, что при b, делящемся на p, имеет место формула (2), а при b, не делящемся на p, — формула (3). При помощи формул (1), (2) и (3) можно последовательно вычислять $f(n)$ и $F(n)$ для различных n. Например, найдем $F(2100)$. По формуле (1) $f(5) = 2$. По формулам (2) и (3) имеем:

$f(25) = 2^5$, $f(50) = 2^{25} \cdot 2^5 = 2^{30}$, $f(100) = (2^{30})^2 = 2^{60}$, $f(300) = 2^{100} \cdot (2^{60})^2 = 2^{220}$, $f(2100) = 2^{300} \cdot (2^{220})^6 = 2^{16320}$, откуда $F(2100) = 2^{2100} : 2^{1620} = 2^{480}$.

Еще проще найти ответы в случаях а) и б):

а) $f(15) = f(3 \cdot 5) = 2^5 \cdot f((5))^2 = 2^7$; $\quad F(15) = 2^8$.
б) $f(30) = f(15 \cdot 2) = 2^{15} \cdot f(15) = 2^{22}$; $\quad F(30) = 2^8$.

В общем случае читатель при помощи формул (1) и (3) может (по индукции) вывести формулу

$$F(n) = 2^{\varphi(n)}, \text{ где } \varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

а $p_1, \ldots, p_k$ — все различные простые делители n. Интересно, что той же формулой $\varphi(n)$ выражается количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n (φ называется «функцией Эйлера»). Разумеется, интересно понять, почему здесь возникают одинаковые формулы, и использовать это совпадение для поисков более красивого решения задачи М395, и, быть может, для доказательства формулы для функции Эйлера (оно тоже не слишком просто — см. статью С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма», «Квант», 1972, № 10, с. 2).

С. Фомин

◆

Ф403. *В электрической цепи из двух одинаковых конденсаторов емкости C и катушки индуктивности L, соединенных последовательно (рис. 4), в начальный момент один из конденсаторов имеет заряд q_0, второй не заряжен.*
Как будут изменяться со временем заряды конденсаторов и ток в контуре после замыкания ключей? Предложите механическую колебательную систему, аналогичную данной электрической.

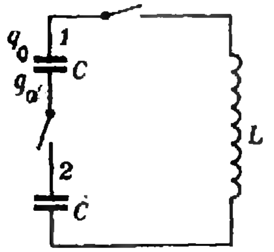


Рис. 4.

Данная система представляет собой колебательный контур. Сила тока I в нем изменяется со временем по гармоническому закону

$$I = I_0 \sin \omega t,$$

где I_0 — амплитуда тока, ω — частота колебаний.

Определим сначала I_0. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. В любой момент времени энергия контура, складывающаяся из энергии магнитного поля в катушке и энергии электрического поля в конденсаторах, равна первоначальной энергии электрического поля в конденсаторе 1, имеющем заряд q_0. Если в некоторый момент сила тока в цепи I, а заряды на конденсаторах 1 и 2 соответственно q_1 и q_2, то

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}. \qquad (1)$$

Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд конденсаторов в любой момент времени равен q_0 — таков в начальный момент суммарный заряд нижней пластины конденсатора 1 и верхней пластины конденсатора 2, который все время остается постоянным. Так что

$$q_1 + q_2 = q_0. \qquad (2)$$

Учитывая (2), из (1) находим

$$I^2 = \frac{1}{LC}\left[q_0^2 - \left(q_1^2 + q_2^2\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{LC}\left\{q_0^2 - \left[(q_1 + q_2)^2 - 2q_1q_2\right]\right\} = \frac{2}{LC} q_1 q_2.$$

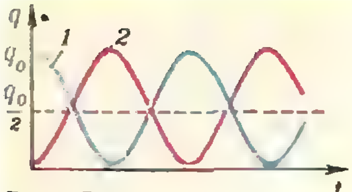


Рис. 5.

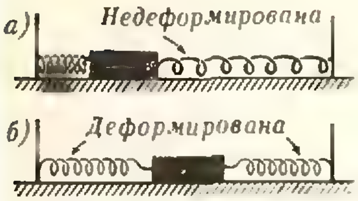


Рис. 6.

Поскольку сумма $q_1 + q_2$ постоянна, то произведение $q_1 q_2$ максимально при $q_1 = q_2 = q_0/2$. Таким образом, амплитудное значение тока в контуре равно

$$|I_0| = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}}.$$

Теперь найдем ω. Включенные последовательно два конденсатора с емкостью C каждый эквивалентны наличию в цепи конденсатора с емкостью $C_0 = C/2$. Поэтому

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \sqrt{\frac{2}{LC}}.$$

Итак, ток в контуре со временем изменяется по закону

$$I = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\, t\right). \tag{3}$$

С такой же частотой по гармоническому закону изменяются заряды на конденсаторах. Ясно, что амплитудное значение заряда равно q_0. За период заряд переходит с одного конденсатора на другой и обратно. Заметим, что на каждой из пластин за период бывают заряды только одного знака. Например, на верхней пластине конденсатора 1 заряд меняется от q_0 до 0 и от 0 до q_0 (при этом заряд на нижней пластине конденсатора 2 меняется от 0 до q_0 и от q_0 до 0).

Графически изменение зарядов может быть представлено графиком косинусоиды с амплитудой $q_0/2$, сдвинутой по оси ординат на $q_0/2$, — для конденсатора 1, и тем же графиком, сдвинутым по фазе на $\pi/2$, — для конденсатора 2 (рис. 5).

Запишем эти зависимости аналитически:

$$q_1(t) = \frac{q_0}{2} + \frac{q_0}{2}\cos\omega t = \frac{q_0}{2}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\, t\right) + 1\right],$$

$$q_2(t) = q_0 - q_1 = \frac{q_0}{2}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\, t\right)\right].$$

(Эти же зависимости мы могли получить, подставив в (1) найденное выражение (3) для I и заменив q_2 на $q_0 - q_1$.)

На рисунке 6 приведена механическая колебательная система, являющаяся аналогом нашего колебательного контура. В начальный момент (рис. 6, *а*) одна из пружин недеформирована. В состоянии равновесия (рис. 6, *б*) обе пружины одинаково деформированы (коэффициенты жесткости пружин одинаковы; трение отсутствует).

◆

Ф404. *Определить к. п. д. ракетного двигателя как тепловой машины и его силу тяги. Ракетный двигатель использует в качестве горючего водород, в качестве окислителя — жидкий кислород. Секундный расход водорода 24 кг/сек. Скорость истечения газов из сопла ракеты 4,2·10³ м/сек. Теплотворная способность водорода 1,1·10⁸ дж/кг.*

При сгорании водорода в кислороде образуются водяные пары.

Секундный расход водорода при работе двигателя равен 24 *кг/сек*. Следовательно, мощность, развиваемая двигателем, равна $N = 1{,}1\cdot 10^8$ *дж/кг*·24 *кг/сек* $= 26{,}4\cdot 10^8$ *вт*.

Полезная работа, совершаемая двигателем за 1 *сек* (полезная мощность), равна кинетической энергии паров, вылетающих из сопла за 1 *сек*. Из уравнения реакции сгорания водорода

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

видно, что при сгорании 1 *кмоль* H_2 (2 *кг*) образуется 1 *кмоль* паров H_2O (18 *кг*). Следовательно, каждую секунду при сгорании 24 *кг* H_2 из сопла двигателя вылетает 216 *кг* паров H_2O. Таким образом, полезная мощность двигателя равна $N_п = \mu u^2/2 \approx 19\cdot 10^8$ *вт* ($\mu = 216$ *кг/сек*, $u = 4{,}2\cdot 10^3$ *м/сек*).

К. п. д. ракетного двигателя равен

$$\eta = \frac{N_п}{N} \approx 0{,}72.$$

Согласно третьему закону Ньютона сила тяги двигателя равна по абсолютной величине силе, действующей на вылетающие из сопла ракеты пары. Так как пары за время $\Delta t =$

$= 1$ *сек* приобретают импульс $\mu|\vec{u}|$, то действующая на них сила равна по абсолютной величине $\frac{\mu|\vec{u}|}{\Delta t} \approx 9{,}0\cdot 10^5$ *н*.

Следовательно, сила тяги ракетного двигателя равна

$$|\vec{F}_т| = 9{,}0\cdot 10^6 \text{ н.}$$

◆

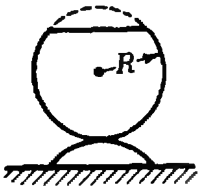


Рис. 7.

Ф405. *Однородную тонкостенную сферу радиуса R разрезали на две части и скрепили, как показано на рисунке 7. На какой высоте находится центр тяжести получившегося бокала, если высота его ножки h?*

Разделим бокал на отдельные плоские пояски высоты $\Delta h \ll R$ так, как показано на рисунке 8. Очевидно, что центр тяжести всего бокала это, по существу, центр тяжести системы таких поясков.

Но центр тяжести каждого такого пояска находится в центре окружности радиуса r_i, где r_i—средний радиус пояска. Так что нам надо найти положение центра тяжести системы материальных точек, расположенных на вертикальной прямой, проходящей через центр сферы. Масса каждой такой точки — это масса соответствующего пояска. Посмотрим, от чего она зависит.

Пусть ρ — плотность единицы поверхности материала сферы. Площадь поверхности каждого пояска равна (см. рис. 8)

$$s_i = 2\pi r_i l = 2\pi R \sin\alpha \frac{\Delta h}{\sin\alpha} = 2\pi R\Delta h,$$

а масса—

$$m_i = \rho 2\pi R\Delta h.$$

Мы видим, что массы всех поясков одинаковы и зависят только от их высоты Δh (при данных ρ и R).

Таким образом, центр тяжести бокала — это центр тяжести системы материальных точек равных масс, равномерно распределенных вдоль вертикального отрезка длины $2R$ ($\Sigma\Delta h_i = 2R$).

Следовательно, центр тяжести бокала находится на середине его высоты, т. е. на высоте R от «основания» бокала.

И. Слободецкий

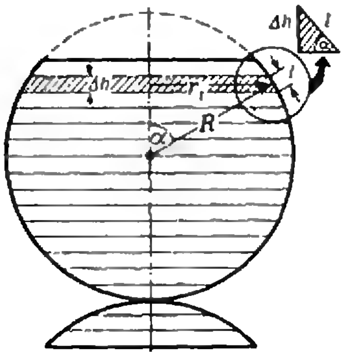


Рис. 8.

◆

Ф406. *Спутник движется по круговой орбите на расстоянии от поверхности Земли, равном ее радиусу R. В некоторый момент со спутника запускается станция на другую планету, после чего оставшаяся часть спутника движется по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли в точке, противоположной точке старта станции. Какую максимальную часть массы спутника может составлять масса межпланетной станции? (Потенциальная энергия тела массы m в поле тяготения тела массы M равна* $U = -\gamma\frac{mM}{r}$.)

Из условия задачи ясно, что точка старта станции является наиболее удаленной от Земли точкой орбиты «остатка» спутника. В этой точке скорость спутника $\vec{u}$ и скорость «остатка» $\vec{w}$ направлены вдоль одной прямой, перпендикулярной радиусу-вектору, проведенному из центра Земли (рис. 9). Из закона сохранения импульса

$$M\vec{u} = \mu\vec{w} + m\vec{v} \tag{1}$$

(M — масса спутника, μ — масса остатка, m — масса станции, $\vec{v}$ — ее скорость сразу после старта) следует, что и скорость станции $\vec{v}$ сразу после старта направлена вдоль этой же прямой.

Очевидно, более выгодным является случай, когда скорость станции сразу после старта направлена в ту же сторону, что и скорость спутника непосредственно до старта, а скорость «остатка» направлена в противоположную сторону (см. рис. 9). Тогда

$$|m\vec{v}| = |M\vec{u}| + |\mu\vec{w}|. \tag{2}$$

Отношение $m : M$ найдем из (2), учитывая, что $m + \mu = M$:

$$\frac{m}{M} = \frac{|\vec{u}| + |\vec{w}|}{|\vec{v}| + |\vec{w}|}. \tag{3}$$

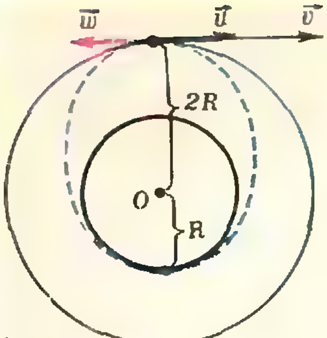


Рис. 9.

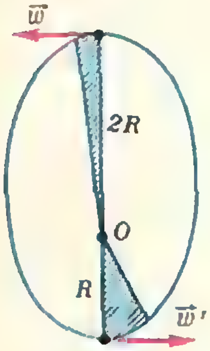


Рис. 10.

Определим значения $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$.

Скорость спутника определим из условия движения по круговой орбите. Центростремительное ускорение спутнику сообщает сила притяжения к Земле:

$$\frac{Mu^2}{2R} = \gamma \frac{M_0 M}{4R^2}$$

(M_0 — масса Земли). Отсюда

$$|\vec{u}| = \sqrt{\gamma \frac{M_0}{2R}}.$$

Полная механическая энергия станции в момент старта равна $\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{M_0 m}{2R}$. По мере удаления от Земли потенциальная энергия станции увеличивается, и далеко от Земли (на бесконечности) она равна нулю. Минимальная скорость, которую имеет станция в момент старта, должна быть такой, чтобы уменьшение кинетической энергии станции за время полета было равно увеличению ее потенциальной энергии. Тогда на бесконечности и кинетическая энергия станции будет равна нулю. Следовательно, в момент старта полная механическая энергия станции должна быть равна нулю, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{M_0 m}{2R} = 0.$$

Отсюда

$$|\vec{v}| = \sqrt{\gamma \frac{M_0}{R}}.$$

Определим значение $|\vec{w}|$. Согласно второму закону Кеплера радиус-вектор «остатка», движущегося по эллиптической орбите, за равные времена заметает равные площади. Если в перигее скорость остатка $\vec{w}'$ (рис. 10), то за малый промежуток времени Δt

$$2R\,|\vec{w}|\,\Delta t = R\,|\vec{w}'|\,\Delta t \qquad (4)$$

(время Δt достаточно мало, чтобы считать, что $|\vec{w}|$, $|\vec{w}'|$ и длины радиусов-векторов остаются постоянными).

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{\mu w^2}{2} - \gamma \frac{M_0 \mu}{2R} = \frac{\mu (w')^2}{2} - \gamma \frac{M_0 \mu}{R}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) найдем $|\vec{w}|$:

$$|\vec{w}| = \sqrt{\gamma \frac{M_0}{3R}}.$$

Подставив найденные значения $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ и $|\vec{w}|$ в выражение (3), окончательно получим

$$\frac{m}{M} \approx 0{,}8$$

В. Белонучкин

А. Земляков

Четные и нечетные функции

> *«В мир согласный,*
> *Вечно — ясный,*
> *Чет и нечет нас влечет»*
> К. Бальмонт

Эта статья адресована девятиклассникам и является иллюстрацией и дополнением к пункту 68 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9».

Четные функции

Напомним, что числовая функция f называется *четной*, если выполнены следующие два условия:

(С) *если* $x \in D(f)$, *то и* $-x \in D(f)$, то есть область определения $D(f)$ функции f симметрична относительно точки 0 на координатной прямой Ox;

(Ч) $f(-x) = f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$, то есть в симметричных (относительно точки 0 на оси Ox) точках x и $-x$ функция f принимает одинаковые значения.

Примеры четных функций: постоянная c ($y = c$ при любом $x \in \mathbf{R}$), x^2, $\cos x$.

График четной функции на координатной плоскости Oxy симметричен относительно оси ординат. Доказывается это так. Если точка M с координатами $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции f (рис. 1), то есть $f(x_0) = y_0$, то, по определению четной функции, $-x_0 \in D(f)$ и $f(-x_0) = y_0$, а потому и точка M' с координатами $(-x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции f. Но точка M' как раз симметрична точке M относительно оси Oy. Таким образом, вместе со всякой точкой M график четной функции f содержит и симметричную ей точку M', а это и означает, что этот график симметричен относительно оси ординат.

Верно и обратное: если график функции f симметричен относительно оси ординат, то функция f — четная.

Четные функции обладают «хорошими» алгебраическими свойствами: сумма, разность и произведение двух четных функций тоже являются четными функциями (докажите это самостоятельно).

Нечетные функции

Функция f называется *нечетной*, если выполнено условие симметрии (С) (см. выше) и следующее условие нечетности:

(Н) $f(-x) = -f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$.

Примеры нечетных функций: $2x$, x^3, $1/x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

График нечетной функции на координатной плоскости Oxy симметричен относительно начала координат O — докажите это самостоятельно с помощью рисунка 2. Верно и обратное утверждение (сформулируйте и докажите его самостоятельно).

Легко видеть, что сумма и разность двух нечетных функций, а так-

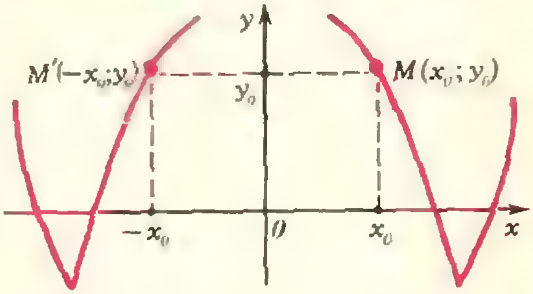


Рис. 1.

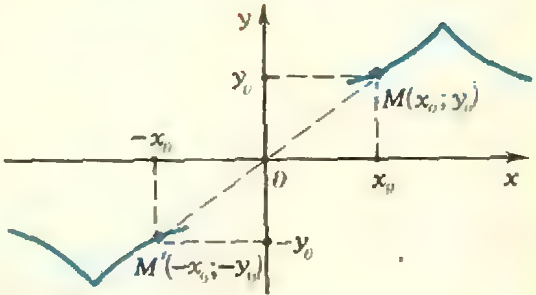


Рис. 2.

же произведение нечетной функции на число являются нечетными функциями.

Контрольные вопросы

1. Четной или нечетной функцией является произведение двух нечетных функций?
2. Какой функцией является произведение четной и нечетной функций?

Ни четные, ни нечетные функции

Отметим, что «нечетная функция» — это отнюдь не то же самое, что «не четная функция» (то есть функция, не являющаяся четной). Как правило, функция, «взятая наугад», не будет ни четной, ни нечетной: график «произвольной» функции не обязан обладать какими-либо свойствами симметрии.

Пример 1. Функция $f(x) = 1/(x+1)$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку для ее области определения $D(f) = \{x \mid x \neq -1\}$ не выполнено условие симметрии (С): точка $x_0 = 1$ принадлежит $D(f)$, а точка $-x_0 = -1$ не принадлежит $D(f)$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^2 + x + 1$ также не является ни четной, ни нечетной. Эта функция определена всюду, и поэтому условие симметрии (С) для нее выполнено, однако ни условие (Ч), ни условие (Н) не выполнено. В самом деле, $f(-x) = x^2 - x + 1$. Положив $x = 1$, находим

$$f(1) = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1,$$

и $f(-1)$ не равно ни $f(1)$, ни $-f(1)$.

Замечание. Ссылка на то, что выражения для $f(x)$ и $f(-x)$ «разные», поэтому «$f(-x) \neq f(x)$», ничего не доказывает: во-первых, совсем разные по своему внешнему виду выражения могут задавать одну и ту же функцию; во-вторых, предложение «$f(-x) \neq f(x)$» содержит переменную x, и его истинность или ложность зависит от значения x (например, в рассматриваемом примере при $x = 0$ как раз $f(-x) = f(x)$). Условие (Ч) четности функции заключается в истинности высказывания

«для любого $x \in D(f)$ выполнено числовое равенство $f(-x) = f(x)$»,

а утверждение о том, что условие (Ч) не выполняется, заключается в истинности высказывания, являющегося отрицанием предыдущего:

«существует $x \in D(f)$ такое, что $f(-x) \neq f(x)$».

Таким образом, чтобы опровергнуть условия (Ч) или (Н), нужно доказать существование соответствующего значения x — например, указать конкретное такое значение.

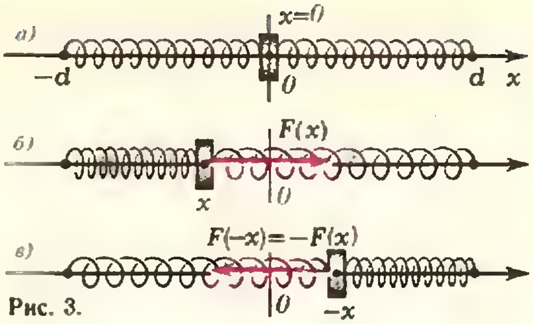


Рис. 3.

Возникает вопрос: зачем вводить понятия четности и нечетности функций, если «большинство» функций не являются ни четными, ни нечетными? Это мы сейчас и объясним.

Физический пример

Если физическая система обладает какой-нибудь симметрией, то и связанные с нею функции часто имеют те или иные свойства симметрии. В простейших случаях возникают как раз четные или нечетные функции.

Пример. На горизонтальный стержень — ось Ox — надета однородная пружина, концы которой закреплены в симметричных точках $x = -d$ и $x = d$, а к середине пружины — в точке $x = 0$ — прикреплена шайба, свободно (без трения) перемещающаяся вдоль стержня (рис. 3, *а*). Пусть шайба отведена в точку с координатой x. Обозначим через $F(x)$ величину силы, действующей на шайбу со стороны пружины (точнее говоря, проекцию этой силы на ось Ox), а через $U(x)$ — потенциальную энергию шайбы в этом положении. Очевидно, пружине безразлично, вправо или влево отводится шайба: абсолютная величина силы и потенциальная энергия при смещениях x и $-x$ одинаковы, то есть

$$|F(-x)| = |F(x)|$$

и

$$U(-x) = U(x).$$

Учитывая, что сила в положениях x и $-x$ направлена в противоположные стороны (см. рис. 3, *б*, *в*), можем записать

$$F(-x) = -F(x).$$

Таким образом, из одних лишь соображений симметрии мы получаем следующее:

1) функция $F(x)$, выражающая зависимость силы F от смещения x, нечетная;

2) функция $U(x)$, выражающая зависимость потенциальной энергии от смещения, четная.

Математический пример

Очевидно, степенная функция $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbf{N}$, при четном n будет четной, а при нечетном n — нечетной (собственно, отсюда и появилась эта терминология). Произвольный многочлен $p(x)$, вообще говоря, не будет ни четной, ни нечетной функцией *). Однако его можно представить в виде суммы двух многочленов $p_+(x)$ и $p_-(x)$, являющихся соответственно четной и нечетной функциями. Например,

$$p(x) = x^7 + 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 13x^2 + x + 17 = p_+(x) + p_-(x),$$

где

$$p_+(x) = 2x^6 - 3x^4 - 13x^2 + 17$$

— сумма одночленов из $p(x)$, содержащих x в четной степени, и

$$p_-(x) = x^7 - x^5 + x$$

— сумма одночленов из $p(x)$, содержащих x в нечетной степени.

Оказывается, что не только многочлен, но и любую функцию с симметричной областью определения можно представить в виде суммы чётной и нечетной функций!

Теорема

Если функция f удовлетворяет условию симметрии (С), то ее можно представить в виде суммы двух функций — четной $f_+(x)$ и нечетной $f_-(x)$:

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x), \qquad (1)$$

области определения которых те же, что у функции f: $D(f_+) = D(f_-) = D(f)$, причем такое представление единственно.

Доказательство. Допустим, что функция $f(x)$ уже представлена в виде (1) и функции f_+ и f_- удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} f_+(-x) &= f_+(x), \\ f_-(-x) &= -f_-(x). \end{aligned} \qquad (2)$$

Подставив в формулу (1) вместо x значение $-x$, из формул (2) получим

$$f(-x) = f_+(x) - f_-(x). \qquad (3)$$

Складывая равенства (1) и (3), получаем

$$f(x) + f(-x) = 2f_+(x),$$

откуда

$$f_+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \qquad (4а)$$

Аналогично, вычитая (3) из (1), находим

$$f_-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \qquad (4б)$$

Таким образом, если функция f представима в виде (1), то функции f_+ и f_- однозначно отыскиваются по функции f — с помощью формул (4). Следовательно, если представление (1) существует, то оно единственно.

А теперь — небольшой трюк: для произвольной функции f определим функции f_+ и f_- соотношениями (4).

Тогда из формул (4) следует, что, во-первых, $f_+(x) + f_-(x) = f(x)$, то есть (1) выполняется, и, во-вторых, что функции f_+ и f_- являются, соответственно, четной и нечетной. Например, проверим условие (Н) для функции f_-. Для произвольного x имеем

$$f_-(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_-(x),$$

что и требовалось доказать. Четность функции f_+ проверяется точно так же.

Замечание. Приведенное доказательство носит, как говорят, конструктивный характер: мы не только доказали существование и единственность представления (1), то и указали формулы (4), по которым можно найти четную и нечетную «части» данной функции.

Контрольные вопросы

3. Где в доказательстве использовано предположение о симметричности $D(f)$?

4. Согласно нашей теореме любая функция с симметричной областью определения, в том числе и любая четная (или нечетная) функция, представляется в виде суммы четной и нечетной частей. Найдите функции f_+ и f_-, если

а) f — четная функция;
б) f — нечетная функция.

---

*) Здесь и далее рассматриваются многочлены от одной переменной x, причем многочлен $p(x)$ мы отождествляем с функцией $x \to p(x)$.

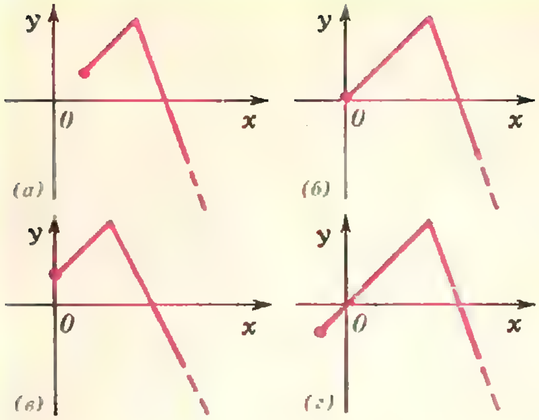


Рис. 4.

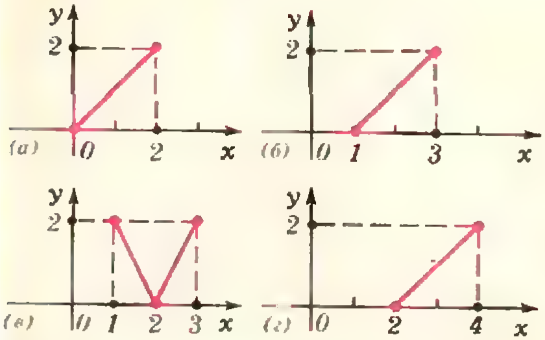


Рис. 5.

5. В «математическом примере» мы разложили некоторый многочлен $p(x)$ в сумму четной и нечетной функций, «собрав» в одну функцию все одночлены, содержащие x в четной степени, а в другую — одночлены, содержащие x в нечетной степени.

Выведите это разложение с помощью формул (4).

6. Докажите, что если некоторый многочлен является

а) четной функцией, то он содержит одночлены лишь с четными степенями x;

б) нечетной функцией, то он содержит одночлены лишь с нечетными степенями x.

Упражнения

1. Даны 11 функций: $f_1(x) = \sqrt{x^2-1}$, $f_2(x) = \sqrt{x+1}$, $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $f_4(x) = x^2 + \sin x$, $f_5(x) = x^2 \cdot 2^x$, $f_6(x) = x^3 + x^4 - x^2$, $f_7(x) = x^3 + \cos x$, $f_8(x) = x^3 + \lg x$, $f_9(x) = x^3 \cdot \sin x$, $f_{10}(x) = \dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, $f_{11} = \lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Определите, какие из этих функций — четные, какие — нечетные, а какие — ни четные, ни нечетные (тогда представьте их в виде суммы четной и нечетной функций). Дайте соответствующие доказательства. (При обосновании тех или иных свойств четности не забудьте про замечание после примера 2!)

2. Найдите все четные и все нечетные функции среди:

а) линейных функций

$$f(x) = ax + b;$$

б) квадратичных функций

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

в) функций вида

$$f(x) = a\cos x + b\sin x.$$

3. Следующие функции представьте в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x} + 2$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}$;

в) $f(x) = (x^2+2x+1)\,\mathrm{tg}\,x$;

г) $f(x) = 2^x$.

4. Известно, что функция f нечетна и $0 \in D(f)$. Найдите $f(0)$.

5. Найдите все функции f, являющиеся одновременно и четными и нечетными. (Предостережение: таких функций бесконечно много!)

6. Существуют ли всюду определенные функции, являющиеся одновременно

а) четными и возрастающими на **R**;

б) нечетными и убывающими на **R**;

в) нечетными и положительными на **R**?

7. Может ли

а) четная;

б) нечетная

функция иметь в точности

1) одну;

2) две;

3) три

точки экстремума?

8. а) Докажите, что производная четной функции нечетна, а производная нечетной функции, напротив, четна.

б) Верны ли обратные утверждения:

1) если $f'(x)$ — четная функция, то $f(x)$ — нечетная функция;

2) если $f'(x)$ — нечетная функция, то $f(x)$ — четная функция?

9 (а — г). Достройте график функции, изображенный на рисунке 4, до графика всюду определенной, непрерывной на **R** и

1) четной функции;

2) нечетной функции.

В каких случаях это невозможно? В каких случаях это можно сделать несколькими способами?

10 (а—г). Известно, что функция f всюду определена, четна и периодична с периодом $T = 4$. Восстановите ее график по участку, изображенному на рисунке 5. В каких случаях это нельзя сделать? В каких случаях это можно сделать, но неоднозначно?

11 (10 класс). Постройте графики следующих функций:

а) $y = \arccos(\cos x)$;

б) $y = \arcsin(\sin x)$;

в) $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$;

г) $y = \arcsin(\cos x)$.

Равноугольная спираль

На второй странице обложки изображены два семейства конгруэнтных между собой равноугольных спиралей (точнее — вписанных в них ломаных из хорд).

Равноугольная спираль*) может быть определена как траектория точки M, которая движется по лучу, равномерно вращающемуся вокруг точки O (полюса спирали), причем ее суммарная скорость в каждый момент образует с лучом один и тот же угол α (рис. 1). Спираль эта имеет бесконечно много витков не только при раскручивании, но и при закручивании.

По этой спирали летят на пламя свечи ночные бабочки. Из-за сложного устройства глаз они направляются к цели так, что их скорость составляет постоянный угол с направлением на пламя свечи. По этой спирали моллюск наращивает секции своей раковины (рис. 2).

Равноугольная спираль используется в разнообразных технических устройствах. Например, вращающиеся ножи в режущих машинах часто имеют профиль, очерченный по равноугольной спирали — под постоянным углом к разрезаемой поверхности, благодаря чему лезвие ножа снашивается равномерно (рис. 3).

Вернувшись к рисунку на обложке, вы заметите, что спирали одного семейства на нем могут быть совмещены друг с другом поворотом относительно центра всей фигуры (он же — полюс каждой из спиралей) на угол $k\frac{\pi}{6}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Еще раз всмотревшись в тот же рисунок, вы заметите переходящие друг в друга в результате гомотетии относительно общего центра четырехугольники (каждый из них есть объединение двух треугольников — равностороннего и равнобедренного прямоугольного). Равноугольная спираль при гомотетии относительно полюса также переходит сама в себя.

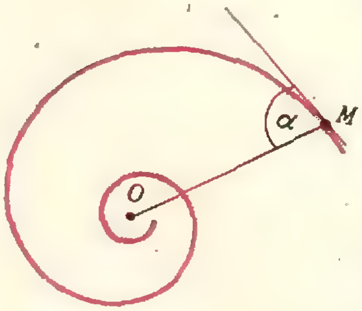


Рис. 1.

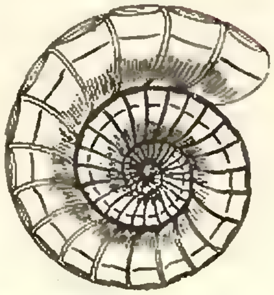


Рис. 2.

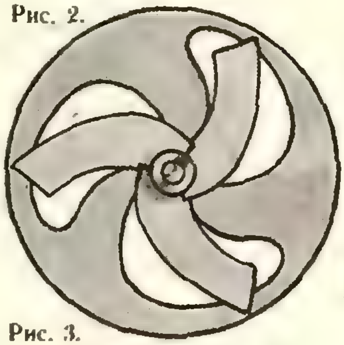


Рис. 3.

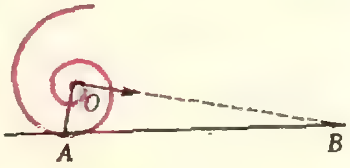


Рис. 4.

Вот эти два свойства равноугольной спирали (то, что она при вращении и гомотетии переходит сама в себя) настолько восхитили Я. Бернулли*), что он распорядился выгравировать ее изображение на своем надгробном памятнике. Особенности этой замечательной кривой привлекали многих выдающихся математиков. Первыми из них были Э. Торричелли**) и Р. Декарт (1596—1650)***).

Э. Торричелли, кстати, выяснил удивительный факт. Оказывается, несмотря на бесконечное число витков, длина дуги логарифмической спирали от произвольной ее точки A до полюса O конечна.

Действительно, обратимся к рисунку 4. Пусть равноугольная спираль катится без скольжения по своей касательной AB. Полюс спирали O будет тогда перемещаться под прямым углом к AO и, в конце концов, попадет в точку B. А дуга AO прокатится без скольжения по AB. Поэтому длина дуги AO равна $\frac{|OA|}{\cos\alpha}$.

А теперь задача: требуется найти полюс равноугольной спирали, если известны направления касательных в трех известных ее точках.

В. Березин

---

*) Равноугольную спираль называют также логарифмической.

*) См. «Лемниската Бернулли», «Квант», № 1, 1977.

**) См. «Строфоида», «Квант», 1977, № 2.

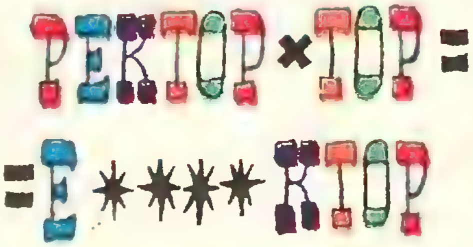
***) Рене Декарт — математик, физик, философ. Родился он во Франции в городе, носящем ныне его имя. Декарт — создатель «всеобщей математики», которая, по его замыслу, должна была стать универсальным средством исследования в науках о природе. В его работах получил развитие метод исследования, опирающийся на разностороннее использование алгебраических уравнений. Из «всеобщей математики» выросли алгебра и аналитическая геометрия. Книги Р. Декарта многие десятилетия являлись настольными для творчески работающих математиков.

«Квант» для младших школьников

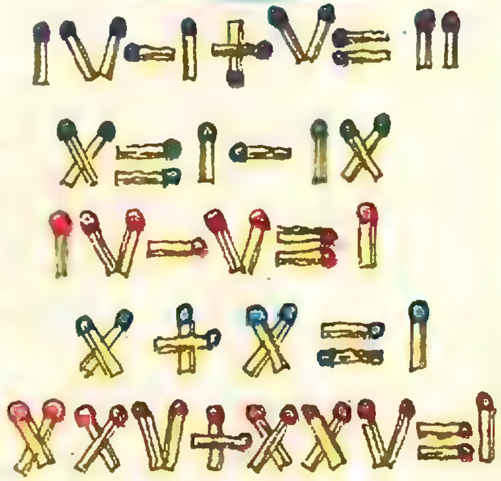
Задачи

1. Коле для поездок в метро и на трамвае требовалось разменять некоторую сумму денег, получив ее всю монетами по 3 и 5 копеек. Коля подсчитал, что всего существует k способов такого размена. Какая наибольшая сумма денег могла быть у Коли?

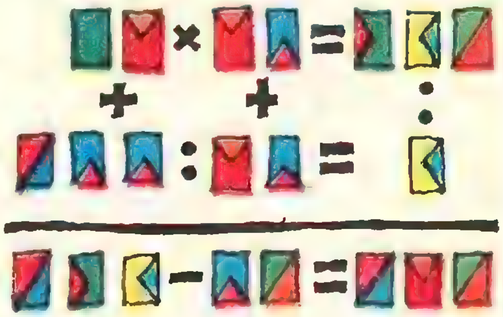
2. В примере на умножение некоторые цифры зашифрованы буквами (см. рисунок): одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными, на месте звездочек могут стоять любые цифры, в том числе и зашифрованные буквами. Попробуйте расшифровать пример!



3. На рисунке вы видите пять «равенств», сложенных из спичек. Но все эти «равенства» — неверные. Переложите в каждом из них по одной спичке, чтобы все «равенства» стали действительно равенствами.



4. В этом ребусе (см. рисунок) цифры зашифрованы фигурками. Одинаковым фигуркам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте ребус.



Е. Пильчиков

Почему в холодильнике сохнут продукты?

Говоря точнее, надо было бы вопрос сформулировать так: «*Почему в холодильнике продукты обычно сохнут быстрее, чем на открытом воздухе?*» Давайте попробуем в этом разобраться.

Начнем с двух — безусловно, известных вам — фактов:

1) *Холодный воздух тяжелее теплого* (вспомните, пожалуйста, — почему?).

2) *Чем теплее воздух, тем больше в нем может присутствовать воды в виде пара.* Как это можно объяснить?

Воздух, как правило, соприкасается с какими-нибудь открытыми водоемами. В воде при любой температуре найдутся такие молекулы, которые сумеют вылететь с поверхности воды и образовать водяной пар. Одновременно с процессом испарения происходит и обратный переход молекул из пара в жидкость (конденсация). Очевидно, чем больше плотность пара, тем активнее идет процесс конденсации. Если испарение воды происходит в ограниченном объеме (например, в закрытом сосуде), то обязательно наступит момент, когда число молекул, покидающих жидкость, сравняется с числом молекул, возвращающихся обратно. В таком случае говорят, что между жидкостью и ее паром наступает равновесие (количества жидкости и пара больше не изменяются). Пар в этом состоянии называют *насыщенным*, подчеркивая тем самым, что при неизменных условиях дальнейшее испарение уже невозможно.

Ясно, что чем выше температура, тем интенсивнее испаряется вода и тем большей, следовательно, должна быть плотность водяного пара, чтобы наступило равновесие. Другими словами, чем выше температура, тем больше водяных паров может содержаться в данном объеме воздуха. Например, при 20 °С в комнате с площадью 12 $м^2$ и высотой 3 *м* может находиться в виде пара около 600 *г* воды, а при 100 °С — около 20 *кг*!

Степень влажности воздуха (содержание в воздухе того или иного количества водяных паров) обычно характеризуют с помощью специальной физической величины — относительной влажности. *Относительной влажностью воздуха* называется отношение массы водяных паров, содержащихся в 1 $м^3$ воздуха, к максимальной массе паров воды, которая может находиться в этом объеме при данной температуре. Это отношение принято выражать в процентах. Если количество водяных паров в воздухе не изменяется, а температура воздуха повышается, то относительная влажность будет уменьшаться. И наоборот: при охлаждении воздуха его относительная влажность увеличивается. Как только она станет равной 100%, водяные пары начнут конденсироваться, «лишний» пар будет превращаться в росу или иней.

Теперь проследим, как же себя ведет воздух внутри холодильника. У всех холодильников морозильная камера расположена наверху. Охлажденный возле камеры воздух опускается вниз. Соприкасаясь со стенками холодильника и с продуктами, он нагревается. При этом его относительная влажность уменьшается, а способность вбирать в себя воду увеличивается. Нагревшись и отобрав часть воды у продуктов, воздух поднимается к морозильной камере. Здесь он охлаждается до первоначальной температуры, но влажность его оказывается выше первоначальной (из-за отобранной у продуктов воды). Через некоторое число циклов влажность воздуха возрастает настолько, что, подойдя к морозильной камере, он будет вынужден часть воды оставить на камере в виде «осадка» — капелек воды или кристалликов льда.

Так с помощью воздуха вода «перекочевывает» от более теплых тел к более холодным — от продуктов к морозильной камере. При этом происходит очень эффективная перекачка тепла: при испарении некоторое количество теплоты отбирается от продуктов и передается воздуху, а при конденсации оно отбирается от воздуха и передается морозильной камере. Разумеется, вода легче будет отбираться у более нагретых тел. Например, для испарения 1 *г* воды при температуре 0°С требуется количество теплоты около $2{,}59 \cdot 10^3$ *дж*, а при 50°С — $2{,}38 \cdot 10^3$ *дж*. (Столько же тепла выделяется при конденсации.)

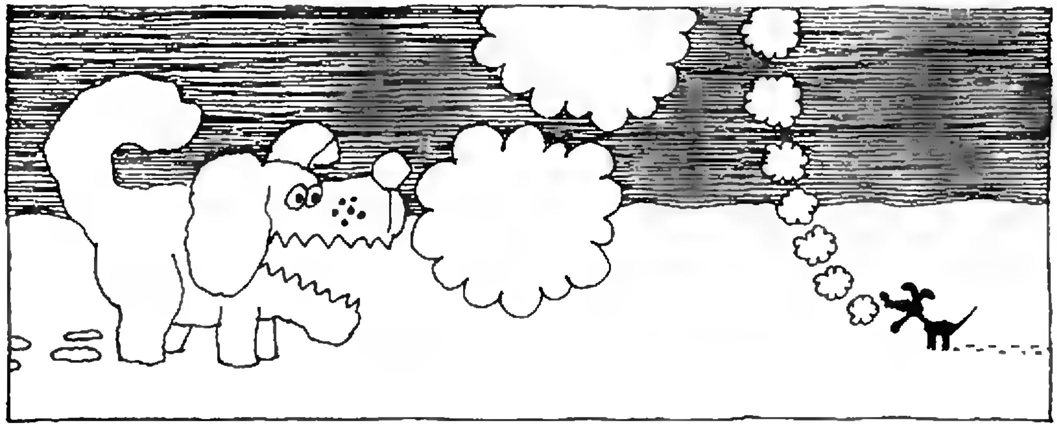
Может возникнуть естественный вопрос: а как же охлаждаются «сухие» предметы? Ведь в этом случае отсутствуют перенос воды и связанный с ним перенос энергии! Это, действительно, так. Но остается еще один процесс переноса энергии — при охлаждении и нагревании циркулирующего воздуха. Правда, «сухие» предметы охлаждаются гораздо медленнее, чем «влажные».

А теперь постарайтесь самостоятельно ответить на такие вопросы:

1. Когда дышишь на морозе, появляются туман и иней. Почему?

2. Почему при входе с мороза в дом запотевают очки? Почему очки «потеют» на морозе?

3. Почему в душевых обычно капает с потолка и с холодных труб, а трубы с горячей водой остаются сухими?



В. Болтянский

Метод отделяющих констант

За последние годы в практику письменных экзаменационных работ для поступающих в вузы вошли задачи, решение которых удобно начинать с нахождения множества значений, принимаемых некоторыми функциями. Иногда решение задачи на этом и заканчивается — из полученных результатов сразу следует ответ; в других случаях знание множества значений функции резко сокращает объем работы, указывает кратчайший путь к ответу.

О некоторых особенностях применения этого метода и рассказывается в настоящей статье.

Доказательство неравенств

Начнем со следующей задачи.

Пример 1. *Доказать неравенство*

$$x^2 - 2x \geqslant -3 + \sin x. \qquad (1)$$

Для решения достаточно заметить что луч $[-1;\infty[$, представляющий собой множество значений функции

$$f(x) = x^3 - 2x = (x-1)^2 - 1,$$

не пересекается с множеством значений функции

$$g(x) = -3 + \sin x,$$

то есть с отрезком $[-4;\ -2]$.

Можно сказать и иначе: *существует такое число c* (например, $c = -3/2$), *что для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства $f(x) > c$, $c > g(x)$* (рис. 1), откуда и следует справедливость не только неравенства (1), но и более сильного: $f(x) > g(y)$ для любых x, $y \in \mathbf{R}$, то есть всегда

$$x^2 - 2x > -3 + \sin y.$$

В более сложных примерах уже не удается найти константу c, «отделяющую» значения функции $f(x)$ от значений функции $g(x)$ на всей области их задания, но можно разбить числовую прямую на несколько промежутков, на каждом из которых существует своя отделяющая константа.

Пример 2. *Доказать неравенство*

$$\operatorname{arctg} x > 4\sqrt{3}x - x^2 - 11. \qquad (2)$$

В этом случае на луче $]-\infty;\ \sqrt{3}[$ (то есть при $-\infty < x < \sqrt{3}$) такой отделяющей константой является $c_1 = -2$ (рис. 2), а на луче $[\sqrt{3};\infty[$ можно взять отделяющую константу $c_2 = 1{,}01$.

Разумеется, график на рисунке 2 лишь иллюстрирует сказанное; полное же доказательство, основанное на идее отделяющих констант, можно изложить, например, следующим образом. Функция

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

при всех $x \in \mathbf{R}$ (и, в частности, при $x < \sqrt{3}$) удовлетворяет неравенству $f(x) > -\frac{\pi}{2} > -2$, то есть $f(x) > c_1$. С другой стороны, функция

$$g(x) = 4\sqrt{3}x - x^2 - 11 = -(x - 2\sqrt{3})^2 + 1$$

при $x = \sqrt{3}$ принимает значение

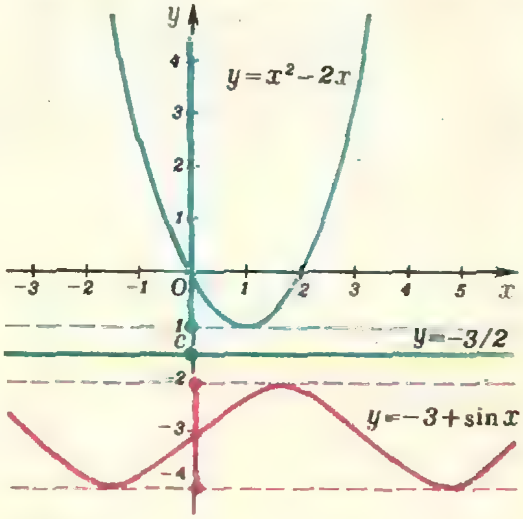


Рис. 1.

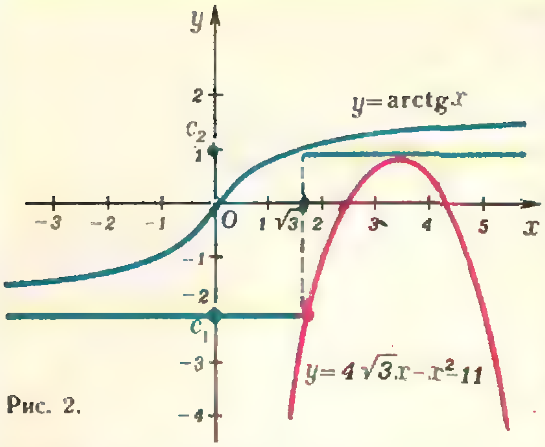


Рис. 2.

$g(\sqrt{3}) = -2 = c_1$, а слева от точки $x = \sqrt{3}$ эта функция возрастает, поэтому $g(x) < c_1$ при $x < \sqrt{3}$. Итак, $f(x) > c_1 > g(x)$ при $x < \sqrt{3}$, то есть при этих значениях x неравенство (2) справедливо. Осталось рассмотреть значения $x \geqslant \sqrt{3}$.

Заметим, что $f(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3 > 1{,}01$, причем функция $f(x)$ — возрастающая, поэтому $f(x) > c_2$ при $x \geqslant \sqrt{3}$. Что же касается функции $g(x)$, то при любых $x \in \mathbf{R}$ (и, в частности, при $x \geqslant \sqrt{3}$) мы имеем $g(x) \leqslant 1 < c_2$. Таким образом, $f(x) > c_2 > g(x)$ при $x \geqslant \sqrt{3}$, то есть и при этих значениях x неравенство (2) справедливо.

Рассмотренный прием доказательства неравенств вовсе не следует считать каким-то изысканным, случайным, редкоприменимым. Напротив, для непрерывных функций этот прием можно считать универсальным. В самом деле, пусть, например, непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на отрезке $[a;\ b]$, причем прикинув вид этих графиков, мы обнаружили, что вроде бы на всем этом отрезке справедливо неравенство $f(x) > g(x)$. Как можно было бы доказать справедливость этого неравенства?

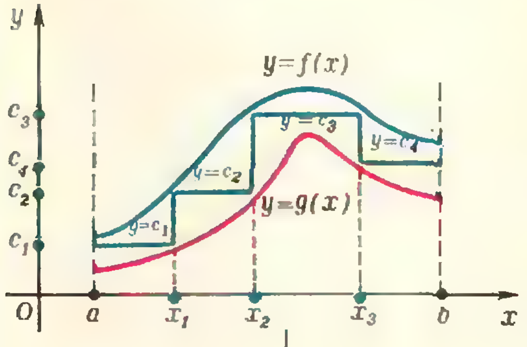


Рис. 3.

Если для всех $x \in [a;\ b]$ справедливо неравенство $f(x) > g(x)$, то графики функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих точек, и потому можно*) провести «ступенчатую ломаную» (рис. 3), отделяющую график функции $y = f(x)$ от графика функции $y = g(x)$. Но это и означает, что отрезок $[a;\ b]$ можно разбить на несколько меньших отрезков, на каждом из которых существует отделяющая константа c_i.

Разумеется, в этом рассуждении речь идет лишь о принципиальной возможности доказать неравенство $f(x) > g(x)$ методом отделяющих констант. В каждом же конкретном случае искусство применения этого приема состоит в том, чтобы найти подходящее разбиение отрезка $[a;\ b]$ на части и для каждой из этих частей указать соответствующую отделяющую константу.

Итерации

В общем случае затруднительно дать рекомендации, как подбирать разбиение на части и соответствующие отделяющие константы. Однако в некоторых случаях такие рекомендации предложить можно.

Пусть, например, обе функции $f(x)$, $g(x)$ — возрастающие (или обе убывающие), причем $f(a) > g(a)$. Проведем прямую $y = f(a)$ (рис. 4) и рассмотрим точку ее пересечения с графиком функции $y = g(x)$. Абсциссу этой точки обозначим через x_1. На отрезке $[a;\ x_1]$ за отделяющую константу можно принять число $c_1 = f(a)$. Действительно, на всем этом отрезке выполнены неравенства $f(x) \geqslant c_1$, $g(x) \leqslant c_1$, причем первое неравенство обращается в равенство лишь в левом конце отрезка $[a;\ x_1]$, а второе — лишь в правом. Отсюда

---

*) На самом деле за этим словом «можно» скрывается весьма не простая математическая теорема, которую мы здесь, конечно, доказывать не будем.

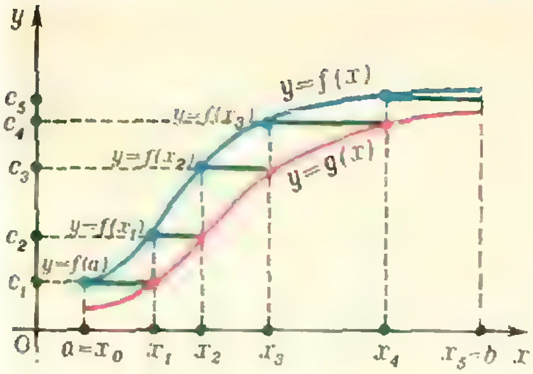


Рис. 4.

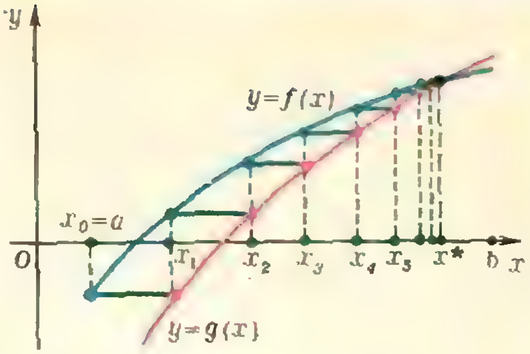


Рис. 5.

ясно, что на всем отрезке $[a;\ x_1]$ выполнено неравенство $f(x) > g(x)$.

Заметим, что отделяющая константа $c_1 = f(a)$ является в некотором случае наилучшей: если взять за c_1 константу, меньшую, чем $f(a)$, то отрезок, на котором «действует» эта константа, уменьшится.

Теперь проведем прямую $y=f(x_1)$ и получим отрезок $[x_1;\ x_2]$, на котором $c_2 = f(x_1)$ является отделяющей константой; затем проведем прямую $y=f(x_2)$ и так далее (рис. 4). В результате мы разобьем отрезок $[a;\ b]$ на части и для каждой из этих частей получим отделяющую константу, тем самым доказав справедливость неравенства $f(x) > g(x)$ на всем отрезке $[a;\ b]$.

Проведенное рассуждение можно формализовать следующим образом.

Мы начинаем с точки $x_0 = a$.

Если для некоторого $k = 0, 1, \ldots$ *уже известна точка* x_k, *то мы находим такую точку* x_{k+1}, *что* $g(x_{k+1}) = f(x_k)$.

Повторением этого процесса (или, как говорят в математике, итерацией) мы по x_0 находим x_1, затем по x_1 находим x_2 и так далее. Если после нескольких итераций нам удается добраться до правого конца отрезка, на котором заданы функции $f(x)$, $g(x)$, то неравенство $f(x) > g(x)$ будет доказано.

Пример 3. *Найти корни уравнения*

$$\operatorname{tg} x = 4x - 2{,}5, \qquad (3)$$

лежащие в интервале $]0;\ \pi/2[$.

Функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = 4x - 2{,}5$ на интервале $]0;\ \pi/2[$ возрастают. Несколько первых итераций здесь выглядят следующим образом (значения функции $f(x)$ берутся *с недостатком*):

$x_0 = 0$;

$g(x_1) = f(x_0) = 0$; $4x_1 - 2{,}5 = 0$, $x_1 = 0{,}625$;

$g(x_2) = f(x_1) \approx 0{,}72$; $4x_2 - 2{,}5 = 0{,}72$; $x_2 = 0{,}805$;

$g(x_3) = f(x_2) \approx 1{,}04$; $4x_3 - 2{,}5 = 1{,}04$; $x_3 = 0{,}885$;

$g(x_4) = f(x_3) \approx 1{,}22$; $4x_4 - 2{,}5 = 1{,}22$; $x_4 = 0{,}93$;

$g(x_5) = f(x_4) \approx 1{,}34$; $4x_5 - 2{,}5 = 1{,}34$; $x_5 = 0{,}96$;

$g(x_6) = f(x_5) \approx 1{,}42$; $4x_6 - 2{,}5 = 1{,}42$; $x_6 = 0{,}98$; …

После двух десятков итераций удается добраться до правого конца интервала $]0;\ \pi/2[$. Этим устанавливается, что на всем этом интервале справедливо неравенство $f(x) > g(x)$ и, следовательно, уравнение (3) на рассматриваемом интервале корней не имеет.

Заметьте теперь, что, проводя итерации, мы заранее не знаем, удастся ли нам добраться до правого конца отрезка $[a;\ b]$ (то есть удастся ли нам доказать справедливость неравенства $f(x) > g(x)$ на всем отрезке $[a;\ b]$). А как будут выглядеть итерации в случае, когда графики функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a;\ b]$, пересекаются, то есть неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется не на всем отрезке?

Рисунок 5 наглядно показывает, что тогда в результате бесконечной последовательности итераций мы будем получать числа x_0, x_1, …, x_k, …, которые приближаются к корню x^* уравнения $f(x) = g(x)$; точнее, число $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ представляет собой наименьший корень этого уравнения, содержащийся на отрезке $[a;\ b]$. Следовательно, с помощью последовательных итераций мы сможем приближенно вычислить этот корень.

Указанный прием часто применяется в вычислительной практике для приближенного вычисления корней уравнений. Вообще, в современной математике очень важную роль играют различные *итерационные методы*, дающие возможность не только с любой степенью точности решать уравнения, но и даже доказывать теоремы.

Решение уравнений

Метод отделяющих констант может применяться не только для доказательства неравенств, но и, в некоторых случаях, для решения уравнений, и притом не приближенного, а точного решения.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$x^2 - 2x\sin x - 2\cos x + 2 = 0. \quad (4)$$

Запишем уравнение в виде

$$(x - \sin x)^2 = -(1 - \cos x)^2,$$

то есть в виде $f(x) = g(x)$, где

$$f(x) = (x - \sin x)^2,$$
$$g(x) = -(1 - \cos x)^2.$$

Очевидно, что для любого $x \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$. Отсюда ясно, что некоторое число x_0 только в том случае может удовлетворять равенству $f(x_0) = g(x_0)$, то есть быть корнем уравнения (4), если выполнены равенства $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, то есть если x_0 является решением *системы*

$$\begin{cases} x - \sin x = 0, \\ 1 - \cos x = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет корни $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), из которых лишь корень $x = 0$ удовлетворяет первому уравнению. Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = \sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}. \quad (5)$$

Это уравнение можно записать в виде $f(x) = g(x)$, где

$$f(x) = x^2 - 2x^2 + x + 1,$$

$$g(x) = \sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}.$$

Так как $f(x) = 1 + x(x-1)^2$, то $f(x) \geqslant 1$ для всех $x \geqslant 0$. В то же время $g(x) \leqslant 1$ для всех x, принадлежащих области определения функции $g(x)$. Следовательно, на луче $x \geqslant 0$ число $c = 1$ является отделяющей константой для функций $f(x)$ и $g(x)$. Отсюда вытекает, что неотрицательное число может быть корнем уравнения (5), только если оно удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x) = 1. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений, как легко видеть, имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, из которых только x_1 удовлетворяет второму уравнению. Итак, уравнение (5) имеет лишь один неотрицательный корень $x_1 = 1$.

Теперь посмотрим, нет ли отрицательных корней. Так как при $-2 < x < 0$ функция $g(x)$ не определена, то отрицательные корни надо искать лишь на луче $x \leqslant -2$. Но при $x \leqslant -2$ мы имеем

$$f(x) = 1 + x(x-1)^2 \leqslant 1 - 2\cdot 3^2 = -17,$$

а $g(x) \geqslant 0$ по определению функции $\sqrt{x}$. Таким образом, отделяющей константой для $f(x)$ и $g(x)$ на луче $x \leqslant -2$ (в тех точках x, в которых функция $g(x)$ определена) является, например, число $c = -10$. Следовательно, рассматриваемое уравнение не имеет отрицательных корней, то есть $x_1 = 1$ — единственный корень уравнения (5).

* * *

Заметим в заключение, что, несмотря на его универсальность, метод отделяющих констант не всегда является самым удобным средством для доказательства того или иного конкретного неравенства. Например, для доказательства неравенства $\operatorname{tg} x > 4x - 2{,}5$ на интервале $]0; \pi/2[$ (см. пример 3) можно было бы использовать тот факт, что производная функции $\varphi(x) = \operatorname{tg} x - 4x + 2{,}5$, равная $\frac{1}{\cos^2 x} - 4$, обращается в нуль только в одной точке этого интервала, а именно при $x = \pi/3$. В этой точке значение функции φ положительно:

$$\varphi(\pi/3) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 4\cdot\frac{\pi}{3} + 2{,}5 \approx 0{,}04.$$

В концах же интервала функция $\varphi(x)$ принимает бо́льшие значения: $\varphi(0) = 2{,}5$ и $\varphi(x) \to \infty$, если $x \to \pi/2$ (но $x < \pi/2$). Отсюда можно сделать вывод, что в точке $x = \pi/3$ функция $f(x)$, рассматриваемая на интервале $]0; \pi/2[$, принимает *наименьшее* значение, и потому $\varphi(x) > 0$, то есть $\operatorname{tg} x > 4x - 2{,}5$ на всем этом интервале. Таким образом, применение производной дает в данном случае более простое решение.

Напротив, при решении неравенства $\operatorname{arctg} x > 4\sqrt{3x - x^2} - 11$ (пример 2) для нахождения корней производной придется решать уравнение третьей степени, так что здесь метод отделяющих констант рациональнее.

Умение выбрать наиболее выгодный метод решения конкретной задачи зависит от практических навыков, от умения «видеть» графики, от владения понятием производной и другими средствами исследования функций. Читателям, которые хотели бы поупражняться в применении метода отделяющих констант, рекомендуем обратиться к очень полезной книге Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Пособие по математике для поступающих в вузы (М., «Наука», 1976, гл. IV, § 1).

Упражнения

1. Доказать, что при любом действительном x справедливы неравенства

а) $\sqrt{1 + x^2} > 6x - x^2 - 7$;

б) $\cos x > -\frac{1}{4} x^2$.

2 (МИСиС, 1971). Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$$

3 (МИФИ, 1971). Решить уравнение

$$\cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)\cos\left(\pi\sqrt{x}\right) = 1.$$

4. Найти множество точек плоскости $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sin x + \sin y = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}.$$

5 (ЯПИ, 1973). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 + y^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Е. Кузнецов

Линзы и системы линз

Явление преломления света на сферической поверхности раздела двух оптических сред позволяет получать изображения светящихся предметов. Эта возможность осуществляется с помощью линзы — прозрачного тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями. Линза является основным оптическим элементом в таких приборах, как фотоаппарат, проекционный фонарь, микроскоп, телескоп и т. д.

На рисунке 1 показан разрез преломляющей сферической поверхности, разделяющей две оптические среды с различными показателями преломления. Очевидно, качественное изображение любого предмета возможно только в том случае, когда пучок лучей, исходящих из любой точки предмета (например, из точки P), после преломления соберется снова в точку. Вообще говоря, сферическая граница раздела двух сред не обеспечивает этого условия. Так, луч NB после преломления пересечет ось PQ, строго говоря, в другой точке, нежели луч MA. Однако при некоторых условиях пучок лучей, испущенных точкой, может собраться *практически* в точку. Это будет в том случае, когда высота h, на которой все лучи этого пучка пересекают преломляющую поверхность, мала по сравнению с радиусом кривизны OC преломляющей поверхности. Другими словами, когда мал угол α. Лучи, удовлетворяющие этому условию, называются *параксиальными*. Для удаленных источников требование малости угла α эквивалентно требованию малости угла u. Но малость угла u не является достаточным условием параксиальности. Действительно, луч, параллельный оси PQ ($u=0$), но достаточно удаленный от нее (h велико), не будет параксиальным.

Таким образом, в зависимости от того, сколь хорошо выполняется условие параксиальности, в окрестности точки P' будет более или менее большой кружок размытия. Однако на практике нет необходимости делать его меньше некоторой, вполне определенной, величины. Например, если кружок размытия станет меньше элемента сетчатки глаза (зерна фотоэмульсии на фотопленке, неровностей матового стекла и т. п.), он будет восприниматься нами как точка. Его дальнейшее уменьшение в нашем зрительном ощущении ничего не изменит.

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с параксиальными лучами *). Кроме того, ограничимся рассмотрением только тонких линз, то есть таких линз, фокусные расстояния которых существенно больше их толщины.

Если тонкая линза изготовлена из материала с показателем преломления n, слева от линзы находится среда с показателем преломления n_1, а справа — с показателем преломления n_2, то имеют место соотношения

$$\frac{n_2}{F_2}=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n-n_2}{R_2}, \qquad (1)$$

$$\frac{n_1}{F_1}=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n-n_2}{R_2}. \qquad (2)$$

Здесь F_1 и F_2 — переднее и заднее фокусные расстояния линзы, R_1 и R_2— радиусы кривизны, соответственно, передней и задней поверхностей линзы. Эти соотношения можно получить (проделайте это самостоятельно!), рассматривая ход лучей, идущих от бесконечно удаленного источника, находящегося в первом случае слева от линзы, а втором случае — справа. В частности, когда с обеих сторон от линзы находится воздух ($n_1=n_2=1$),

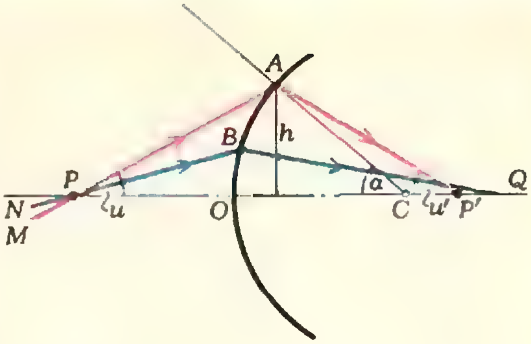


Рис. 1.

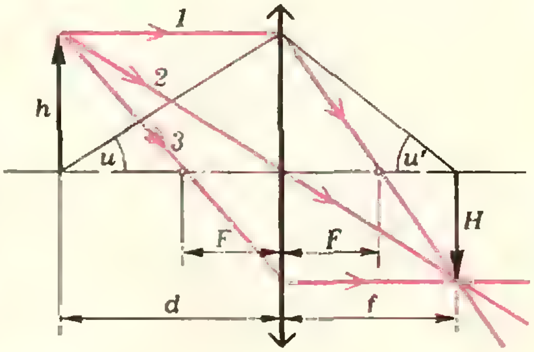


Рис. 2.

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{F_2}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (3)$$

Принято считать, что если поверхность своей выпуклой стороной обращена к среде с меньшим показателем преломления, то ее радиус кривизны R положителен ($R>0$), в противном случае $R<0$. Линзы, у которых фокусное расстояние положительно ($F>0$), называются *положительными* или *собирающими*, если же $F<0$ — *отрицательными* или *рассеивающими*. Величина $D=\frac{1}{F}$ называется оптической силой линзы; она измеряется в диоптриях.

При построении изображений, полученных с помощью тонких линз, используют три основных (или базисных) луча, показанных на рисун-

---

*) Можно, в принципе, придумать такие преломляющие поверхности, для которых условие параксиальности лучей не является обязательным. Однако наиболее просты в изготовлении именно сферические поверхности.

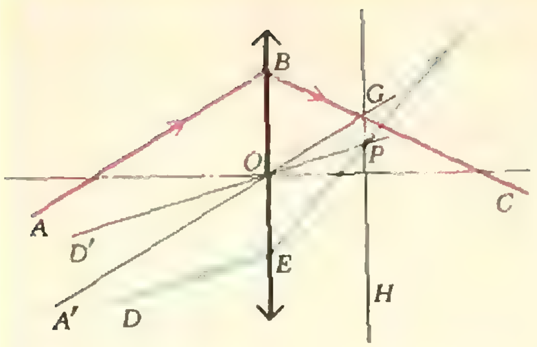


Рис. 3.

ке 2. С помощью этого рисунка нетрудно получить формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

а также выражения для ее линейного (поперечного) увеличения:

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}=\frac{f-F}{F}=\frac{F}{d-F}$$

и для углового увеличения:

$$\gamma=\frac{\operatorname{tg}u'}{\operatorname{tg}u}=\frac{h/f}{h/d}=\frac{d}{f}=\frac{1}{\Gamma}.$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *На поверхности воды ($n_в=1,3$) лежит двояковыпуклая тонкая стеклянная линза ($n_{ст}=1,5$) с радиусами кривизны $R_1=R_2=10$ см. Определите переднее и заднее фокусные расстояния линзы. Чему равно фокусное расстояние этой линзы в воздухе?*

Это относительно простая задача. Непосредственное применение формул (1) и (2), где $n_1=1$, $n_2=n_в=1,3$ и $n=n_{ст}=1,5$, дает

$$F_1\approx 14 \text{ см и } F_2\approx 18,5 \text{ см}.$$

Для фокусного расстояния линзы в воздухе формула (3) приводит к результату $F=10$ см.

Задача 2. *На рисунке 3 дан ход луча ABC через тонкую положительную линзу. Построить ход произвольного луча DE после преломления в линзе.*

Проведем луч $A'O$, параллельный лучу AB и проходящий через оптический центр линзы. Он не преломится. Точка G пересечения этого луча с лучом BC лежит в фокальной плоскости H. Луч $D'O$, параллельный DE, пересечет фокальную плоскость в точке P. Через эту же точку пройдет, преломившись, и луч DE.

Задача 3. *Какие очки вы пропишите близорукому человеку, который может читать текст, расположенный не далее 20 см?*

Очки ни в коей мере не исправляют дефектов человеческого глаза. Их роль сводится к тому, чтобы отобразить объекты окружающего мира на такое расстояние, с которого глаз четко различает предметы. В нашем случае для того чтобы близорукий человек мог видеть удаленные предметы, например, звезду, очки должны создавать изображение звезды не далее 20 *см* от глаза, а глаз будет рассматривать уже это изображение. Предположим, что линза очков вплотную придвинута к глазу (небольшой зазор между линзой и глазом несущественно исказит приведенные ниже расчеты), и запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Здесь d — расстояние до звезды, а f — максимальное расстояние от изображения звезды до глаза. Член $\frac{1}{f}$ берется со знаком минус, поскольку изображение мнимое. Так как d очень велико, можно смело положить $\frac{1}{d}=0$. По условию задачи $f=20$ *см*. Отсюда

$$F=-20 \text{ см},\quad D=-5 \text{ дптр}.$$

Таким образом, близорукому человеку следует прописать очки с рассеивающими линзами оптической силы —5 *дптр*.

Задача 4. *С помощью линзы с фокусным расстоянием F на экране получают уменьшенное и увеличенное изображения предмета, находящегося на расстоянии L от экрана. Найти отношение размеров изображений.*

Пусть высота предмета равна h. Тогда изображение имеет высоту $H=\Gamma h$, и отношение размеров изображений есть

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{\Gamma_1 h}{\Gamma_2 h}=\frac{f_1/d_1}{f_2/d_2}.$$

Теперь нам нужно найти d_1, d_2, f_1 и f_2. По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$,

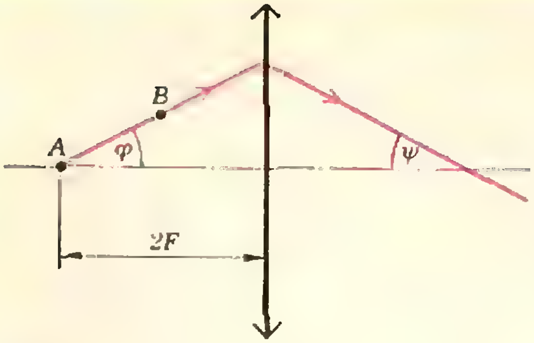


Рис. 4.

а из условия задачи $d+f=L$. Исключив d, получим квадратное уравнение

$$f^2-fL+FL=0,$$

откуда

$$f_{1,2}=\frac{L}{2}\pm\sqrt{\frac{L^2}{4}-FL}.$$

Кроме того, из свойства обратимости лучей $d_1=f_2$ и $d_2=f_1$. Таким образом,

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{f_1^2}{f_2^2}=\left(\frac{L/2+\sqrt{L^2/4-FL}}{L/2-\sqrt{L^2/4-FL}}\right)^2.$$

Задача 5. *С помощью положительной линзы получают изображения двух точечных источников A и B. Один из них расположен на оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы, другой смещен от оси так, что прямая, соединяющая источники, образует с оптической осью угол $\varphi=30°$ (рис. 4). Под каким углом ψ к оси следует расположить плоский экран, чтобы одновременно получить на нем четкие изображения обоих источников?*

Очевидно, экран нужно расположить по лучу AB (проведенному от источника A через точку B) после его преломления в линзе. Используем формулу для углового увеличения:

$$\gamma=\frac{1}{\Gamma}=\frac{d}{f}=\frac{F}{f-F}.$$

Здесь f — расстояние от изображения источника A до линзы, а F — фокусное расстояние линзы. Поскольку A находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, $f=2F$. Следовательно,

$$\gamma=\frac{F}{2F-F}=1,\ \text{и}\ \psi=\varphi=30°.$$

Задача 6. *Сложный объектив состоит из двух тонких линз: положительной с фокусным расстоянием $F_1=20$ см и отрицательной с фокусным расстоянием $F_2=-10$ см. Линзы расположены на расстоянии $l=15$ см друг от друга. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какое фокусное расстояние F должна иметь тонкая линза, чтобы изображение Солнца, полученное с ее помощью, имело такой же размер?*

Здесь мы уже имеем дело с системой линз.

Найдем размер изображения Солнца, создаваемого сложным объективом, рассматривая ход лучей последовательно в обеих линзах. Изображение, создаваемое первой линзой, находится, очевидно, в ее фокальной плоскости. Размер этого изображения $H_1=F_1\operatorname{tg}\alpha$, где α — угловой диаметр Солнца, видимый с Земли (рис. 5). Увеличение, даваемое второй линзой, равно $\frac{H_2}{H_1}=\frac{f_2}{d_2}$. По формуле линзы имеем

$$-\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_2},$$

где $d_2=F_1-l$ (изображение Солнца в первой линзе является мнимым источником для второй). Отсюда

$$f_2=\frac{F_2(F_1-l)}{F_1-F_2-l}.$$

Таким образом, размер изображения,

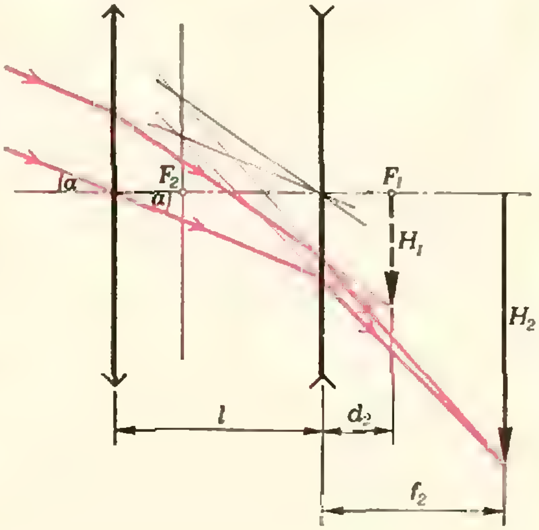


Рис. 5.

создаваемого всем объективом,

$$H_2 = \frac{F_1 F_2 \operatorname{tg} \alpha}{F_1 + F_2 - l}.$$

Одиночная линза с фокусным расстоянием F дает изображение, имеющее размер $H_2 = F \operatorname{tg} \alpha$. Сопоставляя два последних выражения, получим

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l} =$$

$$= \frac{20(-10)}{20 + (-10) - 15} \text{ см} = 40 \text{ см}.$$

Только что разобранная задача является частным случаем более общей, практически важной задачи: дана система двух (или более) тонких линз с общей оптической осью; необходимо найти одну тонкую линзу, действие которой эквивалентно действию данной системы. Эта задача будет полностью решена, если мы найдем фокусное расстояние эквивалентной линзы и ее местоположение (или, что то же самое, положение ее фокуса). Попробуйте вывести соответствующие формулы самостоятельно. Для ориентировки приведем окончательные результаты: фокусное расстояние искомой эквивалентной линзы равно

$$F = \frac{F_1 F_2}{\Delta},$$

а ее фокус находится от второй линзы на расстоянии f_2, равном

$$f_2 = \frac{F_2(\Delta - F_2)}{\Delta}.$$

Здесь F_1 и F_2 — фокусные расстсяния первой и второй линз соответственно, а Δ — расстояние между задним фокусом первой линзы и передним фокусом второй (его называют *оптическим интервалом*). Принято считать $\Delta > 0$, если передний фокус второй линзы лежит левее заднего фокуса первой линзы, и $\Delta < 0$ в противном случае.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. На рисунке 6 дан ход луча ABC через тонкую отрицательную линзу. Определить построением фокусное расстояние линзы.

2. Какие очки вы пропишите дальнозоркому человеку, который резко видит предметы, расположенные не ближе 50 *см*?

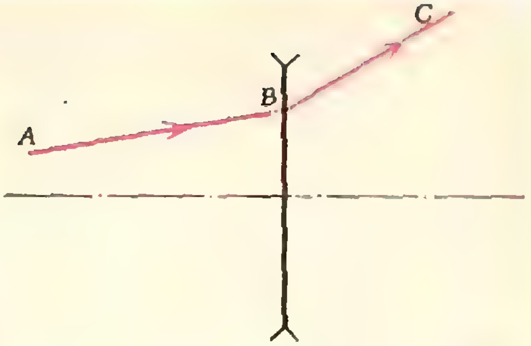


Рис. 6.

3. Положительная линза дает действительное изображение с увеличением в 2 раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением равно 24 *см*.

4. Предмет в виде отрезка длиной l расположен вдоль оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием F. Середина отрезка находится на расстоянии d от линзы. Линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определить продольное увеличение предмета.

5. Положительная линза с фокусным расстоянием F и отрицательная с фокусным расстоянием $-F$ расположены на расстоянии [illegible] друг от друга так, что их оптические оси совпадают. На расстоянии a перед положительной линзой находится источник света. Изображение этого источника, даваемое системой линз, располагается на таком же расстоянии a за отрицательной линзой. Определить это расстояние.

6. Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ *см* и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -30$ *см*. Оптические оси линз совпадают. Параллельный пучок лучей падает на первую линзу и, пройдя через систему, собирается в некоторой точке, лежащей на оптической оси. На сколько сместится эта точка, если линзы поменять местами?

7. В проекционном аппарате используется сложный объектив, состоящий из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ *см* и $F_2 = 15$ см. Линзы расположены на расстоянии $a = 5$ *см* друг от друга. Определить, с каким увеличением будет проецироваться диапозитив на экран, находящийся на расстоянии $b = 10$ *м* от объектива проектора. К диапозитиву обращена линза с фокусным расстоянием F_2.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени институт инженеров железнодорожного транспорта (МИИТ) имеет 10 факультетов, которые готовят высококвалифицированных инженеров различных специальностей.

В последние годы быстро растет и развивается факультет автоматики и вычислительной техники. Сейчас в институте работают студенческие вычислительные залы и вычислительный центр, оснащенные быстродействующими ЭВМ «ЕС-1030», «БЭСМ-4», «Урал-14Д», «Сетунь», «Мир», а также мощными аналоговыми машинами. Факультет готовит инженеров-электриков и инженеров-математиков для промышленности и транспорта по специальностям: автоматизированные системы управления (специализация — проектирование и эксплуатация автоматизированных систем управления), автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте (специализации — автоматика и телемеханика, системы передачи информации, радиосвязь), автоматика и телемеханика (в промышленности, специализация — схемы и системы автоматики и телемеханики), электронные вычислительные машины, прикладная математика (специализация — математическое обеспечение автоматизированных систем управления).

Все факультеты МИИТа готовят инженеров с прочными знаниями основ математики, но особенно это относится к факультету автоматики и вычислительной техники. Эта особенность факультета учитывалась при составлении вариантов вступительных экзаменов по математике и физике. Поскольку специальность «прикладная математика» связана с подготовкой инженеров-математиков, способных вести научно-исследовательскую работу в различных областях техники, для этой специальности предлагались варианты еще более сложные (хотя задачи, входящие в эти варианты, не содержали материал, выходящий за пределы программы средней школы).

Ниже приводятся некоторые варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике в МИИТе в 1976 году.

Математика

Вариант 1

(специальности: промышленное и гражданское строительство, экономика строительства, экономика транспорта, эксплуатация железных дорог, мосты и тоннели, электрификация железных дорог, промышленная теплоэнергетика, тепловозостроение, строительные и дорожные машины)

1. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A в одном и том же направлении. Скорость первого на 2 *км/час* больше скорости второго. Через 12 минут первый велосипедист остановился на 6 минут, чтобы устранить неисправность, и, возобновив движение, догнал второго велосипедиста на расстоянии 14 *км* от места его остановки. Определить скорости велосипедистов.

2. Решить неравенство

$$\log_{1/4}\frac{2x-1}{x+1}<\cos\frac{2}{3}\pi.$$

3. Вычислить острый угол прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.

4. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Вариант 2

(специальности: автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, автоматика и телемеханика в промышленности)

1. Двоим рабочим было поручено выполнить некоторую работу. Сначала работал t_1 часов только один первый рабочий, затем t_2 часов только один второй. Остальную часть работы они закончили вместе. Вся работа продолжалась 6 часов, причем первый рабочий выполнил 5/6 всей работы.

Если бы сначала работал t_1 часов только один второй рабочий, затем t_2 часов только один первый рабочий, после чего они вместе закончили бы остальную часть работы, то вся работа продолжалась бы 7 часов.

За сколько часов выполнит всю работу каждый рабочий в отдельности, если первому на это требуется на 6 часов меньше, чем второму, и каковы промежутки времени t_1 и t_2?

2. Решить неравенство

$$|x-3|^{2x^2-7x}>1.$$

3. На ребре двугранного угла 120° взят отрезок длины c и из его концов восставлены к нему в различных гранях перпендикуляры длин a и b. Определить длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

4. Решить уравнение

$$\sin 2x-5\sin x+5\cos x+5=0.$$

Вариант 3

(специальность: прикладная математика)

1. В шахматном турнире участвовали ученики девятых и десятых классов. Все десятиклассники набрали 27 очков. Число очков, набранных десятиклассниками в играх против девятиклассников, на 21 больше числа очков, набранных девятиклассниками в играх против десятиклассников. Сколько девятиклассников и десятиклассников участвовали в турнире, если за победу начисляется одно очко, за ничью $^1/_2$ очка и число десятиклассников больше 1?

2. Доказать, что при всех значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2+xy+y^2+2x-2y+4\geqslant 0.$$

3. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга, как 5 : 2.

4. Найти $\alpha+2\beta$, если $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, $3\sin 2\alpha=2\sin 2\beta$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Физика

Факультет автоматики и вычислительной техники

1. За время $t=10$ *сек* тело прошло путь $s=18$ *м*, при этом скорость его увеличилась в $n=5$ раз. Считая движение равноускоренным, определить абсолютную величину ускорения тела.

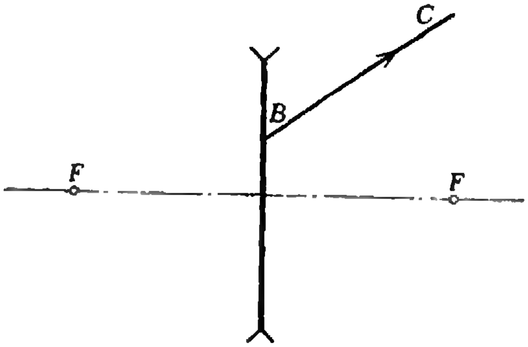
2. Шарик, размерами которого можно пренебречь, подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной l. Шарик с постоянной скоростью движется по окружности в горизонтальной плоскости. Определить линейную скорость шарика, если нить, описывая при своем движении коническую поверхность, составляет с вертикалью угол α.

3. Маленький шарик висит на тонкой шелковой нити в пространстве между горизонтально расположенными круглыми пластинами плоского воздушного конденсатора. Заряд шарика $q=10$ ед. заряда СГСЭ. Когда пластинам конденсатора сообщили заряд $|Q|=980$ ед. заряда СГСЭ, сила натяжения нити увеличилась в 2 раза. Определить силу натяжения нити, когда шарик находится в поле заряженного конденсатора. Радиус пластин конденсатора $R=10$ *см*; массой нити можно пренебречь.

4. Прямоугольная коробочка из жести плавает в воде. Масса коробочки $m=100$ *г*, площадь дна $S=50$ *см*^{2}, высота $H=6$ *см*. Определить высоту надводной части коробочки. Плотность воды $\rho_в=1$ *г/см*^{3}.

5. Если три одинаковых элемента, соединенных параллельно, замкнуть на внешнее сопротивление $R=0,3$ *ом*, на нем выделится такая же мощность, как и в случае последовательного соединения девяти таких же элементов. Чему равно внутреннее сопротивление одного из элементов?

6. Ультрафиолетовые лучи с длиной волны $\lambda_1=0,3$ *мкм*, попадая на катод фотоэлемента, вызывают поток фотоэлектронов со скоростью $|\vec{v}_1|=10^6$ *м/сек*. Светом какой длины волны нужно облучить фотоэлемент, чтобы кинетическая энергия фотоэлектронов стала $E_2=4\cdot 10^{-19}$ *дж*? Постоянная Планка $h=6,62\cdot 10^{-34}$ *дж·сек*; скорость света $c=3\cdot 10^8$ *м/сек*; масса электрона $m_e=9,1\times 10^{-31}$ *кг*.



7. На рисунке изображен луч BC, прошедший через рассеивающую линзу. Построить ход этого луча до линзы, если положение фокусов линзы задано.

Все остальные факультеты

1. Первую половину пути поезд шел с постоянной скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину. Средняя скорость поезда на всем пути $|\vec{v}_{ср}|=43,2$ *км/час*. Каковы скорости поезда на каждой половине пути?

2. Две гири с массами $m_1=7$ *кг* и $m_2=11$ *кг* висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Вначале гири находятся на одной высоте. Через какое время после начала движения более легкая гиря окажется на $h=10$ *см* выше тяжелой? Массой блока и нити, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Математический маятник, длина которого $l=25$ *см*, совершает $n=120$ колебаний в течение $t=2$ *мин*. Определить по этим данным ускорение свободного падения.

4. Газ нагрели от температуры 27°C до температуры 39°C. На сколько процентов увеличился при этом объем газа, если давление оставалось неизменным?

5. Однородный проводник имеет сопротивление R_1. На сколько равных частей нужно разделить этот проводник, чтобы общее сопротивление его частей, соединенных параллельно, стало равным R_2?

6. Пуля массой $m=10$ *г*, летящая со скоростью $|\vec{v}|=10^3$ *м/сек*, попадает в льдину. Определить массу растаявшего при этом льда, если известно, что 50% кинетической энергии пули перешло в тепло. Начальная температура льдины 0°C, удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3\cdot 10^5$ *дж/кг*.

7. Предмет находится на расстоянии $2F$ от оптического центра рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F. Где и какое получится изображение этого предмета? Решение пояснить чертежом.

И. Берзина,
В. Коровин

Машинная графика

1. На рисунке 1 машина нарисовала семейство эллипсов. Похоже, что в их расположении есть какая-то закономерность. Однако эти эллипсы не имеют ни общего центра, ни общего фокуса, они и не подобны друг другу.

Не могли бы вы придумать, откуда взялся такой рисунок? Нельзя ли его «увидеть» где-нибудь, скажем, «на природе»?

2. Семейство линий на рисунке 2 — более сложное. Это даже не эллипсы, а внешняя линия (с углами), видимо, вообще не из этого семейства, хотя и связана с ним.

Откуда мог взяться этот рисунок?

Ю. Котов

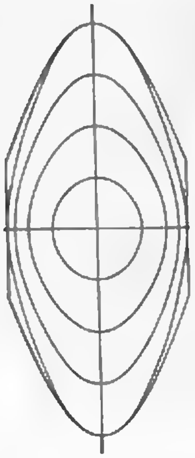


Рис. 2.

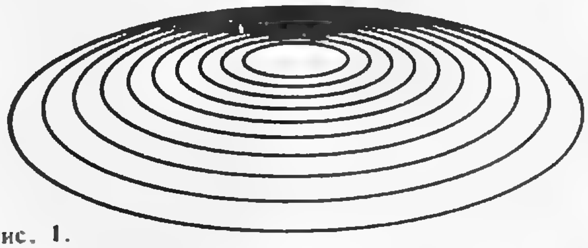
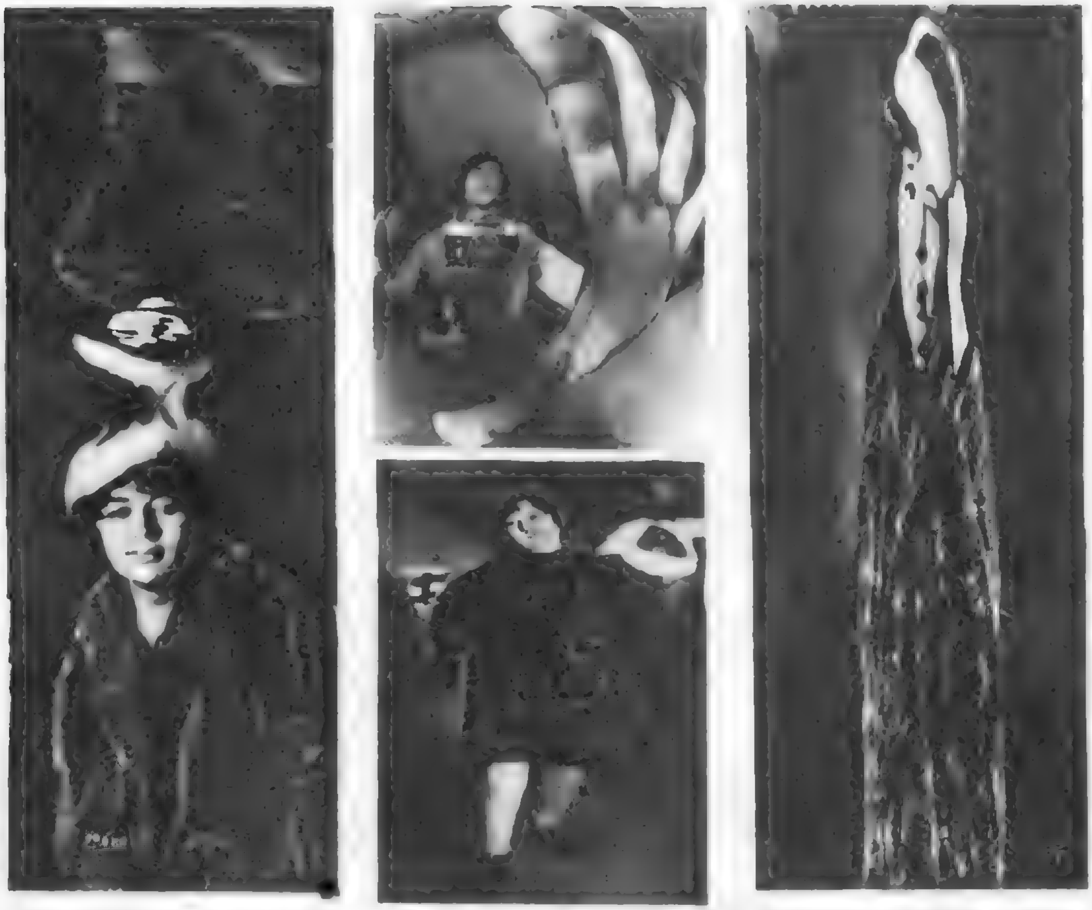


Рис. 1.



Кривые зеркала

Эти фотографии сделаны в «комнате смеха». Попробуйте «угадать», в какие зеркала смотрится эта девушка и как удалось фотографу получить такой необычный «автопортрет».

Фото Ю. Нижниченко и В. Машатина

Научное общество учащихся «ВИИТОРУЛ»

2 октября 1976 года в Кишиневе, в Центральном лектории общества «Знание», состоялась научно-теоретическая конференция школьников. Более шестисот ее участников встретились с московскими учеными — докторами физико-математических наук, профессорами московских вузов В. Кресным, В. Тычинским и В. Левиным. Встречу открыл известный молдавский физик, академик АН МССР С. Радауцан. Внимательно слушали ребята рассказы о достижениях и проблемах физики низких температур, квантовой электроники, о будущем современной математики.

Большинство из тех, кто пришли на эту встречу, были членами научного общества школьников «ВИИТОРУЛ», что означает по-русски «БУДУЩЕЕ». Это общество возникло в 1971 году при Республиканском Дворце пионеров и школьников по инициативе ученых Молдавии. Теперь в его рядах более 2000 членов.

В совместном постановлении бюро ЦК ЛКСМ Молдавии и Министерства народного образования МССР о создании Республиканского научного общества учащихся сказано: «Ныне, когда в школах Кишинева и республики успешно действует большое количество клубов по интересам, кружков, факультативных групп старшеклассников, когда олимпиады, конференции и конкурсы по различным отраслям знаний стали традицией, есть возможность и необходимость перейти к качественно новой форме работы по развитию познавательных интересов и творческих способностей учащихся». Этой новой формой и стало научное общество «ВИИТОРУЛ».

Цели и задачи общества так сформулированы в его уставе:

«1. Общество ставит своей задачей вовлечение школьников старших классов в научно-исследовательскую работу, ознакомление их с методами и приемами простейших научных исследований, обучение умению обращаться с необходимыми для исследования приборами и оборудованием.

2. Общество расширяет знания, кругозор учащихся в различных областях науки, техники, искусства, литературы, прививает интерес и навыки к научным исследованиям, помогает в выборе специальности и воспитывает общественников - организаторов.

3. Целью общества является не только дать возможность школьникам овладеть внепрограммным материалом, но и воспитать учащихся как пропагандистов любой отрасли науки.

4. Долг и обязанность старшеклассников — ценить советскую науку, гордиться ею. Глубоко изучать и пропагандировать творческое наследие корифеев русской научной мысли, знать их жизненный, трудовой и творческий путь, учиться у них страстной любви к своей Родине, своему народу, впитать в себя их лучшие черты — высокую идейность, патриотизм, гражданственность, трудолюбие, целеустремленность».

Созданию научного общества предшествовала большая подготовительная работа: смотры, конкурсы, конференции. Желающие вступить в члены общества должны были представить рекомендации преподавателей соответствующих дисциплин и комитета комсомола школы.

Как же устроено это общество?

ЗА НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО

Работа общества «ВИИТОРУЛ» проходит под общим руководством ЦК ЛКСМ Молдавии, Министерства народного образования МССР, Совета молодых ученых при ЦК ЛКСМ и Республиканского Дворца пионеров и школьников. Непосредственное руководство осуществляет Научно-методический совет из ученых и преподавателей, председателем которого является член-корреспондент Академии педагогических наук СССР, доктор физико-математических наук В. Белоусов. Совет руководит работой секций, содействует организации филиалов в районных центрах, организует проведение Дней науки и конференций учащихся, чтение лекций, очные и заочные консультации.

Большая роль отведена Ученическому совету, куда входят председатели всех секций. Члены этого совета принимают активное участие в организации всех мероприятий, в разработке и осуществлении научных планов. Они выступают с докладами перед учащимися школ, ПТУ, участвуют в выездных сессиях, выпускают свою газету, поддерживают связь с другими научными обществами и, прежде всего, со Студенческим научным обществом Молдавии.

В общество «ВИИТОРУЛ» принимаются ученики 8—10 классов. Но с 1975 года кандидатами в члены общества могут быть и семиклассники. Они присутствуют на заседаниях секций, участвуют во всех массовых мероприятиях общества и научных экскурсиях, готовят выступления о жизни и деятельности выдающихся ученых, делают обзоры научно-популярных журналов.

С восьмого класса начинается самостоятельная работа в секции. Каждый член общества получает определенную тему и научного консультанта, прикрепляется к какому-либо научному учреждению.

Работа в секциях проводится по двум направлениям:

1. Теоретические занятия, лекции ученых, семинары, сообщения учащихся по темам их исследований, доклады о выдающихся ученых.

2. Исследовательская работа под руководством научного консультанта.

Секции делятся на группы, в зависимости от тем исследований. Например, секция физики делится на следующие группы: теоретической физики, физики полупроводников, электроники и электронных приборов, физики атомного ядра, оптики и спектроскопии, общей физики, импульсной и газовой электроники, физики твердого тела. Эти группы работают на базе Института прикладной физики АН МССР, физического факультета Кишиневского государственного университета, электрофизического факультета Кишиневского политехнического института. Секция математики делится на группы: математической логики, современных вопросов алгебры, прикладной математики и программирования, геометрических преобразований, истории математики. Они работают на базе Института математики АН МССР, математического факультета Кишиневского государственного университета, кафедр математики Политехнического и Сельскохозяйственного институтов.

Все члены общества имеют членские билеты, в которые вносятся их личные планы исследовательской работы и отмечается (за подписью научного руководителя секции), как выполняется эта работа. Наиболее отличившиеся члены общества получают при окончании школы характеристики-рекомендации, предоставляющие им определенные преимущества при поступлении в высшие учебные заведения Молдавии по соответствующей специальности.

Более 150 ученых, преподавателей вузов, аспирантов работают со старшеклассниками в научном обществе, приобщая их к научным исследованиям.

Важными событиями в жизни общества «ВИИТОРУЛ» являются городские и республиканские научно-творческие конференции учащихся. Кроме членов общества в них принимают участие известные ученые, а также школьники, приглашаемые из других республик. Так, на III городской конференции в Кишиневе, проходившей под девизом: «Способность, труд, талант», было прочитано 20 докладов по различным проблемам физики и 7 — по математике, а также проведена малая математическая олимпиада. Среди докладов были, например, такие: «Применение метода электронного парамагнитного резонанса в изучении кальцитов», «Метод изображений в электростатике», «Искровой разряд и его применение в технике», «Исследования образования капли и ее взаимодействия с поверхностью жидкости», «Нахождение центров тяжести частей круга», «Решение геометрических задач методом введения вспомогательной окружности», «Использование теоремы Больцано о непрерывности».

Общество «ВИИТОРУЛ» стремится привлечь к участию в своей работе как можно больше сельских школьников. С этой целью регулярно проводятся выездные сессии в сельских районах. Сейчас в Молдавии действует 12 районных филиалов общества. . .

Кончилась учеба в школе, а с ней и занятия в научном обществе учащихся. Чему же научило общество человека, вступающего в самостоятельную жизнь? Самому главному — творческому отношению к труду, к науке. Тот, кто нашел в нем свое любимое дело, уже не может жить просто так, ничем не интересуясь и не увлекаясь. А это и есть главная цель научного общества учащихся. Недаром в памятной книге общества «ВИИТОРУЛ» мы увидели такие записи, оставленные бывшими членами общества:

«Самое главное для нас в том, что у каждого осталось в памяти воспоминание о чем-то полезном и нужном. . .

Благодаря обществу можно отойти от шаблона, от привычных страниц школьного учебника к серьезной научной литературе . . .

Общение с учеными, доброжелательными и внимательными наставниками, — незабываемо . . .

Самое трудное в жизни — найти себя. Общество прекрасно помогает этому...»

В. Лешковцев

Задачи нашихчитателей

Разобьем двоичную запись натурального числа a с конца на группы вида 10^k. Например, $a=1011000100$ разбивается так:

$$\underbrace{10}_{a_4}\ \underbrace{1}_{a_3}\ \underbrace{1000}_{a_2}\ \underbrace{100}_{a_1}.$$

Через a' обозначим число, полученное из данного вычеркиванием его последней группы a_1, а через $a\otimes b$ обозначим число, образованное приписыванием к a справа числа b (в этих обозначениях $a=a_n\otimes a_{n-1}\otimes\otimes\ldots\otimes a_2\otimes a_1$).

Докажите, что для любого натурального числа a и нечетного натурального b справедливы следующие утверждения.

а) $ab=(\ldots(b'\otimes a_n+b')\otimes\otimes a_{n-1}+b')\otimes\ldots)\otimes a_2+b')\otimes a_1$ (здесь a_i — группы разбиения a, $i=1, 2, \ldots, n$);

б) a делится на b тогда и только тогда, когда некоторый член последовательности

$c_1=a$, $c_2=c_1'-b'$, $c_3=c_2-$ $-b'$, $\ldots$, $c_{k+1}=c_k'-b'$, $\ldots$

равен нулю; при этом, если $c_{n+1}=0$, то $a:b=(c_n)_1\otimes(c_{n-1})_1\otimes\ldots\otimes(c_1)_1$.

В. Абрамович
(г. Ростов-на-Дону)

К статье «Ускорители»

1. $l_n = \frac{1}{2}\beta_n\lambda$.

2. 194,7 *Мэв*; 644,4 *Мэв*; 2784.2 *Мэв*.
3. Уменьшится в 1,725 раза.

К статье «Четные и нечетные функции»

Контрольные вопросы

1. Четной.
2. Нечетной.
3. Если $x \in D(f)$, то $-x \in D(f)$, и поэтому $D(f_+)=D(f_-)=D(f)$.
4. Если f четна, то $f_+=f$, $f_-=0$; если f нечетна, то $f_+=0$, $f_-=f$.
5. Для многочлена $p(x)$ в формулах (4) для p_+ взаимно уничтожаются все одночлены нечетной степени, а для p_- — все одночлены четной степени.
6. а) Если многочлен $p(x)$ является четной функцией, то в его разложении $p = p_+ + p_-$ нечетная часть равна нулю (см. вопрос 4), поэтому $p = p_+$; согласно ответу на вопрос 5 в p_+, а значит, и в p входят одночлены только четной степени.

Случай б) рассматривается аналогично.

Упражнения

1. Четные: f_1, f_3, f_9; нечетные: f_8, f_{10}, f_{11}.
2. а) Четные при $a = 0$, нечетные при $b = 0$;

б) четные при $b = 0$, нечетных нет (если $a \neq 0$);

в) четные при $b = 0$, нечетные при $a=0$.

3. а) $f_+(x) = x^2 + 2$, $f_-(x) = x - \frac{1}{x}$;

б) $f_+(x) = \frac{2x}{x^3 - x}$, $f_-(x) = \frac{x^2+1}{x^3 - x}$;

в) $f_+(x) = 2x \lg x$, $f_-(x) = (x^2 + 1) \lg x$;

г) $f_+(x) = 2^{x-1} + 2^{-x-1}$, $f_-(x) = 2^{x-1} - 2^{-x-1}$.

4. $f(0) = 0$.
5. $f(x) = 0$ при любом $x \in D(f)$, где $D(f)$ — произвольное подмножество числовой оси, симметричное относительно точки 0.
6. а) Нет; б) да; в) нет.
7. а) Да; б) 1), 3) — нет; 2) — да.
8. а) Воспользуйтесь правилом дифференцирования сложной функции для $F(x) = f(-x)$.

б) 1) Нет (пример: $f(x) = x^3 + 1$); 2) — да.

9. 1) Невозможно в случае (г), возможно многими способами — в случае (а).

2) Невозможно в случае (в), возможно многими способами — в случае (а).

10. Нельзя в случае б), можно бесконечным числом способов в случае в).
11. Указание. Все эти функции будут периодическими и либо четными (а), г)), либо нечетными (б), в)), поэтому график функции достаточно построить на «половине периода» — на отрезке $[0; T/2]$, где T — период, а затем воспользоваться свойствами четности и периодичности.

К статье «Метод отделяющих констант»

1. а) На луче $x \geqslant 2$ можно взять отделяющую константу $c_1 = 2{,}1$; в интервале $1 < x < 2$ — константу $c_2 = 1{,}1$; на луче $x \leqslant 1$ — константу $c = 0$.

б) $c_1 = 0$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{2\pi}{3}$,

$c_3 = -1$ при $|x| \geqslant \frac{2\pi}{3}$ (точки на границах этих интервалов проверяются отдельно).

2. $x = -1$. Указание. Функция в левой части уравнения — возрастающая.
3. $x = 4$. Указание. Поскольку $|\cos t| \leqslant 1$, данное уравнение равносильно совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1, \\ \cos(\pi\sqrt{x}) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x-4}) = -1, \\ \cos(\pi\sqrt{x}) = -1. \end{cases}$$

4. Указание. При $x>0$, $y>0$ получаем $\sin x = 1$, $\sin y = 1$; при $x>0$, $y<0$ или $x<0$, $y>0$ получаем $\sin x + \sin y = 0$; при $x<0$, $y<0$ должно быть $\sin x = -1$, $\sin y = -1$.

5. $x = 0$, $y = 0$. Указание. Заметить, что $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = |x-1| + |x+1| \geqslant 2$, поэтому $y = 0$, $|x| \leqslant 1$.

К статье «Линзы и системы линз»

1. См. рис. 1.
2. Дальнозоркому человеку следует прописать очки с собирающими линзами оптической силы $D = 2$ *дптр*.
3. $F = l/3 = 8$ *см*.
4. $K = \frac{F^2}{(d-F)^2 - (l/2)^2}$.

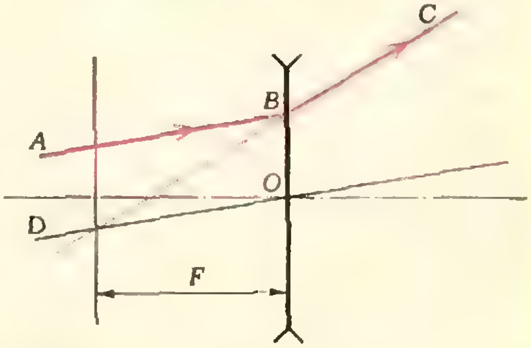


Рис. 1.

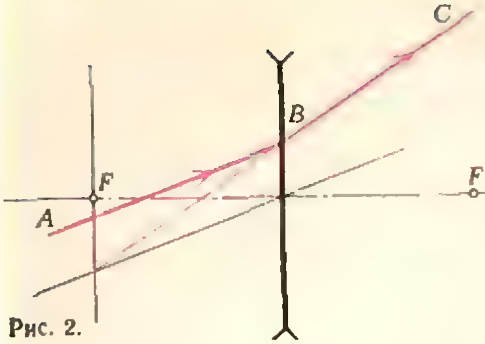


Рис. 2.

5. $a = \sqrt{3}\,F$.
6. $x = 60$ *см*.
7. $\Gamma \approx 99$.

К статье «Московский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Математика

Вариант 1

1. 20 *км/час*, 18 *км/час*. 2. $x < -1$.
3. arctg (3/4), arctg (4/3). 4. — 0,5376.

Вариант 2

1. 6 часов, 12 часов; $t_1 = 4$, $t_2 = 1$. 2. $x<0$, $2<x<7/2$, $x>4$.
3. $\sqrt{c^2+a^2+b^2+ab}$. 4. $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \pi/2 + 2k\pi$ (k — целое).

Вариант 3

1. 3 десятиклассника и 9 девятиклассников. 2. Указание. Положить $x+2=a$, $y-2=b$ и привести неравенство к виду $(a+b)^2 - ab \geqslant 0$. 3. arctg (3/4), arctg (4/3). 4. $\alpha + 2\beta = \pi/2$. Указание. Перейдя к функциям двойных углов, получим из первого равенства $\cos 2\beta = \frac{3}{2}(1-\cos 2\alpha)$; подставив его в формулу $\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$, найдем $\cos 2\alpha = 7/9$. Далее найти $\cos(\alpha + 2\beta)$.

Физика

Факультет автоматики и вычислительной техники

1. $|\vec{a}| = \frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2} = 0{,}24$ *м/сек*².

2. $v = \sqrt{l\,|\vec{g}|\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$.

3. $|\vec{F}_{\text{н}}| = \frac{8q\,|Q|}{R^2} = 784$ *дин*.

4. $h = H - \frac{m}{\rho_{\text{в}} S} = 4$ *см*.

5. $r = R\,\frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} = 0{,}4$ *ом*.

6. $$\lambda_2 = \frac{hc}{hc/\lambda_1 + E_2 - m_e|\vec{v}_1|^2/2} = 3{,}3\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

7. См. рис. 2.

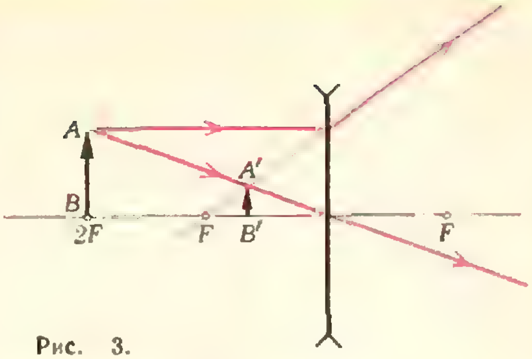


Рис. 3.

Все остальные факультеты

1. $|\vec{v}_1| = 15$ *м/сек* $= 54$ *км/час*; $|\vec{v}_2| = 10$ *м/сек* $= 36$ *км/час*.

2. $t = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)h}{(m_2-m_1)|\vec{g}|}} \approx 0{,}21$ *сек*.

3. $|\vec{g}| = \frac{4\pi^2 n^2 l}{t^2} \approx 9{,}86$ *м/сек*².

4. $\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)100\% = 4\%$.

5. $n = \sqrt{R_1/R_2}$.

6. $m_{\text{л}} = \eta\,\frac{m|\vec{v}|^2}{2\lambda} = 7{,}5$ *г*.

7. Мнимое и уменьшенное в 3 раза изображение находится на расстоянии $f = 2/3\,F$ от линзы (см. рис. 3).

К заметке «Иззаоблачное» сияние»

(*см. с. 29*)

Если стоять у железнодорожного полотна, то видно, как рельсы сходятся вдали. Точно так же расхождение солнечных лучей в разные стороны и расширение отдельных лучей объясняется эффектом перспективы. Лучи в действительности почти параллельны, но пронизывают облака в разных местах. Это и создает иллюзию расхождения лучей «иззаоблачного» сияния. Красивый эффект, не правда ли?

«Укладка тетрамино»

(*см. «Квант» № 1, с. 59*)

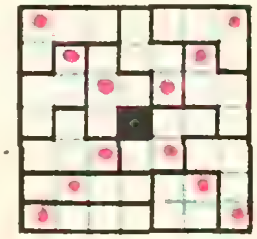


Рис. 4.

К задачам

(*см. «Квант» № 2, с. 9*)

3. Указание. Нижнюю оценку нетрудно найти, вычислив сумму первых 6 сла-

гаемых. Для доказательства верхней оценки заметьте, что

$$\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{6}{7!}+$$

$$+\frac{7}{8!}+\frac{8}{9!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=$$

$$=\frac{7}{7!}-\frac{1}{7!}+\frac{8}{8!}-\frac{1}{8!}+\frac{9}{9!}-\frac{1}{9!}+$$

$$+\ldots+\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+$$

$$+\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}+\frac{1}{8!}-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}<\frac{1}{6!}.$$

4. а) $x=6$; б) $x=8$, $y=1$; в) $x=8$, $y=z=7$, $t=4$.

К головоломкам

«16 карточек»

(см. «Квант» № 2, с. 14)

БАРИН	БУРАН	БУЛКА	КОЛБА
БИРКА	БУРКА	РОЛИК	РУБКА
САТИН	КЛОУН	ЛУНКА	СУКНО
СИЛОК	СУРОК	САЛОН	РИСКА

(см. «Квант» № 2, с. 34)

«Ходом коня»

52	35	16	49	42	33	14	47
17	38	51	34	15	48	43	32
36	53	18	41	50	31	46	13
39	4	37	54	11	44	25	60
8	19	40	3	30	61	12	45
5	2	7	10	55	26	59	24
20	9	64	29	22	57	62	27
1	6	21	56	63	28	23	58

«Точные квадраты»

«4 576 36 81 16 9025».

К статье «Много битов из ничего»

(см. «Квант» № 3)

1. С одной стороны, **без перебора** мы умеем доказать, что не всякое нечетное число, большее трех, представимо в нужном виде, однако известное нам доказательство этого факта неэлементарно. С другой стороны, **перебором** можно добраться до наименьшего непредставимого числа — 149.

2. Поскольку реплики (π_1), (σ_1) в обоих диалогах совпадают, рассуждения трех первых разделов статьи остаются справедливыми. Таким образом, s_0 является элементом множества

$$C=\{11,17,23,27,29,35,37,41,47,53\},$$

причем все элементы множества C удовлетворяют условию (σ_1').

(π_2) означает

> *При любом разложении числа p_0 в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), их сумма обладает свойством (σ_1').* (π_2')

В статье доказано, что любое число, обладающее свойством (σ_1'), принадлежит C. Поэтому мы можем заменить (π_2') на

> *При любом разложении числа p_0 в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), их сумма принадлежит C.* (π_2'')

Переберем все представления чисел из C в виде суммы двух слагаемых: $s=k+l$ $(2\leqslant k\leqslant l)$ и проверим каждое произведение kl на выполнение (π_2''). Перебор сократится примерно вдвое, если предварительно при помощи (π_2') доказать, что p_0 не делится на 4.

Результат перебора: только 4 числа из C дают нам разложения $s=k+l$, для которых kl удовлетворяет условию (π_2''):

$$23=6+17,$$
$$35=13+22,$$
$$37=3+34=11+26=14+23,$$
$$53=2+51=7+46.$$

Поскольку S и после реплики (π_2) не смог отгадать k_0 и l_0, $s_0\neq 23$ и $s_0\neq 35$. Итак, ввиду (σ_2), $s_0=37$ или $s_0=53$.

Догадавшись об этом, P сумел определить k_0 и l_0. Следовательно, $p_0=11\cdot 26=286$, так как, если бы у P было $102=3\cdot 34=2\cdot 51$ или $322=14\cdot 23=7\cdot 46$, он не смог бы выбрать между $37=3+34=14+23$ и $53=2+51=7+46$.

Итак, $s_0=37$, $p_0=286$, $k_0=11$, $l_0=26$.

К статье «Ставь на минус!»

(см. «Квант» № 3)

Контрольные вопросы

1. *а*) d6; б) h3; в) a7; г) h8.

2. а) I—5, II—4; б) I—1, II—2; в) I—4, II—0.

Задачи

1. Минусы стоят на полях с нечетными номерами и горизонтали, и вертикали.

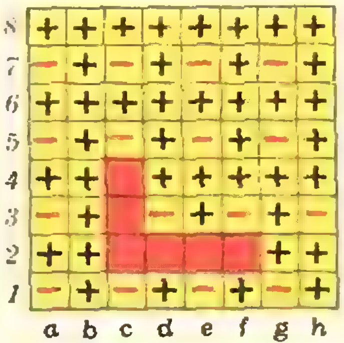


Рис. 5.

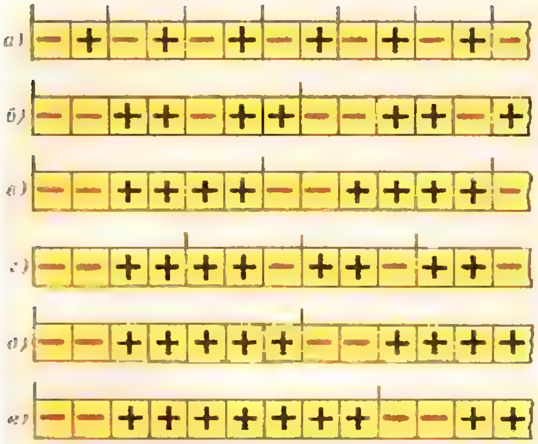


Рис. 6.

2. Минусы стоят на полях, у которых разность номеров горизонтали и вертикали делится на 3.

3. На поле стоит минус, если сумма номеров горизонтали и вертикали при делении на 3 дает в остатке 1.

4. См. рис. 5.

5. Минусы стоят на полях, у которых номера и горизонтали, и вертикали при делении на 4 дают остаток 1 или 2.

6. Минусы стоят только на главной диагонали (у полей которой номер горизонтали равен номеру вертикали).

7. См. рис. 6 (в случае *г*) период начинается с пятой клетки, во всех остальных — с первой).

8. а) Пусть на клетке с номером n (короче: «клетке n») стоит минус. Тогда на клетках $n+a$ и $n+b$ стоят плюсы, поскольку с них можно пойти на клетку n, а на поле $n+a+b$ стоит минус, так как с него можно попасть только на клетки $n+a$ и $n+b$.

Пусть теперь на клетке n стоит плюс. Тогда в соответствии с «золотыми правилами» на поле $n-a$ или на поле $n-b$ стоит минус. Если на $n-a$ стоит минус, то, как доказано, на клетке $n-a+(a+b)=n+b$ также стоит минус, а на клетке $n+a+b$ — плюс, так как с нее можно попасть на $n+b$. Случай, когда минус стоит на $n-b$, разбирается аналогично.

Итак, расстановка плюсов и минусов периодична и полностью определяется расстановкой первых $a+b$ знаков.

б). Рассмотрим первые $a+b$ клеток. Пусть для определенности $a<b$. Расстановка знаков на первых b полях определяется только ходом на a клеток и потому такова: a минусов, a плюсов, a минусов, a плюсов.... Поскольку ход на b клеток влево с полей с номерами $b+1, \ldots, a+b$ ведет на один из первых a минусов, то на этих клетках стоят a плюсов. Они следуют за a минусами тогда и только тогда, когда $b=a(2n+1)$ (n — целое).

Итак, длина периода равна $2a$, если $b=a(2n+1)$, и равна $a+b$ в противном случае.

9. Как следует из решения задачи 8, количество минусов в начале равно a, а больший ход имеет длину, равную длине периода, минус a. Так, на рисунке 7 (в статье) $a=2$, $b=7-2=5$.

Но если получается $b=a$, то есть периодичность сводится к чередованию a минусов и a плюсов, то меньший ход равен именно a, а про больший можно сказать лишь, что он равен $a(2n+1)$, где n — натуральное число.

10. Пусть n — наибольшая длина хода. Тогда для того, чтобы отметить поле плюсом или минусом, достаточно знать знаки лишь на предыдущих n полях. Разобьем полоску на последовательные группы по n клеток. По принципу Дирихле (см. «Квант», 1977, № 2, с. 17) расстановка знаков в каких-то двух группах совпадает. Пусть эти две группы начинаются с клеток k и p соответственно, причем $k<p$. Тогда расстановка знаков на клетках $k, k+1, \ldots, p-1$ совпадает с расстановкой на клетках $p, p+1, \ldots, p+(p-k-1)$ и так далее. Другими словами, имеется период длины $p-k$, начинающийся с клетки k.

11. На рисунке 8,*а* (в статье) вторая клетка отмечена плюсом, следовательно, есть ход на 1 клетку влево. Третья также отмечена плюсом — есть ход на 2 клетки влево. Наконец, седьмая клетка отмечена плюсом — есть ход на четвертую или на первую клетку. Если на четвертую, то этот ход — на 3 клетки влево. Но тогда на четвертой клетке вопреки рисунку должен стоять плюс. Следовательно, есть ход на 6 клеток влево. Итак, этот рисунок соответствует игре, в которой ходить можно на 1, 2 или 6 клеток влево.

Могут ли быть другие игры с такой же расстановкой плюсов и минусов? Да, конечно. Например, игра, в которой ходить можно на 1, 2, 6 или 13 клеток влево или на 1, 2, 5 или 6 клеток влево.

Рисунки 8, *б*, *в* (в статье) соответствуют играм с ходами на 1,4 или 7 клеток влево и на 2,4 или 7 клеток влево.

12. Не всегда — это сразу следует из рисунка 9, *б* в статье. Судя по его первым трем клеткам, в игре должны быть ходы на 1 и 2 клетки влево, но это противоречит дальнейшей расстановке знаков.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 3*)

1. Самый сильный — Портос, затем следуют д'Артаньян, Атос и Арамис.

2. Указание. Дробь сократима тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель имеют общий множитель, отличный от единицы. Но

$$\frac{2n^2-1}{2n+1}=n-\frac{n+1}{2n+1},$$

$$\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1},$$

а дробь $\frac{1}{n+1}$ несократима.

3. 81.

4. Прибавим к искомому числу единицу, полученное число должно делиться на все числа от 2 до 10. Поэтому искомым числом является наименьшее общее кратное всех чисел от 2 до 10, уменьшенное на 1; это 2519.

5. Можно. Две соседние части можно раскрасить в любые разные цвета, затем часть, граничащую с ними обеими, — в третий цвет и так далее.

К заметке «Мартовская капель»

(*см. «Квант» № 3, с. 15*)

1) Для образования ледяного сталактита необходимы два условия: температура воздуха должна быть немного ниже 0°C, и должен быть источник текущей воды. Вода образуется из снега, лежащего на крыше здания, при освещении его солнечными лучами. Как известно, освещенность поверхности зависит от угла падения лучей. При соответствующей высоте Солнца над горизонтом и подходящем наклоне крыши поглощаемой снегом энергии может оказаться достаточно, чтобы снег начал таять. Но поскольку температура воздуха ниже 0°C, стекающие маленькие капли воды замерзают, образуя сосульки. 2) Вначале ледяная сосулька представляет собой цилиндрический столбик, вода медленно стекает по нему и повисает на его конце каплей. По мере роста длины столбика отдельные капли талой воды не успевают с него стекать и замерзают, утолщая сталактит в верхней его части. 3) Длина ледяного конуса, при прочих равных условиях, зависит в основном от некоторой оптимальной скорости притекания воды к нему: как большая, так и малая скорости не способствуют росту ледяной сосульки. 4) Сосульки могут изгибаться под влиянием ветра, конвекционных потоков воздуха и других случайных факторов. 5) Ледяная сосулька — кристалл, оптически почти однородный и потому прозрачный. Снег же имеет поликристаллическую структуру. Вследствие многократных отражений и преломлений на гранях отдельных кристалликов снега свет в нем диффузно рассеивается. Поэтому снег не прозрачен.

К «Квантово-волновым ребусам»

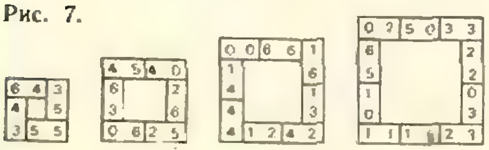
(*см. «Квант» № 3, 3-ю с. обл.*)

1. 95 846×95 846 = 9 186 455 716.
2. 26 953×26 953 = 726 464 209.
3. 26 157×68 351 = 1 787 857 107.
4. 24 153×24 153 = 583 367 409.
5. 18 594×18 594 = 345 736 836.
6. 48 957×24 751 = 1 211 734 707.
7. 52 903×52 903 = 2 798 727 409.
8. 46 027×46 027 = 2 118 484 729.
9. 12×7 = 84
   29×3 = 87
10. 39 + 8 = 47
    96:2 = 48.

К головоломкам
«Рамки из домино»

(*см. «Квант» № 3, с. 11*)

Рис. 7.



(*см. «Квант» № 3, с. 18*)

«Задача из «примера»

$\overline{\text{пример}}$ = 851 745.

«Извилистый путь»

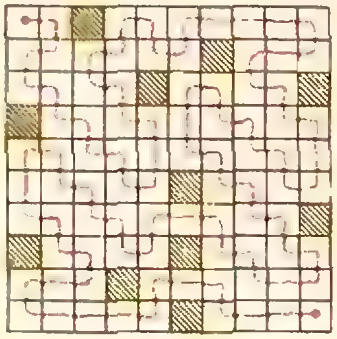


Рис. 8.

«Магические круги»

Задача имеет два решения, одно из них приведено на рисунке 9.

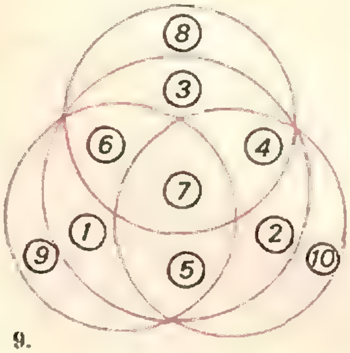


Рис. 9.

Номер готовили:
В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, Э. Смирнов, Э. Пономарева

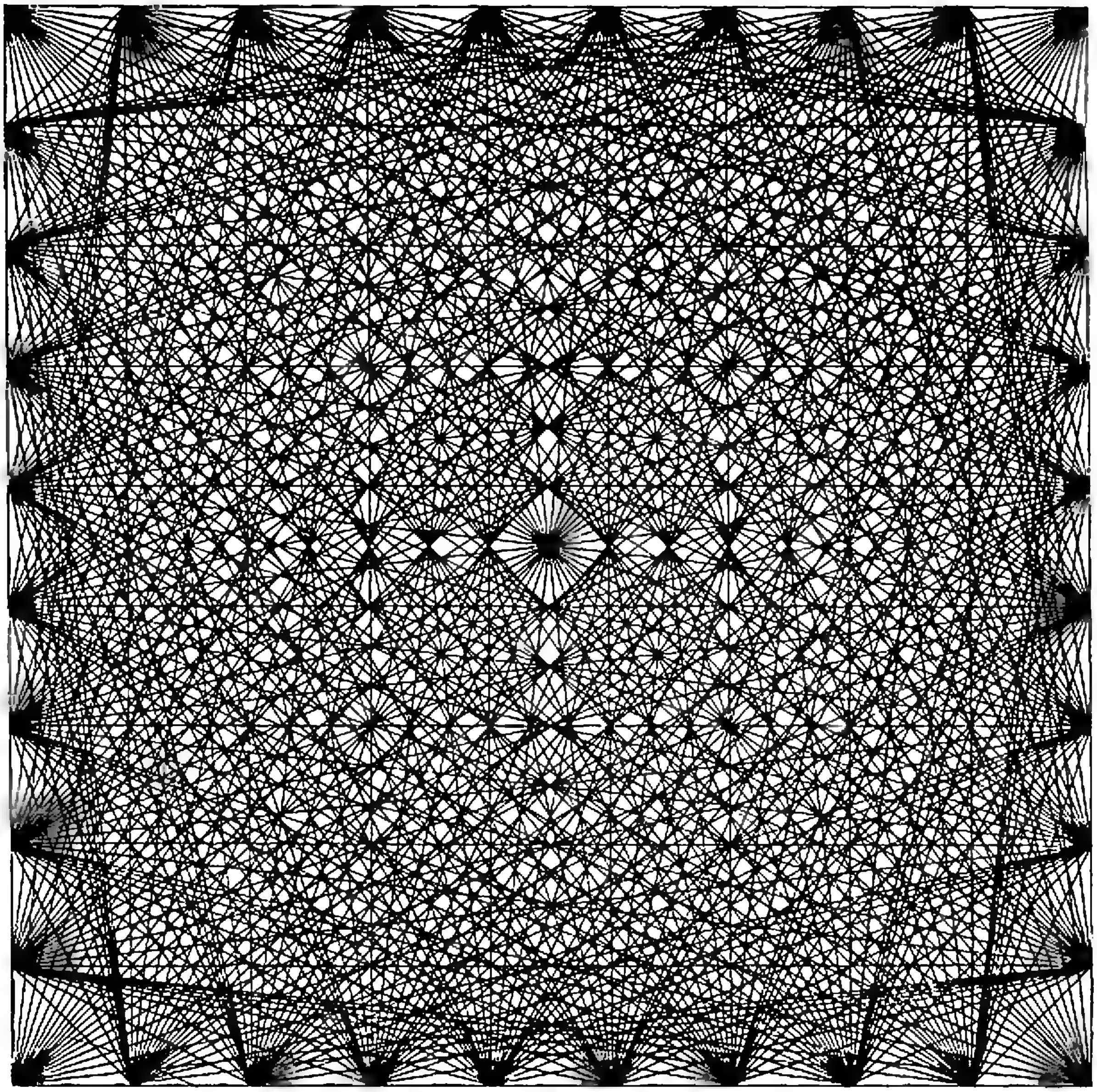
Зав. редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор *Н. РУМЯНЦЕВА*

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 26/I 1977 г.
Подписано в печать 11/III 1977 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,62. Т-03468
Цена 30 коп. Заказ 24. Тираж 297 085 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

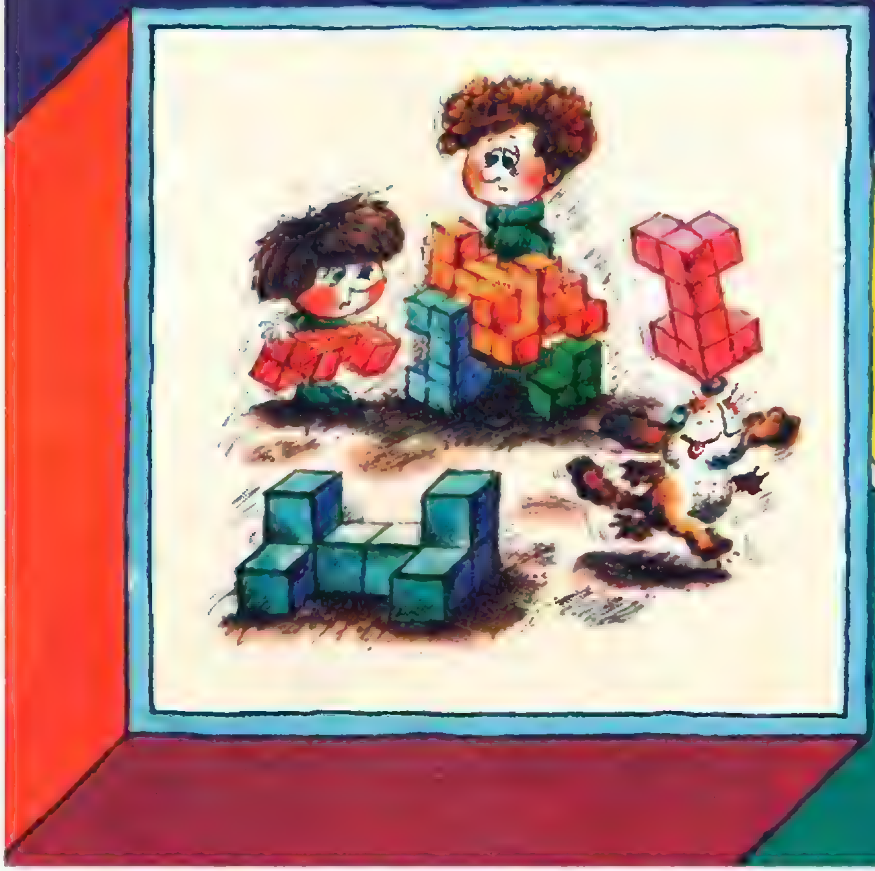


Принцип построения этого орнамента совсем прост: каждая сторона квадрата поделена на девять равных частей и все точки деления попарно соединены отрезками друг с другом.

Постарайтесь ответить на ряд вопросов, относящихся к этому орнаменту. В скольких точках пересекаются отрезки внутри квадрата? Сколько точек пересечения, в которых пересекаются три отрезка, четыре, пять и т. д.? Сколько точек пересечения могут лежать на сторонах квадратов с вершинами в точках пересечения (найдите наибольшее и наименьшее числа)? Присутствуют ли другие правильные многоугольники на рисунке? Ждем ваших писем с ответами.

КУБ-ХАМЕЛЕОН

Грани 27 кубиков окрашены в некоторые цвета так, что, складывая из этих кубиков большой куб (размером 3×3×3), можно получить красный куб, можно — синий, а можно — зеленый. Как окрашены грани этих 27 кубиков?



РАЗБОРНЫЙ КУБ

Шефы подарили детскому саду восемь одинаковых деревянных фигурок (см. рисунок), из которых был сложен куб размером 4×4×4. Дети разобрали куб на детали, а сложить куб снова не могут. Помогите им.

Л. Мочалов

Цена 30 коп.
Индекс 70465

ГОЛОВОЛОМКИ

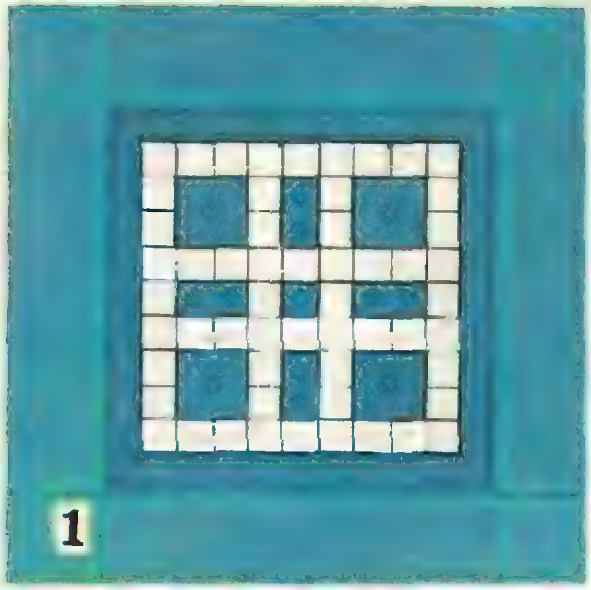
1. Уложите все 28 косточек домино в виде коврика (см. рисунок) так, чтобы суммы очков вдоль каждой прямой (без разрывов) были одинаковы и равны 25 (косточки не обязательно прикладывать друг к другу одинаковыми значениями очков).

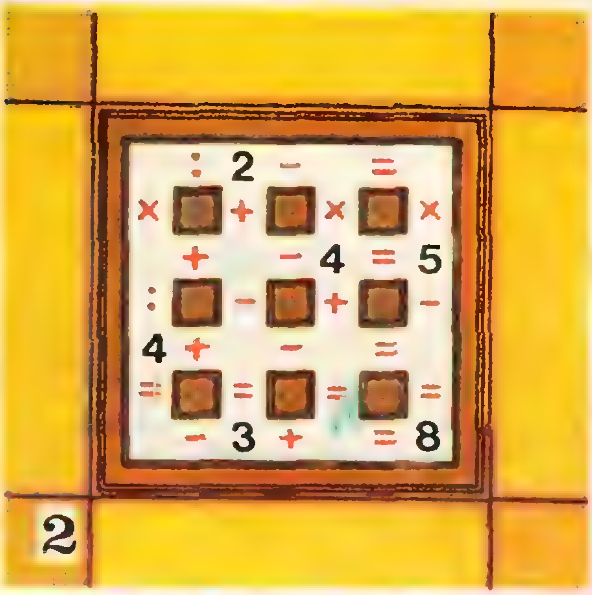
2. Изображенный на рисунке «числовой коврик» переплетен цифрами и знаками арифметических действий. Допишите в пустые места цифры так, чтобы все равенства были верны.

3. Уложите 28 косточек домино в виде узора, изображенного на рисунке, так, чтобы суммы очков вдоль всех прямых были одинаковы. При этом в тех местах, где кости касаются (на рисунке таких мест 12), на них должны быть одинаковые цифры.

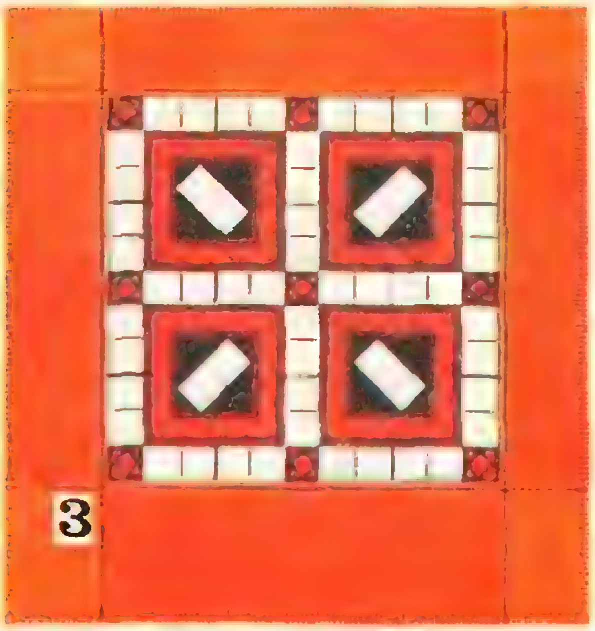
4. Возьмите комплект домино и отложите в сторону кость 0—0. Теперь, рассматривая оставшиеся косточки как дроби (правильные или неправильные), расположите их в отмеченных на рисунке местах так, чтобы сумма дробей в каждой строке равнялась числу косточек данной строки.

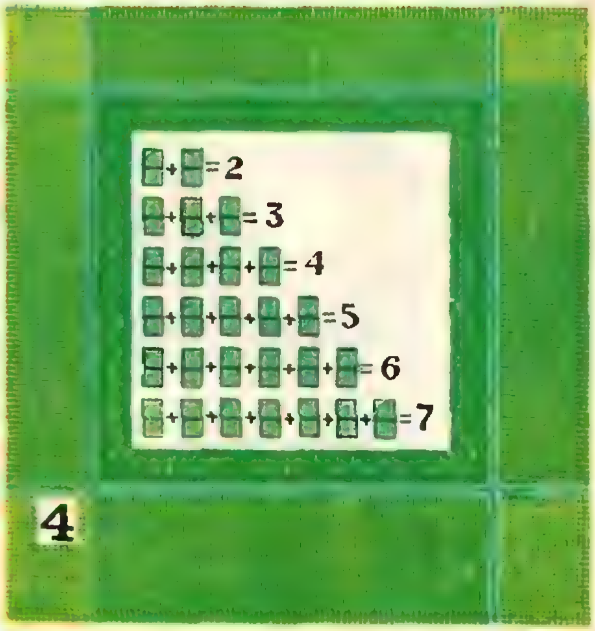
Л. Мочалов


1



2


3



4

НОМЕР
5

Основан в 1970 году

Квант

5
1977

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *В. Болтянский.* О понятиях площади и объема
10 *М. Мамикон.* Объем шара
14 *А. Дозоров.* Можно ли поднять себя за волосы?

Лаборатория «Кванта»

17 *Г. Новинский, В. Хомазюк.* Закон Архимеда и ... решение уравнений
19 *В. Смышляев.* Сообщающиеся сосуды и ... уравнения

Задачник «Кванта»

20 Задачи М441—М445; Ф453—Ф457
22 Решения задач М396, М397, М400—М402; Ф407—Ф412

По страницам школьных учебников

30 *А. Виленкин, Ю. Ионин.* Площадь и интеграл

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *Е. Турецкий, Н. Цейтлин.* Семиклассникам о вероятности
44 **Спрашивайте — отвечаем**

Практикум абитуриента

45 *Е. Галкин.* Рационально или иррационально?
48 *Ю. Никольский, Б. Федосов, В. Чехлов, А. Шелагин.* Московский физико-технический институт
50 *Ю. Иванилов.* Факультет управления и прикладной математики МФТИ
52 Примерные задачи вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

Рецензии, библиография

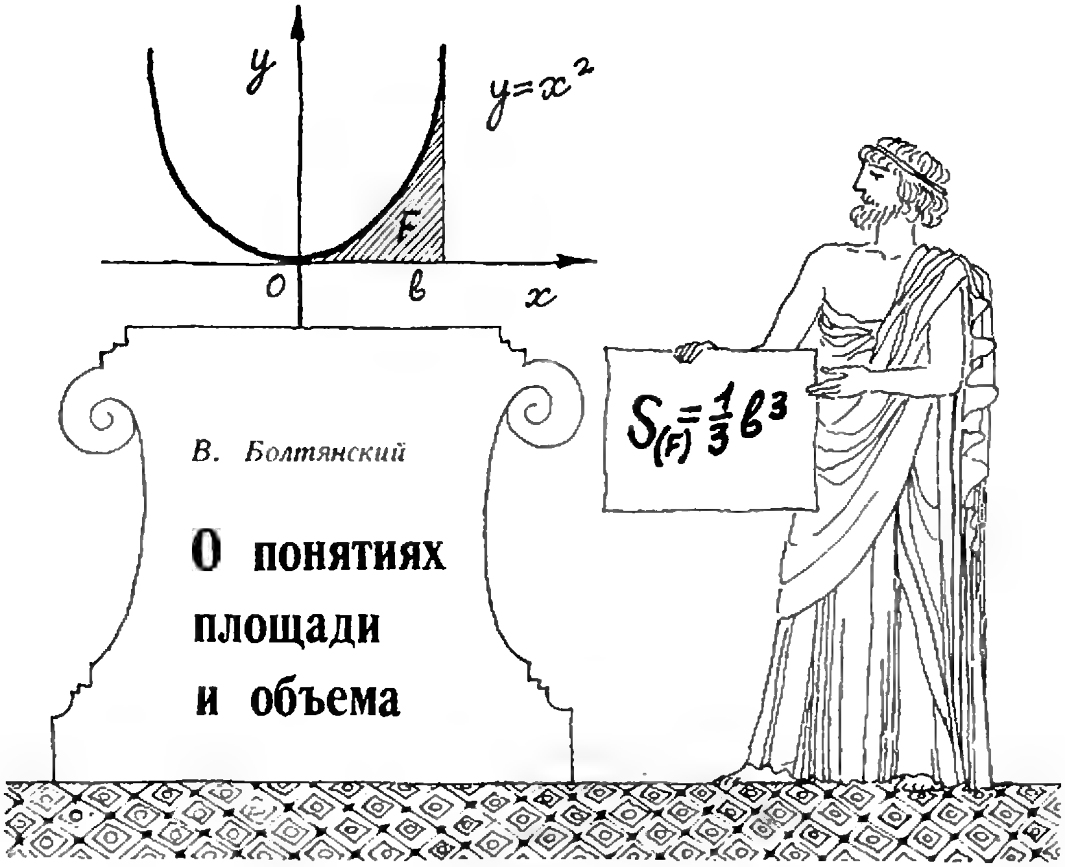
55 *Л. Саукин.* Ошибки в «Ошибках...»

Информация

57 *С. Войнов.* Форум юных астрономов
59 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с. 9, 16, 36, 43, 56*)

Что нужно иметь, чтобы найти несколько знаков числа π? Планиметр, чтобы определить площадь круга единичного радиуса? Курвиметр, чтобы измерить длину окружности единичного диаметра? Оказывается, достаточно иметь коробок спичек и лист линованной бумаги (см. первую страницу обложки). Подробно об этом рассказано на с. 43.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977



В. Болтянский

О понятиях площади и объема

Обычно говорят, что площадь $S(F)$ фигуры F есть число, показывающее, из скольких единиц площади «составляется» эта фигура (за единицу площади берется квадрат, сторона которого равна единице длины). Однако такое наглядное пояснение не может служить точным математическим определением понятия площади. Неясно, например, каким образом из единиц площади «составляется» круг заданного радиуса.

Один из способов уточнения понятия площади основывается на рассмотрении *палетки* — разбиения плоскости на конгруэнтные квадраты. Пусть сторона квадрата палетки имеет длину 1. На рисунке 1 фигура F содержит фигуру, составленную из 9 квадратов палетки, и содержится в фигуре, составленной из 29 квадратов; поэтому $9 \leqslant S(F) \leqslant 29$. Для более точной оценки можно использовать палетку, квадраты которой имеют стороны длиной 1/10 (так что в каждом квадрате прежней палетки содержится 100 квадратов новой палетки). Если, скажем, F содержит фигуру, составленную из 1716 квадратов новой палетки, и содержится в фигуре, составленной из 1925 таких квадратов, то $17{,}16 \leqslant S(F) \leqslant 19{,}25$. Еще раз измельчая палетку (т. е. уменьшая в 10 раз длины сторон квадратов), мы сможем еще точнее оценить $S(F)$ и т. д.

Описанный процесс измерения используется не только для вычисления площади, но и для самого *определения* понятия площади. Именно, рассмотрим палетку, у которой длины сторон квадратов равны $1/10^k$. Пусть F содержит фигуру, составленную из a_k квадратов этой палетки, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких квадратов (например, выше у нас $a_1 = 1716$, $b_1 = 1925$). Тогда можно сказать, что $\frac{a_k}{10^{2k}}$ есть значение площади фигуры F *с недостатком*, а $\frac{b_k}{10^{2k}}$ — *с избытком*. Неограниченно увеличивая k, мы можем рассмотреть пределы

$$\underline{S}(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{10^{2k}},\quad \overline{S}(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{10^{2k}},$$

первый из которых называется *нижней*, а второй — *верхней площадью* фигуры F.

Если фигура F такова, что эти пределы совпадают, то фигура F называется *квадрируемой*, а число $\underline{S}(F) = \overline{S}(F)$, т. е. совпадающее значение рассмотренных пределов, называется *площадью* фигуры F и обозначается через $S(F)$.

Нетрудно привести пример фигуры, у которой верхняя и нижняя площади *не совпадают*. С этой целью из квадрата площади 1 удалим крест, площадь которого меньше 1/4 (рис. 2, *а*). Затем в каждом из четырех оставшихся квадратов удалим по кресту так, чтобы сумма площадей всех четырех крестов была меньше 1/8 (рис. 2, *б*). Затем удалим 16 крестов с общей площадью меньше 1/16 (рис. 2, *в*) и т. д. Фигуру, которая останется после бесконечного числа удалений крестов, обозначим через Q. Заметим, что общая площадь всех удаленных крестов меньше чем $1/4+1/8+1/16+\ldots+1/2^n+\ldots$, т. е. меньше 1/2. Поэтому оставшуюся фигуру Q невозможно поместить в фигуре площади 1/2, т. е. верхняя площадь фигуры Q больше 1/2. В то же время фигура Q не содержит никакого квадрата (каким бы маленьким он ни был), и потому нижняя площадь фигуры Q равна нулю. Таким образом, $\overline{S}(Q) \neq \underline{S}(Q)$, т. е. фигура Q *неквадрируема*.

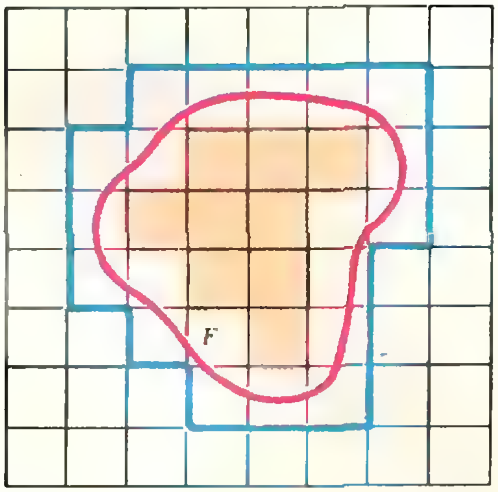


Рис. 1.

Этот пример показывает, что понятие площади применимо не ко всякой фигуре. Однако можно доказать (мы здесь это доказательство приводить не будем), что *всякий многоугольник является квадрируемой фигурой*. Точно так же любая выпуклая фигура (в частности, круг) квадрируема. Вообще же класс квадрируемых фигур является весьма обширным.

Теперь можно сказать, что площадь S представляет собой *функцию*, заданную на классе всех квадрируемых фигур и принимающую числовые значения, т. е. площадь $S(F)$ каждой фигуры F есть число (единица площади предполагается фиксированной).

Используя данное определение площади (с помощью палеток), можно доказать ряд свойств площади. Основными являются следующие четыре свойства:

(α) *функция S неотрицательна*, т. е. $S(F) \geqslant 0$ для любой квадрируемой фигуры F;

(β) *функция S аддитивна*, т. е. если F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры, не имеющие общих

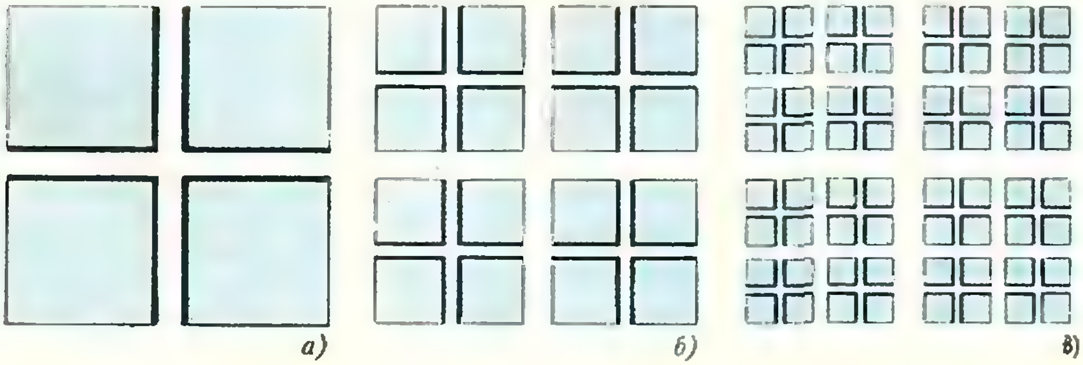


Рис. 2.

внутренних точек, то $S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2)$;

(γ) *функция S инвариантна относительно перемещений*, т. е. если $F_1 \cong F_2$, то $S(F_1) = S(F_2)$;

(δ) *единичный квадрат имеет площадь* 1.

После рассмотрения этих свойств наступает поворотный пункт в теории площадей. Дело в том, что справедлива следующая теорема существования и единственности: *на классе всех квадрируемых фигур существует, и притом только одна, функция S, обладающая свойствами* (α), (β), (γ), (δ). Теорема эта играет весьма важную роль. Изложенное выше определение площади (с помощью палеток) можно назвать конструктивным, поскольку площадь определяется с помощью четко описанной конструкции (процесса измерения). Теперь же можно дать другое описание понятия площади; грубо говоря, *площадь* есть «то, что обладает свойствами (α), (β), (γ), (δ)». В самом деле, согласно теореме существования и единственности, кроме площади, нет никакой другой функции, обладающей указанными свойствами. Более точно, мы можем теперь сказать, что площадью называется числовая функция, заданная на множестве всех квадрируемых фигур и удовлетворяющая условиям (α), (β), (γ), (δ). При таком подходе свойства (α), (β), (γ), (δ) доказывать не нужно (они рассматриваются как аксиомы площади), а само определение становится аксиоматическим, а не конструктивным, как прежде.

При аксиоматическом определении площади палетки становятся ненужными *), а все дальнейшие свойства площади выводятся из аксиом (α), (β), (γ), (δ) как теоремы. Например, из аксиом можно вывести, что при $F \supset G$ справедливо неравенство $S(F) \geqslant S(G)$ (свойство *монотонности* площади); что для любых квадрируемых фигур F_1, F_2 справедливо соотношение $S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2) - S(F_1 \cap F_2)$; что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия и т. д.

Перейдем, наконец, к вопросу о вычислении площадей. Самым простым методом вычисления площадей, известным еще из глубокой древности, является *метод разложения*. Для уяснения этого метода рассмотрим фигуры F и H, изображенные на рисунке 3. Пунктирные линии разбивают эти фигуры на одинаковое число соответственно конгруэнтных частей, т. е. фигуры F и H равносоставлены. Вообще, две фигуры называются *равносоставленными*, если, разрезав одну из них на конечное число частей, можно (располагая эти части иначе, т. е. рассматривая фигуры, конгруэнтные этим частям) составить из них вторую фигуру.

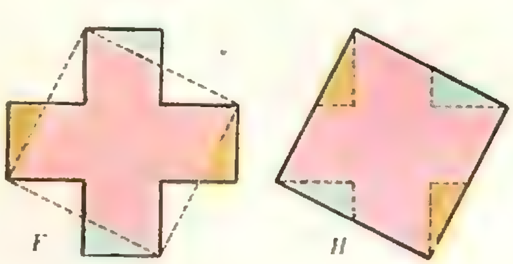


Рис. 3.

Из аксиом (β) и (γ) непосредственно следует, что две равносоставленные фигуры *равновелики*, т. е. имеют одинаковую площадь. На этом и основан метод разложения: фигуру, площадь которой нужно вычислить, пытаются разбить на конечное число частей так, чтобы из этих частей можно было составить более простую фигуру (площадь которой уже известна). Например, параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, имеющим то же основание и ту же высоту (рис. 4), и потому, зная формулу площади прямоугольника, мы устанавливаем формулу площади параллелограмма. Треугольник равносоставлен с параллелограммом, который имеет то же основание и вдвое меньшую высоту (рис. 5), и это позволяет вычислить площадь треугольника.

Умея вычислять площадь треугольника, легко вычислить площадь

---

*) Правда, понятие квадрируемости было выше определено с помощью палеток, но этого также можно избежать.

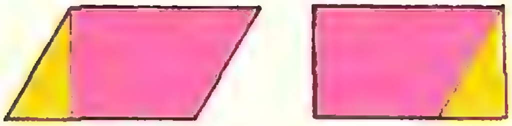


Рис. 4.

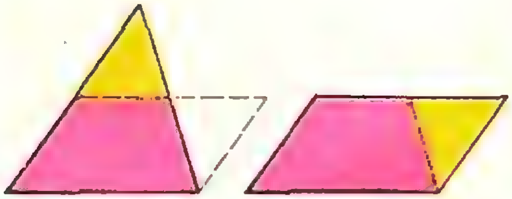


Рис. 5.

любого многоугольника: достаточно разбить его на треугольники и воспользоваться аксиомой (β), т. е. сложить площади этих треугольников. Заметим, что при любом другом способе разбиения на треугольники результат будем тем же самым. Действительно, результат и того и другого вычисления даст однозначно определенное число: площадь $S(F)$ рассматриваемого многоугольника (вот где «работает» теорема существования и единственности!).

Несмотря на простоту и удобство метода разложения, обойтись только этим методом для вычисления площадей различных квадрируемых фигур не удается. Например, вычислить площадь круга этим методом невозможно: как бы мы ни разрезали круг на конечное число частей, составить из них многоугольник (т. е. «более простую» фигуру, площадь которой мы умеем вычислять) не удастся. В связи с этим применяется еще один метод вычисления площадей, называемый *методом исчерпывания*. Этот метод также известен из глубокой древности: его открытие связано с именем Архимеда. Существо метода состоит в следующем. *Рассматривается квадрируемая фигура F и последовательность вложенных в нее квадрируемых фигур* $G_1, G_2, \dots$ (рис. 6). *Если часть фигуры F, не заполненная фигурой* G_n, *имеет площадь, неограниченно уменьшающуюся при* $n \to \infty$, *то* $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S(G_n)$. Фигуры $G_1, G_2, \dots$ как бы постепенно «исчерпывают» всю площадь фигуры F, и это позволяет вычислить $S(F)$.

Примером применения метода исчерпывания может служить приведенное в учебнике X класса вычисление площади круга. В этом случае фигурами $G_1, G_2, \dots$ являются вписанные в круг F правильные многоугольники, каждый из которых имеет вдвое большее число сторон, чем предыдущий (рис. 7). Равенство $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S(G_n)$ и позволяет вычислить площадь круга. Архимед применил метод исчерпывания не только для вычисления площади круга, но также для вычисления площади сегмента параболы (рис. 8).

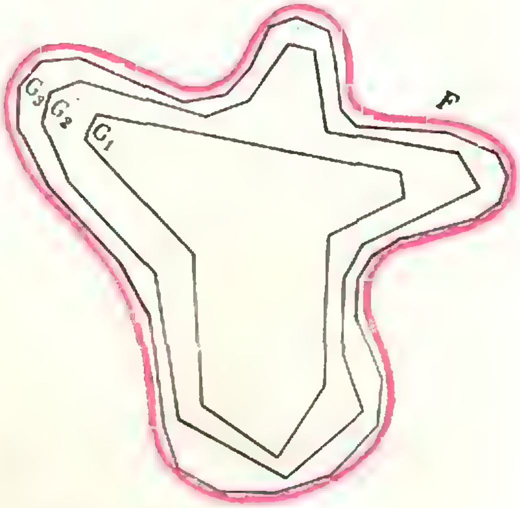


Рис. 6.

Наиболее универсальным методом вычисления площади является применение *первообразной*. Пусть на координатной плоскости задана замкнутая линия, не пересекающая сама себя; фигуру, ограниченную этой линией, обозначим через F. Проекция фигуры F на ось абсцисс представляет собой некоторый отрезок $[a, b]$. Для простоты предположим, что для любой внутренней точки x отрезка $[a, b]$ прямая, параллельная оси ординат и проходящая через эту точку, пересекает фигуру F по отрезку (рис. 9); длину этого отрезка обозначим через $f(x)$. Далее,

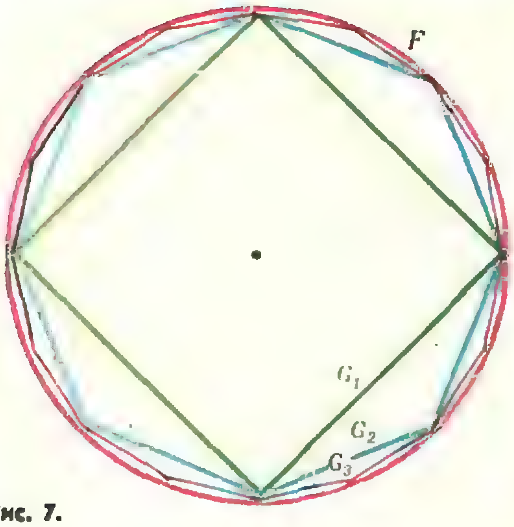


Рис. 7.

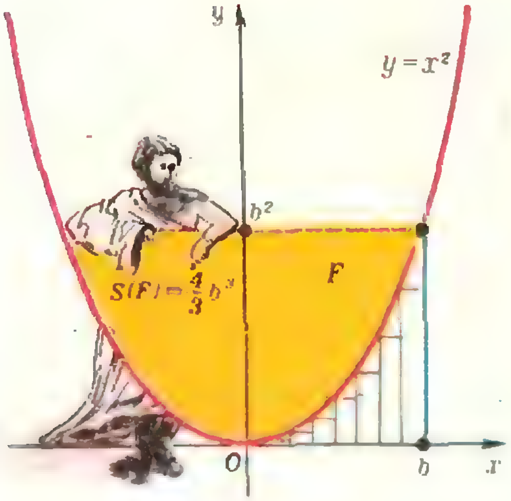


Рис. 8.

через $S(x)$ обозначим площадь той части фигуры F, которая расположена левее проведенной через точку x прямой.

Нетрудно доказать, что функция S является первообразной для f на отрезке $[a, b]$, т. е. $S'(x) = f(x)$ при $x \in]a, b[$. В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число, меньшее $f(x)$. На прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку x, возьмем точки M, N, P, Q, отстоящие на $\varepsilon/2$ от концов отрезка, по которому взятая прямая пересекает фигуру F (рис. 10). Точки M, Q расположены вне фигуры F, а N, P — внутренние точки этой фигуры. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что отрезки длины 2δ, параллельные оси абсцисс и имеющие середины в точках M, N, P, Q, расположены: первый и последний — вне фигуры F, а второй и третий — внутри нее. Пусть теперь Δx — положительное число, меньшее δ. Разность $\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x)$ равна площади заштрихованной на рисунке 10 фигуры. Эта площадь заключена между площадями прямоугольников $NLTP$ и $MKRQ$, т. е.

$$(f(x) - \varepsilon)\,\Delta x < \Delta S(x) <$$
$$< (f(x) + \varepsilon)\,\Delta x.$$

Отсюда

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon \qquad (*)$$

при $0 < \Delta x < \delta$.

Аналогично проверяется, что полученное неравенство выполняется

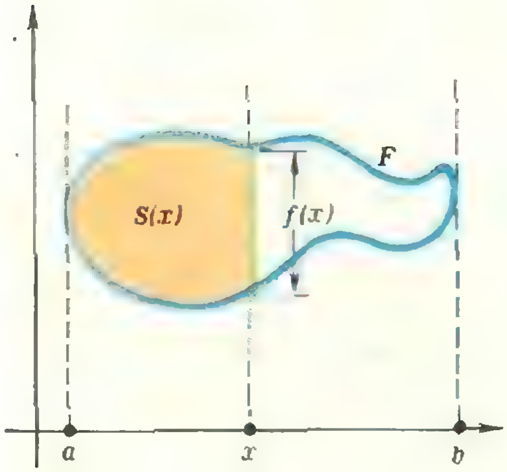


Рис. 9.

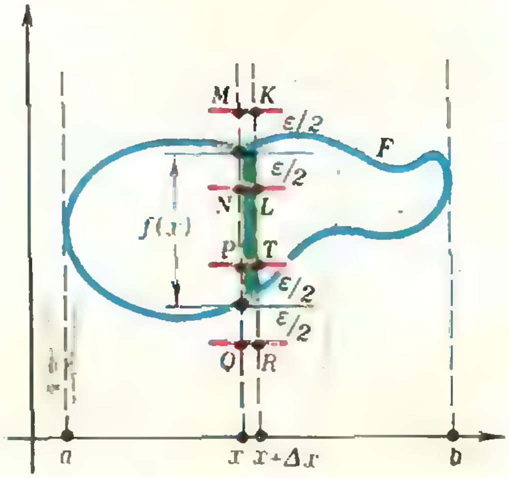


Рис. 10.

и для всех отрицательных Δx, если только $-\delta < \Delta x < 0$. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство (*). По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x),$$

т. е.

$$S'(x) = f(x).$$

Доказанное равенство позволяет вычислить площадь фигуры F. Пусть φ — какая-нибудь первообразная для функции f. Так как S — также первообразная для этой функции, то φ и S отличаются на константу, т. е. существует такое число c, что $\varphi(x) = S(x) + c$ для любого $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (S(b) + c) - (S(a) + c) = S(b) - S(a) = S(F)$$

(поскольку $S(a) = 0$, а $S(b)$ есть площадь всей фигуры F). Итак, *если φ — какая-нибудь первообразная для функции f, то разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ равна площади фигуры F*, т. е. $S(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если, например, F представляет собой «криволинейный треугольник», ограниченный параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = b$ (рис. 11), то прямая, которая проходит через точку x отрезка $[0, b]$ и параллельна оси ординат, высекает из этого «треугольника» F отрезок длины x^2, т. е. в данном случае $f(x) = x^2$. Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3$. Следовательно, площадь фигуры F находится по формуле

$$S(F) = \varphi(b) - \varphi(0) = \frac{1}{3}b^3.$$

Заметим, что, вычитая из площади прямоугольника $ABCD$ (рис. 12) удвоенную площадь «треугольника» F, мы получаем площадь сегмента параболы, которая, таким образом, оказывается равной $\frac{4}{3}b^3$. Как видите, с помощью первообразной очень просто получается тот результат, который Архимед выводил с помощью сложного рассуждения, основанного на использовании метода исчерпывания *). Сегодняшние школьники знают намного больше того, что было известно великому Архимеду!

Заканчивая рассказ о понятии площади, рассмотрим так называемый *принцип Кавальери* **). Пусть,

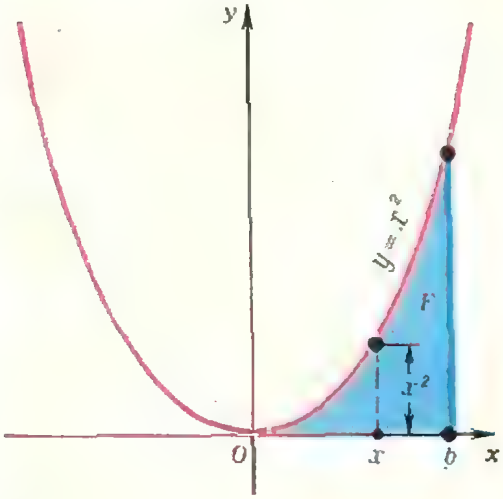


Рис. 11.

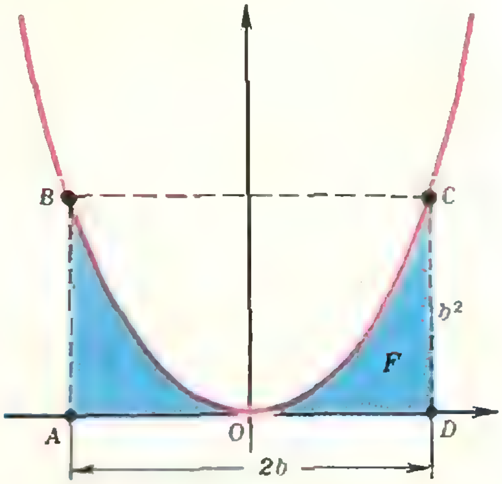


Рис. 12.

---

*) Подробно об этом см. в статье А. Д. Бендукидзе «Архимед и квадратура параболы» («Квант», 1971, № 7, с. 7).

**) Принцип Кавальери для площадей уже упоминался на страницах «Кванта» — в статье С. Верова «Тайны циклоиды» («Квант», 1975, № 8, с. 21) и в статье С. Пухова «Задача о выпуклых телах» («Квант», 1977, № 2, с. 30).

кроме F, имеется еще одна фигура H (рис. 13), проекцией которой на ось абсцисс служит тот же отрезок $[a, b]$. Предположим, кроме того, что каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает фигуры F и H по конгруэнтным отрезкам. Тогда площадь фигуры H выражается тем же интегралом, что и площадь фигуры F, т. е. $S(H)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и потому $S(F)=S(H)$. Итак, *если любая прямая, параллельная заданной фиксированной прямой* (например, оси ординат), *пересекает фигуры F и H по конгруэнтным отрезкам, то фигуры F и H равновелики*: $S(F)=S(H)$. Это и есть принцип Кавальери (для площадей). Мы вывели его с помощью формулы, выражающей площадь фигуры через интеграл. Кавальери же высказал свой принцип (и применял его для вычисления площадей и объемов) еще до того, как в трудах Ньютона, Лейбница и других ученых были введены понятия первообразной и интеграла.

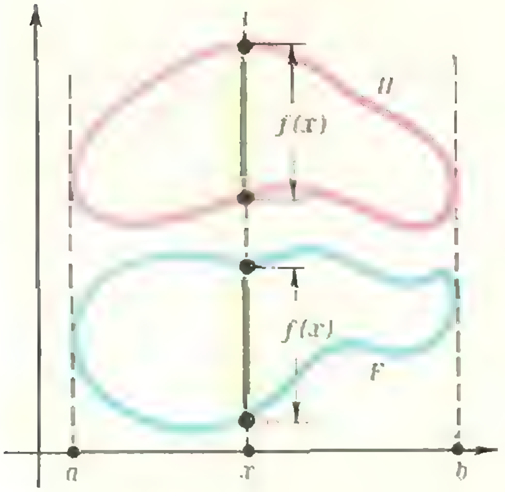


Рис. 13.

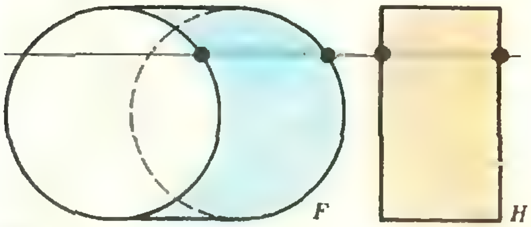


Рис. 14.

На рисунке 14 показаны две фигуры, которые, в силу принципа Кавальери, являются равновеликими. Впрочем, равенство площадей этих фигур можно легко установить и методом разбиения (как?).

Понятие *объема* вводится аналогично понятию площади. При конструктивном определении рассматриваются *кубильяжи* (аналоги палеток), т. е. разбиения пространства на конгруэнтные кубы. Рассмотрим кубильяж, у которого длина ребер кубов равна $1/10^k$. Пусть пространственная фигура F содержит фигуру, составленную из a_k кубов этого кубильяжа, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких кубов. Тогда $\frac{a_k}{10^{3k}}$ есть значение объема фигуры F *с недостатком*, а $\frac{b_k}{10^{3k}}$ — *с избытком*. Если фигура F такова, что пределы

$$\underline{V}(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{10^{3k}},\ \overline{V}(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{10^{3k}}$$

совпадают, то фигура F называется *кубируемой*, а число $\underline{V}(F)=\overline{V}(F)$ называется *объемом* фигуры F и обозначается через $V(F)$. Объем V представляет собой *функцию*, заданную на классе всех кубируемых фигур и принимающую числовые значения.

Как и площадь, объем может быть определен аксиоматически, причем аксиомы, на которых основывается понятие объема, совершенно аналогичны аксиомам площади:

(α) *функция V неотрицательна*, т. е. $V(F)\geqslant 0$ для любой кубируемой фигуры F;

(β) *функция V аддитивна*, т. е. если F_1 и F_2 — кубируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то
$V(F_1\cup F_2)=V(F_1)+V(F_2)$;

(γ) *функция V инвариантна относительно перемещений*, т. е. если $F_1\cong F_2$, то $V(F_1)=V(F_2)$;

(δ) *единичный куб* (т. е. куб, ребро которого имеет длину 1) *имеет объем* 1.

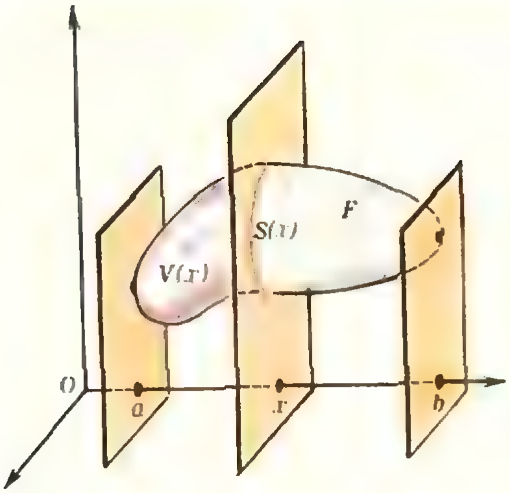


Рис. 15.

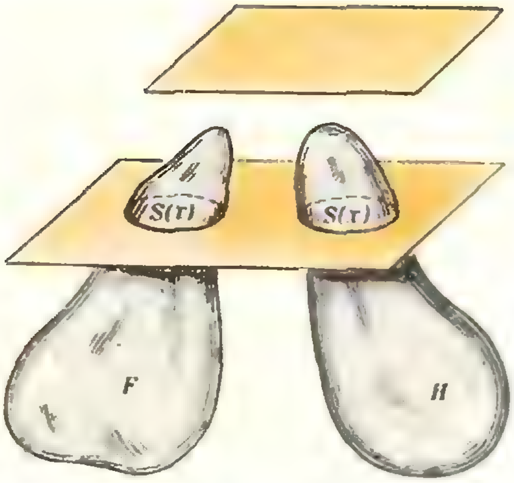


Рис. 16.

Как и в случае площадей, имеет место теорема существования и единственности.

Не останавливаясь на других методах, рассмотрим вычисление объемов при помощи интегрирования и принципа Кавальери для объемов. Пусть в пространстве задана система координат и взята некоторая фигура F, проекция которой на ось абсцисс представляет собой некоторый отрезок $[a, b]$. Через $S(x)$ обозначим площадь фигуры, высекаемой из F плоскостью, которая перпендикулярна оси абсцисс и проходит через точку x отрезка $[a, b]$. Далее, через $V(x)$ обозначим объем той части фигуры F, которая расположена левее проведенной плоскости (рис. 15). Тогда справедливо равенство $V'(x) = S(x)$, т. е. V является *первообразной* для функции S. Доказательство этого равенства — такое же, как и в случае площадей.

Конечно, чтобы доказательство прошло, следует сделать некоторые предположения. Фигура F должна быть кубируемой, ее сечения — квадрируемыми. Кроме того, следует сделать некоторые предположения о характере границы тела F (чтобы прошло рассуждение, аналогичное показанному на рис. 10). В учебнике X класса, например, справедливость равенства $V'(x) = S(x)$ обосновывается для случая, когда F — фигура вращения специального вида. Мы на этом не останавливаемся. Из равенства $V'(x) = S(x)$ следует, что для объема фигуры F справедлива формула

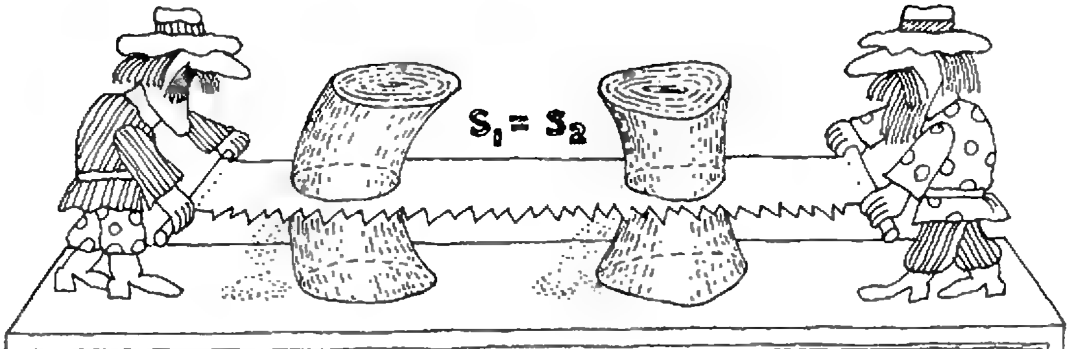
$$V(F) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Наконец, из этой формулы вытекает *принцип Кавальери для объемов: если любая плоскость, параллельная заданной фиксированной плоскости, пересекает пространственные фигуры F и H по фигурам, имеющим одинаковую площадь* (рис. 16), *то фигуры F и H равновелики:* $V(F) = V(H)$. Изящный пример применения принципа Кавальери к вычислению объемов имеется в публикуемой в этом номере заметке М. Мамикона.

Советуем купить!

Виленкин Н. Я. *Популярная комбинаторика.* Ц. 35 к.
Выгодский М. Я. *Справочник по элементарной математике.* Ц. 35 к.
Кошкин Н. И. *Справочник по элементарной физике.* Ц. 97 к.
Пойа Д. *Математическое открытие.* Ц. 1 р. 62 к.

Заказы направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15. Магазин № 8 «Техническая книга».



М. Мамикон

Объем шара

Наверное, каждый школьник хорошо знает, чему равен объем шара. А знаете ли вы, что первым объем шара посчитал древний грек Архимед еще в третьем веке до н. э.?

Объем шара Архимед нашел двумя способами. Первый способ заключался в составлении интегральных сумм и, по существу, был очень близок к современному методу интегрирования (см. «Алгебра и начала анализа 10», пп. 104, 107). Второй, более элементарный способ Архимеда состоял в использовании механического принципа, сочетающего в себе принцип поперечных сечений и найденное им же правило рычага.

Архимед установил, что объем шара в полтора раза меньше объема цилиндра, описанного около шара:

$$V_ш = \frac{2}{3} v_ц.$$

Этот результат Архимед считал самым большим своим достижением. По завещанию Архимеда на его могиле был высечен шар, вписанный в цилиндр. Именно по этому признаку могилу Архимеда через полтора столетия разыскал Цицерон. Сейчас она снова утеряна.

В первой части статьи мы расскажем, как Архимед нашел объем шара с помощью своего механического метода. А затем решим эту задачу чисто геометрически.

Еще до Архимеда был известен принцип поперечных сечений, ныне известный как «принцип Кавальери» (см. статью В. Болтянского «О понятиях площади и объема», с. 2). Этот принцип состоит в следующем.

Пусть в пространстве заданы два тела (см. заставку), и пусть любая плоскость, параллельная данной, в сечении с этими телами образует две фигуры, площади которых равны друг другу: $S_1 = S_2$. (При этом сечение каждого тела, вообще говоря, является переменным.) Тогда эти два тела имеют равные объемы: $V_1 = V_2$.

Представим себе, что оба тела выложены из очень тонких плоскопараллельных слоев одинаковой толщины. Если каждый слой одного тела весит столько, сколько весит соответствующий ему слой в другом теле, то и целиком оба тела весят одинаково.

Очевидно теперь, что принцип поперечных сечений справедлив и в более общей форме: если заданы три тела и в каждом из плоскопараллельных сечений площади сечений первых двух тел в сумме равны площади сечения третьего тела: $S_1 + S_2 = S_3$, то сумма объемов первых двух тел равна объему третьего тела: $V_1 + V_2 = V_3$.

Как мы увидим ниже, Архимед, применяя более общее, механическое развитие принципа поперечных сечений, сумел выразить объем шара через объемы цилиндра и конуса. Последние же были посчитаны еще до Архимеда. В частности, Евдокс показал, что объем конуса в три раза меньше объема описанного около него цилиндра.

Метод Архимеда

Нарисуем, следуя Архимеду, круг радиуса R и прямоугольник, имеющий с кругом общий центр O, со сторонами длины $2R$ и $4R$. Впишем в этот прямоугольник равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A (рис. 1).

Если вращать наш рисунок вокруг оси AB, то круг при вращении образует шар радиуса R, прямоугольник — круговой цилиндр с радиусом основания $2R$, а треугольник — конус, вписанный в цилиндр, с тем же основанием.

Выберем на оси вращения AB точку C на некотором расстоянии x от точки A и проведем через точку C плоскость α, перпендикулярную (AB). В сечении с цилиндром она образует круг радиуса $2R$, в сечении с конусом — круг радиуса $|CD| = |AC| = x$ (поскольку угол при вершине конуса прямой); в сечении с шаром — круг радиуса $|CE|$. Из рисунка 1 видно, что

$$|AE|^2 = |CE|^2 + |AC|^2 = |CE|^2 + |CD|^2.$$

С другой стороны, AE — это катет прямоугольного треугольника AEB (AB — диаметр круга), а потому $|AE|^2 = |AB|\cdot|AC|$. Следовательно,

$$|AB|\cdot|AC| = |CD|^2 + |CE|^2.$$

Умножив обе части этого равенства на число $\pi\cdot|AB|$, получим

$$\pi\cdot|AB|^2\cdot|AC| = \pi\cdot|CD|^2\cdot|AB| + \pi\cdot|CE|^2\cdot|AB|. \qquad (1)$$

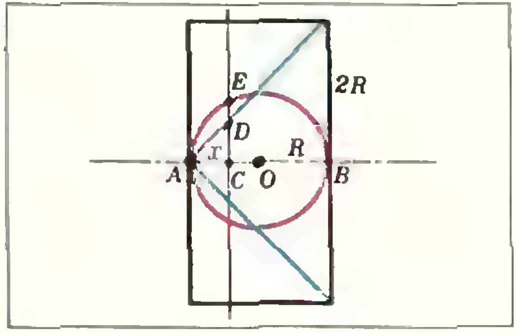


Рис. 1.

Величина $S_{\text{к}} = \pi\cdot|CD|^2$ — это площадь круга, получающегося при пересечении конуса плоскостью α. Величина $S_{\text{ш}} = \pi\cdot|CE|^2$ — это площадь круга, получающегося в сечении шара.

Площадь же круга, получающегося в сечении цилиндра, равна $S_{\text{ц}} = \pi\cdot|AB|^2$. Поэтому равенство (1) мы можем переписать так:

$$x\cdot S_{\text{ц}} = 2R\,(S_{\text{к}}+S_{\text{ш}}). \qquad (2)$$

Если бы множитель x был постоянный, то с помощью принципа поперечных сечений мы выразили бы друг через друга объемы шара, конуса и цилиндра.

Но множитель x — переменный, и это сильно осложняет ситуацию. Казалось бы, дальше не продвинуться. Но тут Архимеда осеняет гениальная догадка, смысл которой состоит в следующем.

Отложим на прямой AB влево от точки A отрезок AT: $|AT| = |AB|$. Представим теперь, что отрезки AB и AT являются плечами рычага, точка опоры которого совпадает с точкой A. Тогда соотношение (2) показывает, что если перенести круговые сечения шара $S_{\text{ш}}$ и конуса $S_{\text{к}}$ в точку T, то они «уравновесят» по отношению к точке A круговое сечение цилиндра $S_{\text{ц}} = \pi\cdot|AB|^2$, оставленное на своем месте C *). Архимед замечает, что подобное соотношение устанавливается и для любых других сечений шара, конуса и цилиндра, лежащих в одной и той же «вертикальной» плоскости. Тут важно отметить, что сечения шара и конуса «подвешиваются» все время в одной и той же точке T, на расстоянии $2R$ от точки опоры рычага A, а сечения цилиндра — на расстоянии x от точки опоры A. Рассматривая различные сечения наших трех тел вертикальными плоскостями (отстоящими от точки A на различные расстояния x), мы каждый раз подвешиваем сечения цилиндра в разных местах (сечения конуса и шара

---

*) Мы предполагаем, что сечения $S_{\text{ш}}$, $S_{\text{к}}$ и $S_{\text{ц}}$ сделаны из одного материала в виде очень тонких круглых дисков одинаковой толщины.

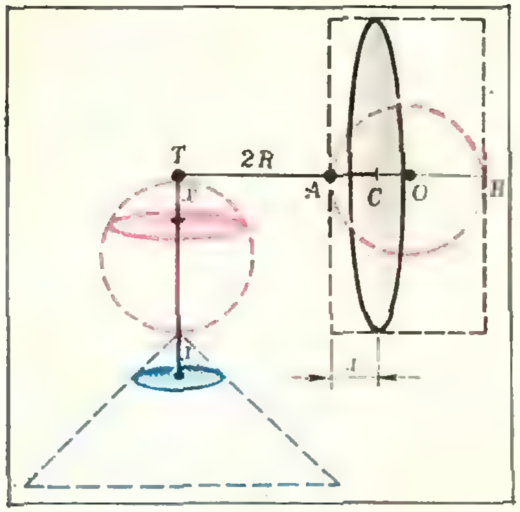


Рис. 2.

меняются по величине при изменении x). Меняя x от нуля до $2R$, т. е. рассматривая всевозможные сечения трех тел, мы, соответственно, уравновешиваем каждые три сечения (см. рис. 2). В результате слева в точке T оказываются подвешенными все сечения шара и конуса, а справа — все сечения цилиндра (рис. 3). Архимед пишет *): «Если теперь, беря такие круги, заполнить ими как цилиндр, так и шар с конусом, то цилиндр, оставаясь в том же положении, будет относительно точки A находиться в равновесии со вместе взятыми шаром и конусом, если перенести их на рычаг в T и поместить так, чтобы центр тяжести каждого из них оказался под T». Но центр тяжести оставшегося на месте цилиндра находится в точке O — середине отрезка AB. Поэтому, если $V_{\text{ц}}$, $V_{\text{ш}}$ и $V_{\text{к}}$ — соответственно, объемы цилиндра, шара и конуса, то, по правилу рычага, условие равновесия имеет вид:

$$V_{\text{ц}}\cdot|AO| = (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}})\cdot|AT|,$$

т. е.

$$R\cdot V_{\text{ц}} = 2R\cdot(V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}),$$

откуда

$$V_{\text{ш}} = \tfrac{1}{2}V_{\text{ц}} - V_{\text{к}}.$$

Но конус по построению был вписан в цилиндр, так что его объем втрое меньше объема цилиндра: $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}V_{\text{ц}}$. Поэтому

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{2}V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} =$$

$$= \frac{1}{2}V_{\text{ц}} - \frac{1}{3}V_{\text{ц}} = \frac{1}{6}V_{\text{ц}}.$$

Заменим наш цилиндр цилиндром, описанным около шара. Радиус его основания будет вдвое меньше радиуса основания первоначального цилиндра. Объем нового цилиндра $v_{\text{ц}}$ в четыре раза меньше объема первоначального цилиндра: $V_{\text{ц}} = 4v_{\text{ц}}$, так что

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{6}V_{\text{ц}} = \frac{2}{3}v_{\text{ц}},$$

т. е. объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра, — это и есть результат, которым так гордился Архимед.

Геометрическое решение

Возьмем круг радиуса R и опишем около него квадрат. Проведем диагонали квадрата, как на рисунке 4.

---

*) Именно в этих рассуждениях усматривается остроумное сочетание принципа поперечных сечений с правилом механического равновесия рычага.

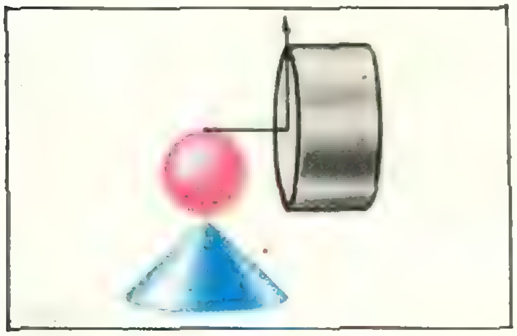


Рис. 3.

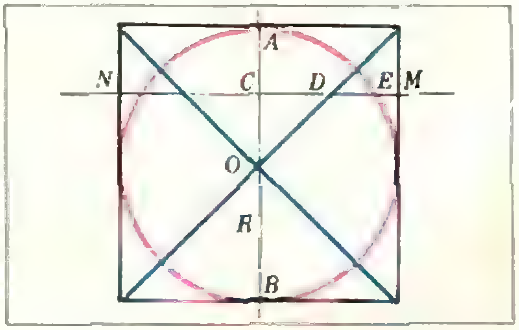


Рис. 4.

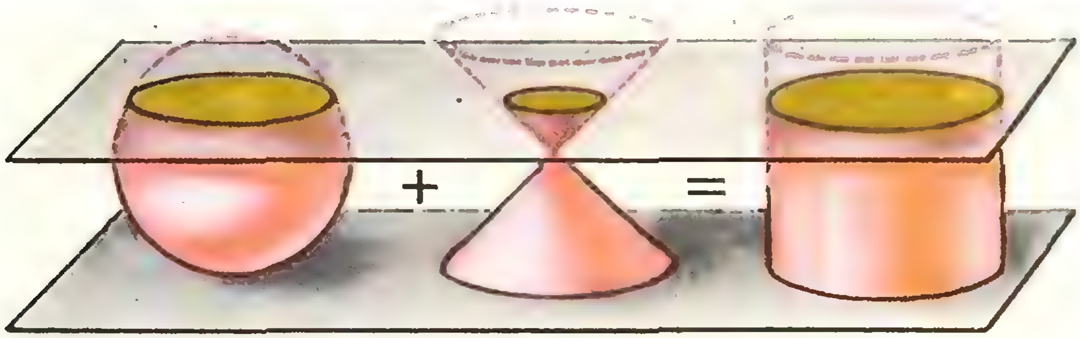


Рис. 5.

Вращая рисунок 4 вокруг вертикальной оси AB, мы получим шар радиуса R, описанный около шара цилиндр и вписанный в цилиндр «двойной» круговой конус с вершиной в центре шара O. На рисунке 5 изображены эти три тела.

Возьмем точку C на оси вращения AB на некотором расстоянии x от центра шара и проведем через C горизонтальную плоскость (MN). Эта плоскость в сечении с цилиндром образует круг радиуса $|CM| = R$, в сечении с конусом — круг радиуса $|CD| = |OC| = x$ (так как угол при вершине конуса прямой) и в сечении с шаром — круг радиуса $|CE|$. По теореме Пифагора $|OE|^2 = |CE|^2 + |OC|^2$, или

$$|CM|^2 = |CE|^2 + |CD|^2.$$

Умножив обе части этого соотношения на число π, получим $\pi \cdot |CM|^2 = \pi \cdot |CE|^2 + \pi \cdot |CD|^2$, т. е.

$$s_ц = S_ш + s_к, \qquad (3)$$

где $s_ц$, $S_ш$ и $s_к$ — соответственно, площади кругов, получающихся при пересечении цилиндра, шара и конуса плоскостью (MN).

Соотношение (3) выполняется для любых других сечений цилиндра, шара, и конуса, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. Вспоминая принцип поперечных сечений, перейдем от соотношения (3) для площадей к такому же соотношению для объемов:

$$v_ц = V_ш + v_к.$$

Поскольку объем цилиндра втрое больше объема вписанного в него «двойного» конуса (у которого те же основание и высота), т. е. $v_к = \frac{1}{3} v_ц$, мы получаем результат Архимеда:

$$V_ш = v_ц - v_к = v_ц - \frac{1}{3} v_ц = \frac{2}{3} v_ц,$$

а именно, что объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра.

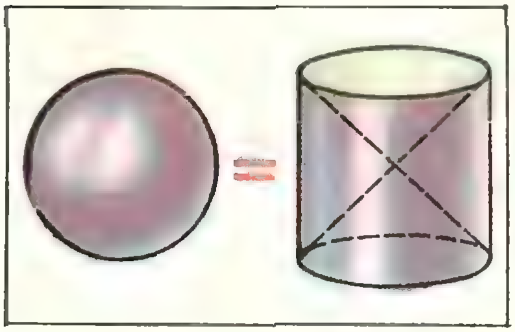


Рис. 6.

Задача

На рисунке 6 изображены шар и цилиндр с двумя коническими воронками на основаниях. Высота и диаметр основания цилиндра равны диаметру шара. Какое из этих двух тел весит больше?

А. Дозоров

Можно ли поднять себя за волосы?

Решение самой сложной технической задачи, как правило, начинается с рассмотрения идеального варианта, часто весьма далекого от реальной проблемы. Аналогичным образом позволит себе действовать автор этих строк и начнет издалека.

Вариант первый

Задача. *На носу лодки установлен щит, в который мальчик с кормы лодки бросает камни. Считая удар камня о щит абсолютно неупругим и пренебрегая силой трения лодки о воду и камня о воздух, найти перемещение центра масс системы.*

Решение. Рассмотрим систему лодка (со щитом) — мальчик — камень. Все силы, действующие на тела в этой системе, — это силы взаимодействия между телами системы. Никакие внешние силы на систему не действуют (ведь силами трения камня о воздух и лодки о воду мы пренебрегаем). Но это означает, что импульс (количество движения) системы остается неизменным. И если в начальный момент времени (до бросания камня) центр масс системы был неподвижным (лодка находится в стоячей воде) или двигался с некоторой скоростью $\vec{v}$ (лодка плывет по течению), то и в любой другой момент времени он будет неподвижен или будет двигаться с той же самой скоростью $\vec{v}$. И бросание камня, и удар камня о щит никак не скажутся на положении центра масс. Иными словами, силы взаимодействия между телами изолированной (замкнутой) системы не могут изменить положения центра масс системы.

Вариант второй, в котором задача несколько усложняется

Задача. *На носу лодки установлен щит, в который мальчик с кормы лодки бросает камни. Считая, что удар камня о щит абсолютно неупругий, а абсолютная величина силы трения лодки о воду равна F, и пренебрегая силой трения камня о воздух, найти перемещение центра масс системы*).*

Решение. Если до бросания камня центр масс системы был неподвижен, то скорость лодки $\vec{v}_{л_0}$ сразу после броска и скорость камня $\vec{v}_к$ связаны соотношением

$$m\vec{v}_к + M\vec{v}_{л_0} = 0$$

(m — масса камня, M — масса лодки). После броска, как только лодка начнет двигаться со скоростью $\vec{v}_{л_0}$, система лодка — мальчик — камень перестанет быть изолированной. На нее начнет действовать внешняя сила —сила—$\vec{F}$ трения лодки о воду (знак «—» перед $\vec{F}$ означает, что направление этой силы противоположно направлению $\vec{v}_{л0}$). Сила трения будет уменьшать скорость движения лодки, и к моменту удара камня о щит (через время t после броска) скорость лодки станет $\vec{v}_{лt} < \vec{v}_{л0}$, так что к этому моменту абсолютная величина импульса лодки уменьшится: $M\,|\vec{v}_{лt}| < M\,|\vec{v}_{л0}| = m\,|\vec{v}_к|$. Значит, суммарный импульс всей системы сразу после удара камня о щит будет отличен от нуля и направлен в сторону движения камня. Абсолютную величину скорости $\vec{u}$ всей системы (ее центра масс) после удара можно определить из соотношения (см. рис. 1)

---

*) В жидкостях сила трения зависит от скорости движущегося тела. Поэтому говорить о постоянной силе трения не совсем корректно. Однако все качественные рассуждения и выводы, которые мы получим в этом варианте, будут справедливы; под силой $\vec{F}$ следует понимать среднее (за время t) значение силы трения.

$$(M + m)\,|\vec{u}| = m\,|\vec{v}_к| - M\,|\vec{v}_{лt}|,$$

или (так как $M\,|\vec{v}_{лt}| = M\,|\vec{v}_{л0}| - |\vec{F}|\,t = m\,|\vec{v}_к| - |\vec{F}|\,t$)

$$(M + m)\,|\vec{u}| = |\vec{F}|\,t.$$

А зная величины $\vec{u}$ и $\vec{F}$, нетрудно найти и перемещение центра масс системы в любой момент времени.

Итак, наличие силы трения лодки о воду приводит к следующим особенностям:

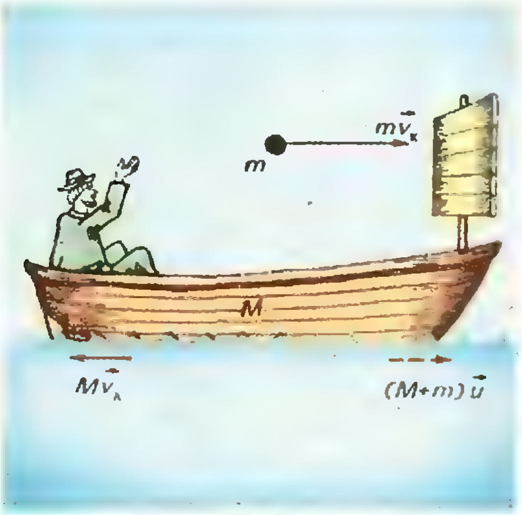


Рис. 1.

1) скорость лодки после удара камня о щит будет направлена в сторону бросания;

2) чем больше сила трения, тем быстрее убывает скорость «отдачи» лодки, тем меньше $\vec{v}_{лt}$, тем, следовательно, больше конечная скорость всей системы.

Таким образом, бросая камни с кормы на нос лодки, можно передвигаться без использования весел. После того как все камни с кормы будут переброшены на нос, необходимо очень медленно перетащить их назад. Затем все можно повторить сначала.

Если в лодке нет камней, а весла потеряны, то все равно положение не безвыходное. Роль камня может играть сам человек. Нужно быстро прыгать с кормы на нос и медленно возвращаться назад.

Если путешественник изобретателен, то совершение диких прыжков с кормы на лодку он поручит механизму. Достаточно установить на лодке эксцентрик, который в разные стороны движется с неодинаковыми скоростями.

Описанный выше способ передвижения не является оригинальным. Уже много лет в журналах появляются заметки о подобных самодвижущихся тележках. А в последние годы созданы и большие модели таких экипажей.

Вариант третий, в котором все учитывается

Учтем теперь и силу $\vec{F}$ трения лодки о воду, и силу $\vec{\mathcal{F}}$ трения камня о воздух.

После того как мы разобрались со вторым вариантом, мы можем сразу записать, чему будет равен суммарный импульс системы сразу после удара камня о щит:

$$(M + m)\vec{u} = \vec{F}t + \vec{\mathcal{F}}t.$$

Здесь по-прежнему $\vec{u}$ — скорость центра масс системы, t — время полета камня до удара о щит. Заменив векторные величины их проекциями на направление движения лодки и приняв направление полета камня

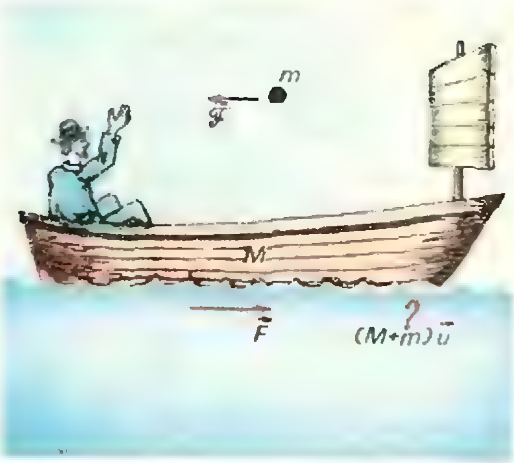


Рис. 2.

за положительное, получим (рис. 2)

$$(M+m)u=(F-\mathcal{F})\,t.$$

Итак, в зависимости от того, каковы силы $\vec{F}$ и $\vec{\mathcal{F}}$, лодка может после удара камня о щит остаться неподвижной, а может и приобрести скорость, направленную либо в сторону бросания камня ($|\vec{F}|>|\vec{\mathcal{F}}|$), либо в противоположную сторону ($|\vec{\mathcal{F}}|>|\vec{F}|$).

Автор решительно выступает в защиту барона Мюнхаузена

Помните ли вы замечательную историю, рассказанную бароном Мюнхаузеном? Находясь в крайне тяжелом положении (увязая в болоте), барон спас свою жизнь, вытянув самого себя за волосы. Как и все, о чем рассказывал этот замечательный фантазер, эта история представлялась слушателям чистой выдумкой. Но вам, читатель, после того, как вы разобрали три варианта задачи о лодке и камне, не кажется ли, что в данном случае Мюнхаузен рассказывал чистую правду?

Давайте установим аналогию между задачей о лодке и задачей, которую успешно решил барон Мюнхаузен.

Заменим лодку (без камня) туловищем человека, а роль бросаемого камня отведем рукам человека. Если быстро выбросить руки вверх и немного медленнее вернуть их в исходное положение, то, по аналогии с уже рассмотренными вариантами, в результате действия силы трения о воздух (или о другую среду, в которой находится человек) тело человека может приобрести некоторую скорость, направленную вверх. Роль щита в лодке в этом случае выполняют плечи человека. Если экспериментатор держит себя за волосы (что, кстати, делать не обязательно), роль щита выполняет его неразумная голова. Чтобы не учитывать реакцию твердой опоры, рассмотрим человека, подпрыгнувшего на некоторую высоту и энергично дергающего себя за шевелюру. Если действия его действительно энергичны и удовлетворяют алгоритму, описанному выше, то скорость движения вверх может превысить скорость падения вниз (корректнее говорить о соответствующих силах), и человек сможет не только парить в воздухе, но и подниматься вверх.

Возражения читателей, у которых эксперимент пройдет неудачно, автор рассматривать не будет. Учтите, что только изящная постановка эксперимента может привести к его согласию с теорией.

Задачи наших читателей

1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники. Пусть D, E, F — центры тяжести этих треугольников. Доказать, что $S_{DEF}\geqslant S_{ABC}$.

А. Ермилов
(г. Коломна)

2. Три точки на плоскости являются концами диаметров трех окружностей, причем одна из окружностей проходит через все три точки.

Доказать, что площадь большего круга равна сумме площадей двух меньших.

М. Васнецов
(г. Москва)

3. На плоскости даны треугольники ABC и MNK, причем прямая MN проходит через середины сторон AB и AC, а в пересечении этих треугольников образуется шестиугольник площади S с попарно параллельными противоположными сторонами. Доказать, что

$$3S<S_{ABC}+S_{MNK}.$$

Я. Темралиев
(с. Новый Рычан
Астраханской обл.)

Г. Новинский,
В. Хомазюк

Закон Архимеда и... решение уравнений

В прошлом году в девятом номере нашего журнала было рассказано, как решать кубические уравнения с помощью формулы Кардано и графическим способом. Теперь мы хотим познакомить вас еще с одним способом решения уравнений третьей степени — с помощью... некоторых законов физики.

Перелистывая страницы старого, но очень интересного журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» (1903 г., № 348), мы обнаружили описание давно забытой весьма остроумной машины Меслина для решения алгебраических уравнений. Меслин предложил находить корни уравнения

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0, \quad (1)$$

определяя глубину погружения в воду специально изготовленных грузов, подвешенных к коромыслу весов (см. рисунок).

Что же собой представляют эти грузы? Оказывается, грузы должны быть такой формы, чтобы объем вытесняемой ими воды был численно равен глубине погружения, возведенной в соответствующую степень (1, 2, 3, ..., n). Другими словами, каждому члену в уравнении (1) должен соответствовать определенный груз.

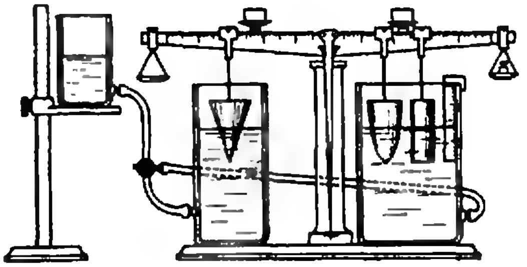
Удобнее всего в качестве грузов использовать тела вращения*). Для члена $a_1 y$ соответствующим телом вращения будет цилиндр с площадью основания, равной единице. Объем воды, вытесняемой таким цилиндром, будет численно равен глубине погружения (y). Для члена $a_2 y^2$ надо изготовить тело, называемое параболоидом вращения. Оно образуется при вращении параболы (точнее, дуги параболы) вокруг своей оси. Если парабола описывается уравнением $y = \frac{\pi}{2} x^2$, то объем параболоида вращения $V = \frac{1}{2} S y = \frac{1}{2} (\pi x^2) y = y^2$. При погружении этого тела на глубину y объем вытесняемой воды будет равен y^2 — квадрату глубины погружения. Члену $a_3 y^3$ соответствует конус, образующая которого описывается уравнением $y = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, x$. Такой конус вытесняет объем воды, равный y^3 — кубу глубины погружения (проверьте это!).

Можно показать, что и в общем случае, если для члена $a_k\, y^k$ изготовить соответствующее тело, вращая кривую (точнее, дугу кривой) $y = \sqrt[k-1]{\frac{\pi x^2}{k}}$ вокруг оси ординат, то объем вытесненной этим телом воды будет численно равен y^k.

Как же все-таки работает машина Меслина? Рассмотрим конкретный пример — экспериментально найдем корни кубического уравнения

$$y^3 - 16y^2 + 83y - 140 = 0. \quad (2)$$

Для работы понадобятся рычажные весы, три сообщающихся сосуда с водой (или один большой прозрачный сосуд) и три груза — цилиндр, параболоид вращения и конус. Коромысло весов лучше не прикреплять к стойке (как показано на рисунке), а, подобно аптекарским весам, подвесить на



---

*) См., например, главу IV «Геометрии 10».

нити. На правом и левом плечах коромысла длиной 20 *см* сделаем отметки в миллиметрах. Грузы можно изготовить, например, из алюминия. Высота всех грузов пусть будет одинакова и равна 10 *см*. Площадь основания цилиндра возьмем равной 1 $см^2$, тогда его объем будет равен 10 $см^3$, а масса —27 *г*. Однако разумно массу цилиндра уменьшить до 10 *г* (т. е. сделать ее численно равной объему): необходимые расчеты существенно упростятся. Для этого можно изнутри, вдоль оси цилиндра, высверлить соответствующее отверстие (но не до дна!). Аналогично изготовим и другие тела вращения. Параболоид вращения будет иметь объем 100 $см^3$ и массу 100 *г* (и в этом случае часть металла изнутри придется удалить). А вот конус лучше сделать в 100 раз меньшим по объему и массе, чем предлагалось Меслиным. Иначе при высоте конуса 10 *см* диаметр его в верхней части будет порядка 20 *см*! Таким образом, образующая нашего конуса описывается уравнением $y = 10\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,x$, объем конуса (при высоте 10 *см*) равен 10 $см^3$, а масса (с учетом внутреннего отверстия) — 10 *г*. При этом диаметр верхней части конуса ≈ 2 *см*, так что никаких «технических» затруднений не возникает.

Теперь приступим непосредственно к эксперименту. Для удобства перепишем уравнение (2) иначе, перенеся члены с отрицательными коэффициентами вправо:

$$y^3 + 83y = 16y^2 + 140. \qquad (3)$$

Развесим грузы на коромысле весов и приведем весы в равновесие. Конус, соответствующий члену y^3, подвесим к левому плечу коромысла. Поскольку коэффициент при y^3 в уравнении (3) равен 1, было бы разумно прикрепить конус на расстоянии 1 *мм* (будем измерять расстояния в *мм*) от оси вращения коромысла. Но масса конуса у нас в 100 раз меньше, чем она должна быть. Чтобы скомпенсировать это, подвесим конус на отметке 100 *мм*. Цилиндр, соответствующий члену $83y$, подвесим тоже к левому плечу коромысла на расстоянии 83 *мм* от его середины. На правое плечо коромысла подвесим параболоид вращения на отметке 16 *мм*. Ясно, что весы не будут в равновесии: сумма моментов сил, вращающих коромысло против часовой стрелки, не равна сумме моментов сил, вызывающих вращение по часовой стрелке. Однако равновесия можно легко добиться, причем самыми разными способами. Например, прикрепим к делению 100 *мм* на правом плече коромысла необходимый добавочный грузик. Из условия равенства моментов сил тяжести легко найти массу этого грузика — она равна 2,3 *г*.

Затем начнем постепенно заполнять водой сообщающиеся сосуды. Как только вода дойдет до подвешенных грузов (заметим, что их нижние вершины должны находиться на одном уровне), равновесие нарушится. Это и понятно: при погружении на одну и ту же глубину разные тела вытесняют разные объемы воды, т. е. возникают разные выталкивающие силы. А дополнительный грузик и вовсе не погружается в воду.

Можно ли восстановить нарушенное равновесие? Да, если суммарные моменты выталкивающих сил, действующих на коромысло весов слева и справа, станут одинаковыми. Пусть глубина погружения тел равна y. Тогда момент выталкивающей силы, действующей на конус, пропорционален y^3, на цилиндр — $83\,y$, а на параболоид вращения — $16y^2$ (коэффициентом пропорциональности является ускорение свободного падения). Но все эти величины входят в уравнение (3)! Только свободный член оказался «не при деле». Включим и его в работу. Чтобы представить выталкивающий момент, соответствующий свободному члену нашего кубического уравнения, создадим на левом плече коромысла момент, пропорциональный величине этого свободного члена (140). Для этого можно, например, еще один дополнительный грузик массой 1,4 *г* подвесить на отметке 100 *мм* левого плеча коромысла.

Таким образом, уравнение моментов выталкивающих сил будет выглядеть так:

$$y^3 + 83y = 16y^2 + 140.$$

Измеряя глубину погружения y соответствующего положения равновесия, найдем корни нашего исходного уравнения. В первый раз равновесие восстанавливается при глубине погружения 4 *см*, во второй раз — при глубине 5 *см* и в третий раз — 7 *см*. Обратите внимание, что каждый раз при переходе положения равновесия наклон коромысла изменяется на противоположный. До глубины 4 *см* коромысло наклонено влево, от 4 до 5 *см* — вправо и т. д.

В принципе таким методом можно находить и отрицательные корни. Для этого надо в исходном уравнении сделать замену переменной: $y = -x$ и искать x для соответствующего уравнения.

Хотя точность определения корней описанным методом невелика, сам метод, по нашему мнению, представляет определенный интерес. Пожалуй, самое трудное в этом эксперименте — изготовить параболоид вращения. Однако эту трудность легко избежать, но об этом ... в следующей статье.

В. Смышляев

Сообщающиеся сосуды и ... уравнения

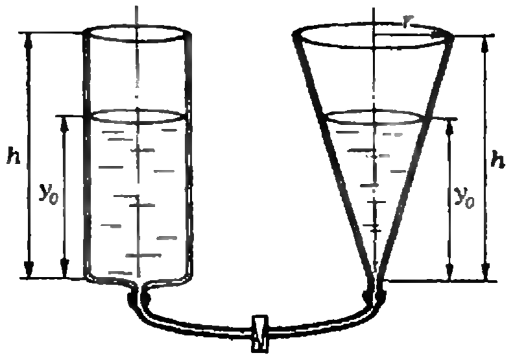
Кубическое уравнение вида

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

простым преобразованием можно привести к уравнению без квадратного члена, т. е. к уравнению

$$x^3 + px + q = 0.$$

Для этого достаточно положить $y = x - \frac{a}{3}$.



Рассмотрим частный случай последнего уравнения, когда $p \geqslant 0$, а $q < 0$. Сделаем еще одну замену: пусть $x = y\sqrt{p}$. Получим уравнение вида

$$y^3 + y = a, \qquad (*)$$

где $a = \frac{-q}{p\sqrt{p}}$ $(a > 0)$. Найдем положительный корень этого уравнения.

Возьмем два сосуда одной и той же высоты h (см. рисунок): один — цилиндрический с площадью основания 1 *см*², другой — конический с объемом h^3 $\left(\frac{h}{r} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Соединим их тонкой трубкой с краном. Нальем в один из сосудов a *см*³ воды и откроем кран. Вода будет перетекать во второй сосуд до тех пор, пока уровни воды в обоих сосудах не станут одинаковыми. Обозначим через y_0 высоту уровня воды. При этом объем воды в цилиндрическом сосуде будет численно равен y_0, в коническом сосуде — y_0^3, а суммарный объем воды равен a. Следовательно,

$$y_0^3 + y_0 = a$$

(объемом воды в соединительной трубке мы пренебрегаем).

Значит, y_0 — один из корней уравнения (*).

задачник кванта

Задачи

M441 — M445; Ф453 — Ф457

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июля 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М441, М442» или «... Ф453». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M441. Внутри выпуклого $2n$-угольника взята произвольная точка P. Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны).

Г. Гуревич

M442. Дано простое число $p>2$. Для каждого k от 1 до $p-1$ обозначим через a_k остаток от деления числа k^p на p^2. Докажите, что

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{p-1}=(p^3-p^2)/2.$$

С. Охитин

M443. Имеется таблица $n\times n$ клеток, в каждой клетке которой вначале стоит число 0. Разрешается произвольно выбрать n чисел, стоящих в разных строках и разных столбцах, и увеличить каждое из них на 1.

а) Можно ли за несколько шагов получить таблицы, изображенные на рисунках 1 и 2?

б) Можно ли получить таблицу с попарно различными числами?

в) * Какие вообще таблицы можно получить через T шагов?

Ф. Шлейфер

M444. а) На рисунке 3 четыре прямые разбивают плоскость на одиннадцать областей: четырех-

1	2	3	• • •	n
2	3	4	• • •	1
3	4	5	• • •	2
• • •	• • •	• • •	• • • • • • • • •	• • •
n	1	2	• • •	n-1

Рис. 1.

1	2	3	• • •	n
2	3	4	• • •	n+1
3	4	5	• • •	n+2
• • •	• • •	• • •	• • • • • • • • •	• • •
n	n+1	n+2	• • •	2n-1

Рис. 2.

угольник (1), два треугольника (2 и 3), три угла (4, 5 и 6), четыре «бесконечных треугольника» – области, ограниченные каждая отрезком и двумя лучами (7, 8, 9 и 10), и «бесконечный четырехугольник» — область, ограниченную двумя отрезками и двумя лучами (11).

Будет ли сказанное верно для любых четырех прямых на плоскости, среди которых нет параллельных и нет троек прямых, проходящих через одну точку?

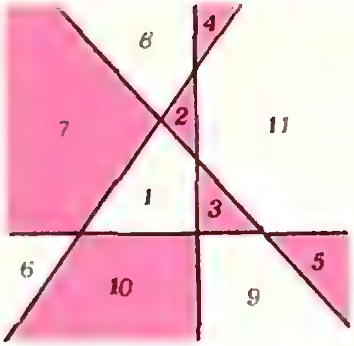


Рис. 3.

б) Три больших круга, не проходящих через одну точку, разбивают сферу на восемь треугольников. На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку? (Большим кругом на сфере называют окружность, являющуюся пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы; рис. 4.)

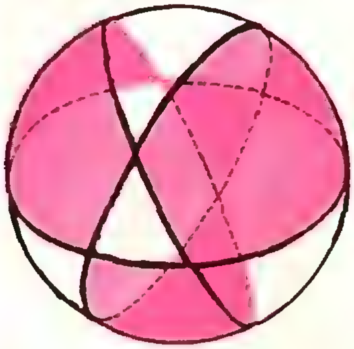


Рис. 4.

в) На какие области могут разбить сферу пять больших кругов, никакие три из которых не проходят через одну точку?

А. Колмогоров

М445. Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных шестиугольников, покрывающих плоскость так, как указано на рисунке 5. Пусть M — многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим в красный цвет те окружности или их части (дуги), которые лежат внутри M. Покажите что сумма градусных величин красных дуг равна $C\cdot 180^\circ$, где $C=C(M)$ — целое число, и дайте этому числу геометрическую интерпретацию.

А. Сосинский

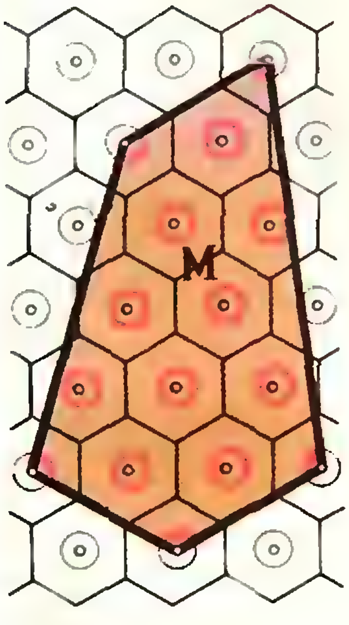


Рис. 5.

Ф453. Система грузов, показанная на рисунке 6, стоит на гладком горизонтальном столе. Массы кубиков m_1, m_2 и M. Кубик массы m_2 удерживают на высоте l над столом. Если систему предоставить самой себе, то она придет в движение, причем верхний кубик будет скользить по нижнему. Коэффициент трения между кубиками равен k. На какое расстояние переместится нижний кубик к тому моменту, когда кубик массы m_2 коснется стола?

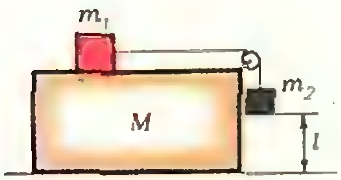


Рис. 6.

Ф454. Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение $u_0=220$ *в*, то напряжение на вторичной обмотке будет $u_1=127$ *в*. Какое напряжение будет при $u_0=220$ *в* на нагрузке $R=10$ *ом*, подключенной ко вторичной обмотке этого трансформатора? Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора $r_1=2$ *ом*, а вторичной — $r_2=1$ *ом*. Внутреннее сопротивление генератора тока принять равным нулю.

В. Скороваров

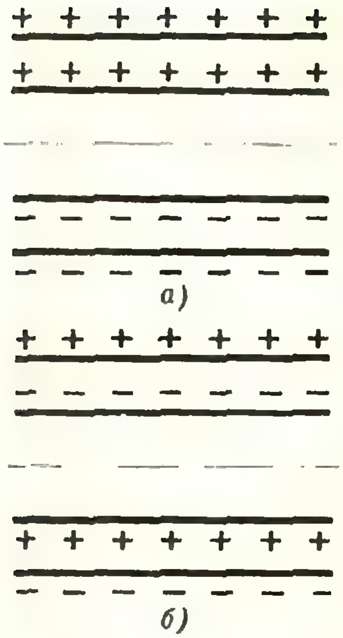


Рис. 7.

Ф455. Потери мощности в линии электропередачи составляют 5% от мощности, получаемой потребителем. Как нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, потери в линии снизить до 1%?

И. Слободецкий

Ф456. Какую минимальную скорость нужно сообщить на Земле космическому кораблю для того, чтобы он попал на Солнце? Каким будет время полета корабля к Солнцу?

Ф457. Два плоских воздушных конденсатора с одинаковыми обкладками заряжены до одинаковых зарядов. Расстояние между обкладками у первого конденсатора вдвое больше, чем у второго. Как изменится энергия электрического поля системы, если второй конденсатор вставить между обкладками первого так, как показано на рисунке 7, *а* и *б*?

С. Козел

Решения задач

М396, М397, М400—М402 *); Ф407—Ф412

М396. *Треугольник, все стороны которого больше 1 см, назовем «большим». Дан правильный треугольник ABC со стороной 5 см. Докажите, что: а) из треугольника ABC можно вырезать 1000 «больших» треугольников; б) треугольник ABC можно разрезать на 1000 «больших» треугольников; в) треугольник ABC можно триангулировать на 1000 «больших» треугольников, то есть разбить его так, чтобы любые два треугольника либо не имели общих точек, либо имели только общую вершину, либо имели общую сторону; г) сделайте пункты б) и в) для правильного треугольника со стороной 3 см.*

Мы решим пункты б) и в) задачи для треугольника со стороной 3 *см*; это же решение годится и для треугольника со стороной 5 *см*. Пункт а) немедленно следует из б).

Итак, пусть ABC — правильный треугольник со стороной 3 *см* (рис. 1). Пусть K и L — точки, делящие сторону AC на три равные части, P — середина стороны BC. Восставим из точек K и L перпендикуляры KN и LM к стороне AC; пусть $N_1 = [AP] \cap [KN)$, $M_1 = [CN_1] \cap [LM)$, $N_2 = [AM_1] \cap \cap [KN)$, $M_2 = [CN_2] \cap [LM)$, и т. д. Мы получаем разбиение треугольника на треугольники ABP, CPN_1, AN_1M_1, CM_1N_2, AN_2M_2 и т. д. Все эти треугольники — «большие»: стороны каждого из них больше 1 *см* ($|BP| = |CP| = 1{,}5$ *см*, а остальные стороны больше 1 *см*, поскольку их проекции на AC не меньше 1 *см*). Из решения ясно, что вместо числа 1000 можно было бы написать любое другое сколь угодно большое число.

---

*) Решение задачи М398 будет помещено в следующем номере журнала; задача М399 решена в статье А. Савина «От школьной задачи — к проблеме» (см. «Квант», 1976, № 12).

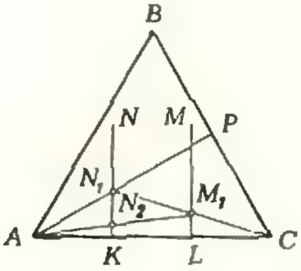


Рис. 1.

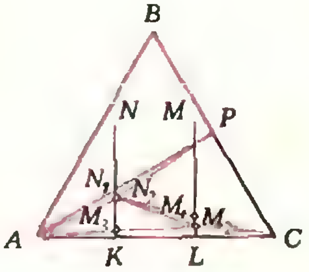


Рис. 2.

Построение триангуляции треугольника ABC на «большие» треугольники (пункт в) задачи) основано на той же идее.

Пусть точки K, L и P — такие же, как и раньше, KN и LM — перпендикуляры к AC, точка $N_1 = [AP] \cap [KN)$. Возьмем на отрезке KN_1 точку N_2 и соединим ее с точками A, P и C (рис. 2). Обозначим через M_1 точку пересечения $[LM)$ с $[CN_2]$: $M_1 = [CN_2] \cap [LM)$. На отрезке LM_1 возьмем точку M_2 и соединим ее с точками A, N_2 и C. Через M_3 обозначим точку пересечения $[KN)$ с $[AM_2]$; на отрезке KM_3 возьмем точку M_4, соединим ее с точками A, M_2 и C и т. д.

Продолжая этот процесс, мы получим (по той же причине, что и выше) искомую триангуляцию треугольника ABC на «большие» треугольники ABP, APN_2, CN_2P, AN_2M_2, CN_2M_2, … (число треугольников может быть сделано каким угодно).

С. Фомин

◆

М397. *На плоскости даны три окружности одинакового радиуса. а) Докажите, что если они пересекаются в одной точке, как показано на рисунке 3, то сумма отмеченных дуг AK, CK, EK равна 180°. б) Докажите, что если они расположены так, как показано на рисунке 4, то сумма отмеченных дуг AB, CD, EF равна 180°.*

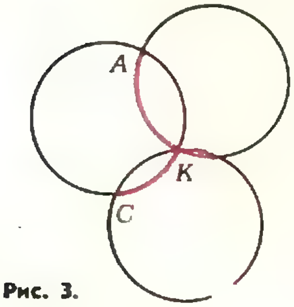


Рис. 3.

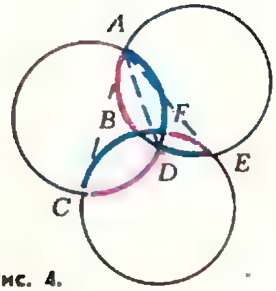


Рис. 4.

Мы решим задачу б); решение задачи а) точно такое же.

Прежде всего заметим, что дуги ABD и AFD конгруэнтны (рис. 4). Точно так же конгруэнтны дуги CBF и CDF и дуги EDB и EFB. Из этого легко вывести, что сумма отмеченных дуг AB, CD и EF равна сумме дуг DE, BC и AF (на рисунке 4 они синего цвета). В самом деле,

$$\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{EF} = (\overset{\smile}{ABD} - \overset{\smile}{BD}) + (\overset{\smile}{CDF} - \overset{\smile}{DF}) + (\overset{\smile}{EFB} - \overset{\smile}{BF}) = (\overset{\smile}{AFD} - \overset{\smile}{DF}) + (\overset{\smile}{CBF} - \overset{\smile}{BF}) + (\overset{\smile}{EDB} - \overset{\smile}{BD}) = \overset{\smile}{AF} + \overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{DE}.$$

Рассмотрим углы треугольника AEC. Имеем

$$\widehat{CAE} = \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{DE});$$

аналогично

$$\widehat{ACE} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AF} + \overset{\smile}{EF}),$$

$$\widehat{AEC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{AB}).$$

Сумма углов треугольника равна 180°, то есть

$$180° = \widehat{CAE} + \widehat{ACE} + \widehat{AEC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{DE} + \overset{\smile}{AF} + \overset{\smile}{EF} + \overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{AB}) = \frac{1}{2}[(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{EF}) + (\overset{\smile}{AF} + \overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{DE})] = \frac{1}{2}\cdot 2(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{EF}),$$

откуда

$$\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{EF} = 180°,$$

что и требовалось.

А. Толпыго

◆

М400. *Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, …, a_k назовем универсальной для заданного N, если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую последовательность из N чисел, в которую каж-*

а) Выписав подряд N групп вида 1, 2, …, N, мы получим универсальную последовательность длины N^2.

б) Вот пример N-универсальной последовательности длины $N^2 - N + 1$. Выпишем подряд $N - 1$ группу чисел 1, 2, …, N и в конце припишем число 1. Докажем, что эта последовательность действительно является N-универсальной.

дое из чисел $1, 2, \ldots, N$ входит по одному разу.

а) Приведите пример универсальной последовательности из N^2 членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из $N^2 - N + 1$ членов.

в) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $\frac{N(N+1)}{2}$ членов.

г) Докажите, что при $N = 4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д) Попробуйте найти, для данного N как можно более короткую универсальную последовательность.

Пусть $q = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ — произвольная *перестановка* чисел $1, 2, \ldots, N$. Если эта перестановка вида $q = (N, N-1, \ldots, 1)$, то вычеркнем в нашей последовательности в первой группе все числа, кроме N, во второй — все числа, кроме $N-1$, и т. д. Если же q не такого вида, то для некоторого k будем иметь: $b_k < b_{k+1}$. В этом случае, если $i < k$, то вычеркнем в i-й группе нашей последовательности все числа кроме числа b_i; в k-й группе вычеркнем все числа, кроме двух b_k и b_{k+1}, а если $j > k$, то вычеркнем в j-й группе все числа, кроме числа b_{j+1}. И, наконец, вычеркнем самое последнее число 1, — получим перестановку $q = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$.

Для решения пункта д) нам понадобится некоторое обобщение этой конструкции*). А именно: пусть $1 \leqslant k \leqslant N$. Выпишем подряд $k - 1$ группу чисел $1, 2, \ldots, N$, а за ними укороченную k-ю группу вида $1, 2, \ldots, N - k + 1$ (например, при $N = 5$, $k = 3$ получим 1234512345123); получим последовательность длины $kN - k + 1$. Совершенно аналогично доказывается, что из этой последовательности вычеркиванием части членов можно получить любую последовательность длины k, в которой встречаются числа $1, 2, \ldots, N$ — каждое не более одного раза. Такое свойство мы будем называть (N, k)-универсальностью.

Построим теперь N-универсальную последовательность длины $N^2 - 2N + 4$ (это является улучшением предыдущей оценки, начиная с $N = 4$). Выпишем подряд $N - 2$ группы чисел вида $1, 2, \ldots, N - 1$. За ними напишем укороченную $(N-1)$-ю группу, состоящую всего из двух чисел: 1 и 2. Затем вставим в эту последовательность N экземпляров числа N по следующему правилу: первый экземпляр напишем в самом начале, второй — в первой группе, после первого вхождения числа $N - 1$, третий экземпляр — во второй группе, после второго вхождения в нашу последовательность числа $N - 2$ и т. д. Последний, N-й экземпляр числа N вставим в последнюю укороченную группу после последнего вхождения числа 1 (например, при $N = 5$ получим последовательность 512345123541253415 2). Получим последовательность длины $(N-1)(N-2) + 2 + N = N^2 - 2N + 4$; обозначим ее через P. Докажем, что последовательность P является N-универсальной. В самом деле, пусть q — произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, N$, и пусть число N встречается в последовательности q на k-м месте. Число N разбивает последовательность q на две части: *левую* — длины $k - 1$ и *правую* — длины $N - k$. Нам нужно из P вычеркнуть часть членов так, чтобы получилась последовательность q. Вычеркнем сначала все экземпляры числа N, кроме k-го. Слева от невычеркнутого N останется, очевидно, $(N-1, k-1)$-универсальная последовательность, из которой вычеркиванием можно получить любую последовательность длины $(k - 1)$, в которой встречаются лишь числа $1, 2, \ldots, N - 1$ — каждое не более одного раза. В частности, из нее можно получить стоящую слева от N часть последовательности q. Справа же от невычеркнутого в последовательности P числа N останется последовательность такого вида: группа из $(k-2)$-х чисел $(N - k + 2), \ldots, N - 1$, ($k \geqslant 2$; случай $k = 1$ разбирается аналогично), затем $(N - k - 1)$ групп чисел $1, 2, \ldots, N-1$ и, наконец, укороченная группа 1, 2. После перенумерации эта последовательность превращается в $(N - 1, N - k)$-универсальную последовательность, из которой вычеркиванием можно получить часть последовательности q, стоящую от N справа. Значит, построенная последовательность P (длины $N^2 - 2N + 4$) действительно N-универсальна.

Перейдем теперь к оценкам снизу. Мы решим одновременно пункты в) и г), доказав более сильное утверждение: *при $N \geqslant 2$ длина любой N-универсальной последовательности не меньше* $\frac{N^2 + 3N - 4}{2} = \frac{N(N+1)}{2} + N - 2$.

---

*) Изящное решение задачи д) прислали читатели А. Касянчук из Николаева и А. Мошонкин из Ленинграда.

Прежде всего заметим, что если число N впервые встречается в N-универсальной последовательности P на k-м месте, то часть P, расположенная справа от этого N, образует $(N-1)$универсальную последовательность, так как для получения любой перестановки чисел $1, 2, \ldots, N$, начинающейся с числа N, нужно вычеркнуть из P все *числа с номерами до* $k-1$-го включительно.

Будем доказывать утверждение по индукции. При $N=2$ оно легко проверяется. Пусть оно верно при $N=M$, и пусть $P=(a_1, \ldots, a_L)$ — произвольная $(M+1)$-универсальная последовательность. Если какое-то число встречается в P только один раз, то, изменив в случае необходимости обозначения, можно считать, что это число есть $M+1$, и тем самым справа и слева от него стоят M-универсальные последовательности; длина каждой *из них по индукционному предположению* не меньше $\frac{M^2+3M-4}{2}$ $(M \geqslant 3)$. Тогда (*длина* P) $\geqslant 1+$ $+2\left(\frac{M^2+3M-4}{2}\right) \geqslant \frac{(M+1)^2+3(M+1)-4}{2}$, что дает доказательство шага индукции. Итак, можно считать, что каждое число в P встречается не менее двух раз. Пусть k — наименьший номер такой, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *встречаются все числа* $1, 2, \ldots, M+1$. Изменив, если потребуется, обозначения, можно считать, что $a_k = M+1$. Тогда очевидно, что k есть номер первого вхождения числа $M+1$ в последовательность P. Слева от него стоят все числа от 1 до M — всего не менее M штук. Кроме того, в P найдутся по крайней мере два числа $M+1$, *а если все их* выбросить, то справа от a_k останется M-универсальная последовательность, длина которой по индукционному предположению не меньше, чем $(M^2+3M-4)/2$. Отсюда общая длина P не меньше $\frac{M^2+3M-4}{2}+M+2=$ $=\frac{(M+1)^2+3(M+1)-4}{2}$. Утверждение доказано. Применяя его в случае $N=4$, получим доказательство пункта г) (универсальную последовательность из 12 членов построить теперь легко; например, 123412314213).

Д. Бернштейн

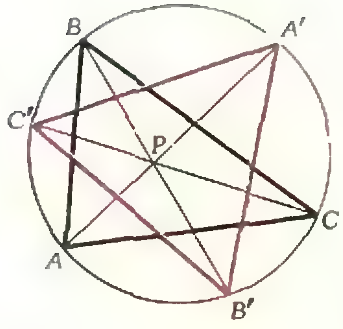


Рис. 5

◆

М401. *Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P такая, что $\widehat{APB}=\widehat{ABC}+60^\circ$, $\widehat{BPC}=\widehat{BAC}+60^\circ$, $\widehat{CPA}=\widehat{CBA}+60^\circ$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP, BP, CP (за точку P) с окружностью, описанной вокруг $\triangle ABC$, лежат в вершинах равностороннего треугольника.*

Обозначим точки пересечения продолжений отрезков AP BP и CP с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC, через A', B' и C' соответственно (см. рис. 5). Величина угла с вершиной внутри круга равна полусумме угловых величин двух дуг, из которых одна заключена между сторонами этого угла, а другая — между продолжениями сторон; а величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Поэтому $\widehat{APC}=$ $=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB'C}+\overset{\smile}{A'BC'})=\widehat{ABC}+\widehat{A'B'C'}$; но по условию $\widehat{APC}=\widehat{ABC}+60^\circ$, откуда $\widehat{A'B'C'}=60^\circ$.

Аналогично доказывается, что и $\widehat{A'C'B'}=\widehat{C'A'B'}=60^\circ$.

А. Ягубьянц

◆

М402. *Докажите, что не существует строго возрастающей последовательности целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, для которых при любых n и m выполняется соотношение*

$$a_{nm}=a_n+a_m.$$

Первое решение. Заметим, что $a_{2^2}=a_2+a_2=2a_2$, $a_{2^3}=a_{2^2\cdot 2}=2a_2+a_2=3a_2$, и вообще $a_{2^n}=na_2$ для любого n. Возьмем часть последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}$. Если последовательность строго возрастает, то, поскольку числа целые и неотрицательные, $a_{2^n} \geqslant 2^n$. С другой стороны, $a_{2^n}=$ $=na_2$. Значит, если такая последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$

существует, то для любого n должно выполняться неравенство $2^n \leqslant na_2$. Докажем, что это невозможно; именно, покажем, что отношение $\frac{2^n}{n}$ стремится к бесконечности с ростом n.

Обозначим отношение $\frac{2^n}{n}$ через b_n и рассмотрим отношение $b_{n+1} : b_n$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} : \frac{2^n}{n} = 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{4}{3},$$

если $n \geqslant 2$. Из этого следует, что $\frac{b_n}{b_2} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$, т. е. $b_n = \frac{2^n}{n} \geqslant 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} = \infty$.

Значит, строго возрастающей последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, о которой говорится в условии, быть не может.

Второе решение. Предположим, что такая последовательность существует. Пусть n — натуральное число, большее, чем a_2. Тогда $a_{2n} = a_n + a_2 < a_n + n$; значит, натуральные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$ лежат в промежутке $[a_n + 1, a_n + n - 1]$ и различны, чего не может быть, так как в этом промежутке всего $n - 1$ целое число.

С. Фомин

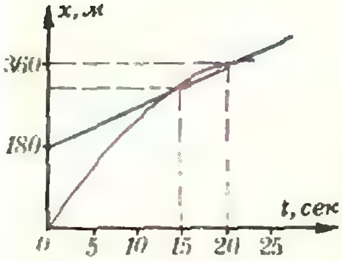


Рис. 6.

◆

Ф407. *Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью $v_1 = 108$ км/час, заметил на расстоянии $s_0 = 180$ м впереди движущийся в ту же сторону со скоростью $v_2 = 32{,}4$ км/час товарный поезд. Машинист сразу включил тормоз, благодаря чему пассажирский поезд начал двигаться с ускорением $a = -1{,}2$ м/сек^2. Достаточно ли этого ускорения для того, чтобы поезда не столкнулись?*

Нарисуем графики зависимости координат поездов от времени. За начало отсчета выберем точку, в которой началось торможение пассажирского поезда, а за направление оси координат примем направление скоростей поездов. В такой системе координаты поездов в момент времени t равны

$$x_{\text{пас}} = v_1 t + \frac{at^2}{2},$$

$$x_{\text{тов}} = v_2 t + s_0,$$

где $v_1 = 108$ *км/час* $= 30$ *м/сек*, $v_2 = 32{,}4$ *км/час* $= 9$ *м/сек*.

Из графиков (рис. 6) видно, что в моменты времени t' и t'' координаты поездов равны. Это означает, что в момент $t = t'$ произойдет столкновение поездов. Найдем значения t' и t'' из условия $x_{\text{пас}} = x_{\text{тов}}$:

$$30t - 0{,}6t^2 = 9t + 180, \quad \text{или} \quad t^2 - 35t + 300 = 0,$$

откуда $t' = 15$ *сек*, $t'' = 20$ *сек*.

Координаты поездов в момент $t = t'$ равны $x_{\text{пас}} = x_{\text{тов}} = 315$ *м*.

◆

Ф408. *Из сопротивлений в 1, 2, 3 и 4 ом собрана схема, показанная на рисунке 7. Какой ток течет через амперметр A_2, если ток через амперметр A_1 5 а? Показания вольтметра 10 в. Измерительные приборы идеальные.*

Согласно показаниям вольтметра и амперметра A_1, сопротивление всей изображенной на рисунке 7 цепи $R = \frac{U}{I} = 2$ *ом*.

Найдем, каковы при этом сопротивления R_1, R_2, R_3 и R_4. Так как амперметр A_2 идеальный, его сопротивление можно считать равным нулю, и точки a и b при расчете сопротивлений можно считать соединенными друг с другом накоротко. Положим $R_1 = 1$ *ом*. Тогда простым перебором убеждаемся в том, что $R_2 = 4$ *ом*, а для сопротивлений R_3 и R_4 возможны два варианта: или $R_3 = 2$ *ом* и $R_4 = 3$ *ом*, или $R_3 = 3$ *ом* и $R_4 = 2$ *ом*.

Рассмотрим точку разветвления цепи, например, точку a. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в этой точке, равна нулю:

$$I_1 - I_3 - I_5 = 0. \qquad (*)$$

Следовательно, чтобы определить ток I_5, текущий через амперметр A_2, достаточно знать токи I_1 и I_3. Найдем их.

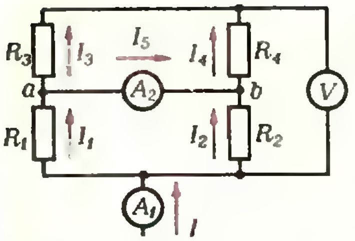


Рис. 7.

Токи I_1 и I_2, текущие по сопротивлениям R_1 и R_2, обратно пропорциональны значениям этих сопротивлений:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{4}{1}.$$

В то же время

$$I_1+I_2=I=5a.$$

Отсюда

$$I_1=4a.$$

Аналогично можно записать соответствующие выражения для токов I_3 и I_4:

$$\frac{I_3}{I_4}=\frac{R_4}{R_3} \text{ и } I_3+I_4=I.$$

Если $R_3=2$ *ом* и $R_4=3$ *ом*, то

$$\frac{I_3}{I_4}=\frac{3}{2} \text{ и } I_3+I_4=I=5a,$$

откуда

$$I_3=3\,a.$$

Тогда из равенства (*)

$$I_5=I_1-I_3=1a.$$

Если же $R_3=3$ *ом* и $R_4=2$ *ом*, то

$$I_3=2a, \text{ и } I_5=2\,a.$$

Таким образом, возможны два значения для тока, текущего через амперметр A_2.

И. Слободецкий

◆

Ф410 [*]. *В электровакуумном приборе чистый вольфрамовый катод находится в большой колбе, содержащей остатки кислорода при давлении $p=10^{-7}$ атм и температуре $T=300°$К. Считая, что каждая молекула, попавшая на катод, прилипает к нему, оценить время образования мономолекулярного слоя. Молекулы можно считать шариками диаметром $d\approx 3\cdot 10^{-8}$ см.*

Найдем среднее число молекул z, которые за время $t=1$ *сек* оседают на единице площади поверхности катода. Для оценки воспользуемся упрощенной моделью газа, согласно которой все молекулы в сосуде двигаются по трем взаимно перпендикулярным направлениям (в обе стороны по каждому направлению) со средней квадратичной скоростью $\bar{v}$. Пусть среднее число молекул в единице объема (концентрация молекул) равно n. Из общего числа молекул в сторону катода двигается 1/6 часть. Единичная площадка катода за время t соберет все молекулы, оказавшиеся в столбике единичного сечения и высоты $\bar{v}t$. Отсюда

$$z=\frac{n}{6}\,\bar{v}.$$

Более точное выражение, учитывающее движение молекул по всевозможным направлениям и с разными по абсолютной величине скоростями, имеет вид $z=\frac{n}{4}\,\bar{v}$. Это различие в числовом коэффициенте несущественно, поскольку по условию задачи мы должны дать лишь приближенную оценку результата по порядку величины.

Средняя квадратичная скорость молекул

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где $k=1{,}38\cdot 10^{-23}$ *дж/град* — постоянная Больцмана, $T=300°$К — абсолютная температура газа, $m=\frac{\mu}{N_A}=5{,}3\cdot 10^{-26}$ *кг* — масса молекулы кислорода. Концентрацию молекул можно выразить через давление газа и его температуру:

$$n=\frac{p}{kT}.$$

Подстановка числовых значений в выражения для $\bar{v}$ и n дает

$$\bar{v}\approx 5\cdot 10^{2}\ м/сек, \quad n\approx 2{,}5\cdot 10^{18}\ м^{-3}.$$

---

[*] Решение задачи Ф409 см. в статье П. Блиоха «В фокусе линзы», «Квант», 1976, № 10.

Таким образом

$$z = \frac{n}{6}\bar{v} \approx 2\cdot 10^{20}\ м^{-2}\cdot сек^{-1}.$$

Число молекул z_0 в мономолекулярном слое, покрывающем площадь в 1 $м^2$, можно оценить по формуле

$$z_0 \approx \frac{1}{d^2} \approx 10^{19}\ м^{-2}.$$

Для осаждения такого количества молекул необходимо время

$$\tau = \frac{z_0}{z} \approx 5\cdot 10^{-2}\ сек.$$

Приведенные выше оценки являются достаточно грубыми. Мы не учитывали, например, возможности более плотной упаковки молекул или неравномерного образования слоев. Для вычисления z была использована упрощенная модель газа. Поэтому полученный результат верен только по порядку величины. Оценки такого рода в реальных физических задачах играют важную роль, поскольку они позволяют ориентироваться в масштабах изучаемого явления.

С. Козел

◆

Ф411. *Одним U-образным ртутным манометром можно измерять давления до 1 атм. Какое наибольшее давление можно измерить, если соединить последовательно два таких манометра короткой трубкой?*

U-образный ртутный манометр (рис. 8) измеряет избыточное давление Δp, т. е. показывает, на сколько давление p в левом колене манометра больше атмосферного давления p_0. Ограничение на измеряемое давление накладывается длиной трубок манометра: нельзя измерить избыточное давление больше такого, при котором ртуть доходит до края правого колена. Иначе манометр выйдет из строя. Отсюда ясно, что

$$\Delta p = p - p_0 = \rho|\vec{g}|H = 1\ атм.$$

Пусть атмосферное давление тоже равно 1 *атм*. Тогда

$$\rho|\vec{g}|H = p_0.$$

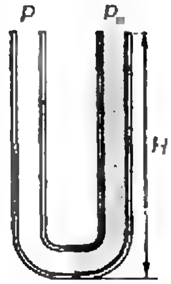


Рис. 8.

При последовательном соединении двух манометров (рис. 9) давление p_1 в левом колене манометра *1* будет больше давления p в случае одного манометра. В самом деле, давление p_2 в левом колене манометра *2* не равно атмосферному, а больше его на величину давления столба ртути высотой h. Таким образом,

$$p_1 = \rho|\vec{g}|H + p_2 = p_0 + p_2, \tag{1}$$

и

$$p_2 = p_0 + \rho|\vec{g}|h. \tag{2}$$

С другой стороны, p_2 — это давление сжатого воздуха, занимающего объем $S(H/2 + h/2)$ (S — площадь сечения трубок). Первоначально этот воздух занимал объем $SH/2$ в правом колене манометра *1* и такой же объем в левом колене манометра 2. Давление воздуха было равно p_0. Полагая сжатие воздуха изотермическим, запишем такое соотношение:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{2S\,H/2}{S(H/2 + h/2)},$$

откуда

$$p_2 = 2p_0\frac{H}{H+h}.$$

Умножим числитель и знаменатель в правой части этого равенства на $\rho|\vec{g}|$:

$$p_2 = 2p_0\frac{\rho|\vec{g}|H}{\rho|\vec{g}|H + \rho|\vec{g}|h} = 2\frac{p_0^2}{p_0 + \rho|\vec{g}|h}. \tag{3}$$

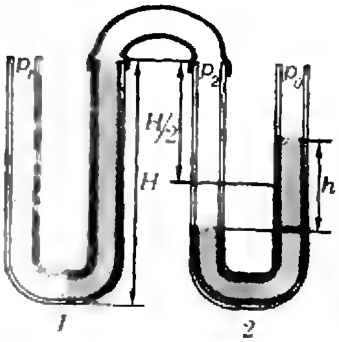


Рис. 9.

Из равенств (2) и (3) получаем

$$p_2^2 = 2p_0^2, \text{ или } p_2 = \sqrt{2}\,p_0.$$

Тогда из равенства (1)

$$p_1 = (1+\sqrt{2})\,p_0 \approx 2.4 \text{ атм}.$$

давление p_1 может превышать атмосферное давление на величину

$$\Delta p_1 = p_1 - p_0 \approx 1.4 \text{ атм}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф412. *Учитель, отвернувшись к доске, следит за классом по отражениям в стеклах очков. При этом он видит два отражения ученика, сидящего от него в 5 м: одно на расстоянии 5 м, другое — на расстоянии $^5/_7$ м. Повернувшись лицом к классу, он через очки видит изображение того же ученика на расстоянии 2,5 м. Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлены линзы очков.*

Показатель преломления стекла n можно найти из формулы для оптической силы линзы

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

если знать оптическую силу D линзы и радиусы R_1 и R_2 ее сферических поверхностей.

Рассмотрим, как получаются изображения ученика, когда учитель следит за ним, отвернувшись к доске. Одно изображение образовано лучами, отраженными от передней (ближайшей к глазу) поверхности очковых линз. Другое создают лучи, прошедшие линзу, отразившиеся от ее задней поверхности и вновь прошедшие линзу.

По условию задачи расстояние до одного из этих изображений равно расстоянию до ученика: $f_1 = d = 5$ м. Это характерно, прежде всего, для плоского зеркала (рис. 10). Поэтому естественно предположить, что передняя поверхность очковых линз плоская, и

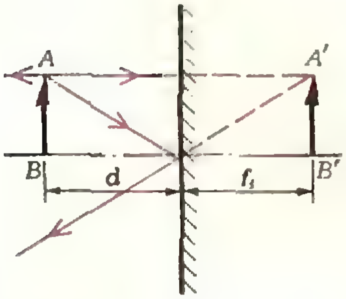


Рис. 10.

$$\frac{1}{R_1} = 0.$$

Изображение, находящееся на расстоянии $f_2 = {}^5/_7$ м, создано оптической системой линза — зеркало — линза. Эту систему можно заменить одной эквивалентной линзой. Ее оптическая сила равна алгебраической сумме оптических сил элементов системы:

$$D + \frac{2}{R_2} + D = 2D + \frac{2}{R_2}.$$

Тогда по формуле линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = 2D + \frac{2}{R_2}. \qquad (2)$$

Знак «минус» перед величиной $1/f_2$ стоит потому, что изображение мнимое.

Когда учитель смотрит на ученика через очки, он видит его мнимое изображение на расстоянии $f_3 = 2{,}5$ м (рис. 11). Для этого случая формула линзы запишется так:

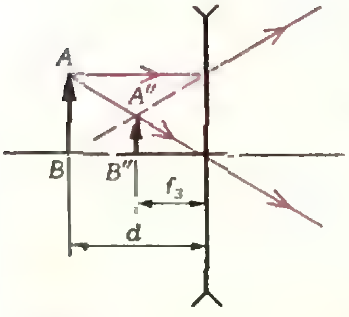


Рис. 11.

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_3} = D. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3)

$$D = -\frac{1}{5} \text{ дптр} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{\text{м}}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили, что зеркало выпуклое, а линза, соответственно, плоско-вогнутая.

Подставляя значения D, $1/R_1$ и $1/R_2$ в формулу (1), найдем

$$n = 1{,}5.$$

Если предположить, что после отражения от передней поверхности линзы изображение оказывается на расстоянии $^5/_7$ м, и провести соответствующие вычисления, то придем к нелепому результату $n = 0{,}75$. Убедитесь в этом самостоятельно.

В. Белонучкин

А. Виленкин, Ю. Ионин

Площадь и интеграл

Из статьи В. Болтянского «О понятиях площади и объема», помещенной в этом номере, вы узнали об определении и различных способах вычисления площадей. Наиболее универсальным из них является применение интегрального исчисления. Об этом способе и пойдет речь в настоящей статье (она рассчитана на десятиклассников). Но сначала советуем вам заглянуть в учебник «Алгебра и начала анализа 10» и просмотреть еще раз пункты 97—102 и таблицу первообразных на с. 219.

Площадь — это интеграл

Рассмотрим криволинейную трапецию на рисунке 1. Эта фигура ограничена графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a;\ b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс $y = 0$. Ее площадь S равна

$$F(b) - F(a),$$

где F — какая-нибудь первообразная для функции f («Алгебра и начала анализа 10», п. 100). Вспоминая определение интеграла («Алгебра и начала анализа 10», п. 101), формулу для вычисления площади можно переписать так:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пример 1. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = 0$.*

Можно считать, что эта фигура ограничена осью абсцисс, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и графиком функции $y = 1 - x^2$ (рис. 2), поэтому по формуле (1) ее площадь

$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx.$$

Так как первообразной для функции $f(x) = 1 - x^2$ является функция

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3},$$

то

$$S = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Вы видите, что в этом примере нам не пришлось прибегать ни к каким «ухищрениям»; для решения задачи оказалось достаточным воспользоваться готовыми формулами. Но так бывает далеко не всегда.

Аддитивность

Решать более сложные задачи на вычисление площадей помогает свойство *аддитивности* площади. Оно «разрешает» разбить данную фигуру на части и подсчитать площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

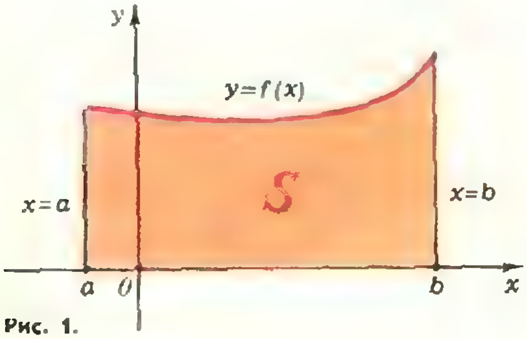


Рис. 1.

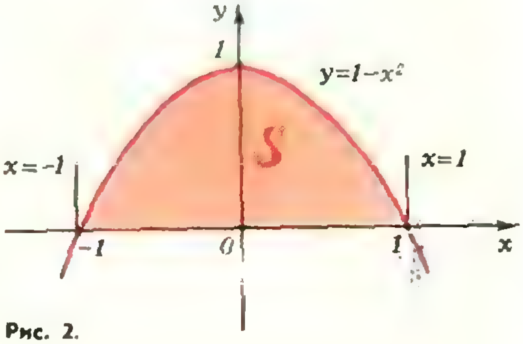


Рис. 2.

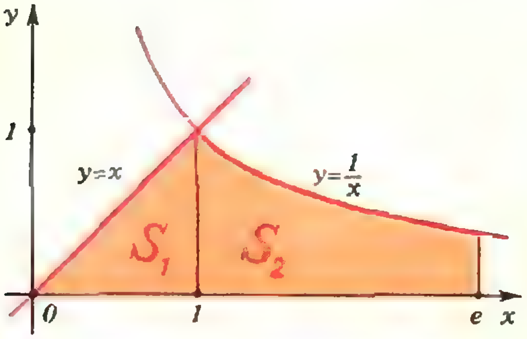


Рис. 3.

Пример 2. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = x$, $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$.

Эту фигуру (рис. 3) можно рассматривать как криволинейную трапецию, ограниченную осью абсцисс, прямыми $x = 0$ и $x = e$ и графиком функции, которая на отрезке $[0;\ 1]$ равна x, а на отрезке $[1;\ e]$ равна $1/x$. Однако написать первообразную для такой функции нелегко.

Поэтому разобьем данную криволинейную трапецию прямой $x = 1$ на две части (рис. 3). Их площади сразу находятся по формуле (1):

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx,\ S_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx.$$

Так как первообразной для функции $f_1(x) = x$ является функция $F_1(x) = x^2/2$, а первообразной для функции $f_2(x) = 1/x$ является (при $x > 0$) функция $F_2(x) = \ln x$, то

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^e = 1,$$

и по свойству аддитивности площади

$$S = S_1 + S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Инвариантность

В более сложных задачах помогает еще одно свойство площади, которое называется *инвариантностью относительно перемещений*: конгруэнтные фигуры имеют равные площади.

Пример 3. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*

$$y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 0.$$

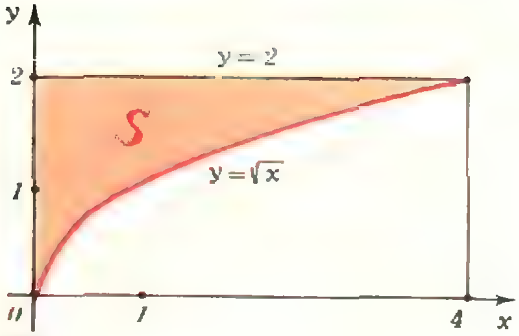


Рис. 4.

Эта фигура (рис. 4) станет криволинейной трапецией, если поменять местами оси абсцисс и ординат. Для этого отразим весь рисунок относительно прямой $y = x$. График функции $y = \sqrt{x}$ отобразится при этом в график обратной функции $y = x^2$, и мы получим фигуру, изображенную на рисунке 5. А поскольку симметричные фигуры конгруэнтны и потому имеют равные площади, мы получаем

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Другое решение этой задачи можно получить, заметив, что фигура, закрашенная на рисунке 4, дополняется (снизу) до прямоугольника со сторонами 2,4 криволинейной трапецией, соответствующей функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$. Поэтому

$$S = 2\cdot 4 - \int_0^4 \sqrt{x}dx = 8 - \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = $$
$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

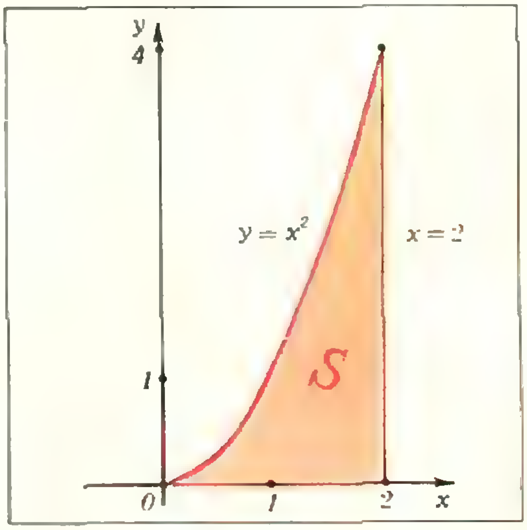


Рис. 5.

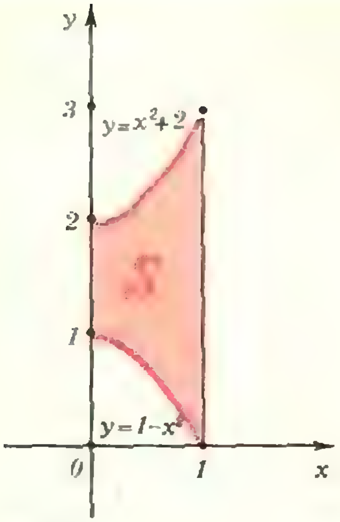


Рис. 6 а.

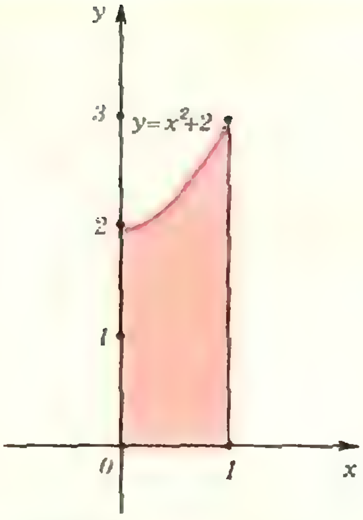


Рис. 6 б.

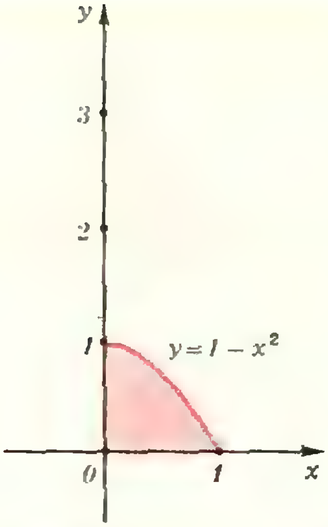


Рис. 6 в.

Аддитивность и инвариантность площади не только облегчают нахождение площади криволинейной трапеции, но и позволяют находить площади более сложных фигур, например, ограниченных графиками некоторых функций и сверху, и снизу — площади «бикриволинейных трапеций».

Пример 4. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (осью абсцисс) и графиком функции $y = 1 - x^2$, дополняет данную фигуру до криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ и графиком функции $y = x^2 + 2$ (рис. 6, *а*). Иными словами, данную в условии фигуру можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций (рис. 6, *б*, *в*). Поэтому ее площадь

$$S = \int_0^1 (x^2+2)\,dx - \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_0^1 - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Это рассуждение легко обобщается следующим образом.

Пусть f и g — две непрерывные функции, определенные на отрезке $[a;\ b]$, причем для всех $x \in [a;\ b]$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant g(x)$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 7), равна

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

А поскольку разность интегралов двух функций (на одном и том же отрезке) равна интегралу от их разности («Алгебра и начала анализа 10», п. 106), то выражение для S можно записать так:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx. \qquad (2)$$

Если $g(x) \geqslant 0$ при $x \in [a;\ b]$, то формула (2) выводится так же, как в примере 4. Если же в некоторых точках $g(x) < 0$, то прибавим к обеим функциям одну и ту же константу k, которую выберем настолько большой, чтобы графики функций $y = f(x) + k$ и $y = g(x) + k$ оказались выше оси абсцисс (рис. 8). Фигура на рисунке 7 получается из фигуры на рисунке 8 параллельным переносом и потому имеет такую же площадь. К фигуре на рисунке 8 применима формула (2):

$$S = \int_a^b [(f(x) + k) - (g(x) + k)]\,dx.$$

Но

$$(f(x) + k) - (g(x) + k) = f(x) - g(x).$$

Отсюда получаем формулу (2) и для фигуры на рисунке 7.

Если графики непрерывных функций f и g, заданных на отрезке $[a;\ b]$, пересекаются, и местами $f(x) > g(x)$, а местами $g(x) > f(x)$ (рис. 9), то площадь фигуры, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x=a$, $x=b$, равна

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx. \qquad (3)$$

Эта формула обобщает формулу (2) (докажите ее самостоятельно).

Пример 5. *Найти площадь S фигуры, заключенной между линиями $y=x^3-3x$ и $y=x$.*

Данные линии пересекаются в точках с координатами $(-2; -2)$, $(0; 0)$ и $(2; 2)$ (рис. 10), причем $(x^3-3x)-x=x^3-4x$ и $|x^3-4x|=x^3-4x$ при $-2\leqslant x\leqslant 0$, $|x^3-4x|=4x-x^3$ при $0\leqslant x\leqslant 2$. Поэтому по формуле (3)

$$S=\int_{-2}^{2}|(x^3-3x)-x|\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}|x^3-4x|\,dx=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+$$

$$+\int_{0}^{2}(4x-x^3)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2}=4+4=8.$$

Заметив, что фигура на рисунке 10 симметрична относительно начала координат, можно получить более короткое решение этой задачи:

$$S=2\int_0^2|(x^3-3x)-x|\,dx=$$

$$=2\int_0^2|x^3-4x|\,dx=2\int_0^2(4x-x^3)\,dx=$$

$$=2\cdot\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=2\cdot 4=8.$$

Вычисление интегралов

До сих пор мы применяли интегральное исчисление для решения геометрической задачи — вычисления площадей. Теперь применим геометрические соображения к вычислению интегралов.

Пример 6. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Графиком функции $y=\sqrt{1-x^2}$, заданной на отрезке [0; 1], является четверть окружности радиуса 1 с

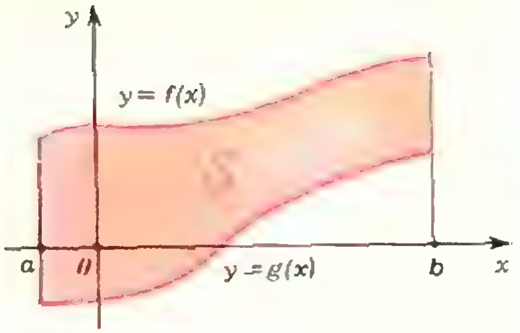


Рис. 7.

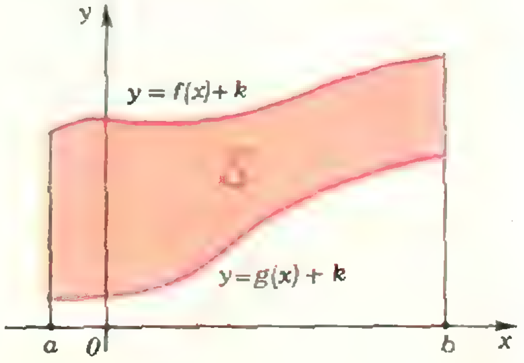


Рис. 8.

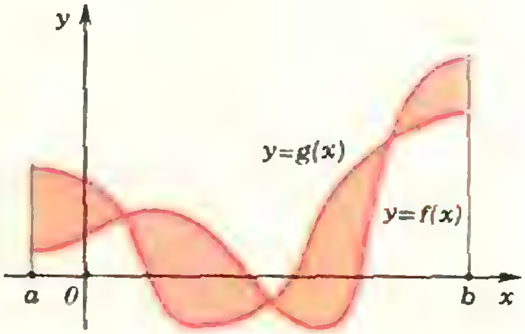


Рис. 9.

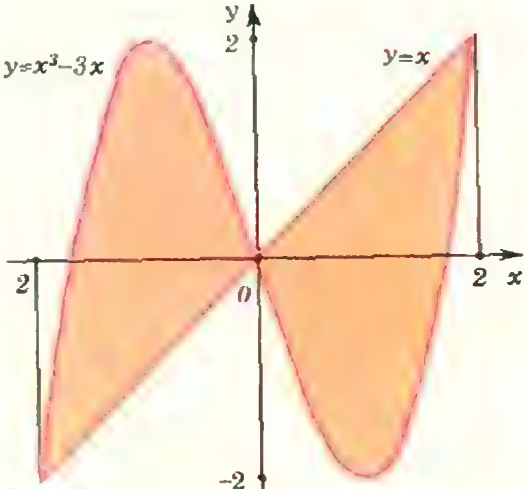


Рис. 10.

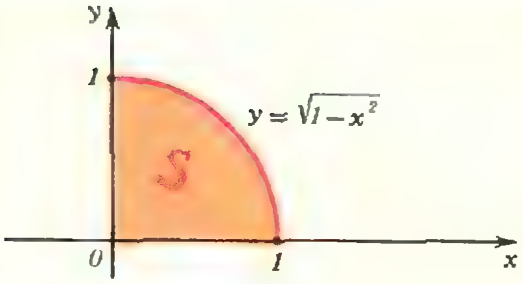


Рис. 11.

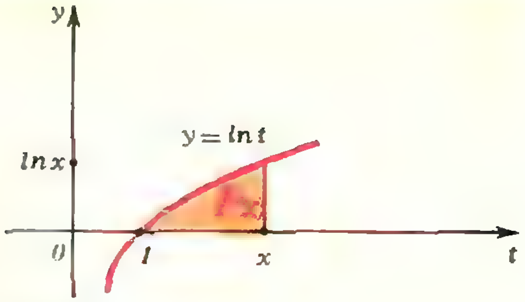


Рис. 12.

центром в начале координат (рис. 11), поэтому $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ — это площадь четверти круга радиуса 1, так что этот интеграл равен $\pi/4$.

Пример 7. *Найти первообразную для функции $f(x) = \ln x$.*

Как известно, первообразную для функции f можно задать формулой

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

(«Алгебра и начала анализа 10», п. 102).

В данном случае положим $a = 1$, тогда нам надо вычислить интеграл

$$F(x)=\int_1^x \ln t\,dt.$$

Если $x > 1$, то этот интеграл равен площади фигуры, отмеченной красным цветом на рисунке 12. Отразим ее относительно прямой $y = t$; тогда она отобразится в фигуру (рис. 13), ограниченную прямыми $t = 0$, $t = \ln x$ и графиками функций $y = x$ и $y = e^t$ (функция, обратная к $y = \ln t$). Площадь этой фигуры по формуле (3) равна

$$\int_0^{\ln x} |e^t - x|\,dt.$$

Поскольку $e^t \leqslant x$ при $0 \leqslant t \leqslant \ln x$, мы получаем

$$F(x)=\int_1^x \ln t\,dt=\int_0^{\ln x}(x-e^t)\,dt=$$

$$=(xt-e^t)\Big|_0^{\ln x}=x\ln x-x+1.$$

Общий вид первообразной для функции $f(x)=\ln x$ при $x \geqslant 1$ таков:

$$F(x)=x(\ln x-1)+C,$$

где C — произвольная постоянная. Продифференцировав функцию F, можно убедиться в том, что она действительно является первообразной для функции f, причем и при $x \in]0;1]$.

Цикл Карно

В школьном учебнике по физике формула для к. п. д. цикла Карно приводится без вывода. Но, используя интегральное исчисление, вывести эту формулу не слишком трудно.

Для этого подсчитаем работу, совершаемую 1 молем газа в цикле Карно. Напомним, что при изменении занимаемого им объема от V_1 до V_2 газ совершает работу, которая численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $p(V)$, осью OV и прямыми $V = V_1$, $V = V_2$ («Физика 9», п. 21), т. е. интегралу

$$\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV.$$

Цикл Карно (рис. 14) состоит из четырех участков (о цикле Карно см. «Квант», 1977, №1).

На участке ab происходит изотермическое расширение газа от объема V_1 до объема V_1' при постоянной тем-

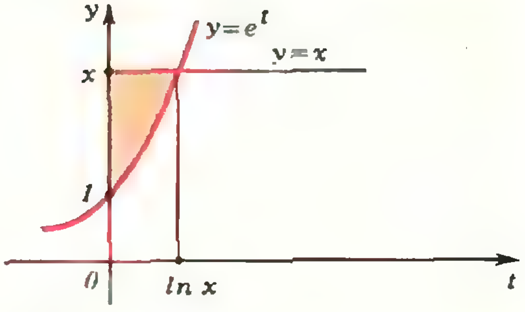


Рис. 13.

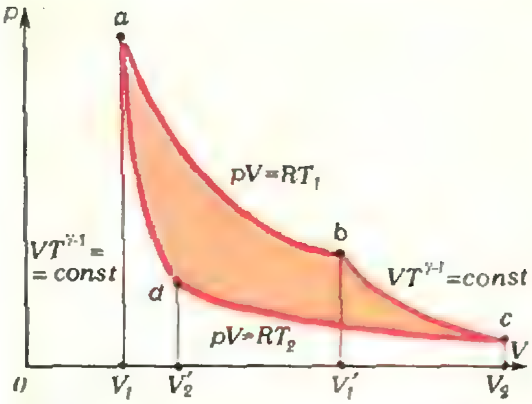


Рис. 14.

пературе T_1. При этом газ совершает работу

$$A_1=\int_{V_1}^{V_1'} p(V)\,dV.$$

Поскольку $pV=RT_1$, получаем:

$$A_1=\int_{V_1}^{V_1'} \frac{RT_1}{V}\,dV=RT_1 \ln V\Big|_{V_1}^{V_1'}=$$

$$=RT_1 \ln V_1'-RT_1 \ln V_1=RT_1 \ln \frac{V_1'}{V_1}.$$

причем эта работа A_1 равна количеству теплоты Q_1, полученной газом от нагревателя; внутренняя энергия газа на этом участке не изменяется.

На участке bc происходит адиабатическое расширение газа до объема V_2, при этом его температура понижается от T_1 до T_2. На этом участке $VT^{\gamma-1}$ постоянно*), газ совершает работу A_2 без теплообмена с посторонними источниками тепла, т. е. за счет изменения лишь своей внутренней энергии, пропорционального разности температур, поэтому

$$A_2=k(T_1-T_2)$$

(коэффициент k равен $R(\gamma-1)$, но мы доказывать это не будем).

На участке cd газ изотермически сжимается (внешними силами) до объема V_2', поэтому совершаемая газом работа отрицательна и равна

$$A_3=RT_2 \ln \frac{V_2'}{V_2},$$

причем эта работа A_3 равна (по модулю) количеству теплоты Q_2, переданному газом холодильнику.

На участке da происходит адиабатическое сжатие газа, при котором его температура повышается от T_2 до T_1, причем, чтобы это сжатие было возможным, V_2' должно удовлетворять равенству $V_2'T_2^{\gamma-1}=V_1T_1^{\gamma-1}$. На этом участке газ совершает (отрицательную) работу A_4 за счет изменения лишь своей внутренней энергии, поэтому

$$A_4=k(T_2-T_1).$$

Цикл Карно на этом завершается, и мы получаем, что газ совершил работу

$$A_1+A_2+A_3+A_4=$$

$$=RT_1 \ln \frac{V_1'}{V_1}+RT_2 \frac{V_2'}{V_2}.$$

Поскольку $V_1'T_1^{\gamma-1}=V_2T_2^{\gamma-1}$, $V_2'T_2^{\gamma-1}=V_1T_1^{\gamma-1}$, мы получаем, что $\frac{V_1'}{V_1}=\frac{V_2}{V_2'}$. Обозначим это отношение через r, $r>1$. Тогда $\ln \frac{V_2'}{V_2}=-\ln r$ и

$$A=R(T_1-T_2)\ln r.$$

Это — полезная работа, совершенная газом, а всего газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1=RT_1 \ln r$, а отдал холодильнику соответственно $Q_2=RT_2 \ln r$. Тем самым к. п. д. цикла Карно равен

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}.$$

Упражнения

Найдите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

1. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.
2. $y=|x|+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.
3. $y=x^2$, $y=1$.
4. $x=y^2$, $x=0$, $y=2$, $y=-2$.
5. $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$.
6. $y=|x^2-1|$, $y=0$, $x=-2$, $x=2$.
7. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

---

*) Здесь $\gamma=C_p/C_V$ (см. И. К. Кикоин, А. К. Кикоин, Молекулярная физика, М., «Наука», 1976); в будущем мы подробно расскажем об адиабатическом процессе.

Улитка Паскаля

Свое название улитка Паскаля получила*) не в честь великого Блеза Паскаля, а в честь его отца Этьена Паскаля (1588—1651) — провинциального французского судьи и большого любителя математики. Э. Паскаль строил улитку так.

Нарисуем на плоскости окружность (O, r), зададим некоторую длину d, выберем на этой окружности произвольно точку P и зафиксируем ее — это будет полюс улитки Паскаля. Для каждой точки K окружности, отличной от P, проведем прямую KP и отложим на ней в противоположные стороны от точки K отрезки M_1K и KM_2 такие, что $|M_1K| = |KM_2| = d$ (рис. 1). Множество таких точек M_1 и M_2 образует непрерывную замкнутую кривую, которая и называется улиткой Паскаля. Полюс P может не принадлежать, а может и принадлежать улитке, обеспечивая непрерывность кривой.

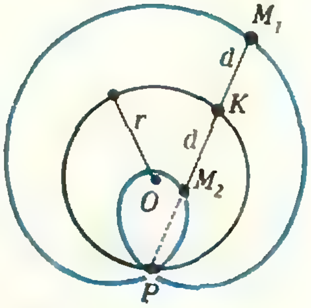


Рис. 1.

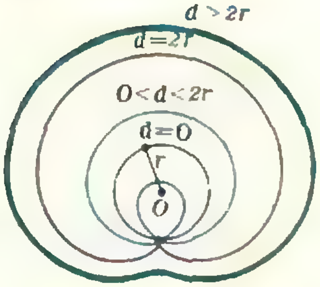


Рис. 2.

Улитка Паскаля имеет принципиальное отличие от кривых, которые приводились на первой или второй страницах обложки «Кванта» за этот год,— форма у нее переменная.

Ее форма зависит от значения d (рис. 2): при $d=0$ улитка совпадает с (O, r), при $0<d<2r$ имеет точку самопересечения P, при $d=2r$ превращается в кардиоиду, при $d>2r$ не содержит своего полюса P.

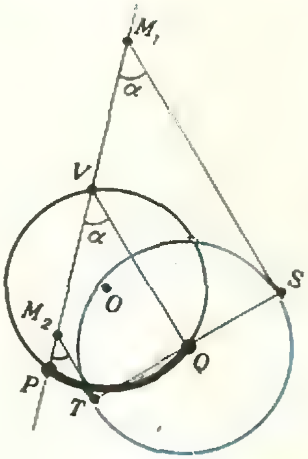


Рис. 3.

Приведем идею, на которой основан второй способ построения улитки (рис. 3). Вновь рассмотрим окружность (O, r), на ней полюс P и фиксированную точку Q, а также окружность (Q, R) некоторого радиуса R. Пусть $\breve{PQ}=2\alpha$. Для каждой точки $V \in (O, r)$ проведем прямую PV и найдем на ней точки M_1 и M_2 такие, что если провести из них касательные к (Q, R) и затем повернуть их на угол α по часовой стрелке, то они попадут на PV. Множество таких точек M_1 и M_2 — улитка Паскаля, причем $d=R/\sin\alpha$.

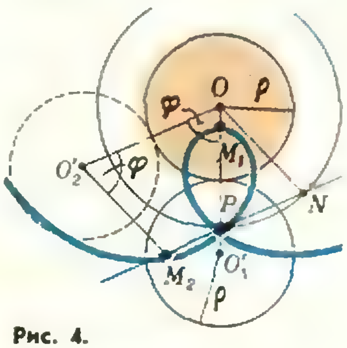


Рис. 4.

На рисунке 4 обосновывается еще одно построение улитки Паскаля. Подвижная окружность (O', ρ) касается снаружи неподвижной («опорной») (O, ρ). Покажем, что при качении (O', ρ) жестко с ней связанная точка M описывает улитку Паскаля.

Пусть длина отрезка MO минимальна ($M = M_1$). Выберем на прямой OO_1' точку P, для которой $|OP| = |O_1'M_1|$, и построим окружность $(O, |OP|)$. Если подвижная окружность прокатывается на угол φ из начального положения, то точки O' и M попадают соответственно в положения O_2' и M_2. Проведем прямую M_2P и найдем точку ее пересечения N с окружностью $(O, |OP|)$. Получаем $|ON| = |OP| = |M_1O_1'| = |M_2O_2'|$. Четырехугольник ONM_2O_2' (при таком расположении точки N, как на рисунке 4) представляет собой объединение равнобедренной трапеции OPM_2O_2' $(\widehat{POO_2'} = \widehat{OO_2'M_2} = \varphi)$ и равнобедренного треугольника PON. Ясно, что этот четырехугольник — параллелограмм, причем длины его сторон не зависят от угла φ. Раз отрезок NM сохраняет постоянную длину при любом положении точки M, то в траектории точки M мы узнаем улитку Паскаля, в точке P — ее полюс, а в $(O, |OP|)$ — окружность (O, r).

В. Березин

---

*) По предложению видного французского математика — одного из основателей Парижской академии наук Ж. П. Роберваля (1602—1675)

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В этом ребусе (см. рисунок) цифры зашифрованы фигурками. Одинаковым фигуркам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте ребус.

2. Жили-были дед да баба. Была у них курочка ряба. Принесла курочка задачку. Задачка не простая, с изюминкой.

100 яичек лежат по кругу. Их начинают забирать так: первое оставляют, следующее за ним по часовой стрелке (второе) — забирают, следующее за ним (третье) — не берут, четвертое — забирают и так далее через одно по кругу. Круг сужается до тех пор, пока в нем не останется только одно яйцо. На каком месте сначала лежало это яйцо (считая от первого по часовой стрелке)?

Дед решал, решал — не решил. Баба решала, решала — не решила. Мышка по кругу побегала, хвостиком помахала и задачку решила.

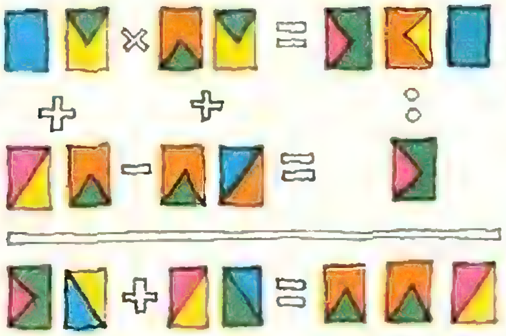
Дед и баба плачут. Курочка кудахчет:

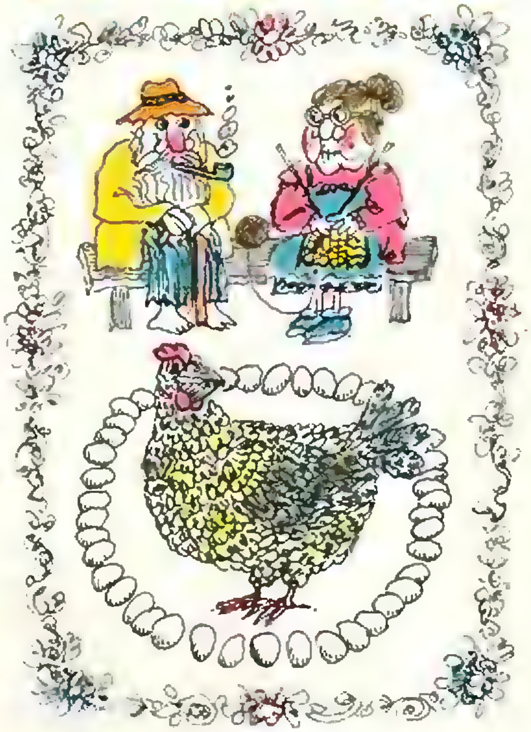
— Не плачь, дед, не плачь, баба, — принесу вам задачку другую, не с изюминкой — простую.

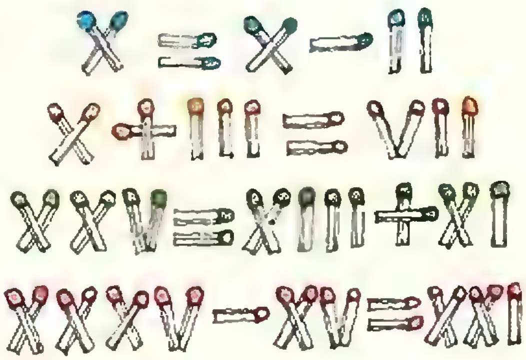
Курочка несет каждое второе яичко — простое, а каждое третье — золотое. Может ли так быть?

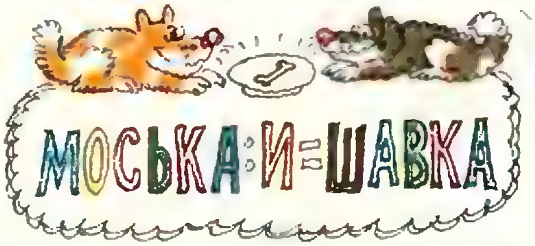
3. В следующих «равенствах», сложенных из спичек (см. рисунок), допущены ошибки. Переложите в каждом из «равенств» по две спички так, чтобы все они стали верными.

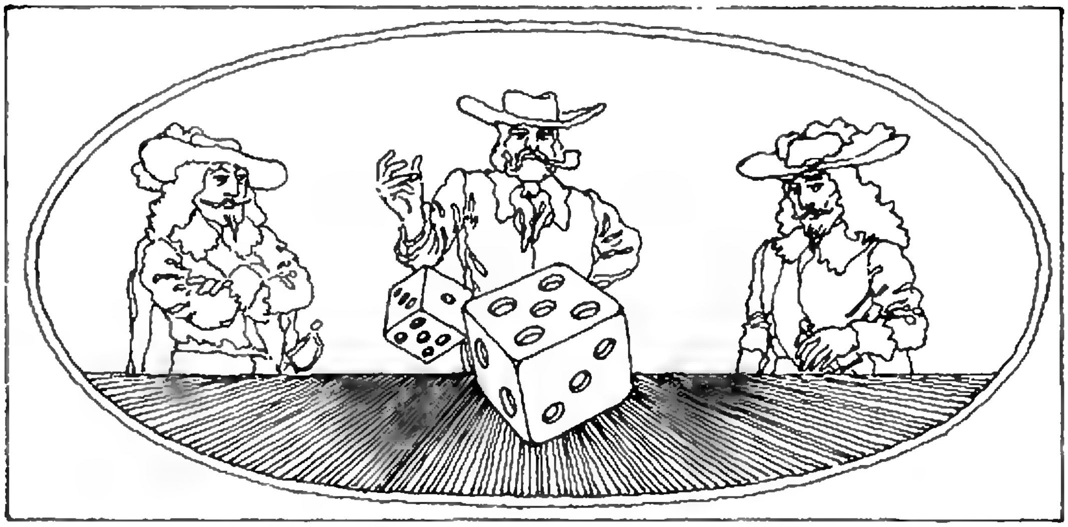
4. В этом примере на деление (см. рисунок) разными буквами зашифрованы разные цифры, одинаковыми — одинаковые. Расшифруйте пример!











Е. Турецкий, Н. Цейтлин

Семиклассникам о вероятности

В предлагаемой статье почти нет определений и той математической «строгости», которой отличаются статьи для старшеклассников. Авторы просто дают читателям почувствовать, что такое «вероятность».

Тем не менее, чтение статьи без карандаша и бумаги может оказаться затруднительным. Что ж, возьмите карандаш и бумагу и приступайте...

Почему побеждала команда Виктора

Сам он не отличался особым рывком и сильным ударом, но его команда, подобранная «по жребию», почти не знала поражений. Перед игрой ребята разбивались на пары, сговаривались об условных кличках, подходили к капитанам будущих команд — Виктору и Юре — и спрашивали: «Олень или книга?», «Паяльник или сабля?» и т. п. Капитаны поочередно отвечали: «олень», «сабля», — и получали в свою команду соответствующего игрока, а их соперник — его напарника. Но в итоге Виктор обычно возглавлял лучшую команду.

Это было удивительно: ведь тайна кличек до выбора игроков не могла быть известна никому. И все-таки Виктор обычно собирал лучших.

А все дело было в том, что ребята невольно выбирали себе те клички, которые им чем-то нравились. Виктор, хорошо зная ребят, обычно угадывал, кто «олень», а кто «сабля», и выбирал из них лучшего. А Юра (если в этот момент выбор производил он) просто называл одну из кличек, не раздумывая, кто за ней скрывается. Можно сказать, что выбор игрока был случайным для Юры, выбиравшего в половине случаев лучшего игрока, а в половине — худшего, и не случайным для Виктора, почти всегда выбиравшего лучшего игрока. Победа команды Виктора демонстрировала практическую важность одного из самых интересных разделов математики — *теории вероятностей*.

Интересно, что эта теория многим обязана играм, которым предавались не только дети, но и вполне взрослые люди.

Редкий ход

«Атос отправился на поиски англичанина и нашел его в конюшне: тот с вожделением разглядывал седла. Случай был удобный. Атос предложил свои условия: два седла против одной лошади или ста пистолей — на выбор. Англичанин быстро подсчитал: два седла стоили вместе триста пистолей. Он охотно согласился.

Д'Артаньян, дрожа, бросил кости — выпало три очка; его бледность испугала Атоса, и он ограничился тем, что сказал:

Результаты 36 бросаний двух кубиков. Таблица 1

1	2	4	7	6	6	13	6	3	19	1	3	25	5	6	31	2	6
2	6	3	8	3	4	14	3	5	20	4	1	26	3	5	32	1	4
3	5	2	9	6	3	15	3	2	21	5	6	27	2	1	33	5	3
4	5	2	10	4	5	16	4	1	22	2	5	28	4	1	34	3	1
5	6	6	11	6	5	17	4	2	23	2	5	29	5	4	35	3	2
6	1	2	12	5	6	18	2	6	24	1	1	30	1	5	36	4	5

— Неважный ход, приятель, ... Вы, сударь, получите лошадей с полной сбруей.

Торжествующий англичанин даже не потрудился смешать кости; его уверенность в победе была так велика, что он бросил их на стол не глядя. Д'Артаньян отвернулся, чтобы скрыть досаду.

— Вот так штука, — как всегда, спокойно проговорил Атос. — Какой необыкновенный ход! Я видел его всего четыре раза за всю мою жизнь: два очка!

Англичанин обернулся и онемел от изумления; Д'Артаньян обернулся и онемел от радости».

Давайте, и мы с вами бросим несколько раз пару костей — кубиков из детских игр с цифрами или точками (очками) от 1 до 6 на гранях — и посмотрим, часто ли выпадают две единицы. Чтобы различать эти кубики, один из них закрасим красной краской, а другой — синей. В таблице 1 приведены результаты 36 бросаний красного и синего кубиков, выполненных нами.

Таблица 2

Появление отдельных очков при 36 бросаниях двух кубиков.

кубики \ очки	1	2	3	4	5	6
красный	5	6	6	6	7	6
синий	6	6	5	4	8	7

У вас, конечно, получатся другие результаты, но если вы сведете свои результаты в таблицы (2 и 3), то скорее всего выводы будут те же, что и у нас.

Выводы

1. Дубль 1—1 выпадает не часто (у нас — один раз из 36).

2. Разные очки выпадают примерно одинаково часто, в среднем — в 1/6 части случаев каждое.

3. Сумма очков на двух костях обычно заключена в пределах от 5 до 9.

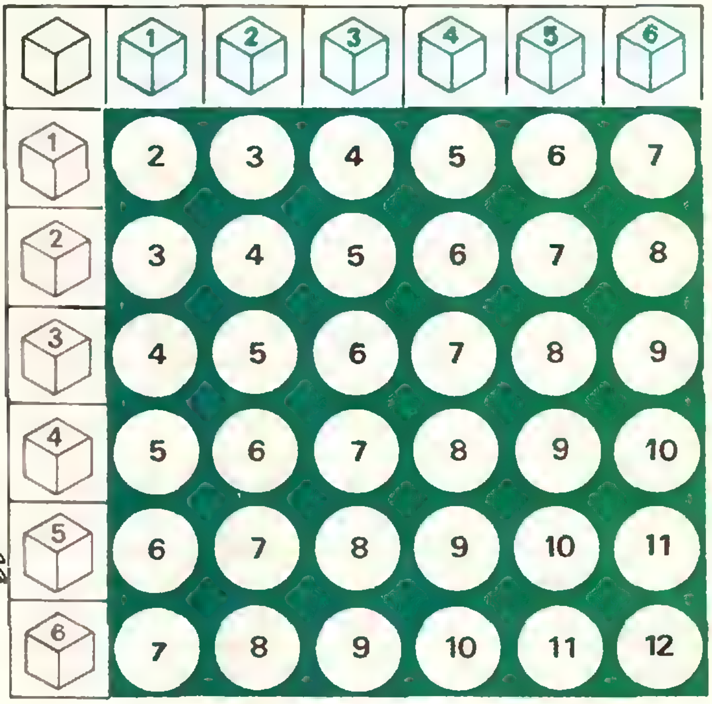
Если увеличить число бросаний, то отмеченные закономерности проступят еще более четко. Чем больше число бросаний, тем меньше будут

Появление отдельных сумм очков при 36 бросаниях двух кубиков. Таблица 3

Σ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
кратность	1	2	2	6	3	5	4	7	1	3	2

Таблица

Сумма очков на костях при всех возможных исходах бросания двух кубиков.



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

отличаться от 1/6 (среднего значения) частоты выпадений различных очков от 1 до 6. Можно сказать, что выпадение любого из шести очков при бросании симметричной кости равновероятно. А вот появления разных значений сумм очков при бросании двух костей оказываются не равновероятными.

Можете ли вы сказать, почему?

Давайте составим таблицу всех возможных исходов при бросании красной и синей костей. Так как выпадение любого числа очков от 1 до 6 на красной кости может сочетаться с любым числом очков на синей кости, то у нас получится таблица 4.

Любое из 36 сочетаний очков на красной и синей костях равновероятно любому другому сочетанию, но разные суммы очков могут быть получены различным числом способов. Так, сумма очков 3 (у Д'Артаньяна) получается двумя способами: 1 + 2 и 2 + 1, а сумма 2 (у англичанина) — лишь одним (из 36!): 1 + 1. Атосу было чему удивляться!

Вероятность

Вы видите, что выпадения 2 и 6 очков на одной кости равновероятны, а выпадение суммы 2 и 7 на двух костях не равновероятны. В подобных случаях говорят, что сумме 7 *благоприятствует* больше исходов из общего числа равновероятных исходов, чем сумме 2. Так, сумме 7 благоприятствуют шесть исходов из общего числа равновероятных исходов, равного 36, тогда как сумме 2 благоприятствует лишь один исход.

И в общем случае подсчет числа благоприятных исходов из их общего числа — важнейшее действие для определения вероятности события, под которой понимают *отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновероятных исходов*. При этом используются такие обозначения. Само событие (например, появление суммы 7) обозначается буквой A, а вероятность этого события — $P(A)$. Итак,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (*)$$

где n — общее число исходов данного опыта, а m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Попробуем подсчитать вероятности некоторых событий.

В таблице 4 всего 36 клеток. Это — 36 возможных исходов при бросании двух кубиков. Сумме очков 7 (событие A) благоприятствуют 6 исходов. По формуле (*) получаем: $P(A) = 6/36 = 1/6$.

Сумме очков 2 (событие B) благоприятствует 1 исход. По формуле (*) $P(B) = 1/36$.

Событию C «выпадение суммы очков, не большее 5» благоприятствуют 10 исходов (укажите их самостоятельно), поэтому $P(C) = 10/36 = 5/18$.

Событию D «выпадение суммы очков, большее 5» благоприятствуют 26 исходов (все не вошедшие в C), поэтому $P(D) = 26/36 = 13/18$.

Событию E «выпадение четного числа очков на красной кости и кратного трем — на синей» благоприятствуют 6 исходов, поэтому $P(E) = 6/36 = 1/6$.

Таким образом, при определении вероятности некоторого события A надо провести три действия:

(а) *определить общее число (равновероятных) исходов опыта;*

(б) *определить число исходов, благоприятствующих событию A;*

(в) *разделить второе число на первое.*

Подчеркнем, что мы с самого начала считаем («по определению»), что исходы опыта равновероятны. Это соответствует практическим результатам, если опыт обладает некоторой симметрией (кость имеет форму гексаэдра — куба, а не, скажем, косого параллелепипеда и не налита свинцом у одной грани, монета — новая, не истертая, то есть имеет форму цилиндра и т. п.). Из-за этого нельзя, скажем, считать, что в опыте «определение суммы на двух костях» всего 11 исходов (суммы от 2 до 12) — они неравноправны, вероятность каждого из них не 1/11. Определение таких «хороших» исходов опыта — существенная часть пункта (а) задачи определения вероятностей, и руководствоваться здесь надо физическими или житейскими соображениями.

Как считать вероятность

Конечно, можно считать ее по формуле (*), но нередко удобнее применять три свойства вероятности, о которых мы сейчас и расскажем.

Рассмотрим еще раз событие C «выпадение суммы очков, не большее 5» (при бросании двух костей).

Можно сказать, что это событие C состоит из событий:

C_1 — «выпадение суммы 2»;
C_2 — «выпадение суммы 3»;
C_3 — «выпадение суммы 4»;
C_4 — «выпадение суммы 5».

Давайте найдем вероятности этих событий и попробуем установить связь между ними и вероятностью $P(C)$, которая нам уже известна: $P(C) = 10/36$.

Из 36 равновероятных исходов ($n = 36$) событию C_1 благоприятствует один исход: $1 + 1$. Значит, $P(C_1) = 1/36$.

Событию C_2 благоприятствуют два исхода: $1 + 2$ и $2 + 1$, поэтому $P(C_2) = 2/36$.

Событию C_3 благоприятствуют три исхода: $1 + 3$, $2 + 2$ и $3 + 1$, поэтому $P(C_3) = 3/36$.

Наконец, событию C_4 благоприятствуют четыре исхода: $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $4 + 1$, поэтому $P(C_4) = 4/36$.

Вас, конечно, не затруднит установление связи между числом 10/36 и числами 1/36, 2/36, 3/36 и 4/36. Она очень проста:

$$\frac{10}{36} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36},$$

или

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4).$$

Полученное равенство выражает *теорему сложения вероятностей*, состоящую в том, что если одно событие C разбивается на ряд других событий (C_1, C_2, C_3, C_4), то его вероятность $P(C)$ равна сумме вероятностей составляющих событий.

Теперь рассмотрим событие C и событие D «выпадение суммы очков, большее 5». Их вероятности $P(C) =$

$= 10/36$ и $P(D) = 26/36$ связаны очевидным равенством: $P(C) + P(D) = 1$. Это и понятно: событию D благоприятствуют те и только те исходы, которые не благоприятствуют событию C (такие события называются «противоположными»). Поэтому, если $P(C) = m/n$, то $P(D) = (n - m)/n = 1 - m/n = 1 - P(C)$. Можно также воспользоваться теоремой сложения вероятностей. Событие «не C», противоположное событию C, обозначается так: $\overline{C}$ (у нас $D = \overline{C}$, $C = \overline{D}$). События C и $\overline{C}$ вместе составляют событие «C или $\overline{C}$», которое произойдет обязательно. Такое событие называется *достоверным* и обозначается буквой U. Его вероятность по формуле (*) равна 1: $P(U) = 1$. С другой стороны, по теореме сложения вероятностей $P(C) + P(\overline{C}) = P(U)$. Поэтому

$$P(C) + P(\overline{C}) = 1.$$

Вид вероятности события E (см. выше) также позволяет сделать некоторые выводы. Событие E состоит в том, что на красной кости выпало четное число очков (событие A), а на синей — кратное трем (событие B). Вероятность события A равна 3/6 (из 6 исходов при бросании красной кости событию A благоприятствуют 3), события B — 2/6 (аналогично). Итак, $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(E) = 1/6$. Здесь событие E — не сумма, а скорее «произведение событий» A и B. Мы видим, что в данном случае справедлива формула

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B),$$

выражающая *теорему умножения вероятностей*. Эта формула справедлива и в общем случае, ведь если в одном опыте n_1 исходов, из которых m_1 благоприятствует событию A, а в другом n_2 исходов, из которых m_2 благоприятствует событию B, то эти опыты, проводимые один за другим, допускают $n_1 n_2$ исходов (все возможные комбинации), из которых $m_1 m_2$ благоприятствуют событию $E = (A$ и $B)$. Но

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2},$$

то есть

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Подчеркнем, что эти опыты не зависят друг от друга, выпадение четного числа очков на красной кости не влияет на число очков, которое появится на синей кости, то есть появление события A никак не влияет на появление события B. Подобные события называются *независимыми*.

У нас независимые события появились в разных опытах, но и при одном опыте два события могут оказаться независимыми. Скажем, появление события A «выпадение на кости числа очков, кратного 2» (то есть 2, 4, 6) не влияет на появление события B «выпадение на той же кости числа очков, кратного 3» (3, 6). Это кажется странным, ведь опыт-то один, но все дело в том, что исходы, благоприятствующие событию B, распределены равномерно среди событий, благоприятствующих A, и не благоприятствующих A.

Если событие A появилось, то есть выпали 2, 4 или 6 очков, то в двух из этих исходов событие B не появилось (2, 4), а в одном — появилось (6). Если же событие A не появилось, то есть выпали 1, 3 или 5 очков, то по-прежнему в двух из этих исходов B не появилось (1, 5), а в одном появилось (3). Так, что, независимо от появления события A, событие B (в том же опыте) появится в 1 случае из 3.

Оказывается, теорему умножения вероятностей можно сформулировать так. *Если A и B — независимые события, то вероятность события «A и B» равна произведению вероятностей событий A и B.*

Задачи

1. Проводится некоторый опыт O с множеством исходов $И$. Можно ли считать эти исходы равновероятными, если:

а) O — «бросание монетки», $И = \{$сверху герб, сверху цифра$\}$;

б) O — «один шахматист держит в кулаках черную и белую пешки, а второй указывает на правый или левый кулак», $И = \{$в выбранной руке белая пешка, в выбранной руке черная пешка$\}$;

в) O — «из календаря вырывается (наугад) один листок», $И = \{$на оторванном листе праздничный день, на оторванном листе будничный день$\}$;

г) O — «финальный забег на 100 м шести участников с номерами от 1 до 6»; $И = \{$победил № 1, победил № 2, …, победил № 6$\}$;

д) O — «из 28 костей домино, лежащих на столе (очками вниз) и хорошо перемешанных, выбирается одна», $И=\{$выбран дубль, выбран не дубль$\}$;

е) O — «из урны, в которой лежат 3 белых и 3 черных шара (одинаковых на ощупь), в темноте извлекается один», $И=\{$извлечен белый шар, извлечен черный шар$\}$.

2. В урне лежат 6 белых и 8 черных шаров. Из урны наугад извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар — белый?

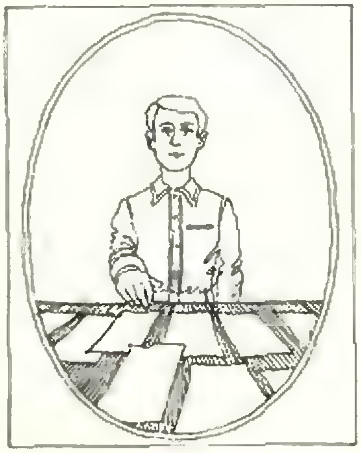
3. Монета бросается три раза. Какова вероятность, что все три раза сверху окажется цифра?

4. Наугад выбирается одна кость домино. Какова вероятность, что сумма очков на ней делится на четыре?

5. Картонку с написанным на ней словом «математика» разрезали на одинаковые квадратики с одной буквой на каждом, перемешали и вытащили один квадратик. Какова вероятность, что на нем буква «т»? Какая буква вероятнее всего на нем будет?

6. Из 27 билетов ученик Петя мог ответить лишь на те, номера которых были кратны 5. Когда десятым по счету он вошел в класс, оказалось, что билет № 1 и все билеты с 20-го по 27-й уже взяты.

Какова вероятность, что Петя вытащит билет, на который он может ответить? Какова была бы эта вероятность, если бы Петя вошел в класс первым? Какая из этих вероятностей больше?



Число «пи» и теория вероятностей

Хотите экспериментально найти число π? Попробуйте! Для этого нужна лишь коробка спичек и лист бумаги.

На листе бумаги проведите сетку параллельных прямых на расстоянии друг от друга, равном длине спички. Теперь случайным образом бросайте на лист бумаги спички (как на первой странице обложки этого номера журнала) и считайте число спичек, пересекающих линии сетки (можно и много раз бросать одну спичку). Разделив удвоенное общее число спичек на полученное число, вы и найдете число π (чем больше спичек вы бросите, тем точнее найдете число π).

Доказать это можно с помощью теории вероятностей. Если спичка длины l упала под углом φ к линиям сетки, то ее «эффективная длина» равна $\sin\varphi$. Пусть некоторая спичка пересекла линию сетки, тогда ее нижний конец находится на расстоянии не больше $\sin\varphi$ от проходящей над ним линии сетки (см. рисунок). Вообще же это расстояние заключено в пределах от 0 до 1. По правилам теории вероятностей эта спичка пересекает линию сетки с вероятностью $\sin\varphi$.

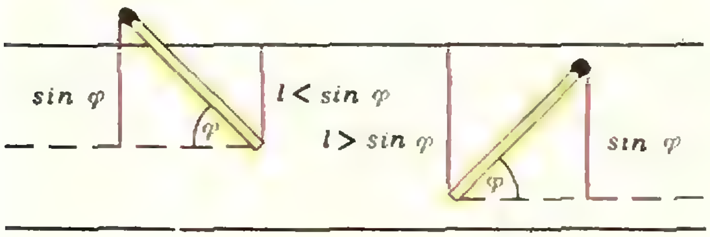
Теперь, чтобы найти вероятность того, что случайным образом упавшая спичка пересечет линию сетки, надо усреднить полученную вероятность $\sin\varphi$ по всем φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$, поскольку все значения углов φ равновероятны, то есть найти значение выражения

$$\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi$$

и разделить его на $\pi/2$. Десятиклассники быстро найдут, что интеграл равен 1, то есть как раз $\frac{2}{\pi}$ часть спичек должна пересечь линии сетки.

Впервые такой эксперимент произвел с иглой (бросая ее много раз) французский естествоиспытатель Ж. Л. Л. Бюффон (1707—1788), в его честь этот опыт назван «иглой Бюффона». В конце XIX века многие математики бросали иглу по 3—5 тысяч раз и получали для π значение порядка 3,15. Интересно, какое значение π даст вам один коробок спичек?

А. Виленкин



Спрашивайте — отвечаем

Читатель Ю. Брегман из Риги прислал в редакцию такое письмо:

«Уважаемая редакция! Хотел бы вам сообщить идею, касающуюся проблемы управляемого термоядерного синтеза. Она имеет много общего с «лазерным термоядом». Пусть имеется некоторое количество ядерного горючего. В него «выстреливают» несколько античастиц (например, позитронов или антипротонов). Происходит аннигиляция. Выделившаяся энергия в виде двух фотонов способствует подогреву дейтерия, в результате чего происходит термоядерния реакция. Эта реакция цепная, поэтому для ее самоподдержания дальнейшего притока энергии извне не требуется. Источником позитронов может быть радиоактивное вещество (например $_{15}P^{20}$ или $_{7}N^{13}$)».

Отвечает на это письмо консультант отдела физики нашего журнала А. Володин.

Инициировать термоядерную реакцию аннигиляцией вещества и антивещества в принципе можно

Термоядерная реакция с заметным выходом энергии начнется, если смесь легких изотопов водорода нагреть до очень высокой температуры — порядка десятков миллионов или сотен миллионов градусов.

Однако одного инициирования термоядерной реакции мало. Для решения проблемы термоядерного синтеза необходимо длительное протекание процесса. Поскольку (в отличие от ядерной реакции деления) реакция термоядерного синтеза не носит цепного характера (в этом Ваша ошибка!), для осуществления управляемой термоядерной реакции, помимо ядерного горючего, необходимо в зону реакции непрерывно или периодически подводить энергию извне. Естественно, эта энергия должна составлять лишь некоторую часть всей энергии, выделяющейся в реакции.

Существенной для управляемого термоядерного процесса является не только величина подводимой энергии, но и скорость ее эффективного подвода. Важной характеристикой процесса служит энергетическое время жизни τ — среднее время пребывания в зоне реакции частиц плазмы, в которую превращается ядерное горючее. Каждую порцию энергии, требующуюся для поддержания реакции, необходимо подводить за время, не превышающее τ. В реакции дейтерия с тритием τ получается порядка наносекунды (10^{-9} *сек*). За время τ частицы горючей плазмы разлетятся на расстояния порядка миллиметра. Это определяет объем зоны реакции — несколько кубических миллиметров.

Таким образом, управляемая термоядерная реакция пойдет, если в каждом ее единичном цикле крупинку твердого дейтерия или трития объемом несколько кубических миллиметров нагреть за наносекунду до температуры в сотни миллионов градусов. Реальными источниками подводимой мощности могут быть лазерный луч или электронный пучок предельной интенсивности.

Использование же аннигиляции в качестве источника мощности потребует достаточно больших количеств антивещества (порядка микрограмма в каждом цикле) или очень интенсивных источников античастиц, в настоящее время совершенно недоступных. Кроме того, для практического использования предложенного Вами метода необходим достаточно экономичный способ воспроизводства антивещества, о котором трудно сделать даже самые фантастические предположения.

Е. Галкин

Рационально или иррационально?

Основной вопрос, который рассматривается здесь, — как узнать, рационально или иррационально данное действительное число. Эта проблема не имеет существенного значения для практики, поскольку в прикладных задачах всегда можно действительное число заменить его десятичным приближением с определенной точностью, однако она важна с теоретической точки зрения — решение подобных задач способствует более глубокому пониманию сущности рациональных и иррациональных чисел, и в практике вступительных экзаменов такие задачи встречаются довольно часто.

Начнем с простейшего вопроса.

Пример 1. *Доказать, что сумма двух чисел, одно из которых рационально, а другое иррационально, есть число иррациональное.*

Пусть число a рационально, число b иррационально: $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{I}$, где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}$ — множества соответственно рациональных и иррациональных чисел. Предположим, что сумма $a+b$ рациональна: $a+b=c \in \mathbf{Q}$. Тогда число $b=c-a$ рационально, как разность двух рациональных чисел, а это противоречит условию.

Аналогичное утверждение верно для разности, произведения и частного рационального и иррационального чисел.

Есть лишь одно исключение: *для любого иррационального числа a числа*

$$0 \cdot a = 0 \in \mathbf{Q} \quad \text{и} \quad \frac{0}{a} = 0 \in \mathbf{Q}.$$

Это утверждение используется чаще, чем, возможно, кажется на первый взгляд. Так, корни уравнения $x^2-6x+7=0$, выражающиеся формулой $x_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$, иррациональны. Этот факт основан не на внешнем виде корней, а на доказанном нами свойстве, что сумма и разность рационального и иррационального чисел являются числами иррациональными.

Множество, в котором выполнимы операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), называется *полем*. Так, множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел — поле. Напротив, множество иррациональных чисел $\mathbf{I}$, как показывает решение следующего примера, полем не является.

Пример 2. *Может ли сумма двух положительных иррациональных чисел быть числом рациональным?*

Условие положительности необходимо, чтобы исключить такой тривиальный случай, как, например, $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$. Немного подумав, из этого тривиального примера можно получить нетривиальный: $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$. Если же мы вернемся к квадратному уравнению $x^2-6x+7=0$, имеющему иррациональные корни $x_1=3+\sqrt{2}$ и $x_2=3-\sqrt{2}$, то увидим, что по теореме Виета $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=7$. Следовательно, не только сумма, но и произведение двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

Пример 3. *Доказать, что если $\sqrt[n]{a}$, где a и n — любые натуральные числа, $n>1$, не равен никакому натуральному числу, то $\sqrt[n]{a}$ — число иррациональное.*

Предположим, что $\sqrt[n]{a}$ является числом рациональным. Тогда по условию этот корень может быть только дробным числом: $\sqrt[n]{a}=\frac{p}{q}$, где p и q — некоторые натуральные числа, $q\neq1$, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, и $\frac{p^n}{q^n}=a$.

Обозначим через k какой-нибудь простой делитель числа q. Будем считать известным следующее предложение: *если произведение натуральных чисел делится на простое число, то по меньшей мере один из множителей делится на это число.* В данном случае $p^n = p\cdot p\cdot\ldots\cdot p$ делится на q, а потому и на k, стало быть, p делится на k. Получилось, что числа p и q оба делятся на k, а это противоречит тому, что $\frac{p}{q}$ —несократимая дробь.

В учебнике «Алгебра-7» доказывается, что *не существует рационального числа, квадрат которого равен* 2, другими словами, что $\sqrt{2}$—число иррациональное. С помощью утверждения последней задачи можно доказать иррациональность большого класса действительных чисел. Докажем, например, иррациональность $\sqrt{3}$.

Имеем: $1<\sqrt{3}<2$ (так как $1<3<4$). Следовательно, $\sqrt{3}$ не равен никакому натуральному числу, а потому он является числом иррациональным.

Аналогично доказывается иррациональность чисел $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[6]{5}$ и т. п.

Пример 4. *Доказать, что число* $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ *иррационально.*

Допустим противное — пусть это число рационально: $\sqrt{3}+\sqrt{5}=r\in\mathbf{Q}$. Возведем равенство $\sqrt{5}=r-\sqrt{3}$ в квадрат, получим $5=r^2+3-2r\sqrt{3}$. Отсюда $\sqrt{3}=\frac{r^2-2}{2r}\in\mathbf{Q}$. Мы пришли к противоречию.

Аналогично доказывается иррациональность $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, если $a\in\mathbf{Q}$, $a>0$, $\sqrt{a}\notin\mathbf{Q}$, $b\in\mathbf{Q}$, $b>0$, $\sqrt{b}\notin\mathbf{Q}$.

Пример 5. *Доказать, что для любого натурального числа* n, *не являющегося степенью* 10 *с целым показателем*, $\lg n$ *есть число иррациональное.*

Предположим противное: $\lg n = r\in\mathbf{Q}$. Тогда число r может быть только дробным, так как иначе $n = 10^r$. Пусть $\lg n = \frac{p}{q}$, где p и q — некоторые натуральные числа, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Отсюда $10^{\frac{p}{q}} = n$, $10^p = n^q$.

В последнем равенстве разложение левой части на простые множители содержит двойки и пятерки в одинаковых степенях, равных p, а разложение правой части либо вообще их не содержит (если n не делится ни на 2, ни на 5), либо — в разных, поскольку n не является степенью 10. Следовательно, это равенство невозможно.

Из утверждения последней задачи вытекает, что десятичные логарифмы чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 и т. д. иррациональны.

Пример 6. *Доказать, что* $\cos\frac{\pi}{2^n}$ *при любом натуральном* $n\geqslant 2$ *есть число иррациональное.*

Допустим, что $\cos\frac{\pi}{2^n}$ является числом рациональным. Полагая в формуле косинуса двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$\alpha = \frac{\pi}{2^n}$, получим, что

$$\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = 2\cos^2\frac{\pi}{2^n} - 1$$

— число рациональное. Аналогично $\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}$ есть число рациональное и так далее. Продолжая этот процесс, мы получим, что $\cos\frac{\pi}{4}$ — число рациональное. Однако это не так: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\notin\mathbf{Q}$.

Пример 7. *Доказать, что* $\cos 1^\circ$ *является числом иррациональным.*

Предположим, что $\cos 1^\circ$ рационален. Тогда и $\cos 2^\circ$ — число рациональное. Далее, $\cos 3^\circ = \cos 1^\circ \times (4\cos^2 1^\circ - 3)$, откуда следует, что $\cos 3^\circ$ — также число рациональное. Далее с помощью легко проверяемого тождества

$$\cos(k+1)^\circ = 2\cos k^\circ \cos 1^\circ - \cos(k-1)^\circ$$

доказывается, что рациональны косинусы углов 4°, 5°, 6°, ..., 30°. Мы пришли к противоречию, так как $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\notin\mathbf{Q}$.

Пример 8. *Рационально или иррационально действительное число, представляющееся бесконечной десятичной дробью*

$$\alpha = 0{,}12345678910111213\ldots$$

(после запятой выписываются все последовательные натуральные числа)?

Допустим, что десятичная дробь α представляет рациональное число. Тогда с некоторого места она должна стать периодической. Обозначим количество цифр в периоде через n. А теперь заметим, что в записи этой дроби сколь угодно далеко можно найти подряд n нулей — это участки, соответствующие числам $k \cdot 10^n$ (последние их n цифр).

Отсюда следует, что период состоит из одних нулей. Однако это невозможно, так как в записи дроби α как угодно далеко от запятой встречаются и цифры, отличные от нуля.

Пример 9. *Доказать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится рациональное число.*

Пусть $\alpha > \beta$ — данные числа*) и

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$
$$\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

— их представления в виде бесконечной десятичной дроби, не содержащие бесконечной последовательности девяток. Тогда найдется такое натуральное число k, что $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, но $\alpha_k > \beta_k$ (возможно, $k = 0$). Найдем такое натуральное m, что $\beta_{k+m} < 9$, оно существует, поскольку бесконечные десятичные дроби с периодом 9 исключаются из рассмотрения. Число

$$\gamma = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \ldots \beta_{k+m-1}\, 90\,000\ldots$$

рационально и удовлетворяет неравенству $\beta < \gamma < \alpha$, так как $\beta_{k+m} < 9$ и $\beta_k < \alpha_k$.

Пример 10. *Доказать, что между действительными числами $\alpha = 3{,}625487$ и $\beta = 3{,}625491$ содержится иррациональное число.*

Первые цифры искомого числа γ подберем так, чтобы было $\alpha < \gamma < \beta$. Для этого достаточно его десятичную запись начать следующим образом: $\gamma = 3{,}625488\ldots$

Теперь позаботимся об иррациональности числа γ. Этого можно добиться, например, способом, приведенным в примере 8:

$$\gamma = 3{,}62548812345678910 11\ldots$$

Упражнения

1. Зная, что число π иррационально, доказать, что число $\frac{\pi}{2} + k\pi$ при любом целом k также иррационально.

2. Доказать, что любое рациональное число, не равное нулю, является периодом функции Дирихле D:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Является ли какое-нибудь иррациональное число периодом этой функции?

3. Доказать, что для любого натурального $n > 1$ корень n-й степени из любого положительного иррационального числа — число иррациональное.

4. Могут ли быть иррациональными числа a и b, если рациональны числа:

а) $a+b$ и $a-b$;
б) $a-b$ и ab;
в) $a+b \neq 0$ и a/b;
г) ab и a/b;
д) $a+b \neq 0$, a^2 и b^2?

5. Числа $\frac{a+1}{a^2+2}$ и $\frac{a^3+3}{a^3+4}$ рациональны. Рационально или иррационально число a?

6. Доказать иррациональность следующих чисел:

а) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$;
б) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$;
в) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

7. Рациональны или иррациональны числа:

а) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;
б) $\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$;
в) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$?

8. Существуют ли положительные рациональные числа a и b такие, что:

а) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$;
б) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$?

9. Доказать, что десятичный логарифм любого положительного рационального числа, не являющегося степенью 10 с целым показателем,— число иррациональное.

10. Рационально или иррационально число $\operatorname{tg} 1°$?

11. Доказать, что $\cos n°$, где n — некоторое натуральное число, меньшее 90 и не равное 60, — число иррациональное.

12. Доказать, что действительное число α, представляющееся бесконечной десятичной дробью 0,121221222122221... (количество двоек последовательно возрастает на 1), иррационально.

13. Доказать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится иррациональное число.

---

*) Можно считать, что $0 < \alpha < 10$, $0 \leqslant \beta < 10$.

Московский физико-технический институт

Московский физико-технический институт готовит инженеров-физиков-исследователей по новейшим областям физики и техники.

Особенность системы обучения, принятой в физико-техническом институте, состоит в том, что здесь фундаментальное высшее образование сочетается со специальной подготовкой в так называемых базовых научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро, где созданы специальные кафедры института.

На первых курсах студенты получают общенаучную подготовку.

Математика, общая и теоретическая физика, общественные науки изучаются в объеме университетских курсов, чтобы будущие специалисты хорошо владели знаниями, составляющими основу образования физика-исследователя. Быстрому ознакомлению с возрастающим потоком научно-технической информации способствует углубленное изучение иностранных языков.

Специализация и самостоятельная исследовательская работа в базовом институте начинается уже со второго — третьего курсов.

В базовом институте студент слушает лекции по специальности, участвует в работе научных семинаров, вовлекается в исследовательскую работу лабораторий института. Будущий специалист имеет дело с новейшими приборами, участвует в решении не модельных, специально для его практики придуманных задач, а актуальных проблем, стоящих перед лабораторией. Дипломная работа каждого студента МФТИ входит, как правило, в тематический план базового института. В творческой обстановке научного коллектива студент проходит неоценимую школу воспитания. Работа под непосредственным руководством крупного ученого во многом предопределяет успех его будущей самостоятельной деятельности.

Среди базовых институтов МФТИ — ведущие научные центры Москвы (см «Квант», 1972, № 6, 1975, № 5).

Институт готовит специалистов на восьми факультетах: факультет радиотехники и кибернетики, факультет общей и прикладной физики, факультет аэрофизики и космических исследований, факультет молекулярной и химической физики, факультет физической и квантовой электроники, факультет аэромеханики и летательной техники, факультет управления и прикладной математики, факультет проблем физики и энергетики.

На каждом из факультетов подготовка ведется по широкому кругу специальностей, охватывающему большинство областей современной физики, техники и кибернетики.

Ниже мы публикуем варианты вступительных экзаменов по математике и физике в МФТИ 1976 года.

Математика

Билет 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+8} = \sqrt{2x-4} + 2\sqrt{3x-3}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2 (x^2 - 4x + 4) + 2x > 2 - (x+1) \log_{\frac{1}{2}} (2 - x).$$

3. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найти отношение радиусов окружностей если $|AB| : |BC| : |CD| = 2 : 4 : 3$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} + 6\sin x = 2\sin (y - x), \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} - 2\sin x = 6\sin (y + x). \end{cases}$$

5. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен V. Высота SP пирамиды является ребром правильного тетраэдра $SPQR$, плоскость грани PQR которого перпендикулярна ребру SC. Найти объем общей части этих пирамид

Билет 2

1. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 (xy), \\ \lg^2 (x - y) + \lg x \lg y = 0. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x.$$

4. В трапеции $ABCD$ ($|AD| \parallel |BC|$) величина угла BAD равна α, $|AB| = 2\,|BC| + |AD|$, K — точка боковой стороны CD такая, что $|CK| : |KD| = 1 : 2$. Найти величины углов треугольника ABK

5. Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3 *см*, высоты — $4\sqrt{3}$ *см*. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость

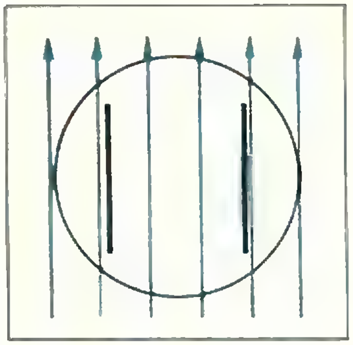


Рис. 1.

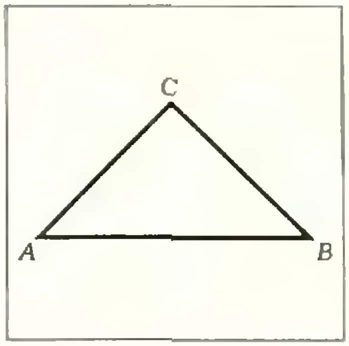


Рис. 2.

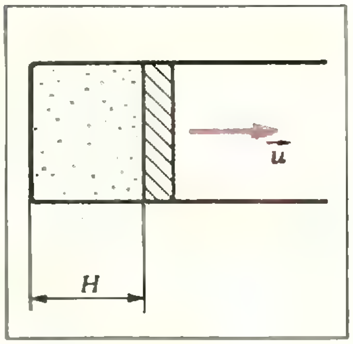


Рис. 3.

основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней тетраэдра проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найти длину ребра тетраэдра.

Физика

Билет 1

1. Человек скатывается на санях под уклон, составляющий угол $\alpha = 6°$ с горизонтом. Масса саней M в два раза больше массы человека m. Коэффициент трения саней о поверхность склона $\mu = 0{,}2$. Как должен двигаться человек относительно саней, чтобы сани двигались под уклон равномерно?

2. В цилиндре под легким поршнем находится 14 *г* азота при 27°С. Какое количество теплоты необходимо ему сообщить при изотермическом увеличении объема на 4%? Относительная молекулярная масса азота равна 28.

Указание. При небольших изменениях объема $\left(\frac{\Delta V}{V} \ll 1\right)$ воспользоваться приближенной формулой $\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-1} \approx \approx 1 - \frac{\Delta V}{V}$.

3. Поток проводящей жидкости (расплавленный металл) течет по керамической трубе. Для измерения скорости жидкости трубу помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси трубы, а в трубе закрепляют два электрода, образующие плоский конденсатор (рис. 1). Измеряется разность потенциалов между электродами. Определить скорость потока, если магнитная индукция поля $|\vec{B}| = 0{,}01$ *тл*, расстояние между электродами $d = 2$ *см*, измеренная разность потенциалов $U = 0{,}4$ *мв*.

4. В равнобедренной прямоугольной стеклянной призме основание AB и боковая грань BC гладкие, а грань AC — матовая (рис. 2). Призма стоит на газете. Наблюдатель, смотрящий через грань BC, видит часть текста, находящегося под основанием AB, равную $\alpha = 0{,}895$ (по площади). Каков показатель преломления стекла?

Билет 2

1. α-частица, имеющая скорость 1000 *м/сек*, налетает на атом углерода, который двигался до соударения в том же направлении, но со скоростью, вдвое меньшей. С какой скоростью перемещается центр масс соударяющихся атомов?

2. В цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится разреженный газ, все молекулы которого имеют равные по абсолютной величине скорости $|\vec{v}| = 200$ *м/сек*. Первоначально поршень отстоит от дна сосуда на расстоянии $H = 50$ *см* (рис. 3). Затем его быстро, со скоростью $|\vec{u}| = 25$ *м/сек*, смещают направо на расстояние $3/5\ H$. Определить, в каком интервале будут находиться скорости молекул газа. Столкновения молекул со стенками и поршнем считать абсолютно упругими.

3. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между пластинами $d = 2$ *см* подключен к источнику с э. д. с. $\mathcal{E} = 1000$ *в* (рис. 4). В середине конденсатора параллельно его пластинам и на равном

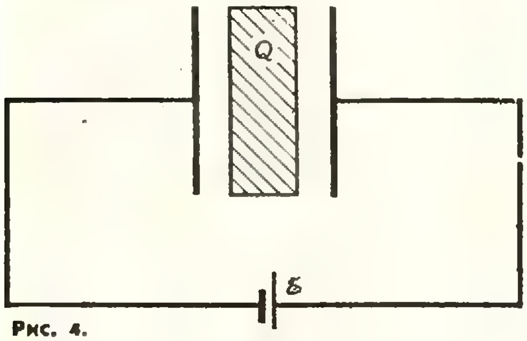


Рис. 4.

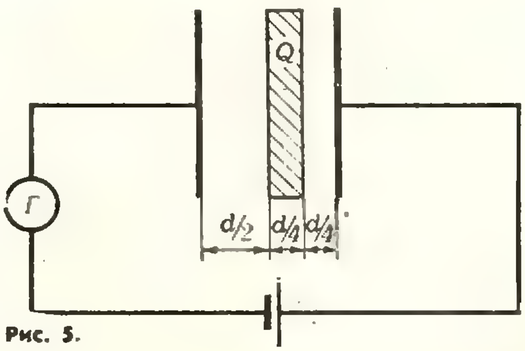


Рис. 5.

расстоянии от них расположена металлическая заряженная плита толщиной $d_1 = 1$ *см*. Заряд на плите $Q = 10^{-9}$ *к*. Предполагая, что пластины конденсатора жестко скреплены, определить суммарную электростатическую силу, действующую на конденсатор.

4. С помощью системы из двух тонких положительных линз рассматривают стену, находящуюся на расстоянии $a = 100$ *м* от передней линзы. Задний фокус первой линзы и передний фокус второй линзы совпадают. Расстояние между линзами $L = 30$ *см*. Линейное увеличение системы $\beta = 1/2$. В фокальной плоскости первой линзы установлена диафрагма диаметром $d = 4$ *мм*. Каковы размеры области на стене, видимой через эту систему?

Билет 3

1. При слиянии дейтона с ядром Li^6 происходит ядерная реакция $\mathrm{Li}^6 + d \rightarrow n + \mathrm{Be}^7$, в которой выделяется энергия $Q = 3{,}37$ *Мэв*. Считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой, найти распределение энергии между продуктами реакции.

2. В герметичном сосуде объемом $V = 5{,}6$ *л* содержится воздух при давлении $p = 760$ *мм рт. ст.* Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить $Q = 1430$ *дж* тепла? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ *дж/(моль·град)*.

3. Плоский воздушный конденсатор подключен через гальванометр к источнику с постоянной э. д. с. При этом заряд на конденсаторе $q = 10^{-9}$ *к*. Параллельно пластинам вводится металлическая заряженная плита, заряд которой $Q = 4\cdot10^{-9}$ *к*. Геометрические размеры указаны на рисунке 5. Какой заряд протечет через гальванометр?

4. Атом вещества с относительной атомной массой A, жестко закрепленный в кристаллической решетке, поглощает свет частоты ν_0. При какой частоте будет максимум поглощения в этом веществе, находящемся в газообразном состоянии? Масса протона равна m_p.

Ю. Никольский,
Б. Федосов,
В. Чехлов,
А. Шелагин

Факультет управления и прикладной математики МФТИ

Факультет управления и прикладной математики (ФУПМ) — самый молодой факультет Московского физико-технического института. В 1976 году МФТИ справил свое тридцатилетие, а ФУПМу исполнилось всего 7 лет. В то же время это самый первый и самый «старый» среди аналогичных факультетов в вузах страны. На факультете работают академики Б. В. Бункин, В. М. Глушков, А. А. Дородницын, Н. Н. Иноземцев, А. А. Самарский, В. А. Трапезников; члены-корреспонденты АН СССР О. М. Белоцерковский, Н. Н. Моисеев, Г. С. Поспелов.

Чем же вызвано создание этого факультета? Что отличает его от «традиционных» физтеховских факультетов?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо сначала рассказать об основных направлениях факультета. Как видно из его названия, мы имеем два профиля подготовки студентов: прикладная (вычислительная) математика и математическая физика и управление.

Помните, как ответил фонвизинский Митрофанушка на вопрос, является «дверь» именем прилагательным или существительным? Ответ был следующим: «Прилагательна. Потому что она приложена к своему месту. Вон у чулана дверь не повешена, так она существительна».

К сожалению, подобное представление о прикладной математике свойственно многим выпускникам школ (да и не только им): математика «сама по себе»—«существительна», а если ее приложить к чему-либо, то это и будет «прикладная математика». Между тем на самом деле прикладная математика — это не просто приложение математики, это самостоятельная математическая дисциплина со своей внутренней логикой, со своим стилем и мышлением. Часто забывают о том, что самые крупные математики — Л. Эйлер, А. Пуанкаре, К. Ф. Гаусс, П. Л. Чебышев, Софья Ковалевская были «прикладниками».

Эйлеру принадлежат, например, работы по баллистике и устойчивости стержней. Пуанкаре занимался физикой и астрономией. Сетка, применяемая в топографических картах, долгое время носила имя Гаусса. Чебышев создал теорию механизмов. Софье Ковалевской всемирную известность принесла премия за работу по теории гироскопов, а академик А. Н. Крылов уделял особое внимание методам вычислений. Причем вычислительная математика всегда вносила существенный вклад в развитие «чистой» математики и других естественных наук. Так, расчеты, проведенные Пуанкаре в астрономических исследованиях, привели к созданию теории расходящихся рядов. Прекрасным примером, иллюстрирующим роль вычислительной математики в естественных науках, является открытие новой планеты, сделанное Леверье после весьма точного вычисления орбит других небесных тел. Так что вычислительная математика вносила солидный вклад в развитие наук еще в те времена, когда вычисления производились карандашом на бумаге, а идея создания арифмометра лишь «витала в воздухе».

Однако тогда влияние вычислительной математики на развитие наук в целом было весьма ограничено — трудоемкость вычислительных методов не позволяла «рядовому» ученому широко ими пользоваться, обычно производились только вычисления, необходимые для обработки экспериментальных наблюдений. К тому же в начале двадцатого века резкое удешевление эксперимента привело к некоторому забвению вычислительных методов как аппарата исследования.

Положение коренным образом изменилось в середине двадцатого века с появлением электронно-вычислительной техники. Стали возможными крупные «машинные эксперименты», позволяющие заменить дорогой и нередко опасный эксперимент исследованием математической «модели».

Широкое применение таких машинных экспериментов привело к появлению новых специальностей, например вычислительной физики, представители которой занимают как бы промежуточное положение между физиками-теоретиками и физиками-экспериментаторами. Они проводят теоретические изыскания и «эксперименты» с помощью ЭВМ.

Еще сложнее охарактеризовать второе направление нашего факультета — «управление».

Если проанализировать литературные произведения, то можно заметить хронологическую смену героев: в романах XVII века это рыцарь, XVIII — торговец (вспомните Робинзона Крузо), XIX — промышленник и финансист (например, романы Голсуорси, Мамина-Сибиряка и др.), в романах XX столетия появляется «управленец», организатор. Это отражает определенные сдвиги в занятиях людей.

В широком смысле «управление» — это один из видов человеческой деятельности. Сложные современные объекты, будь то самолет или завод, требуют надлежащего управления. Поэтому число людей, занимающихся (прямо или косвенно) управлением, непрерывно возрастает. Например, одним лишь планированием в любой развитой стране занимается несколько десятков тысяч человек.

В более узком смысле «управление» — это прикладная наука, исследующая управленческую деятельность. Сюда относится автоматизация производства и создание роботов, например «луноходов» и более простых для замены человека в особо тяжелых условиях, создание станков с программным управлением и т. п. Но внедрение вычислительной техники и автоматики происходит не только на производстве.

При создании гигантского ускорителя элементарных частиц в Серпухове столкнулись со следующей проблемой. Подготовка ускорителя для проведения опытов занимает месяцы. Потом около месяца ускоритель находится в «рабочем состоянии». Отдельный эксперимент занимает доли секунды, а обработка его результатов — недели. Так как условия следующего эксперимента определяются результатами предыдущего, удается в течение этого месяца провести всего несколько экспериментов. Таким образом, основную часть времени ускоритель простаивает, «ожидая» пока будут обработаны результаты эксперимента. Проблему решила ЭВМ, которая взяла обработку экспериментов на себя и проводит их в пределах одного-двух часов. Физики, работающие на ускорителе, хотят добиться того, чтобы ЭВМ давала условия проведения следующей серии опытов непосредственно ускорителю.

Еще пример. Проектирование современного самолета занимает долгие годы, а в конце концов может оказаться, что самолет, на создание которого ушли миллионы рублей, уже «морально устарел» — появились новые требования, лучшие материалы и т. п. Для ускорения проектирования нужно создать систему автоматизации проектирования, когда конструктор работает в контакте с ЭВМ, «подсказывающей» ему решение, проводящей нужные расчеты, выдающей требуемую числовую или графическую информацию.

Подобные примеры можно привести не только в технике, но и в экономике, и даже в международных отношениях и в решении проблем охраны окружающей среды. Все эти примеры отражают один из наиболее характерных процессов нынешней научно-технической революции — процесс замены простейших форм умственного труда трудом «умных» машин. Эта замена вызвала к жизни ряд новых прикладных научных направлений.

Наконец, есть еще один, самый узкий смысл слова «управление».

Промышленная революция, происходившая в XIX веке, привела к замене физического труда трудом машин и механизмов, и именно в те годы расцвела физика, которая была научной базой этой революции, а потому — ведущей наукой XIX века. Правда, слава, которая всегда приходит с запозданием, пришла к физике только в начале XX века.

Научно-техническая революция, происходящая в настоящее время, приводит к замене умственных усилий работой вычислительных машин. Возникающие при этом прикладные науки нуждаются в своем теоретическом фундаменте, подобном физике для инженерных наук прошлого века. Таким фундаментом и является управление, понимаемое как точная наука подобно математике и физике.

Можно сказать, что математика изучает отношения «*a* больше *b*», «*c* принадлежит *D*», физика изучает свойства (изменения) отношений под действием некоторых сил, полей. Управление изучает целенаправленное изменение отношений, преследующее достижение некоторых целей. Поэтому физические модели являются частным случаем моделей управления. Вы знаете, что, например, падение тела можно объяснить и описать, «приписав» природе цель — минимизировать потенциальную энергию тела.

Управление — физическая наука в том смысле, что она, как и физика, изучает реальные объекты; в то же время это точная математическая наука. Понятие «управление» (общеизвестен перевод на греческий «кибернетика») шире, чем понятие «теоретическая кибернетика», и включает последнее в себя. Дело в том, что определение кибернетики, в основу которого положены понятия информации и обратной связи, применимо в основном к техническим системам. Для бихевиоральных систем (систем, обладающих поведением) основной проблемой является проблема выбора решения. Сейчас общепризнано, что без математического описания таких систем невозможен прогресс ни в биологии, ни в экономике. Управление в настоящее время более «физическая» наука, чем физика. Галилей так определил задачу физики: «Измерить то, что измеримо, сделать измеримым то, что нельзя измерить». Современная физика уже определилась и занимается первой половиной этой задачи. В новой науке — теории управления — одинаково важны обе стороны проблемы.

В то же время основные понятия этой науки быстро математизируются, а за последние десять лет возникли настолько математизированные разделы управления, что их зачастую относят к области чистой математики: теоретическая кибернетика, теория алгоритмов, алгоритмические языки, теория игр, дискретная математика, теория систем и т. д.

* * *

Выбирая специальность, вы часто ориентируетесь на те науки, в которых к настоящему моменту получены наибольшие достижения. Физика — одна из таких наук. Однако вспомним, что проблема высвобождения атомной энергии была сформулирована в 20-х годах. Те, кто поступил тогда на физические факультеты, решили эту проблему в 40—50-х годах. И только тогда об этом заговорила пресса, и абитуриенты хлынули на физические факультеты.

А Макс Планк мечтал посвятить себя математической экономике, но понял, что экономика — слишком сложная наука для его времени, и лишь тогда он решил заняться теоретической физикой.

В настоящее время управление как точная наука только складывается. Ей нужны свои Галилеи, Ньютоны, Эйнштейны и Планки. Ими будут те, кто сейчас придет учиться этой науке. Возможно, что в будущем они смогут сказать словами Дирака: «Я благодарен судьбе, что родился вовремя: будь я старше или моложе на несколько лет, мне не представились бы столь блестящие возможности».

Без сомнения, в этом смысле факультет управления и прикладной математики — самый перспективный из существующих факультетов МФТИ. Однако это и самый трудный для обучения факультет. Здесь наиболее насыщенная учебная программа и загрузка студентов.

С другой стороны, на нашем факультете наиболее полно могут проявиться способности студента. Если вы обладаете инженерным мышлением, то можете заняться прикладными вопросами управления; если физическим, то новыми постановками, формализацией проблем; если же математическим, то строгим доказательством сформулированных на физическом уровне положений и гипотез.

Если вы считаете, что это вам по силам — поступайте на наш факультет!

Ю. Иванилов

Примерные задачи вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, как и другие вузы страны, в 1977 году будет проводить вступительные экзамены по математике по двум программам (см. «Квант», № 2).

Предлагаемые ниже задачи рассчитаны на то, чтобы помочь школьникам, кончающим школу в 1977 году по новой программе, подготовиться к вступительным экзаменам по математике на различные факультеты МГУ.

I. Алгебра и начала анализа

1. Найти промежутки возрастания и убывания, исследовать на экстремум и построить графики следующих функций:

а) $y = x^4 - 4x^2$;

б) $y = x + \frac{1}{x^2}$;

в) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.

2. Применение дифференциального исчисления.

а) Найти абсциссы точек графика функции $y = \frac{1}{2}\sin 2x - \sin x$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$, касательные в которых к графику этой функции параллельны прямой $y + x - 1 = 0$.

б) Найти величину угла между двумя касательными, проведенными из точки $(0; -1)$ к графику функции $y = x^2$.

3. Задачи на максимум и минимум.

а) Найти критические точки и наибольшие и наименьшие значения следующих функций

$y_1(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $x \in [-5; 4]$;

$y_2(x) = |(x+1)(2x-5)^2|$, $x \in [-2; 3]$.

б) В полукруг единичного радиуса вписать прямоугольник наибольшей площади, одна из сторон которого лежит на диаметре.

4. Решить уравнения

а) $\cos x - \sin x = \sqrt{1 + \sin x \cos x}$;

б) $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$;

в) $\log_{2x^2-2}(3x^2 + x - 4) = \log_8 16 - \log_{27} 3$.

5. Решить неравенства

а) $|x^2-5x+6|>\left|\frac{x}{2}-1\right|$;

б) $\log_8 \cos x \leqslant \log_{1/27}3$;

в) $\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{(1-\lg x)}>1$;

г) $\sqrt{2x+\sqrt{x^2+5}}\geqslant x+1$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

а) $y=x^2$, $x+y=2$;

б) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$;

в) $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $x=\pi/2$ $(x>0)$.

7. Задачи с параметрами.

а) Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=x^3-ax-1$ имеет точку максимума x_0, в которой $f(x_0)>0$.

б) При каком значении параметра a касательные к графику функции $y=x^3-a^2x$, проведенные в точках с абсциссами $x=0$ и $x=a$, перпендикулярны?

в) При каждом значении параметра a решить уравнение

$$|x^2-5x+6|=ax.$$

г) При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\frac{ax-1}{x-a}>1.$$

8. Системы уравнений и неравенств.

а) Найти множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, \\ x+y\leqslant 1, \\ x-2y\leqslant 2. \end{cases}$$

б) Найти множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} |xy-4|=8-y^2, \\ xy=2+x^2. \end{cases}$$

в) Найти множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 6\cdot 2^{4y}+2^{2y}-12>0, \\ 2^{2y}+2^{y+1}-8<0. \end{cases}$$

II. Геометрия

1. При каком взаимном расположении прямых p и q выполняется равенство $S_pS_q=S_qS_p$, где S_p и S_q — преобразования симметрии относительно указанных прямых.

2. Показать, что если $\alpha_1+\alpha_2=0$, то $R^{\alpha_2}_{O_2}R^{\alpha_1}_{O_1}$ есть параллельный перенос $\vec{a}$, а при $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$ поворот R^{α}_{O}. Определить длину и направление $\vec{a}$ в первом случае, O и α во втором.

3. В плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY и две точки A и B такие, что $A\in[OX)$, $B\in[OY)$, причем $|OA|=|OB|$. Пусть $l_1=R^{\alpha}_{O}((OY))$ и $l_2=R^{-\alpha}_{A}((AB))$, где $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

При каких значениях α прямые l_1 и l_2

а) параллельны;

б) перпендикулярны?

4. Найти площадь треугольника ABC, если $|AC|=3$, $|BC|=4$, а медианы AK и BL перпендикулярны.

5. Прямые a_1, a_2 и a_3 параллельны, причем расстояния от прямой a_2, содержащейся в полосе с краями a_1 и a_3, до двух других равны b и c. Найти длину стороны равностороннего треугольника, вершины которого по одной расположены на прямых a_1, a_2 и a_3.

6. На стороне AB и продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $|AE|=|BE|=b$, $|BD|:|AD|=1:3$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ADE, если известно, что $|AB|=a$ и $b>a$.

7. Равносторонний треугольник с длиной стороны a повернули на угол α $(0\leqslant\alpha<360^\circ)$ вокруг своего центра. Найти площадь пересечения исходного и повернутого треугольников.

8. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка O так, что $|OA|=\sqrt{19}$, $|OB|=\sqrt{13}$, $|OC|=\sqrt{17}$. Вычислить $\vec{OB}\cdot\vec{BC}$.

9. В тетраэдре $ABCD$ длины ребер удовлетворяют соотношениям

$$|AB|^2+|DC|^2=|AC|^2+|BD|^2=|AD|^2+|BC|^2.$$

Доказать, что три пары скрещивающихся ребер тетраэдра взаимно перпендикулярны.

10. Плоскость проходит через вершину A треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB и пересекает медиану SL треугольника SAC в точке D такой, что $|SD|:|DL|=1:2$. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды?

11. В куб вписана сфера, касающаяся всех граней куба. Найти длину хорды, которая высекается на сфере прямой, проходящей через середины двух скрещивающихся ребер куба.

12. На трех ребрах куба $K_1=A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ выбраны точки $P_1\in[A_1A_4]$, $P_2\in[A_3A_3']$, $P_3\in[A_1'A_2']$ так, что

$$|P_1A_4|:|P_1A_1|=1:2,$$
$$|P_2A_3|:|P_2A_3'|=1:3,$$
$$|P_3A_2'|:|P_3A_1'|=1:2.$$

К кубу K_1 внешним образом приставлен куб $K_2=B_1B_2B_3B_4B_1'B_2'B_3'B_4'$ так, что $A_1=B_1$, $A_1'\in[B_1B_1']$, $A_2\in[B_1B_2]$, причем $|A_1A_2|:|B_1B_2|=1:3$. Плоскость, проходящая через точки P_1, P_2 и P_3, делит куб K_2 на две части. Найти отношение их объемов.

В. Вавилов, В. Тихомиров

Технические вузы

Вариант 1

1. К двузначному числу приписали справа такое же число. Разность между полученным четырехзначным числом и квадратом исходного двузначного числа разделили на 4% от квадрата исходного числа; в частном получили половину исходного числа, а в остатке — исходное число. Найти исходное двузначное число.

2. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма первых десяти членов той же прогрессии равна 3069. Найти сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg^2 x - 2\lg x - 15}{\sqrt{1000 - x}} = 0.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x = 2.$$

5. Найти длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, концы которого лежат на ее боковых сторонах, зная, что этот отрезок делит трапецию на две равновеликие фигуры, и что основания трапеции имеют длину a и b $(a > b)$.

6. Найти длину высоты конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Вариант 2

1. Две авиамодели начали одновременно двигаться в одном направлении при встречном ветре, скорость которого [illegible] *м/сек*. Первая модель продержалась в полете на t *сек* меньше, чем вторая, но пролетела на a *м* больше. Какая из этих моделей пролетит дальше в безветренную погоду? (Время полета модели не зависит от ветра.)

2. Решить неравенство

$$\frac{2\lg^2 x - 5\lg x + 2}{\sqrt{x - 200}} \geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0.$$

4. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их сумма равна 21, а произведение равно 216.

5. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 10 *см*. На его сторонах отложены отрезки $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ длины x каждый, причем $A_1 \in [AB]$, $B_1 \in [BC]$, $C_1 \in [CD]$, $D_1 \in [DA]$. Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, и найти значение x, при котором площадь этого квадрата будет наименьшей.

6. Найти объем пирамиды $DABC$, если $[DB] \perp (ABC)$, величина двугранного угла при ребре AC равна φ, $|DC| = l$, $\widehat{ACB} = \pi/2$, $\widehat{CAB} = \alpha$.

Вариант 3

1. Города A и B расположены на берегу реки, причем A ниже по течению. Из этих городов одновременно поплыли навстречу друг другу две лодки. Достигнув одновременно городов B и A, лодки повернули обратно и встретились на расстоянии 20 *км* от пункта первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из A и B, поплыли против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 *км* от B. Найти расстояние между A и B.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5 (x^2 - 2x + 2)} < \log_5 (5x^2 - 10x + 10).$$

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

4. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой в 4 раза больше суммы первых пяти ее членов.

5. В треугольник ABC вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на стороне AC, а две другие — на сторонах AB и BC. Найти наибольшее значение площади такого прямоугольника, если $|AC| = 12$ *см*, $|BD| = 10$ *см*, где $[BD]$ — высота треугольника ABC.

6. Найти объем шара, вписанного в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, а боковая поверхность равна Q.

Вариант 4

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в одном направлении, первый — со скоростью 8 *км/час*, а второй — 10 *км/час*. Через 30 минут из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который догнал первого, а еще через $1\frac{1}{2}$ часа — второго велосипедиста. Найти скорость третьего велосипедиста.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x} - 1} (2x - 14) = 2.$$

3. Решить неравенство

$$\cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{8} - \sin 2x \cdot \sin \frac{\pi}{8} \geqslant 0{,}5\sqrt{2}.$$

4. Тангенсы половин углов некоторого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и косинусы углов этого треугольника образуют арифметическую прогрессию.

5. Около круга радиуса R описан четырехугольник, две стороны которого параллельны друг другу, а две другие — конгруэнтны. Найти наименьшее значение площади такого четырехугольника.

6. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, а плоский угол при вершине α.

Л. Садовский, Н. Дегтярев

Ошибки в «Ошибках...»

Представьте себе, что вы принимаете вступительные экзамены по математике. Перед вами сидит абитуриент, ждет ваших вопросов, а вы должны объективно и справедливо оценить его знания.

Сначала вы предлагаете ему решить следующую задачу: *найти корни уравнения*

$$\log_{3x^2}(9x^4)-\log_{x^2/3}x^2=0. \quad (1)$$

Поступающий дает такое решение.

«Областью допустимых значений неизвестного данного уравнения является множество действительных чисел, *кроме $x=0$*. *Затем*, перейдя к новому основанию логарифмов $|x|$ и предварительно проверив, что $|x|=1$ не будет корнем уравнения (1), абитуриент получает уравнение

$$\frac{\log_{|x|}(9x^4)}{\log_{|x|}(3x^2)}-\frac{\log_{|x|}x^2}{\log_{|x|}\frac{x^2}{3}}=0,$$

из него

$$(\log_{|x|}3+2)(1-\log_{|x|}3)=0,$$

откуда, наконец, получает и

«Ответ:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_3=3,\ x_4=-3.\text{»} \quad (2)$$

Вы, видимо, объясните абитуриенту, что он допустил грубую ошибку. В действительности ОДЗ уравнения (1) таково:

$$x\neq 0,\ x\neq\frac{1}{\sqrt{3}},\ x\neq-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x\neq\sqrt{3},\ x\neq-\sqrt{3},$$

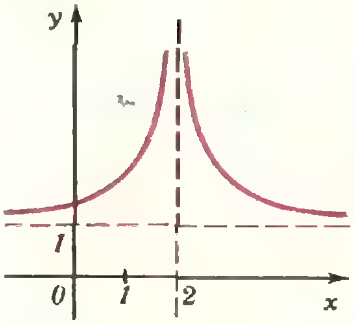
а потому указанные в ответе (2) значения $x_1=1/\sqrt{3}$ и $x_2=-1/\sqrt{3}$ корнями уравнения (1) не являются. Кроме того, вы отметите, что переход к новому основанию логарифмов $|x|$ — крайне нерациональный метод решения уравнения (1); оно *решается устно*, поскольку $\log_{3x^2}(9x^4)=2$.

Поставив перед абитуриентом другую задачу: *построить график функции*

$$y=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|, \quad (3)$$

вы с первого взгляда на полученный абитуриентом график (см. рисунок) заметите, что и эта задача решена неверно. В самом деле, функция (3) при $x=1$ принимает *нулевое значение, тогда как* изображенная на рисунке кривая с осью абсцисс не пересекается.

Можно определенно утверждать, что поступающий с такими знаниями студентом *не станет*. Однако пора открыть секрет: приведенные ошибочные решения взяты вовсе не из работы нерадивого абитуриента, а из пособия для поступающих*), где они, как ни странно, выдаются за правильные (см. стр. 48—49, 99—100).



Вступительные экзамены по математике в вузы дают обширный фактический материал для выявления недостатков в подготовке абитуриентов. И очень заманчиво выглядит идея на основе всестороннего и тщательного анализа типичных недостатков работ и ответов поступающих разъяснить наиболее слабо усваиваемые теоретические вопросы школьного курса, вскрыть причины ошибок в решении задач.

Именно такую идею, видимо, стремился реализовать автор в своем пособии, и это следовало бы только приветствовать. Но, к сожалению, в целом предпринятая им попытка оказалась весьма *неудачной: подбор примеров выглядит* случайным, а их анализ — поверхностным. И, самое главное, слишком часто ошибки и неточности самого автора подстать тем, от которых он пытается предостеречь читателя.

Много места в книге занимает важный вопрос — решение уравнений и неравенств. Но сколько путаницы допускает автор при рассмотрении конкретных задач! Например, на с. 20 дается определение ОДЗ (правильное), а на с. 47 утверждается, что ОДЗ уравнения

$$20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{x/2}x^2=0$$

есть множество $x>0$, что лишь по случайности не приводит в дальнейшем к ошибке. Непоследовательность автора можно проиллюстрировать тем, что $x=-6$ он считает корнем уравнения

$$(x+5)^{x^2+x-2}=1$$

(стр. 39—40), однако $x=-3$, $y=2$ решением системы

$$\begin{cases} x^y=9, \\ \sqrt[y]{324}=2x^2 \end{cases}$$

не признает (с. 50—51). Из текста невозможно понять, когда проверка является обязательной частью решения уравнения и когда ее проводить не нужно (см. с.26, 37, 45 и др.). По поводу уравнения

$$\sqrt{2x^2-8x+12}=6 \quad (4)$$

---

*) Туников В. А., Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике, изд. 4-е, переработанное и дополненное (Минск «Вышэйшая школа», 1974, 144 стр., тираж 150 000 экз., цена 16 коп.).

автор пишет: «Поскольку после возведения в квадрат могли появиться посторонние корни, необходима проверка» (с. 34). Между тем в данном случае делать проверку как раз не надо, достаточно заметить, что обе части уравнения (4) неотрицательны, и потому возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению.

Воспроизведем еще одно по меньшей мере странное определение: «Совокупность тех значений независимой переменной x, для которых $y=f(x)$ определена, т. е. каждому значению независимой переменной x соответствует одно или несколько вполне определенных значений функции, называется *областью определения* этой функции» (с. 86).

Отметим, что автор далеко не всегда приводит наиболее рациональные или удачные решения. Так, к тригонометрическим уравнениям, разбираемым на с. 63—67, гораздо проще применить метод введения вспомогательного угла. Некоторые замечания и рекомендации, высказанные в книге, представляются сомнительными и спорными. Например, поступающему не следует заучивать тригонометрические формулы, выходящие за рамки программы вступительных экзаменов (с. 56, 59); при решении геометрических задач не требуется (если в условии специально не оговорено противное) проводить исследование решения (с. 104, 129, 134) и т. д. Наконец, замечание, последнее по счету, но отнюдь не по важности: книга написана плохим языком, в ней сплошь и рядом встречаются неудачные и даже неграмотные обороты речи.

Хотя для поступающих было бы очень полезно и поучительно познакомиться с ошибками своих предшественников, рассматриваемое пособие юному читателю рекомендовать нельзя: оно не дает ясного понимания сути этих ошибок и путей их преодоления. Отмеченные существенные недостатки пособия тем более странны, что речь идет о четвертом издании и, следовательно, у автора уже имелась возможность исправить случайные недосмотры и переработать неудачные места.

Л. Слукин

Неравенства и ... вероятность

Следующая задача была предложена венгерской командой советской команде на одной из международных олимпиад: *если* $p+q=1$, $0<p<1$, m, n — *натуральные числа, большие* 1, *то*

$$(1-p^m)^n+(1-q^n)^m>1.$$

Эта задача с трудом поддается алгебраическому исследованию. Но, оказывается, ее можно просто и красиво решить с помощью теории вероятностей.

Пусть имеется таблица из n строк и m столбцов; в каждую клетку ставится либо 0, либо 1, причем вероятность того, что ставится 0, равна p (тогда 1 ставится с вероятностью q). Ясно, что $1-p^m$ — это вероятность того, что в некоторой фиксированной строке стоит хотя бы одна единица, а $(1-p^m)^n$ — того, что в каждой строке стоит хотя бы одна единица. Аналогично $(1-q^n)^m$ — вероятность того, что в каждом столбце стоит хотя бы один нуль. Одно из этих событий наверняка произойдет (если найдется строка из нулей, и столбец из единиц, то что же стоит на их пересечении?). Поэтому сумма вероятностей этих событий не меньше 1 (проверьте, что при $m>1$, $n>1$ эта сумма должна быть больше 1).

Ну, а если не знать, что такое вероятность? Оказывается, легко перевести это решение на язык комбинаторики. Для этого нужно рассмотреть случай, когда $p=r/s$ — рациональное число. Для каждой клетки таблицы возьмем запас цифр из r нулей и $s-r$ единиц и будем составлять всевозможные заполненные таблицы. Вероятность заменяется на число таблиц, а фраза «одно из этих событий наверняка произойдет» — на «объединение двух этих множеств таблиц есть все множество». Подумайте, как избавиться от предположения, что p — рационально.

А теперь решите такие задачи-обобщения.

1. Пусть $0<p_{ij}<1$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$, а $q_{ij}=1-p_{ij}$. Тогда $(1-p_{11}\ldots p_{1m})\cdot(1-p_{21}\ldots p_{2m})\cdot\ldots\cdot(1-p_{n1}\ldots p_{nm})+(1-q_{11}\ldots q_{n1})\cdot(1-q_{12}\ldots q_{n2})\times\ldots\cdot(1-q_{1m}\ldots q_{nm})\geqslant 1$, где $m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$.

2. Пусть $0<p_i<1$ $(i=1,\ 2,\ldots,k)$, $p_1+\ldots+p_k=1$, m_i — натуральные числа. Тогда $(1-(p_2+\ldots+p_k)^{m_2\ldots m_k})^{m_1}+\ldots+(1-(p_1+\ldots+p_{k-1})^{m_1\ldots m_{k-1}})^{m_k}\geqslant 1$ («многомерное» обобщение).

А. Р.

Форум юных астрономов

16 августа 1976 года вереница автобусов привезла на территорию Шемахинской астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР необычных пассажиров. Это приехали хозяева красочного палаточного городка с романтическим названием «Звездный» — 230 мальчишек и девчонок из 45 городов и сел нашей страны, посланцы многотысячной армии любителей астрономии на III Всесоюзный слет юных астрономов.

17 августа состоялось открытие слета. В этот день на торжественной линейке ребят приветствовал дважды Герой Советского Союза летчик-космонавт СССР Н. Н. Рукавишников. С теплыми словами приветствия обратился к ребятам секретарь ЦК ЛКСМ Азербайджана В. А. Гусейнов, директор Шемахинской обсерватории академик АН АзССР Г. Ф. Султанов, министр просвещения республики М. М. Мехти-заде, ученый секретарь Всесоюзного астрономо-геодезического общества (ВАГО) кандидат физико-математических наук В. А. Бронштэн, ответственные работники ЦК ВЛКСМ и Министерства просвещения СССР.

Многообразны интересы ребят в астрономии. Поэтому основная работа на слете проходила по секциям. Всего было создано 7 секций: «Солнце», «Кометы и метеоры», «Переменные звезды», «Луна и планеты», «Астрофизика», «Телескопостроение и астрофотография» и «Служба неба». Ежедневно проводились сначала теоретические занятия (лекции, беседы, доклады), затем лабораторные работы, обработка результатов наблюдений, полученных раньше, и, естественно, ночные наблюдения (с 22 до 02 часов).

На секциях ребята выступили с 79 докладами, из которых 28 было отобрано на общую конференцию. Такое обилие докладов не случайно. В последние годы юные астрономы все более и более активно ведут целеустремленную наблюдательную работу (не редки случаи плодотворных контактов коллективов юных астрономов с профессиональными астрономическими обсерваториями). Многие ребята занимаются теоретическими исследованиями. Существуют коллективы, в общем объеме работ которых преобладает популяризаторская деятельность. Все это, естественно, накладывало отпечаток на тематику докладов и их содержание. Чтобы не быть голословным, можно назвать темы некоторых докладов. Так, Владимир Крупко из Омска прочитал доклад «Организация астрономического кружка в 5-х, 6-х классах», Георгий Безруков (Волгоград) рассказал о наблюдениях Новой в Лебеде, Эдуард Миссаров (Ташкент) поделился с ребятами результатами наблюдений переменных звезд, Азик Куламбаев (Алма-Ата) рассказал о методике и результатах эквидинситометрии (исследования линий равной плотности фотоизображения) кометы Беннета, Александр Казаков (Горький) поделился опытом применения телевизионных методов при изучении космических объектов, Сергей Гурьянов и Юрий Баталов из Красноярска рассказали о том, как они открыли комету Кобаяси — Бергера — Милона.

Ребята и руководители делегаций приняли участие в двух пресс-конференциях. Более 80 вопросов было задано ученым юными астрономами. Из чего состоят кольца Сатурна? Существуют ли в пространстве отрицательные массы? Планируется ли в ближайшее время запуск женщин-космонавтов? Каковы возможности исследования пилотируемыми кораблями дальних планет Солнечной системы? Каковы перспективы исследования космического пространства в СССР и за рубежом? Есть ли в пространстве антиматерия и как ее обнаружить? И многое, многое другое. Юные астрономы получили полные ответы на все свои вопросы. Да это и не удивительно, так как в пресс-конференциях участвовали летчик-космонавт СССР Н. Н. Рукавишников, профессор МГУ К. А. Куликов, ученый секретарь ВАГО В. А. Бронштэн, ведущие ученые Шемахинской астрофизической обсерватории О. Х. Гусейнов, С. Г. Мамедов, И. А. Асланов, С. З. Омаров. Пресс-конференции показали не только большую любознательность ребят, но и их эрудицию, широту и глубину их интересов, знание основ астрономии и космонавтики.

Ребята общались с учеными не только на пресс-конференциях. Они неоднократно встречались с учеными ШАО во время секционных занятий, часть которых проходила в лабораториях и на инструментах обсерватории. Учеными из Москвы К. А. Куликовым, Э. В. Кононовичем, А. В. Засовым, Л. М. Гиндилисом, В. А. Бронштэном было прочитано для ребят 10 лекций по самым актуальным вопросам современной астрономии. А с каким нетерпением все ждали начала диспута с интригующим названием «Есть ли жизнь во Вселенной?». Вел этот диспут один из известных (не только в нашей стране, но и за рубежом) специалистов по проблеме внеземных цивилизаций Л. М. Гиндилис. Ребята высказали много интересных соображений о возможности и целесообразности контактов с инопланетными разумными существами, пофантазировали о формах жизни во Вселенной, о путях развития земной цивилизации. И пусть их рассуждения зачастую были наивными, не аргументированными — отрадно то, что они по-своему пытались решать эти извечно актуальные и сложные проблемы. На наш взгляд, главное в подобной дискуссии — показать ребятам данную проблему так, как ее понимает современная наука, и заставить их задуматься над этой проблемой.

Индивидуальность юных астрономов, их знания, умения и навыки, полученные в процессе занятий в своем коллективе, проявились также на выставке творческих работ юных астрономов. На выставку было представлено около 200 экспонатов от 30 коллективов. Что характерно для выставки? Прежде всего, обилие иллюстративного материала, демонстрирующего успехи коллективов юных астрономов, формы, методы и содержание их работы, достижения коллективов в проведении любительских астрономических наблюдений. Нельзя не отметить прекрасные фотографии звездного неба, Луны, планет, серебристых облаков, Солнца и солнечных пятен, полученные юными астрономами Донецка, Ярославля, Алма-Аты, Углича. Хорошая подборка методических материалов была представлена на выставке Клубом юных техников Сибирского отделения АН СССР. Посетителям выставки запомнились красиво оформленные альбомы, показывающие работу Крымской областной юношеской астрономической обсерватории.

Конструкторская работа юных астрономов была представлена на выставке несколькими коллективами. Здесь в первую очередь надо сказать о юных астрономах Бакинского Дворца пионеров и школьников имени Ю. А. Гагарина, которые выставили целую серию самодельных телескопов и астрографов. Самодельные телескопы демонстрировал также один из молодых участников слета — коллектив юных телескопостроителей Новосибирского городского Дворца пионеров. Портативные астрографы были представлены коллективами Москвы, Симферополя, Углича. Делегация Углича показывала прибор для визуальных и фотографических наблюдений Солнца. Необходимо сказать, что перечисленные выше приборы интенсивно использовались в работе соответствующих секций. На них проводились визуальные и фотографические наблюдения Луны, Юпитера, Солнца, звезд и звездных полей. Хочется отметить некоторые учебно-наглядные пособия по астрономии. Это подвижные карты звездного неба, изготовленные ребятами из Горького и Ташкента, а также серия лабораторных работ по изучению образования пятен на Солнце, разработанная в школе № 5 города Углича.

Жюри слета высоко оценило деятельность отдельных юных астрономов и коллективов. По решению жюри ценными подарками награждены 37 ребят и 12 коллективов. Помимо этого, 7 коллективов рекомендованы к участию на ВДНХ СССР в павильоне «Юные техники и натуралисты». Для награждения медалями «Юный участник ВДНХ СССР» представлены 50 юных астрономов; 6 руководителей коллективов представлены к награждению золотыми, серебряными и бронзовыми медалями ВДНХ СССР.

Особые призы жюри — три тома атласа звездного неба — были вручены Казимиру Чернису (Эстония) и Юрию Фомину (Москва) за независимое обнаружение кометы д'Аре. Это знаменательное событие произошло на слете в ночь с 17 по 18 августа. Специальный приз за внеконкурсную работу получила Ирина Михайлова. Ею был написан реферат «Жизнь и творчество среднеазиатских ученых в области астрономии». Как сказал председатель жюри слета профессор К. А. Куликов, это фундаментальное исследование школьницы достойно того, чтобы быть помещенным в сборнике «Историко-астрономические исследования».

У читателя может сложиться впечатление, что все время ребят было посвящено занятиям астрономией. Нет, много времени занимал и организованный отдых — спортивные соревнования, труд-десант, экскурсии на обсерваторию ШАО, «огоньки» знакомства, экскурсии по окрестностям обсерватории, просмотр самодельных цветных слайдов.

Конференция, выставка творческих работ юных астрономов, семинар руководителей коллективов показали возросшую активность любителей астрономии в проведении разнообразных астрономических наблюдений. В то же время необходимо отметить, что до сего времени коллективы юных астрономов практически не занимаются астроприборостроением и, следовательно, не проводят наблюдений с использованием классических методов астрофизики. Практически отсутствует общение между коллективами; коллективы работают разобщенно, не обмениваются информацией. К недостаткам работы юных астрономов следует отнести и то, что наблюдения уникальных явлений, а также длинные ряды наблюдений в некоторых коллективах не обрабатываются, лежат мертвым грузом.

На слете были намечены конкретные мероприятия, которые должны способствовать поднятию любительской астрономии на более высокий уровень. В частности, предполагается провести в 1978 году Всесоюзную школу-семинар руководителей коллективов. Рекомендуется проводить региональные сборы юных астрономов на базе таких коллективов, как астрономический кружок Бакинского Дворца пионеров и школьников, Крымская областная юношеская астрономическая обсерватория, астрономическая лаборатория Клуба юных техников СО АН СССР, Ярославское общество юных любителей астрономии, астрономическая обсерватория пионерлагеря «Орленок».

Таким образом, III Всесоюзный слет юных астрономов позволил выяснить состояние любительской астрономии, конкретизировать цели и задачи, наметить пути дальнейшего развития и совершенствования любительской астрономии.

С. Войнов

К статье «Площадь и интеграл»

1. 1/2. 2. 11/2. 3. 4/3. 4. 16/3. 5. $2+\pi^3/6$. 6. 4. 7. 1/3.

К статье «Рационально или иррационально?»

1. Указание. $\frac{\pi}{2}+k\pi=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$.

2. Указание. Если T рационально, то $T+x$ рационально при рациональном x и иррационально при иррациональном x.

3. Указание. Рациональное число в любой целочисленной степени будет числом рациональным.

4. а) Нет, так как $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$, $b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$.

б) Да, пример: $a=b=\sqrt{2}$ или $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$.

в) Нет.

г) Да.

д) Нет.

Указание. Выразить a и b через данные числа

5. Из рациональности второй дроби вытекает, что a^2 рационально, а из рациональности первой дроби, — что и a рационально.

6. Указание. Воспользоваться приемом решения примера 4.

7. а) Иррационально, так как $\sqrt{3}=\left(\left(\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2-1\right)^2-2$.

б) Указание. $6\pm\sqrt{11}=\frac{12\pm2\sqrt{11}}{2}=\frac{(\sqrt{11}\pm1)^2}{2}$.

в) Положим $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$, тогда $x^3-6x-40=0$, откуда $x=4$.

8. а) Да, $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

б) Нет, так как $a+2\sqrt{ab}+b=\sqrt{2}$, $\sqrt{ab}=\frac{1}{2}[\sqrt{2}-(a+b)]$,

$$ab=\frac{1}{4}[2+(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{2}],$$

и справа — число иррациональное, поскольку $a+b\neq0$.

10, 11. Указание. Действовать, как при решении примера 7.

12. Указание. См. решение примера 8.

13. Указание. См. решение примера 10.

К статье «Московский физико-технический институт»

Математика

Билет 1

1. Возведя обе части данного уравнения в квадрат и упростив полученное выражение, находим $6-3x=\sqrt{6x^2-18x+12}$. После повторного возведения в квадрат приходим к уравнению $x^2-6x+8=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=4$. Проверка показывает, что решением является только $x_1=2$.

2. ОДЗ неравенства: $x<2$, поэтому $\log_2(x^2-4x+4)=2\log_2(2-x)$. Замечая еще, что $\log_{1/2}(2-x)=-\log_2(2-x)$, после равносильных преобразований получим

$$(1-x)[\log_2(2-x)-2]>0.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}1-x>0,\\2-x>4;\end{cases}\quad\begin{cases}1-x<0,\\0<2-x<4.\end{cases}$$

Решениями этих систем являются соответственно: $x<-2$, $1<x<2$.

3. 3:1. Указание. Поскольку $|AB|<|BC|$, точки на прямой расположены в следующем порядке: A, B, C, D. Далее проведите прямую через центры окружностей. Самое простое решение задачи получается применением следующей теоремы (попробуйте доказать ее самостоятельно): *если две хорды PQ и RS одной окружности пересекаются в точке M, то $|PM|\cdot|MQ|=|RM|\cdot|MS|$*. Другое решение использует перпендикуляр O_1E, опущенный из центра O_1 большей окружности на $[AD]$.

4. $x_1=m\pi$, $y_1=2n\pi$; $x_2=-\arccos\frac{1}{7}+2m\pi$, $y_2=2\pi/3+2n\pi$; $x_3=\arccos\frac{1}{7}+2m\pi$, $y_3=-2\pi/3+2n\pi$ ($m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$).

Указание. Перемножив уравнения почленно, после преобразований придем к уравнению

$$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=4\sin^2 y.$$

Оно имеет три серии решений: $y_1=2n\pi$, $y_2=2\pi/3+2n\pi$, $y_3=-2\pi/3+2n\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Каждое из найденных значений y подставим в оба уравнения исходной системы. Для $y_1=2n\pi$ получим $\sin x=0$; для $y_2=2\pi/3+2n\pi$ получим систему

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cos x-5\sin x=3\sqrt{3},\\3\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{3},\end{cases}$$

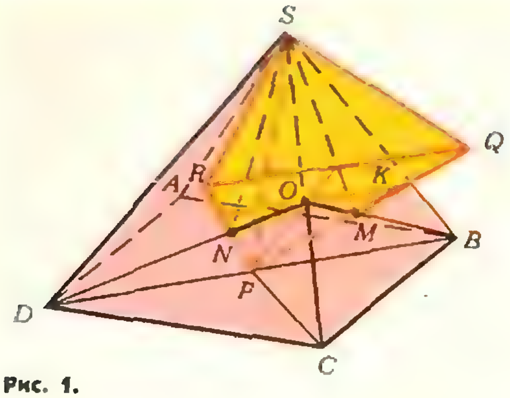


Рис. 1.

откуда $\cos x = 1/7$, $\sin x = -4\sqrt{3}/7$; для $y_3 = -2\pi/3 + 2n\pi$ аналогично получим $\cos x = 1/7$, $\sin x = 4\sqrt{3}/7$.

5. Пусть $O = (SC) \bigcap (PQR)$ (рис. 1), тогда по условию $[SO]$ — высота тетраэдра $SPQR$. Осюда следует, что точка O — центр грани PQR. Обозначим через a длину ребра тетраэдра, тогда $|SP| = a$, $|PO| = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $|SO| = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Из подобия $\triangle SPO$ и $\triangle SCP$ находим

$$|PC| = |PO| \cdot \frac{|SP|}{|SO|} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, длина стороны квадрата $ABCD$ равна a. Отсюда $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Общей частью данных пирамид является пирамида $SOMPN$ $(M = (OB) \bigcap (PQ)$, $N = (OD) \bigcap (PR))$ с высотой SO. Определим площадь основания $PMON$. Имеем

$$S_{\Delta POM} = \frac{|OM|}{|OB|} \cdot S_{\Delta POB},$$

$$S_{\Delta POB} = \frac{1}{2}|PO| \cdot |PB| = \frac{a^2}{2\sqrt{6}}.$$

Найдем $|OM| : |OB|$. Проведем прямую OK параллельно прямой RQ. Тогда $|OK| = \dfrac{a}{3}$.

Из подобия ΔOMK и ΔBMP имеем

$$|OM| : |MB| = |OK| : |PB| = \sqrt{2} : 3$$

и, учитывая, что $|OB| = |MB| + |OM|$, находим

$$|OM| : |OB| = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta POM} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}(3 + \sqrt{2})}.$$

Аналогично получаем

$$S_{\Delta PON} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}(3 + \sqrt{2})},$$

откуда

$$S_{PMON} = \frac{a^2}{\sqrt{3}(3 + \sqrt{2})}.$$

Объем пирамиды $SOMPN$ равен

$$\frac{1}{3}|SO| \cdot S_{PMON} = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{9(3 + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{21} V.$$

Билет 2

1. -2. Указание. Пусть a_1, a_2, a_3 — соответственно первый, второй и третий члены арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $a_1 = qa_2$, $a_3 = q^2a_2$, причем $a_2 \neq 0$ (иначе $a_1 = qa_2 = 0$, $a_1 - a_2 = 0$) и

$$a_2 - qa_2 = q^2a_2 - a_2,$$

откуда $q^2 + q - 2 = 0$.

2. $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Указание. ОДЗ: $x > y > 0$. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$(\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y) = (\lg x + \lg y)^2,$$

откуда либо $\lg x + \lg y = 0$, $y = 1/x$, либо $\lg x - \lg y = \lg x + \lg y$, $\lg y = 0$, $y = 1$.

3. $x_1 = 3\pi/4 + n\pi$, $x_2 = 3\pi/2 + 2n\pi$, $x_3 = 2n\pi$, $x_4 = \pi/4 + (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + n\pi$ (n — целое). Указание. Привести уравнение к виду

$$(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x + 1)(2\sin x - 2\cos x - 1) = 0.$$

4. $\dfrac{\pi - \alpha}{2}$, $\operatorname{arctg} \dfrac{\sin\alpha}{2 + \cos\alpha} = \arcsin \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}}$, $\dfrac{\alpha + \pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{\sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$.

Указание. Возьмем на $[AB]$ точку M так, что $|BM| : |MA| = 1:2$. Тогда $(MK) \parallel (AD)$ и из условия $|AB| = 2|BC| + |AD|$ следует, что $|AM| = 2|MK|$. Далее $|BM| = |MK|$, $\widehat{BMK} = \alpha$, отсюда $\widehat{MBK} = (\pi - \alpha)/2$, и затем из ΔAMK по теореме косинусов находим $|AK| : |MK|$ и по теореме синусов $\sin \widehat{MAK}$.

5. $(3\sqrt{2} \pm \sqrt{3})$ *см*.

Физика

Билет 1

1. Запишем уравнения движения саней и человека для проекций на ось координат,

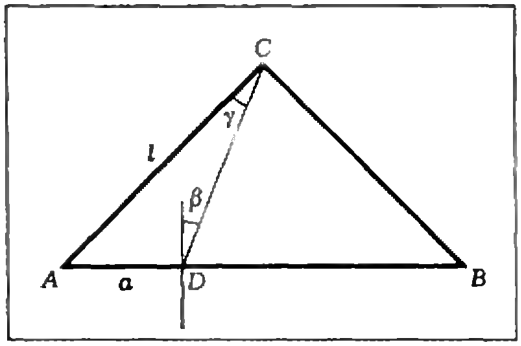


Рис. 2.

направленную вниз по склону горы:

$$M|\vec{g}|\sin\alpha-\mu(M+m)|\vec{g}|\cos\alpha+|\vec{F}|=0,$$

$$m|\vec{g}|\sin\alpha-|\vec{F}|=ma.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила взаимодействия между человеком и санями, $\vec{a}$ — ускорение человека. Из этих уравнений

$$a=\frac{(M+m)|\vec{g}|}{m}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx-3\ м/сек^2,$$

т. е. человек должен двигаться по саням вверх с ускорением 3 $м/сек^2$.

2. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты Q, которое необходимо сообщить газу при изотермическом расширении, равно работе A газа. Поскольку относительное увеличение объема мало, можно считать, что давление при расширении уменьшается по линейному закону. Тогда

$$A=p_{ср}\Delta V=\frac{1}{2}(p_1+p_2)\Delta V.$$

Из закона Бойля — Мариотта

$$p_2=\frac{p_1V_1}{V_1+\Delta V}=p_1\frac{1}{1+\dfrac{\Delta V}{V_1}}\approx p_1\left(1-\frac{\Delta V}{V_1}\right).$$

Следовательно,

$$Q=A\approx p_1\Delta V\left(1-\frac{\Delta V}{2V_1}\right)=$$

$$=\frac{m}{\mu}RT\frac{\Delta V}{V_1}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V_1}\right)\approx 4{,}88\ дж.$$

3. В установившемся режиме сила $\vec{F}_м$, действующая на свободный заряд в магнитном поле, компенсируется электростатической силой $\vec{F}_э$:

$$|\vec{F}_м|=|\vec{F}_э|,\ или\ q|\vec{v}||\vec{B}|=q\frac{U}{d}.$$

Отсюда

$$|\vec{v}|=\frac{U}{|\vec{B}|d}=2\ м/сек.$$

4. Через грань BC не будет видна часть текста, находящаяся под участком AD основания призмы (рис. 2). Из треугольника ACD по теореме синусов $\dfrac{l}{\sin(90^\circ+\beta)}=\dfrac{a}{\sin\gamma}$, где $a=(1-\alpha)\sqrt{2}l$, $\sin\beta=\dfrac{1}{n}$, $\gamma=45^\circ-\beta$. Отсюда найдем показатель преломления n:

$$n=\sqrt{1+\frac{1}{(2\alpha-1)^2}}\approx 1{,}6.$$

Билет 2

1. В системе отсчета, связанной с центром масс соударяющихся атомов, суммарный импульс равен нулю:

$$m_\alpha\left(\left|\vec{v}_\alpha\right|-\left|\vec{v}\right|\right)+m_C\left(\left|\vec{v}_C\right|-\left|\vec{v}\right|\right)=0,$$

где $m_C=3m_\alpha$ и $\left|\vec{v}_\alpha\right|=2\left|\vec{v}_C\right|$. Отсюда скорость центра масс

$$\left|\vec{v}\right|=\frac{m_\alpha\left|\vec{v}_\alpha\right|+m_C\left|\vec{v}_C\right|}{m_\alpha+m_C}=$$

$$=\frac{5}{8}\left|\vec{v}_\alpha\right|=625\ м/сек.$$

2. После каждого соударения с движущимся поршнем скорость молекул газа уменьшается на $2|\vec{u}|$. А сколько соударений возможно? Обозначим через t время между первым и вторым соударениями, тогда

$$t=\frac{2H-x}{\left|\vec{v}_1\right|}=\frac{2H-x}{\left|\vec{v}\right|-2\left|\vec{u}\right|},$$

где $x=\left|\vec{u}\right|t$ — соответствующее смещение поршня. Отсюда

$$x=\frac{2\left|\vec{u}\right|}{\left|\vec{v}\right|-3\left|\vec{u}\right|}H=\frac{2}{5}H<\frac{3}{5}H,$$

следовательно, часть молекул претерпит два соударения, и их скорости после второго соударения $\left|\vec{v}_2\right|\geqslant\left|\vec{v}\right|-4\left|\vec{u}\right|=100\ м/сек$. Аналогично можно показать, что третье соударение невозможно. Поэтому окончательно

$$100\ м/сек\leqslant\left|\vec{v}_2\right|\leqslant 200\ м/сек.$$

3. Пластины конденсатора взаимодействуют с электрическим полем, созданным заряженной плитой. Напряженность этого поля $\left|\vec{E}\right|=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0S}$. Заряд конденсатора q создает свое электрическое поле $\left|\vec{E}_1\right|=\dfrac{q}{\varepsilon_0S}=\dfrac{\mathcal{E}}{d-d_1}$, откуда $q=\dfrac{\mathcal{E}\varepsilon_0S}{d-d_1}$.

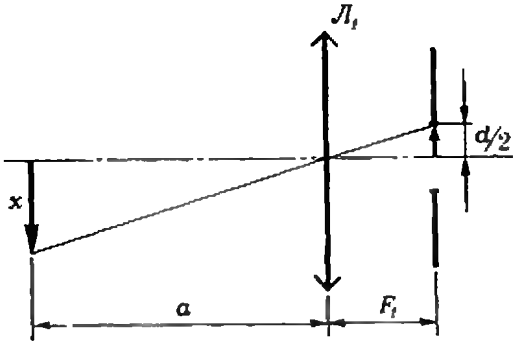


Рис. 3.

На конденсатор действует суммарная электростатическая сила

$$\left|\vec{F}\right| = 2q\left|\vec{E}\right| = \frac{\mathscr{E}Q}{d-d_1} = 10^{-4}\ н = 10\ дин.$$

4. Изображение стены в первой линзе находится в ее фокальной плоскости ($a \gg F_1$), поэтому (см. рис. 3) $\dfrac{x}{d/2} = \dfrac{a}{F_1}$, где x — видимый размер стены. Кроме того, для оптической системы имеют место соотношения $\beta = \dfrac{F_2}{F_1}$ и $F_1 + F_2 = L$. Тогда

$$x = \frac{(1+\beta)\,ad}{2L} = 1\ м.$$

Билет 3

1. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1\left|\vec{v}_1\right|^2}{2} + \frac{m_2\left|\vec{v}_2\right|^2}{2} = Q,$$

$$m_1\left|\vec{v}_1\right| = m_2\left|\vec{v}_2\right|$$

(индекс «1» относится к нейтрону, а «2» — к ядру бериллия). Отсюда

$$E_1 = \frac{m_1\left|\vec{v}_1\right|^2}{2} = \frac{Qm_2}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{7}{8}Q = 2{,}95\ Мэв,$$

$$E_2 = Q - E_1 = 0{,}42\ Мэв.$$

2. Из уравнения теплового баланса

$$Q = C_V\frac{m}{\mu}(T_1 - T)$$

и уравнений состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \quad и \quad p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1$$

найдем установившееся в сосуде давление:

$$p_1 = p\left(1 + \frac{RQ}{C_V pV}\right) \approx 2p = 1520\ мм\ рт.\ ст.$$

3. Обозначим новый заряд на конденсаторе через q_1. Разность потенциалов между пластинами равна

$$\mathscr{E} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}\cdot\frac{3}{4}d + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{d}{2} - \frac{d}{4}\right),$$

где $\mathscr{E} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}d$. Отсюда $q_1 = \dfrac{8q-Q}{6}$, и

$$\Delta q = q_1 - q = \frac{2q-Q}{6} = -\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\ к.$$

4. Запишем законы сохранения энергии и импульса для системы атом — фотон:

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{\left|\vec{p}\right|^2}{2Am_p},$$

$$\left|\vec{p}\right| = \frac{h\nu}{c}.$$

Отсюда получаем

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{(h\nu)^2}{2Am_pc^2}.$$

Физический смысл имеет только один корень

$$h\nu = Am_pc^2 - Am_pc^2\sqrt{1 - 2\frac{h\nu_0}{Am_pc^2}}.$$

Попробуем упростить это выражение. Поскольку $h\nu_0 \ll Am_pc^2$ (в этом можно убедиться, подставив конкретные значения),

$$h\nu \approx Am_pc^2 - Am_pc^2\left(1 - \frac{h\nu_0}{Am_pc^2}\right) = h\nu_0.$$

Это позволяет сделать такую замену:

$$\left|\vec{p}\right| = \frac{h\nu}{c} \approx \frac{h\nu_0}{c}.$$

Тогда окончательно

$$h\nu \approx h\nu_0 + \frac{(h\nu_0)^2}{2Am_pc^2},$$

и

$$\nu \approx \nu_0\left(1 + \frac{h\nu_0}{2Am_pc^2}\right).$$

К статье «Целые точки в многоугольниках и многогранниках»

(см. «Квант» № 4)

Упражнение 1. Очевидно, что $S(nF) = n^2S(F)$. Легко видеть, что $B(nF) = nB(F)$. Поэтому:

а) $N(nF) = S(nF) + B(nF)/2 + 1 = n^2S(F) + nB(F)/2 + 1$ и

б) $N(2F) - 2N(F) + 1 = [S(2F) + B(2F)/2 + 1] - 2[S(F) + B(F)/2 + 1] + 1 = 2S(F)$.

Упражнение 5. $N(3F) = 1 - 3N(F) + 3N(2F)$.

Упражнение 6. Из решения упражнения 1 вытекает, что $p(n) = n^2S(F) + nB(F)/2 + 1$. Поэтому $p(-n) = p(n) - nB(F) = N(nF) - B(nF)$, а эта разность и есть число внутренних целых точек в многоугольнике nF (при $n \geqslant 1$).

Если F — целочисленный многогранник, то $N(nF) = a + bn + cn^2 + dn^3 = p(n)$ при $n \geqslant 0$. Оказывается, что при $n \geqslant 1$ число внутренних целых точек в многограннике nF равно $-p(-n)$.

Упражнение 7. Мы рассмотрим только случай, когда F, F_1 и F_2 — многогранники. Нужно доказать, что
$B(F)+B(M)=B(F_1)+B(F_2)$.(•)

Если точка X лежит на границе F и не принадлежит F_2, то X дает вклад 1 в $B(F_1)$ и в $B(F)$. Если точка X лежит на границе M, то она дает вклад 1 в $B(F_1)$, $B(F_2)$, $B(F)$ и $B(M)$. Если точка X лежит внутри M, то она дает вклад 2 в $B(M)$ и вклад 1 в $B(F_1)$ и $B(F_2)$. Если X не принадлежит ни M, ни границе F, то она не дает вклада ни в одно из слагаемых формулы (•). Таким образом, любая точка X дает одинаковый вклад в обе части (•), т. е. эти части равны.

Упражнение 9. $N(4F) = 4N(3F) - 6N(2F) + 4N(F) - 1$.

Задача 1. Аналог теоремы 1: *число ненулевых решений системы трех уравнений с тремя неизвестными либо бесконечно, либо не превосходит 3!.(объем многогранника Ньютона этой системы).*

Задача 3. Пусть $g \in У'$. Существует удобная функция f такая, что $\vec{g} = \vec{f}$. Так как $f \in У$ и $У' \supset У$ согласно задаче 2, то функция $h = f - g$ принадлежит $У'$ и $\vec{h} = 0$. Однако при доказательстве основной теоремы мы пользовались только тем, что $h \in У'$. Значит, $h = 0$, $g = f \in У$, и ввиду произвольности g, $У' = У$.

Задача 5.

1) $N(nX_i) = C^{i-1}_{n+i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

2) $c_1 = -(n-1)(n-2)(n-3)/6$, $c_2 = n(n-2)(n-3)/2$, $c_3 = -n(n-1)(n-3)/2$, $c_4 = n(n-1)(n-2)/6$.

3) $N(nF) = N_n(F) = c_1 + c_2N(F) + c_3N(2F) + c_4N(3F)$, где c_1, c_2, c_3, c_4 — многочлены от n из 2).

4) Коэффициент при n^3 равен $V(F)$, а коэффициент при n^2 равен $B(F)/2 - 1$.

Задача 6. *План доказательства пространственной основной теоремы.*

Всюду ниже мы опускаем слово «целочисленный» и называем тетраэдром треугольную пирамиду.

Применяя последовательно допустимые преобразования, можно перевести:

1) любую точку в X_1;

2) любой отрезок I, для которого $N(I) = 2$, в X_2;

3) любой треугольник F, для которого $N(F) = 3$, в X_3;

4) любой тетраэдр F, для которого $N(F) = 4$ и $V(F) = 1/6$, в X_4;

5) любой тетраэдр F, для которого $N(F) = 4$, в тетраэдр T_n (см. «Квант», № 4, рис. 1 на с. 13), где $n = 6V(F)$.

Из 1)—4) и определения удобной функции следует, что h обращается в нуль на всех фигурах нулевого объема (поскольку $h(X_1) = h(X_2) = h(X_3) = 0$ — см. доказательство основной теоремы для плоских фигур) и на любом тетраэдре F, для которого $N(F) = 4$ и $V(F) = 1/6$ (поскольку $h(X_4) = 0$).

С помощью свойства А) получаем из 4), что h обращается в нуль на любом единичном кубе, и по индукции на любом прямоугольном параллелепипеде $П_n = \{(x;\ y;\ z) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant n\}$.

Параллелепипед $П_n$ можно разбить на тетраэдр T_n и некоторое число тетраэдров F_i, для которых $N(F_i) = 4$ и $V(F_i) = 1/6$. Поскольку $h(П_n) = 0$, $h(F_i) = 0$, и h обращается в нуль на всевозможных пересечениях F_i между собой и с $П_n$ (эти пересечения — либо точка, либо отрезок, либо треугольник), то мы получаем из А), что h обращается в нуль и на T_n. Из 5) и определения удобной функции теперь следует, что h обращается в нуль на любом тетраэдре F, у которого $N(F) = 4$. Любой же тетраэдр, для которого $N(F) > 4$, можно разбить на два, три или четыре тетраэдра с числом целых точек, меньшим чем $N(F)$. По индукции получаем, что $h(F) = 0$ для любого тетраэдра F. Разбивая любой многогранник на тетраэдры, получаем из А) утверждение теоремы.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 4)

1. $15k+7$ копеек.

2. $\overline{\text{РЕКТОР}} = 530\,625$.

3. $\text{IV} = \text{I} + \text{V} - \text{II}$, $\text{X} - \text{I} = \text{IX}$, $\text{IV} = \text{V} - \text{I}$, $\text{X} - \text{IX} = \text{I}$, $\text{XXVI} - \text{XXV} = \text{I}$.

4. $$\begin{array}{cc} & 32\times 24=768 \\ & +\quad +\quad : \\ : & 144:24=6 \\ \hline & 176-48=128. \end{array}$$

К задачам

(см. «Квант» № 4, с 12)

1. $S = Rr$. 2. $\sqrt{ab/(a+b)}$. 3. а) $x_1 = 2, y_1 = 0, z_1 = 5$; $x_2 = 5, y_2 = 0, z_2 = 2$; б) $x = 6$; в) $x = 7, y = 8$. 4. Корней нет. Указание. Пусть S_{1976} — выражение в левой части уравнения, тогда $(x-1)^2 \cdot S_{1976} = 1977 \cdot x^{1978} - 1978 \cdot x^{1977} + 1$.

(см. «Квант» № 4, с. 23)

1. Сила трения колес о дорогу пропорциональна весу машины ($|\vec{F}_{\text{тр}}| = km|\vec{g}|$, где k — коэффициент трения, m — масса машины). Следовательно, ускорения, сообщаемые машинам, не зависят от их масс ($|\vec{a}| = k|\vec{g}|$) и одинаковы. Поэтому машины остановятся одновременно.

2. Коромысло рычажных весов следует делать такой конфигурации, чтобы при равных грузах на чашках сумма моментов сил тяжести, действующих на грузы, была равна нулю тогда и только тогда, когда коромысло находится в горизонтальном положении. Например, как на рисунке 4. В этом случае плечи p_1 и p_2 сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны $p_1 = p_2 = l_1 + l_2 \sin\alpha$. Если $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, то сумма моментов этих сил равна нулю.

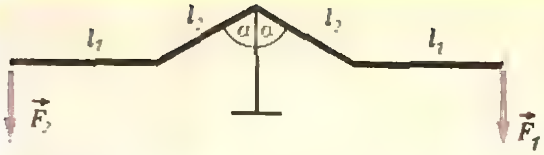


Рис. 4.

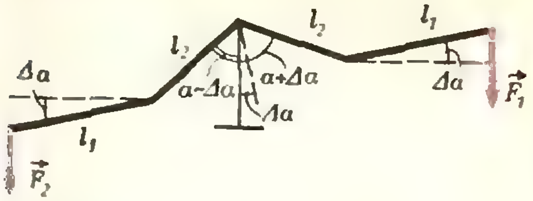


Рис. 5.

Предположим, что при $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ коромысло отклонено от горизонтального положения (рис. 5). Тогда

$$p_1 = l_1 \cos\alpha + l_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha),$$
$$p_2 = l_1 \cos\alpha + l_2 \sin(\alpha - \Delta\alpha).$$

Очевидно, $0 \leqslant \alpha - \Delta\alpha < \alpha + \Delta\alpha < \pi/2$, поэтому $\sin(\alpha - \Delta\alpha) < \sin(\alpha + \Delta\alpha)$. Следовательно, $p_1 > p_2$ и результирующий момент стремится повернуть коромысло в горизонтальное положение.

К головоломкам

«Машинная графика»

(см. «Квант» № 4, с. 57)

На рисунке 1 (в задаче) — концентрические окружности, вычерченные в перспективе с весьма близкой к ним «точки зрения». Как известно, окружность в перспективе изображается в виде эллипса. Рисунок служит напоминанием, что центр окружности при этом не совпадает с центром изображаемого эллипса. «На природе» такой рисунок можно увидеть на пне — «годовые кольца» образуют как раз концентрические окружности.

На рисунке 2 — тоже несколько концентрических окружностей, вокруг внешней из которых описан квадрат. Они расположены во «фронтальной» (перед зрителем) плоскости, но вычерчены в «цилиндрической перспективе», причем при очень близком расположении «точки зрения». В такой проекции снимает известный многим панорамный фотоаппарат «Горизонт». Этим фотоаппаратом, подойдя почти вплотную, например, к длинному железнодорожному вагону, можно снять его целиком, но при этом он получится «изогнутым», подобно тому, как изогнуты на нашем чертеже крайние линии, в натуре — стороны квадрата.

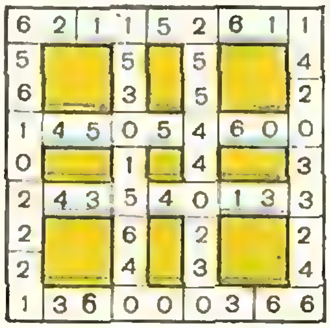


Рис. 6.

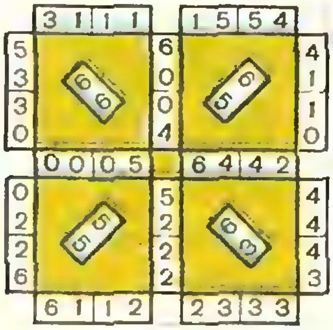


Рис. 7.

(см. «Квант» № 4, 4-ю с. обл.)

1. См. рис. 6.
2. 8:2—1=3;
   2+7—4=5;
   4+6—3=7
   4—3+7=8.
3. См. рис. 7.
4. 2/3+4/3=2;
   1/4+5/4+6/4=3;
   3/1+0/6+1/6+5/6=4;
   1/2+4/2+5/5+3/6+6/6=5;
   0/1+2/2+6/2+3/3+2/5+3/5=6;
   1/1+5/1+0/2+0/3+0/4+4/4+0/5=7.

(см. «Квант» № 4, 3-ю с. обл.)

«Куб-хамелеон»

Три двуцветных кубика, на каждом из которых красным, синим или зеленым цветом окрашены три попарно смежные грани, шесть кубиков с одной красной, двумя смежными синими и тремя попарно смежными зелеными гранями, шесть кубиков с одной синей, двумя смежными зелеными и тремя попарно смежными красными гранями, шесть кубиков с одной зеленой, двумя смежными красными и тремя попарно смежными синими гранями, и, наконец, шесть кубиков с двумя смежными синими гранями, двумя смежными красными и двумя смежными зелеными.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
Н. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 25/II 1977 г.
Подписано в печать 6/IV 1977 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,55 Т-08401
Цена 30 коп. Заказ 319 Тираж 297 830 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

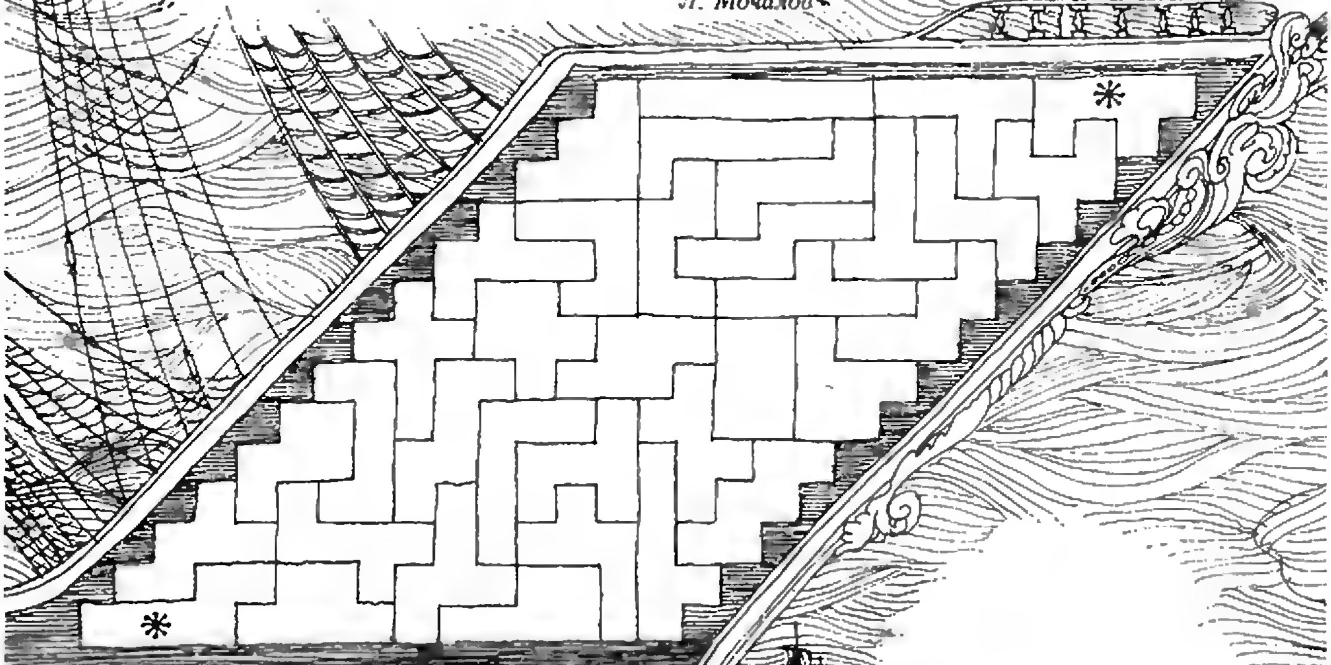
Рукописи не возвращаются

Эта фигура составлена из 35 гексамино.

а) Соедините крайние фигурки линией, проходящей через все гексамино, причем только по одному разу; от фигурки к фигурке можно переходить только через стороны (через вершины углов нельзя).

б) Нарисуйте замкнутую ломаную, проходящую (с выполнением тех же условий) через все 35 гексамино.

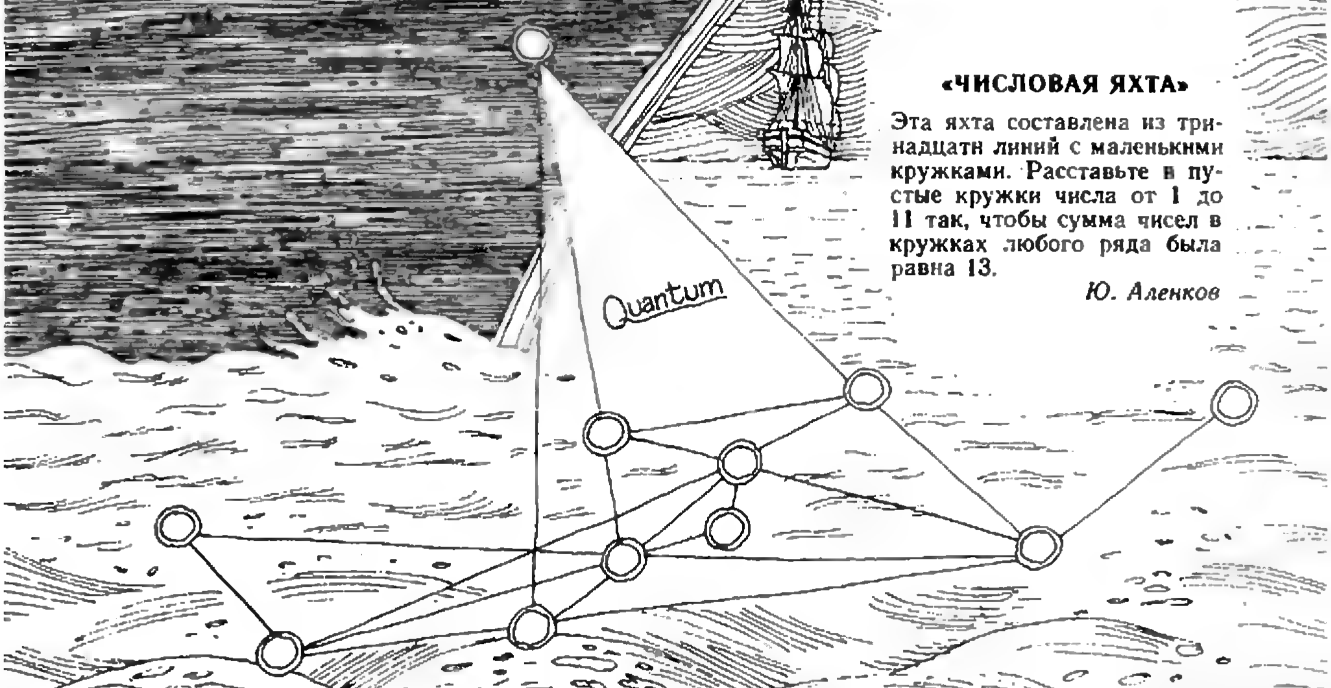
Л. Мочалов

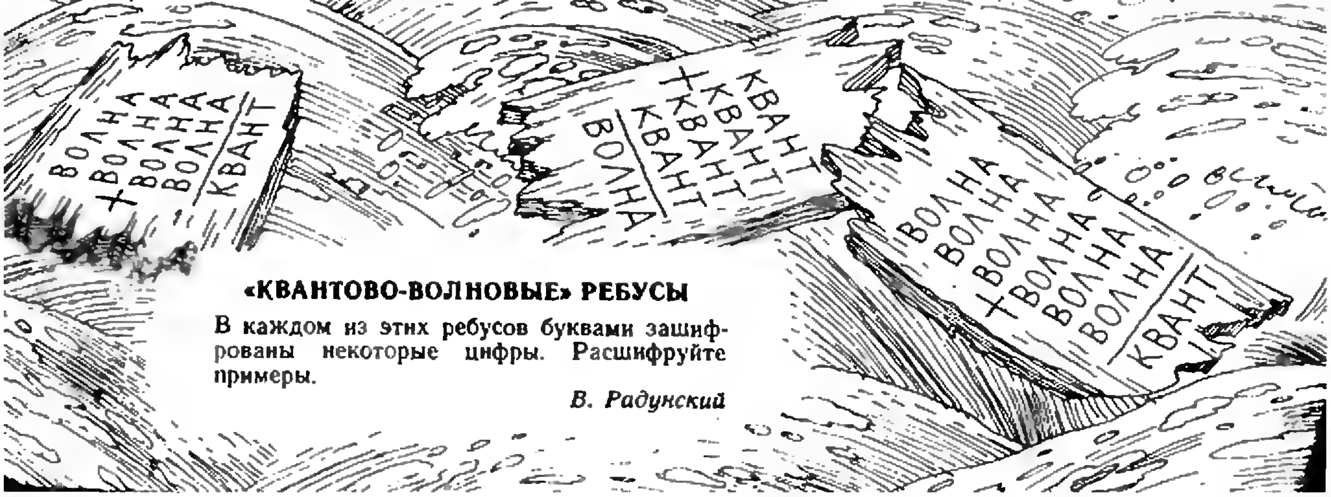


«ЧИСЛОВАЯ ЯХТА»

Эта яхта составлена из тринадцати линий с маленькими кружками. Расставьте в пустые кружки числа от 1 до 11 так, чтобы сумма чисел в кружках любого ряда была равна 13.

Ю. Аленков

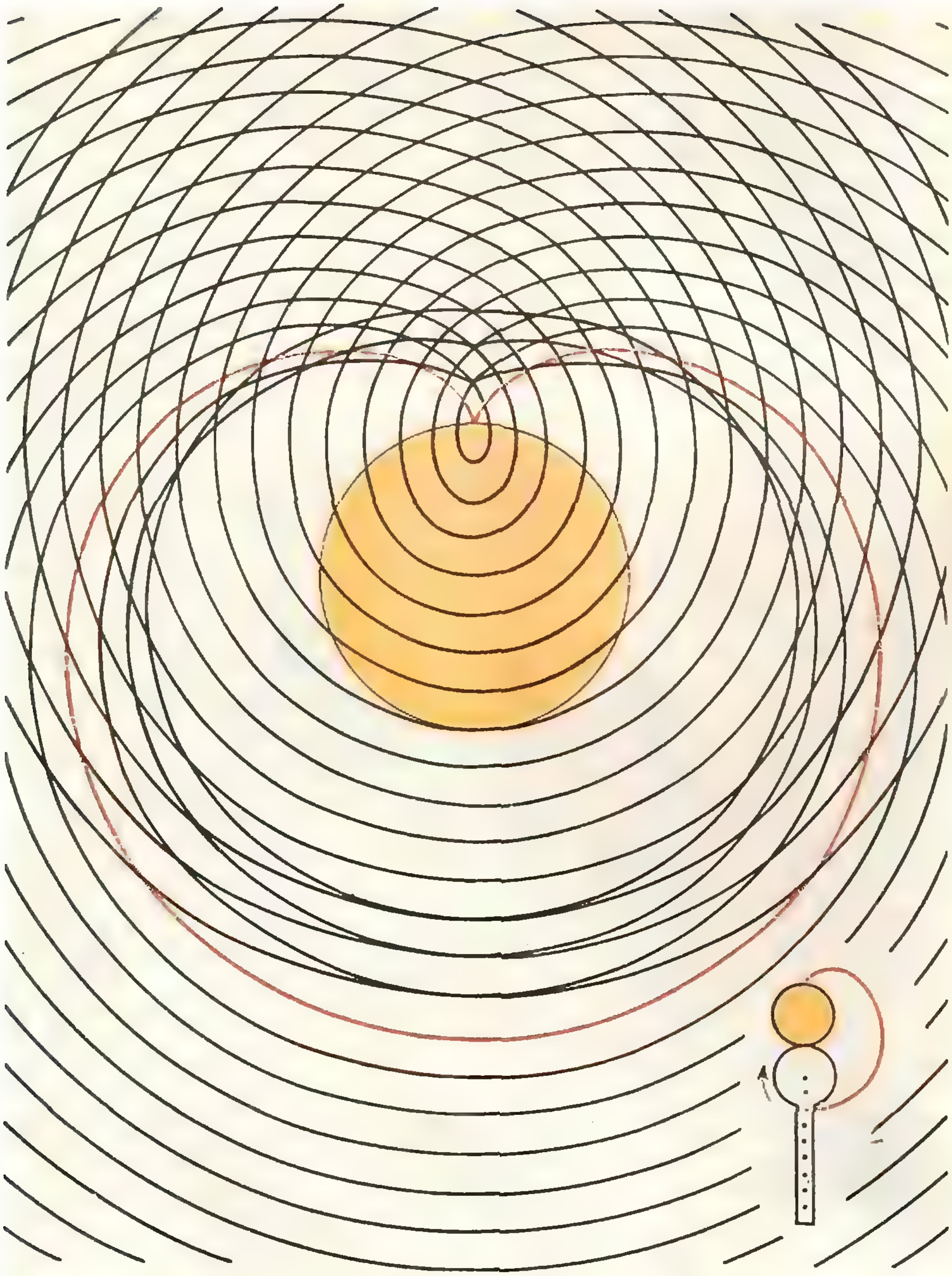



ВОЛНА
+ВОЛНА
ВОЛНА
ВОЛНА
КВАНТ
КВАНТ
+КВАНТ
+КВАНТ
КВАНТ
ВОЛНА
ВОЛНА
ВОЛНА
+ВОЛНА
ВОЛНА
ВОЛНА
КВАНТ

«КВАНТОВО-ВОЛНОВЫЕ» РЕБУСЫ

В каждом из этих ребусов буквами зашифрованы некоторые цифры. Расшифруйте примеры.

В. Радунский



УЛИТКИ ПАСКАЛЯ

На этом рисунке вы видите семейство кривых, которые называются «улитками Паскаля». Каждая из них получается следующим образом. Нарисуем на плоскости окружность некоторого радиуса и вооружимся вырезанным из бумаги кругом того же радиуса «с ручкой» — планкой, в которой проделаны дырочки. Будем катить без проскальзывания круг снаружи по нарисованной окружности, а в одну из дырочек ручки вставим карандаш. Тогда карандаш опишет как раз улитку Паскаля.

Красная линия на рисунке — кардиоида, которая является одной из улиток Паскаля (карандаш был вставлен в точку на окружности подвижного круга).

О других способах построения и свойствах улитки Паскаля рассказано на с. 36.

НОМЕР
6

Основан в 1970 году

Квант

6
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На рисунке на первой странице обложки вы видите результат многократных инверсий трех попарно касающихся окружностей: сначала — их инверсии относительно друг друга, затем — инверсии окружностей, получающихся после этих инверсий, относительно друг друга и т. д. Как выполнено это построение? Какой геометрический смысл стоит за подобными преобразованиями? Об этом вы узнаете, прочитав статью В. Вавилова (см. с. 38).

В НОМЕРЕ:

3 *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии (Предисловие)
4 *И. Башмакова.* Исаак Ньютон
12 *Я. Смородинский.* Закон всемирного тяготения
19 *А. Кушниренко.* Многоугольник Ньютона
25 *В. Кресин.* Адиабатный процесс
30 *Н. Васильев, А. Толпыго.* Плавные последовательности

Лаборатория «Кванта»

35 *А. Бондарь.* Грампластинка и дифракция света

Математический практикум

38 *В. Вавилов.* Геометрия круга

Задачник «Кванта»

44 Задачи М446—М450; Ф458—Ф462
46 Решения задач М403, М405—М409; Ф413—Ф415, Ф417 — Ф422
57 *А. Лодкин.* Функциональное уравнение на сфере

«Квант» для младших школьников

61 Задачи
62 *Н. Носов.* Витя Малеев решает задачи

Практикум абитуриента

67 *И. Константинов.* Насыщенный пар
71 *Н. Розов.* Читатели советуют

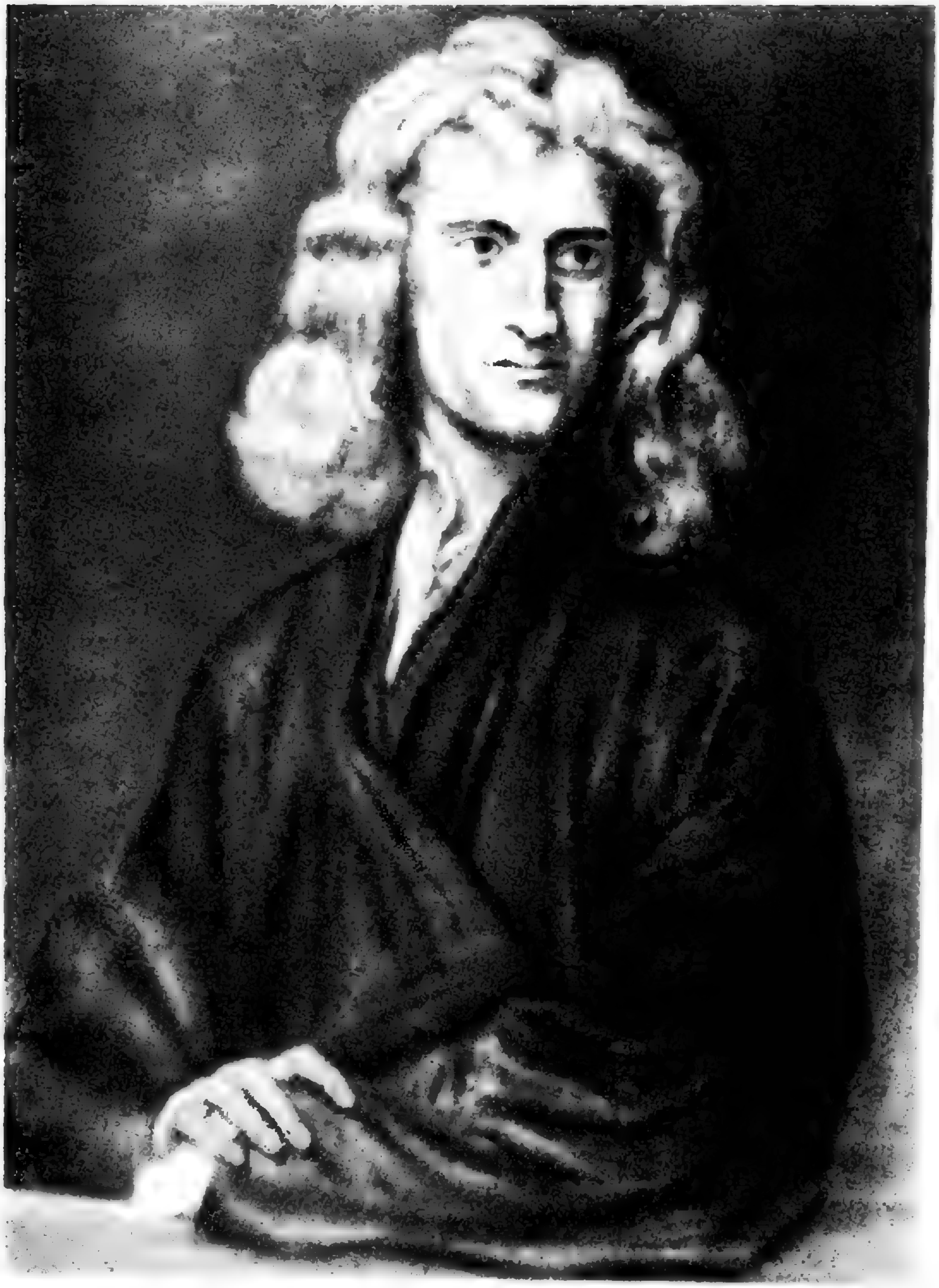
Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 г

78 *В. Осипов, А. Шепелявый.* Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова
79 *Э. Голубов.* Уральский государственный университет им. А. М. Горького
80 *М. Хорошев.* Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии
81 *Н. Квачева, О. Малючков, В. Треногин.* Московский институт стали и сплавов
84 *Г. Ефашкин, В. Тонян.* Московский институт электронного машиностроения
86 *В. Бестаева, О. Овчинников, Г. Шадрин.* Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина
88 *А. Карасев.* Всесоюзный заочный финансово-экономический институт
89 Примерные варианты письменных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

Рецензии, библиография

90 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
Смесь *(37, 43, 60)*
92 **Ответы, указания, решения**

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977



Исаак Ньютон (1642—1727)

До восемнадцатого века никакой науки не было; познание природы получило свою научную форму лишь в восемнадцатом веке или, в нескольких отраслях, несколькими годами раньше. Ньютон своим законом тяготения создал научную астрономию, разложением света — научную оптику, теоремой о биноме и теорией бесконечных — научную математику и познанием природы сил — научную механику.

Ф. Энгельс

Математические начала натуральной философии

Предисловие *)

«...Механика есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное.

Древними эта часть механики была разработана лишь в виде учения о пяти машинах **), применяемых в ремеслах; при этом даже тяжесть (так как это не есть усилие, производимое руками) рассматривалась ими не как сила, а лишь как грузы, движимые сказанными машинами. Мы же, рассуждая не о ремеслах, а об учении о природе и, следовательно, не об усилиях, производимых руками, а о силах природы, будем заниматься, главным образом, тем, что относится к тяжести, легкости, силе упругости, сопротивлению жидкостей и к тому подобным притягательным или напирающим силам. Поэтому и сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений, при помощи предположений, доказанных в предыдущих книгах, математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря. Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы остались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому, более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение.

При издании этого сочинения оказал содействие остроумнейший и во всех областях науки ученейший муж Эдмунд Галлей, который не только правил типографские корректуры и озаботился изготовлением рисунков, но даже по его лишь настояниям я приступил и к самому изданию. Получив от меня доказательства вида орбит небесных тел, он непрестанно настаивал, чтобы я сообщил их Королевскому обществу, которое затем своим благосклонным вниманием и заботливостью заставило меня подумать о выпуске их в свет...»

---

*) Мы приводим небольшой отрывок из «Предисловия» Исаака Ньютона к первому изданию «Математических начал натуральной философии», вышедшему в 1686 году. Перевод на русский язык был сделан впервые в 1915 году замечательным русским механиком академиком А. Н. Крыловым.

**) Основные машины, рассматривавшиеся древними авторами, суть: vectis — рычаг, axis in peritrochio — ворот, trochlea seu polispastus — блок, cochlea — винт, cuneus — клин. Эти-то пять машин и подразумевал Ньютон. (*Прим. А. Н. Крылова.*)

Исаак Ньютон

И. Башмакова

> *Был этот мир глубокой тьмой окутан.*
> *Да будет свет! И вот явился Ньютон.*
> А. Поп*)

> *Ньютон был величайший гений из всех, когда-либо существовавших, и самый счастливый, ибо только однажды дано человеку открыть систему мира.*
> Ж. Л. Лагранж

Каждый из вас, несомненно, слышал о Ньютоне. Трудно найти ученого, оказавшего столь же сильное влияние на развитие мировой науки и культуры. Механика Ньютона — краеугольный камень в фундаменте современного естествознания. Опираясь на открытый им закон всемирного тяготения, Ньютон создал логичную и стройную систему мироздания. Большая часть математического аппарата современного естествознания основана на разработанном Ньютоном исчислении бесконечно малых.

Несмотря на все значение творчества Ньютона, серьезное изучение его наследия началось совсем недавно. Дело в том, что после смерти Ньютона все его бумаги попали к мужу его племянницы — Джону Кондуиту, а затем к дочери последнего, вышедшей замуж за одного из лордов Портсмутских. В этой семье бумаги Ньютона хранились до 1936 года, когда все Портсмутские коллекции были распроданы на публичном аукционе в Лондоне. Три миллиона оригинальных слов Ньютона были оценены в 9.030 фунтов стерлингов 10 шиллингов. Только благодаря героическим усилиям некоторых ученых и общественных деятелей значительная часть бумаг попала в библиотеки Кембриджа и Лондона. Однако много бумаг уплыло за океан. Некоторые пропали бесследно. Хронология рукописей, которую перед смертью установил сам Ньютон, была безнадежно нарушена.

Систематическое исследование наследия Ньютона началось лишь после Второй мировой войны. С 1959 года в Англии стала издаваться переписка Ньютона (к настоящему времени издано 7 томов), были изданы его работы по динамике, и, наконец, с 1967 года начали выходить его математические рукописи (вышло уже 7 томов). Все это позволяет нам теперь более полно судить о силе и глубине гения Ньютона. Великий ученый предстает теперь перед нами не только как создатель дифференциального и интегрального исчислений, но и как крупнейший алгебраист, исследователь в области алгебраической геометрии и теории чисел.

Исаак Ньютон родился 4 января 1643 года в семье небогатого фермера-арендатора в деревне Вулсторп близ города Грантэма. Отец Исаака умер еще до рождения сына. Мальчик посещал сначала сельскую школу, а затем школу в Грантэме. Директор школы обратил внимание на способности юноши и уговорил его мать отправить сына учиться в университет. Летом 1661 года Исаак Ньютон поступил в колледж св. Троицы (Тринити колледж) Кембриджского университета в качестве бедного студента, обязанного прислуживать бакалаврам, магистрам и студентам старших курсов. В 1665 году он окончил колледж со степенью бакалавра, через три года стал магистром, а еще через год по предложению своего учителя Исаака Барроу занял его кафедру. В университете Ньютон читал лекции по физике и математике. Ньютон не был женат — такова была традиция Тринити колледжа, восходящая еще к средневековью.

---

*) В XX веке эта эпиграмма XVIII века была продолжена:

Но сатана недолго ждал реванша —
Пришел Эйнштейн и стало все, как раньше.

(Перевод обеих эпиграмм С. Я. Маршака.)

Жизнь Ньютона протекала спокойно и размеренно и не была богата событиями. Однако трудно найти жизнь, более насыщенную напряженной, полной поисков и вдохновения созидательной работой.

В этой статье мы подробно расскажем о математических достижениях Ньютона.

Как показывают черновые записи Ньютона, в области математики он был самоучкой — в колледже читался только курс элементарной математики. Интерес молодого человека к математике был возбужден случайным обстоятельством: летом 1663 года он купил на ярмарке книгу по астрологии. Чтобы в ней разобраться, ему понадобилось знакомство с тригонометрией, которое, в свою очередь, потребовало знания геометрии Евклида. Так Ньютон приступил к изучению «Начал» Евклида, от которых перешел к сочинениям Виета и Декарта по алгебре и аналитической геометрии, затем познакомился с работами Валлиса по исчислению бесконечно малых. Записные книжки показывают, что Ньютону понадобилось около года, чтобы овладеть современной ему математикой и начать самостоятельные исследования. Именно в это время он записал знаменитую формулу разложения $(1+x)^r$ в ряд, где r — любое рациональное число (о ней мы будем говорить ниже). Уже к 1664—1667 годам относятся первые исследования Ньютона по аналитической геометрии и исчислению бесконечно малых.

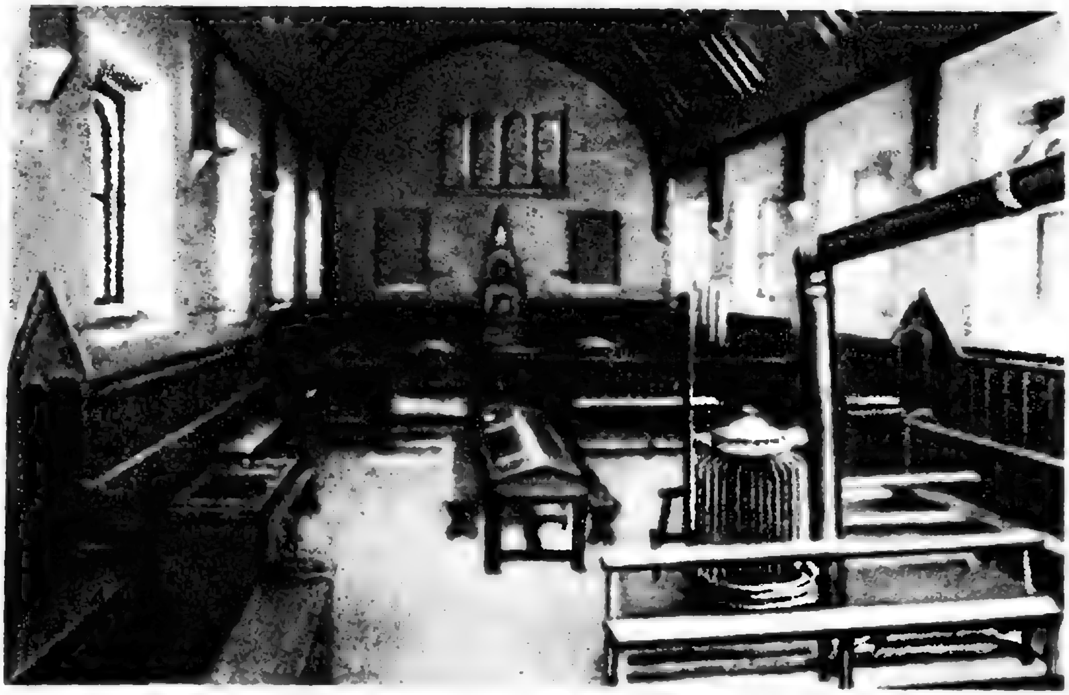
Аналитическая геометрия и изучение кривых третьего порядка

Кривые второго порядка (эллипс, гипербола и парабола) были всесторонне изучены еще Аполлонием (III в. до н. э.). Во времена Аполлония не было еще буквенной алгебры, поэтому Аполлоний записывал уравнения кривых геометрически, с помощью равенства некоторых площадей.

Аналитическая геометрия, основанная на буквенной алгебре, была создана только в новое время Пьером Ферма (1636) и Рене Декартом (1637), причем последний придал буквенному исчислению современный вид. Вводя систему координат, оба математика рисовали одну координатную ось (горизонтальную) с помеченным началом отсчета, для второй оси задавалось только направление. Гораздо важнее то обстоятельство, что ни Декарт, ни Ферма не выводили свойств кривых из определяющих их уравнений. Они довольствовались тем, что приводили уравнение к одному из канонических видов, встречающихся у Аполлония, а затем просто пользовались его результатами. Таким образом, специфический метод аналитической геометрии остался нераскрытым.

Молодой Ньютон сразу же начал рисовать на чертеже обе оси координат (под произвольным углом друг к другу). Все четыре квадранта были для него равноправны, тогда как предыдущие исследователи старались сдвинуть кривую так, чтобы рассмотрение велось, в основном, в первом и четвертом квадрантах. Ньютон отвел центральное место преобразованиям координат и выписал формулы параллельного переноса и поворота.

Наконец, Ньютон начал исследование кривых третьего порядка, лишь отдельные примеры которых были известны ранее. Это исследование он провел с той же исчерпываю-



Внутренний вид школы в Грантэме (современная фотография)

щей полнотой, с которой были изучены кривые второго порядка. Ньютон обобщил на кривые третьего порядка понятия диаметра, оси, вершины, центра, касательной. Он разбил эти кривые на виды, которых оказалось 72. Эти результаты вскоре стали известны английским математикам, но опубликованы они были только в 1704 году в приложении к книге «Оптика». Это приложение — «Перечисление кривых третьего порядка» — написано весьма сжато, без всяких доказательств. Теперь, благодаря черновикам, мы можем узнать, как Ньютон пришел к своим результатам, а это для математиков часто бывает важнее самих результатов.

«Перечисление кривых» положило начало новой области математики — алгебраической геометрии. Это сочинение было вполне понято и оценено только в конце XIX — начале XX века.

Метод флюксий

В это же время Ньютон приступает к созданию нового исчисления.

В XVII веке в связи с успехами механики земных и небесных тел (напомним, что в это время Галилеем были открыты законы падения тел и Кеплером — законы движения планет) ученые обратились к изучению трудов Архимеда, стараясь извлечь из них общие методы определения касательных, экстремумов, скоростей, центров тяжести, площадей и объемов.

Ньютон первый понял, что все это множество задач распадается на два класса взаимно обратных задач, которые могут быть сформулированы в общем виде, причем для их решения можно дать единый алгоритм. Для этого Ньютон вводит прежде всего понятие *флюенты* (от латинского слова fluere — течь) — величины, меняющейся при изменении времени или другой величины (которую он называл *обобщенным временем*). Таким образом, флюента — это первое название для функции. Ньютон обозначал флюенты последними буквами латинского алфавита: x, y, z. Скорость изменения флюенты, т. е. производную, он называл *флюксией* и обозначал, соответственно, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. (В физике эти обозначения сохранились до сих пор.) После этого Ньютон сформулировал две основные задачи:

1. Дано соотношение между флюентами: $f(x, y, z)=0$. Найти соотношение между их флюксиями: $\Phi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)=0$.

II. Дано соотношение между флюксиями: $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})=0$. Найти соотношение между флюентами: $\Psi(x, y, z)=0$.

Частными случаями первой задачи являются нахождение скорости движения по пути, заданному как функция времени, нахождение экстремумов и касательных. Ньютон дает алгоритм решения этой задачи для случая, когда соотношение между флюентами задается с помощью многочлена $F(x, y)$ или $F(x, y, z)$.

Правило Ньютона таково: расположи многочлен по степеням какой-нибудь из флюент, например x; умножь каждый член на $\dot{x}/x$ и на соответствующую степень x; сделай то же самое по отношению к другой флюенте; возьми сумму полученных членов и приравняй ее к нулю.

Применим, для примера, это правило к многочлену $y - x^n$. Получаем

$$y\cdot\frac{\dot{y}}{y}-x^n n\cdot\frac{\dot{x}}{x}=0 \quad \text{или} \quad \dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

Свое правило Ньютон обосновывал следующим образом: увеличиваем время на «неопределенно малую часть» — момент o, тогда флюенты возрастут на $o\dot{x}$ и $o\dot{y}$; подставим новые значения флюент в первоначальное выражение и сократим все члены на o. Центральное место своего обоснования он излагает так: «Но так как мы предположили o бесконечно малой величиной..., то те члены, которые на нее умножены, можно считать за ничто по сравнению с другими. Поэтому я ими пренебрегаю».

Для рассмотренного примера имеем

$$y+oy=(x+o\dot{x})^n,$$

$$y+o\dot{y}=x^n+nx^{n-1}o\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o^2\dot{x}^2+\ldots,$$

$$o\dot{y}=nx^{n-1}o\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o^2\dot{x}^2+\ldots,$$

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o\dot{x}^2+\ldots,$$

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

Ответ правильный! Однако обоснование его весьма неубедительно.

Ньютон и сам был не удовлетворен изложенным обоснованием и неоднократно пытался подвести под свое исчисление более прочный базис. Во введении к «Математическим началам натуральной философии» (1687) Ньютон изложил теорию пределов (она называлась у него «теория первых и последних отношений»), однако для обоснования и систематического построения дифференциального исчисления он ее не применил. Это было сделано примерно 150 лет спустя в работах О. Коши (1789—1857) и некоторых других математиков прошлого века.

Вторая задача в общем виде является задачей интегрирования дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, связывающих некоторые функции и их производные. В частном случае — для уравнения $\dot{y}=f(x)$ — эта задача сводится к отысканию первообразных.

Ньютон показывает, что проблема «Определить площадь, ограниченную какой-либо заданной кривой» сводится к определению флюенты по заданной флюксии, так как флюксия (производная) площади $z=ADB$ равна ординате $y=BD$ (см. рис. 1; см. также равенство (2) в п. 100 учебника «Алгебра и начала анализа 10»).

В общем же случае для решения второй задачи Ньютон применил новый аналитический аппарат, который позволил ему распространить свой алгоритм на очень широкий класс функций. Это был принципиальный шаг. Остановимся на нем подробнее.

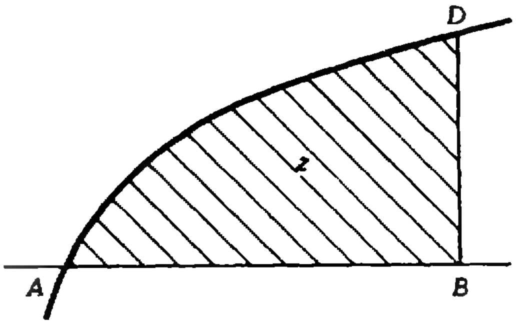
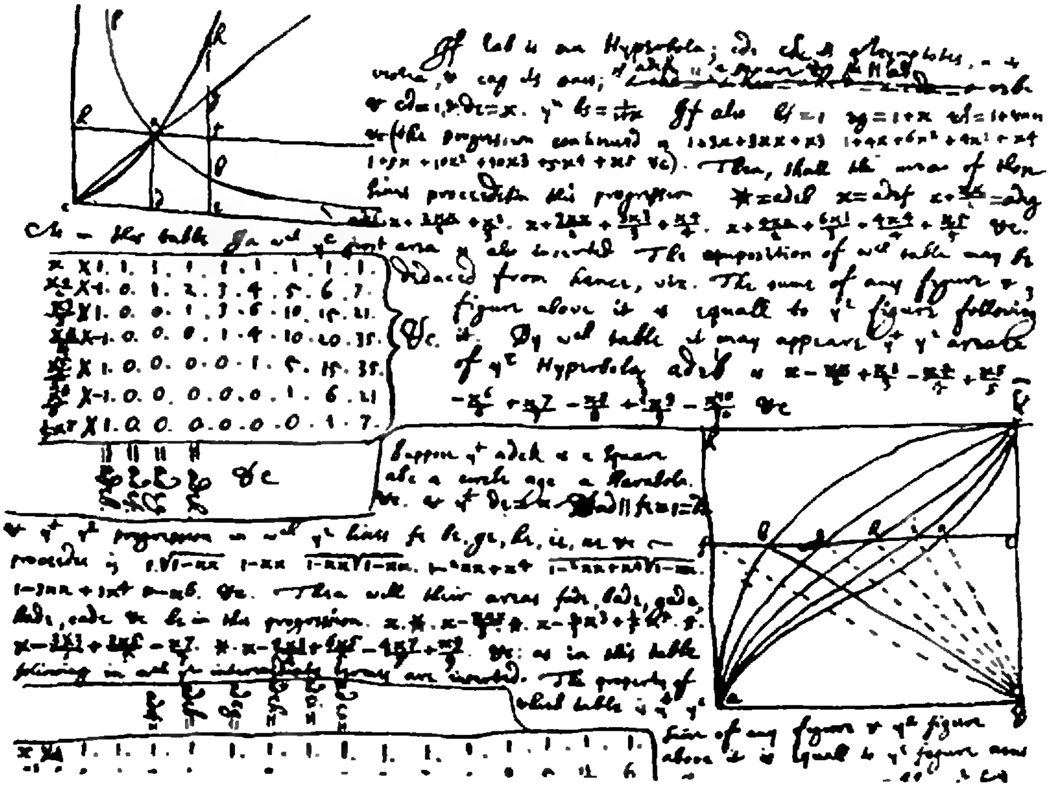


Рис. 1



Фрагмент из черновых записей И. Ньютона

Степенные ряды

Первоначально метод флюксий применялся к многочленам. А как быть с другими функциями? Как, например, находить флюксии от функций $\frac{x}{a^2+x^2}$, $\sqrt{ax+b}$, $\sin x$? Как решать уравнения $\dot{y}=\sin x$, $\dot{y}=\sqrt{ax+b}$?

И вот Ньютон пришел к мысли, что все известные ему функции можно записать вполне единообразно с помощью степенных рядов

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

которые представляют собой как бы бесконечные многочлены. Примером такой записи может служить (при $|x|<1$) равенство

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Ньютон пишет, что пришел к своей идее, руководствуясь аналогией с представлением чисел десятичными дробями: «... учение о буквенных выражениях находится в таком же отношении к алгебре, как учение о десятичных дробях к обыкновенной арифметике... И так же, как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений и т. д.) можно с их помощью привести к ряду простых количеств...»

Ньютон получил разложение в степенные ряды для функций a^x, $\log_a(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а также для дробных и иррациональных функций. Именно для разложения последних Ньютон обобщил известную для целого положительного n формулу бинома

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2+\ldots+x^n$$

на случай, когда показатель есть любое рациональное число r:

$$(a+x)^r=a^r+ra^{r-1}x+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}a^{r-2}x^2+\ldots$$

При нецелом r число членов суммы

уже не будет конечным. Например,

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

Ньютон придумал также способ, как разложить в ряд функцию y, заданную неявно с помощью уравнения $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — многочлен. Этот способ получил название *параллелограмма Ньютона* *). Он был положен в основу работ Пюизе и других математиков прошлого века, изучавших алгебраические функции.

Ньютон прекрасно понимал роль рядов в созданном им исчислении. Он подчеркнул это и в самом заглавии своих сочинений: «Метод флюксий и бесконечных рядов» и «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов». Оба эти сочинения были широко известны английским и континентальным математикам уже с самого начала 70-х годов XVII века, однако публикация их по различным причинам все время откладывалась. Второе из них было опубликовано только в 1711 году, а первое — в 1736 году, через 9 лет после смерти автора и через 60 лет после того, как оно было написано.

Алгебра

Интерес Ньютона к алгебре пробудился очень рано. Первый его самостоятельный результат был записан им еще в 1664—1666 годах. Он относился к выражению сумм степеней корней алгебраического уравнения через его коэффициенты. Еще Франсуа Виет (1540—1603) установил связь между коэффициентами и корнями алгебраического уравнения: если x_1, x_2, ..., x_n — корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, то

$$\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n&=-a_1,\\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n&=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n&=(-1)^n a_n.\end{aligned}\right. \qquad (*)$$

Функции, задаваемые левыми частями равенств (*), не меняются, если переставлять между собой аргументы. Они получили название *элементарных симметрических функций*.

Альбер Жирар (1595—1632) сумел выразить суммы степеней корней

$$S_m = x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m$$

при $m=2$, 3, 4 (по теореме Виета $S_1=-a_1$) через коэффициенты уравнения. Например, $S_2=a_1^2-2a_2$.

Ньютон нашел общую рекуррентную формулу, которая в современных обозначениях (по определению $a_i=0$ при $i>n$) имеет вид

$$S_m+a_1S_{m-1}+a_2S_{m-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{m-1}S_1+a_m\cdot m=0.$$

Она позволяет найти S_m для любого m.

С 1673 по 1683 год Ньютон читал в Кембридже лекции по алгебре, которые легли в основу его книги «Всеобщая арифметика», опубликованной в 1707 году. Основное внимание в ней Ньютон уделяет вопросу о нахождении корней уравнения, а также тому, как, не решая уравнения, узнать, в каких пределах лежат все его корни, сколько из них положительных, отрицательных или мнимых.

* * *

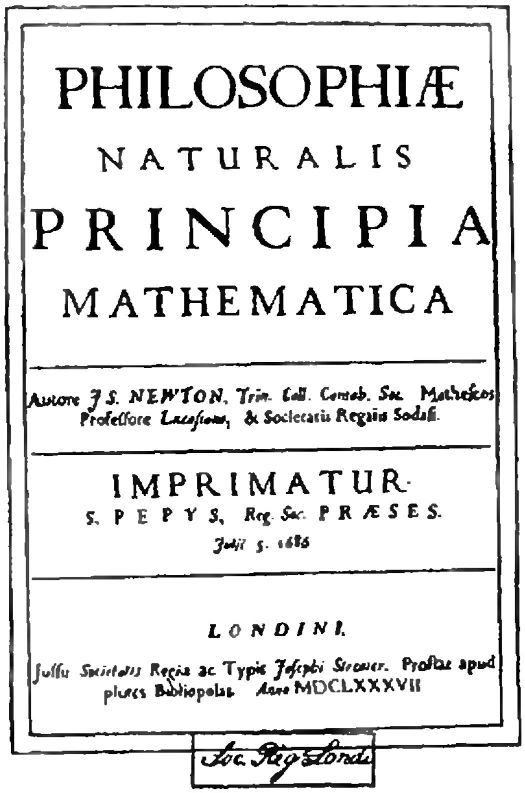
Мы не упоминаем здесь о многих других математических результатах Ньютона, понимание которых потребовало бы от читателя специальных знаний.

Надо, однако, помнить, что Ньютон был физиком не меньше, чем математиком. Уже в 1665—1667 годах он открыл закон всемирного тяготения и приступил к выводу с его помощью законов движения планет. Одновременно он исследовал проблемы оптики. Ньютон открыл дисперсию света и сконструировал зеркальный телескоп-рефлектор. Этот телескоп он представил Королевскому обществу (так называют в Англии Академию наук), которое настолько высоко оценило изобретение Ньютона, что избрало его в 1672 г. своим членом. С 1703 г. Ньютон становится президентом Королевского общества и сохраняет этот пост до конца жизни.

С 1680 г. Ньютон, уступая настоя-

---

*) Подробнее о параллелограмме Ньютона см. с. 19.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Soc. Reg. Lond.

Титульный лист первого издания «Математических начал натуральной философии»

тельным требованиям друзей-ученых, приступил к работе над книгой «Математические начала натуральной философии», в которой должна была быть изложена система мира. Об этом периоде жизни великого ученого, который продолжался около пяти лет, сохранились записи его секретаря. По его словам Ньютон был все это время спокойным, приветливым, никогда не впадал в раздражение, почти никуда не выходил, спал не более 4—5 часов в сутки, никогда не садился обедать без многократных напоминаний и каждый час, не посвященный занятиям, считал потерянным.

Часть своего времени он посвящал химическим опытам; видимо, эта смена занятий давала некоторый отдых его уму. Ньютон был великолепным экспериментатором.

Наконец, в 1687 году книга была опубликована. По единодушному мнению физиков, в истории естествознания не было более крупного события, чем появление ньютоновых «Начал». В нескольких словах трудно передать все величие этой книги. Прежде всего поражает принцип ее построения: Ньютон кладет в основу физические аксиомы — три аксиомы движения, известные теперь под именем *законов Ньютона*, и закон всемирного тяготения, все же остальные известные в то время факты механики земных и небесных тел он выводит из них чисто математически. Так он получает законы движения точки и твердого тела, кеплеровы законы движения планет, форму орбит комет, строит начала гидродинамики, объясняет явления приливов и отливов. Таким образом, было показано, что «возможно с единой точки зрения охватить весь механизм мировых явлений» (Д. И. Менделеев).

«Математические начала» выдержали при жизни Ньютона еще два издания, причем второе издание было существенно переработано и дополнено.

Хотя в 90-х годах Ньютон отошел от занятий математикой, однако именно к концу века относится решение им одной знаменитой задачи.

Задача о брахистохроне

Теория флюксий Ньютона и дифференциальное исчисление Лейбница, работы которого начали публиковаться с 1684 года, позволяли решать задачи на нахождение экстремумов функций, т. е. находить те точки, в которых значение функции будет больше (или, соответственно, меньше), чем ее значения в некоторой окрестности этих точек.

В 1696 году Иоганн Бернулли поставил перед математиками мира задачу: *«Определить кривую линию, соединяющую две данные точки, расположенные на различных расстояниях от горизонта и не лежащие на одной и той же вертикальной линии, обладающую тем свойством, что тело, движущееся по ней под влиянием собственной тяжести и начинающее свое движение из верхней точки, достигает нижней точки в кратчайшее время».*

На представление решения давался годичный срок.

Таким образом, в этой задаче надо было найти не точку, в которой некоторая величина (в данном случае — время) будет минимальной, а кривую линию, которой будет отвечать минимальное значение этой величины. Отображения, ставящие в соответствие каждой кривой некоторого класса определенное число, называются теперь *функционалами*.

Лейбниц назвал эту задачу прекраснейшей и выразил мнение, что ее смогут решить только три математика. И действительно, помимо самого И. Бернулли и Лейбница, которые решили эту задачу еще до ее опубликования, решения представили Якоб Бернулли и Лопиталь. Третье решение было опубликовано в Лондонском журнале «Philosophical Transactions» без подписи автора. Однако И. Бернулли сразу же узнал в неизвестном авторе И. Ньютона; как он писал: «ex ungue leonis» (льва узнают по его когтям). Только после этого ученые обратили внимание на то, что в «Математических началах» уже была решена задача того же рода, а именно: *найти тело вращения, которое при движении в жидкости по направлению своей оси испытывает наименьшее сопротивление* (*предполагается, что сопротивление жидкости пропорционально квадрату скорости*).

Этот тип задач был впоследствии рассмотрен Эйлером и Лагранжем, которые создали для их решения исчисление, получившее название *вариационного*.

* * *

О Ньютоне распространено много легенд и анекдотов. Его охотно представляют замкнутым, рассеянным, не замечающим ничего вокруг. Конечно, Ньютон был действительно, большей частью, погружен в свои мысли. На вопрос о том, как он сделал свои великие открытия, он ответил «постоянным размышлением о них». И все же он находил время, чтобы заботиться о нуждах университета и Королевского общества. Любят рассказывать, что, будучи выбранным в Парламент, Ньютон не произнес там ни слова, если не считать одного случая, когда он попросил закрыть форточку. Гораздо менее известно, что в качестве депутата Парламента он много помогал Кембриджскому университету, играя роль посредника между ним и правительством.

Принципиальность Ньютона и твердость его характера проявились, когда в 1687 году король Яков II предложил Кембриджскому университету дать степень магистра одному бенедиктинскому монаху (Альбану Френсису). Университет отказался выполнить эту просьбу и послал в Лондон делегацию, в которую входил Ньютон. Был момент, когда под нажимом короля все члены делегации хотели дать согласие при условии, что подобные случаи больше не повторятся. Только решительная позиция Ньютона привела к победе: король вынужден был отказаться от своего предложения.

Последние тридцать лет жизни Ньютон провел в Лондоне. Это было связано с тем, что в 1696 году он был назначен хранителем, а затем и директором Монетного двора. Должность эта не была просто почетным званием. Ньютону пришлось провести перечеканку всей монеты Англии. Он активно занимался также делами Королевского общества. Научные интересы его переместились в область истории: он составлял хронологию событий египетской, древнегреческой и библейской истории. Занимался он и вопросами богословия.

Умер Ньютон в возрасте 84 лет, в ночь с 20 на 21 марта 1727 года.

Вот, что говорил сам Ньютон о своем творчестве: «Не знаю, как на меня посмотрит мир, но самому себе я представляюсь мальчиком, играющим на морском берегу и приходящим в восхищение, когда ему удается порой найти более гладкий, нежели обыкновенно, камешек или красивую раковину; между тем, громадный океан сокровенной истины простирается передо мною».

Я. Смородинский

Закон всемирного тяготения

В современной физике есть постоянные, которые называют фундаментальными. Среди них скорость света c, заряд электрона e, масса электрона m, гравитационная постоянная γ, постоянная Планка h. Эти постоянные входят в формулы, описывающие физические процессы в микромире и в космическом пространстве. Фундаментальность этих постоянных в том, что их значения не изменяются ни со временем, ни с местом в пространстве. Где бы мы ни измеряли эти постоянные, мы всегда получим одни и те же значения. Физики знают, что эти постоянные не изменились сколь-нибудь заметно за миллиарды лет эволюции Вселенной.

Первую фундаментальную постоянную — гравитационную постоянную γ — ввел в физику Исаак Ньютон. Появилась она с открытием закона всемирного тяготения.

В истории этого открытия много удивительного и интересного. Забавна легенда о том, как Ньютон открыл этот закон, сидя под яблоней, когда ему на голову упало яблоко. Интересно, как Ньютон смог доказать справедливость этого закона, изучая движение Луны. Удивительно, сколь точным оказался этот закон.

Но самым удивительным было, с какой смелостью Ньютон объявил, что закон тяготения есть всеобщий закон, который определяет взаимодействие любых тел во Вселенной.

Из равенства ускорений всех падающих тел он заключил, что сила, действующая на падающее тело, пропорциональна массе этого тела; сила, с которой Луна притягивается Землей, должна быть пропорциональна как массе Луны, так и массе Земли, поскольку можно с таким же успехом считать, что Земля притягивается Луной.

Это было главное в открытии Ньютона. Но Ньютон понял и то, что, хотя для разных тел ускорение должно быть одним и тем же, оно должно уменьшаться с возрастанием расстояния между притягивающимися телами.

В своем сочинении «Математические начала натуральной философии», вышедшем в Англии в 1686 году, Ньютон подвел итог своим многолетним исследованиям в механике *); он излагает, как он нашел зависимость сил притяжения между телами от расстояния между ними.

Проще всего было бы вывести этот закон для движения по окружности (мы это и сделаем ниже); но планеты движутся по эллипсам, и надо было доказать, что из того же закона можно получить и эллиптическую траекторию.

В своей книге Ньютон формулирует четыре правила, которыми должен руководствоваться естествоиспытатель. Он называет эти правила «правилами философствования». Мы приведем их полностью:

«Правило I. Не дóлжно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

Правило II. Поэтому, поскольку возможно, дóлжно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

Правило III. Такие свойства тел, которые не могут быть ни усиляемы, ни ослабляемы и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Правило IV. В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям.»

Правило III позволяет Ньютону сделать следующий вывод: «...Опытами и астрономическими наблюдениями устанавливается, что все тела по соседству с Землей тяготеют к Земле, и притом пропорционально количеству материи каждого из них; так, Луна тяготеет к Земле пропорционально своей массе, и взаимно наши моря тяготеют к Луне, все планеты тяготеют друг к другу, подобно этому и тяготение комет к Солнцу. На основании этого правила надо утверждать, что все тела тяготеют друг к другу». Зависимость сил тяготения от расстояния Ньютон сформулировал так: «Если времена находятся в полукубическом отношении радиусов, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов...». Первая половина этой теоремы есть просто третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$$

— периоды обращения планет относятся как полукубические степени (степени 3/2) радиусов их орбит. Центростремительная же сила есть та сила, которая заставляет планеты падать на Солнце, то есть сила притяжения планет Солнцем.

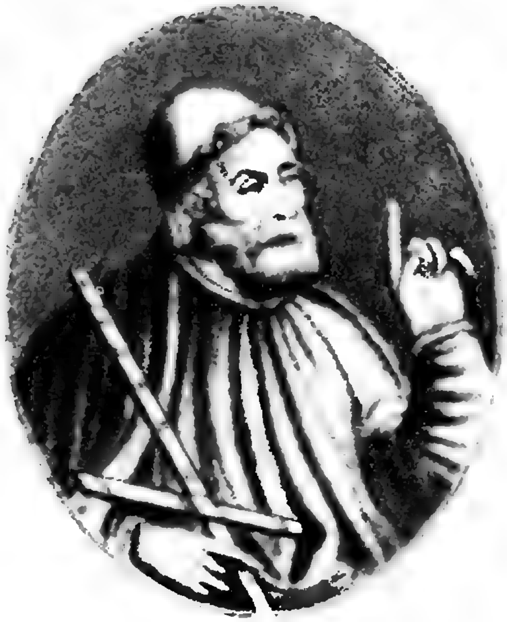
Книга Ньютона была первой книгой, где механика излагалась как точная наука; эту книгу нужно считать первой книгой по теоретической физике и считать год выхода книги — 1686 год — годом рождения теоретической физики. Влияние этой книги на науку было огромным. После нее уже нельзя было ограничиться только рассуждениями, словесными описаниями явлений природы — надо было создавать их теорию. А правильность теории может быть установлена только опытной проверкой: если предсказания теории совпадают с данными опытов, наблюдений, — теория верна. Создание Ньютоном и Лейбницем математического анализа дало средства для выполнения этой программы.

* *
*

Еще древние греки создали первую теорию движения планет. Эта теория была изложена Птолемеем в трактате «Алмагест». Но она совсем не касалась вопроса о том, почему движутся планеты. Такой вопрос и не возникал. Следуя учению Аристотеля, греки

---

*) Натуральной философией в Англии называли в XVII веке физику. Книга Ньютона была переведена на русский язык только в 1915 году замечательным русским ученым А. Н. Крыловым. Этот перевод помещен в V томе Собрания сочинений Крылова. Ниже в тексте статьи все цитаты приводятся из этого перевода.



Клавдий Птолемей (II век н. э.)

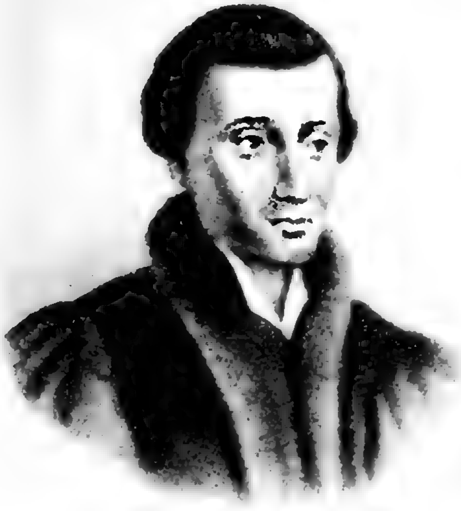
считали, что планетам свойственно движение по окружностям, подобно тому как тяжелым телам свойственно падать, и легким, как дым, подыматься вверх. Даже в средние века рассуждать о причинах движения планет значило смешивать астрономию с физикой, что было по представлениям того времени не позволительно; законы небесные и земные принадлежали разным областям и в них не следовало искать чего-либо общего.

Все же Коперник в 1543 году говорил о том, что тяжесть — это общее свойство тел, «...стремление, благодаря которому они, смыкаясь в форме шара, образуют единое целое. И следует допустить, что это стремление присуще также Солнцу, Луне и остальным планетам...».

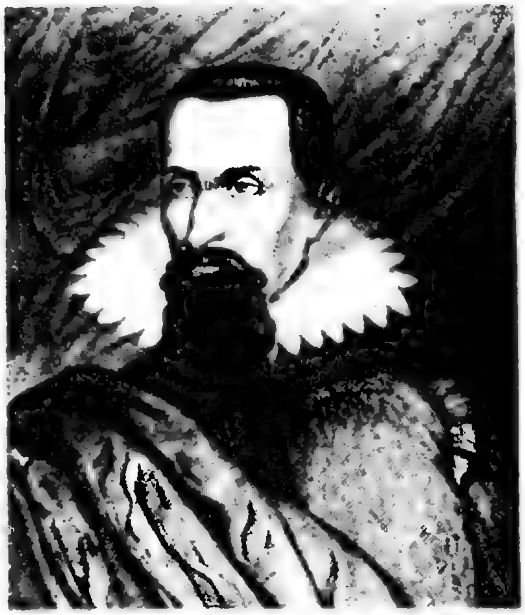
Кеплер (а до Кеплера еще и Гильберт) сравнивал тяжесть с магнитным действием. При этом Кеплер был первым, кто объявил задачу о движении планет физической задачей, и первым, кто ясно поставил вопрос, *почему* движутся планеты, в то время как все остальные астрономы лишь придумывали геометрические модели, которые описывали, *как* движутся планеты. Физики времен Галилея и Кеплера решали физические задачи, составляя пропорции. Так, о падении тел на Земле говорилось, что если промежутки времени расположить в форме арифметической прогрессии, то отрезки путей, проходимых телом за последовательные промежутки времени, будут относиться как квадраты последовательных чисел. Галилей знал, что все тела на Земле падают с одинаковым ускорением; он вполне мог объяснить, почему брошенное на Земле тело летит по параболе. Описывая полет снаряда, он говорил, что это движение складывается из равноускоренного падения и равномерного прямолинейного движения по инерции, и не задавался вопросом о том, почему снаряд падает равноускоренно. Очень трудно было прийти к мысли, что ускорение зависит от высоты. Галилей считал, что даже Луна (если остановить ее поступательное движение) будет падать на Землю с тем же ускорением, с каким камень падает на Земле.

Правда, Галилей считал, что и для Луны должен выполняться «земной» закон независимости ускорения свободного падения от массы. Так что «половину» задачи он понимал правильно! Но Галилей никак не мог воспринять идею, что Земля притягивает камень. Падение камня (Луны) на Землю есть просто проявление стремления всех тел собраться поближе к одному центру, собраться в некую шарообразную «кучу». В то время считалось очевидным, что одно тело может действовать на другое, только соприкасаясь с ним. Действие на расстоянии казалось просто немыслимым. Поэтому Галилей отверг идею Кеплера о том, что приливы и отливы на Земле связаны с притяжением Луной вод океанов. Ко времени Ньютона положение начало изменяться.

Не все слепо следовали за Галилеем. Так, Роберт Гук, основываясь на аналогии тяжести с притяжением магнита, пытался в 1666 году опытным путем определить, как изменяется вес тела с высотой. Он проводил опыты с маятниками разной длины в Вестминстерском аббатстве в Лондоне. Ясно, что обнаружить что-либо существенное он так и не смог. Даже высказывая предположение о том, что сила притяжения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, он не смог облечь свои мысли в строгую форму уравнений.



Николай Коперник (1473—1543)



Иоганн Кеплер (1571—1630)

Гук не умел еще ни писать уравнений, ни решать их и потому не смог проверить справедливость этого предположения. Также ничего не смог сделать и другой знаменитый в то время механик англичанин Рен. Рен также говорил о законе обратных квадратов, но и у него все ограничивалось словами.

Только в руках Ньютона все стало на свои места. Первая, и главная, идея пришла ему в голову в 1665 году, когда он спасался от чумы в своем родовом поместье. Как рассказывают, все дело началось с яблока, упавшего с дерева. 23-летнего ученого поразила мысль, что причина, заставляющая яблоко падать на Землю, должна быть родственна причине, заставляющей Луну отклоняться от своего прямолинейного пути. Сейчас это кажется очевидным, но во времена Ньютона сама мысль о подчинении космических тел простым земным законам была необычайно смелой. Но одно дело поверить самому в смелую гипотезу, а другое — убедить в ее справедливости других. Для этого надо, по крайней мере, найти способ ее проверки, найти способ, как мы говорим сейчас, сравнить теорию с опытом.

Лучше всего было начать с исследования движения Луны, используя имеющиеся результаты наблюдений. Это требовало сил и времени. Ньютон, кроме того, был еще занят оптическими исследованиями; и вообще ученые того времени обычно не торопились с публикациями. Вероятно, поэтому лишь через 20 лет — в апреле 1686 года Ньютон представил Королевскому обществу (Английской академии наук) первый том «Начал», а весь труд был опубликован к середине 1687 года. Только тогда теория была выдана на суд других физиков.

⁂

Напишем закон всемирного тяготения для Солнца и планеты (обозначая их массы M и m). Сила притяжения

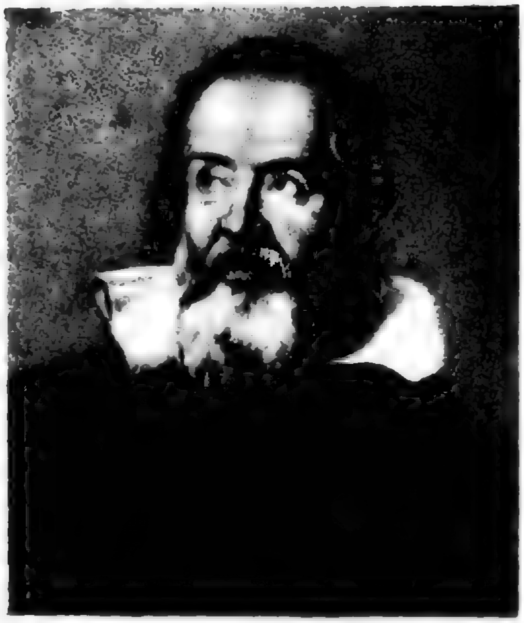
$$F=\gamma\frac{Mm}{r^2}.$$

Ускорение, сообщаемое этой силой планете,

$$a=\gamma\frac{M}{r^2}.$$

Как же Ньютон получил эти формулы?

В своих поисках закона тяготения Ньютон исходил из третьего закона



Галилео Галилей (1564—1642)

Христиан Гюйгенс (1629—1695)

Кеплера: квадраты средних времен обращения планет относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. (Этот закон Ньютон называет полукубическим отношением.) Еще тогда, когда Ньютон сравнивал падение яблока и Луны, он знал, что если тело движется по окружности, на это тело действует сила, притягивающая его к центру окружности; он знал также, что центростремительное ускорение пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально расстоянию.

Правда, честь открытия законов кругового движения приписывается Гюйгенсу, но Гюйгенс опубликовал свое открытие лишь в 1673 году (хотя знал о нем еще в 1659 году). Ньютону пришлось поэтому разбираться во всем самому.

Ньютон рассуждал примерно так. Третий закон Кеплера гласит, что для планет одной системы

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \ . \ . \ . = \mathrm{const}.$$

Пусть планеты движутся по окружностям. Введем угловую скорость вращения планеты по орбите $\omega = 2\pi/T$. Тогда третий закон Кеплера примет вид:

$$\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = \ . \ . \ . = \mathrm{const}.$$

Предположим теперь, что сила взаимодействия планеты с Солнцем пропорциональна некоторой степени расстояния:

$$F \sim R^n.$$

Этой же степени R пропорционально и ускорение планеты:

$$a = CR^n,$$

где C — некоторая константа. Так как $a = \omega^2 R$,

$$\omega^2 = CR^{n-1}.$$

Какова должна быть степень n, чтобы произведение $\omega^2 R^3$ было постоянным? Так как

$$\omega^2 R^3 = CR^{n-1}R^3 = CR^{n+2},$$

то ясно, что произведение $\omega^2 R^3$ не зависит от R, если $n = -2$. Тогда

$$\omega^2 R^3 = C.$$

Ньютон также предположил, что постоянная C пропорциональна массе притягивающего тела, т. е. Солнца:

$$C = \gamma M_\odot.$$

Постоянная γ и есть гравитационная постоянная, которая, по предположению Ньютона, уже не зависит ни от каких других величин. Итак,

$$a = \gamma \frac{M_\odot}{R^2}.$$

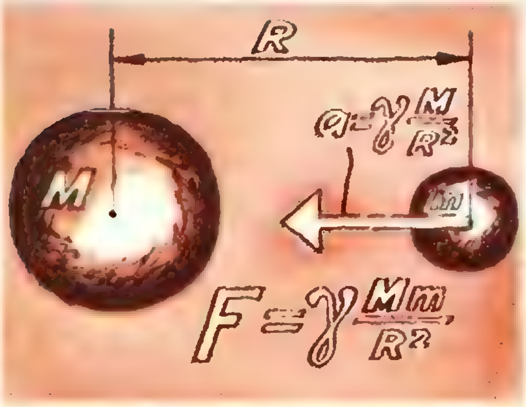
Следовательно, сила, сообщающая планете массы m это ускорение, т. е. сила взаимодействия планеты с Солнцем, равна

$$F = \gamma \frac{M_\odot m}{R^2}.$$

В этом выводе, однако, задача слишком упрощена. На самом деле она значительно сложнее.

Вводя в формулу одно-единственное расстояние R, мы рассуждали так, как будто бы Солнце — материальная точка, не имеющая размеров. Но Ньютон понимал, что для того чтобы проверить закон тяготения, например, по движению Луны, надо уметь решать задачу для тела конечного размера, просуммировав как-то вклады от разных частей Земли и Луны. Задача была сложной, и ее решение было получено не скоро. Вероятно, это было главной причиной, почему Ньютон так долго не публиковал свое открытие.

Результаты решения этой сложной задачи Ньютон представил в виде теорем. Для однородных по плотности тел формула для закона притяжения выглядит так, как будто бы вся масса тела сосредоточена в его центре. Ньютон доказал, что сферический слой однородной плотности притягивается другими телами и, по закону равенства действия и противодействия, притягивает сам другие тела так, как будто вся его масса сосредоточена в центре *). Если представить себе шар сложенным из сферических слоев, то можно видеть, как вычислять поле тяготения тела со сферически симметричным распределением массы. Эти теоремы Ньютона решили дело. Теперь в выражении для силы, действующей между Луной и Землей, под R следовало понимать расстояние между центрами этих тел. Замена реальных Земли и Луны телами со сферически симметричным распределением масс оказалась настолько хорошим приближением, что только в последние годы, при расчетах траекторий спутников, пришлось уточнять формулы.



Была и еще одна причина, которая, по-видимому, мешала Ньютону опубликовать его исследования закона тяготения. Ньютон не имел точного значения радиуса Земли, и сравнение расчетов с результатами наблюдений не давало хорошего согласия. Только после того как Пикар измерил радиус Земли с большой точностью (ошибка не превышала 0,03 %), исчезли расхождения.

Теперь можно было доказать самое главное. Доказать, что из закона всемирного тяготения следует, что траекториями планет будут эллипсы, а траекториями комет — гиперболы.

Необходимость такого доказательства была четко сформулирована в январе 1684 года во время беседы трех английских физиков Галлея, Рена и Гука. Рен даже объявил приз — книгу, которую он отдаст тому, кто в течение 2 месяцев решит задачу. Приз так и не был вручен. В мае Галлей предлагает эту задачу Ньютону, который и прислал ему через полгода нужное доказательство.

В «Началах» Ньютон излагает решение обратной задачи: он находит, каков должен быть закон взаимодействия, чтобы траекторией был эллипс, и показывает, что это должен быть закон «обратных квадратов». Более того, Ньютон доказывает, что если бы закон сил, действующих между планетой и Солнцем, хотя бы немного отклонился от закона обратных квадратов, то точки наибольшего и наименьшего удаления планеты от Солнца не были бы неподвижны в пространстве. А из наблюдений было известно, что эти точки (их называют апсидами) почти неподвижны. Это доказательство Ньютона — одно из самых блестящих в астрономии.

Обратим еще раз внимание на сказанное: можно утверждать, что закон обратных квадратов для сил

---

*) Речь идет о телах, находящихся вне слоя. Ньютон доказал, что внутри полости гравитационные силы равны нулю.

притяжения следует из одного только факта неподвижности апсид; так что расчеты силы притяжения с помощью третьего закона Кеплера излишни; на самом деле третий закон является следствием первого. Этого, конечно, Кеплер знать не мог *).

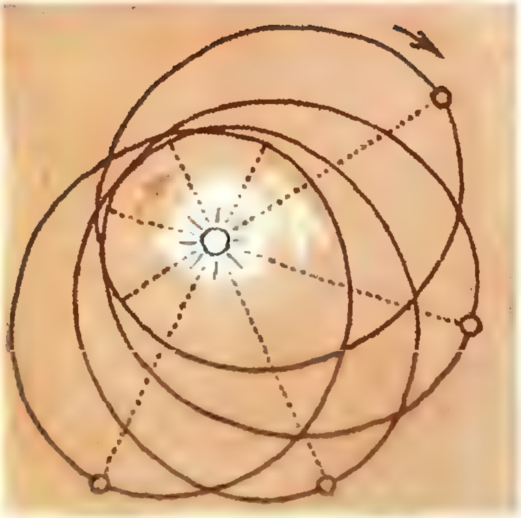
* * *

Много лет теория Ньютона была основой небесной механики, и хотя многие пытались обнаружить какие-либо поправки к закону всемирного тяготения, найти их удалось только Эйнштейну. Сейчас мы знаем, когда закон всемирного тяготения становится неточным, и умеем вычислять к нему поправки. Закон тяготения верен до тех пор, пока расстояние между телами много больше так называемого гравитационного радиуса притягивающего тела. Гравитационным радиусом тела массы M называют величину

$$R_{\text{гр}} = \frac{2\gamma M}{c^2},$$

где $\gamma M = C$ это известная уже нам «постоянная Кеплера», а c — скорость света. Для Солнца гравитационный радиус равен 3 *км*, а для Земли — 7 *мм*. Отсюда мы можем заключить, что закон всемирного тяготения на поверхности Земли может иметь относительную ошибку, равную примерно $\frac{7\cdot 10^{-3}\ \text{м}}{6{,}4\cdot 10^{6}\ \text{м}} \approx 10^{-9}$ (радиус Земли ≈ 6400 *км*), а на поверхности Солнца — $\frac{3\cdot 10^{3}\ \text{м}}{7\cdot 10^{8}\ \text{м}} \approx 0{,}4\cdot 10^{-5}$ (радиус Солнца $\approx 700\,000$ *км*).

На расстоянии, равном расстоянию от Солнца до Меркурия (около 50 *млн.км*), мы можем ожидать ошибку в законе всемирного тяготения порядка $\frac{3\cdot 10^{3}\ \text{м}}{5\cdot 10^{10}\ \text{м}} = 0{,}6\cdot 10^{-7}$. Хотя ошибка и очень мала, но она приводит к наблюдаемому эффекту.

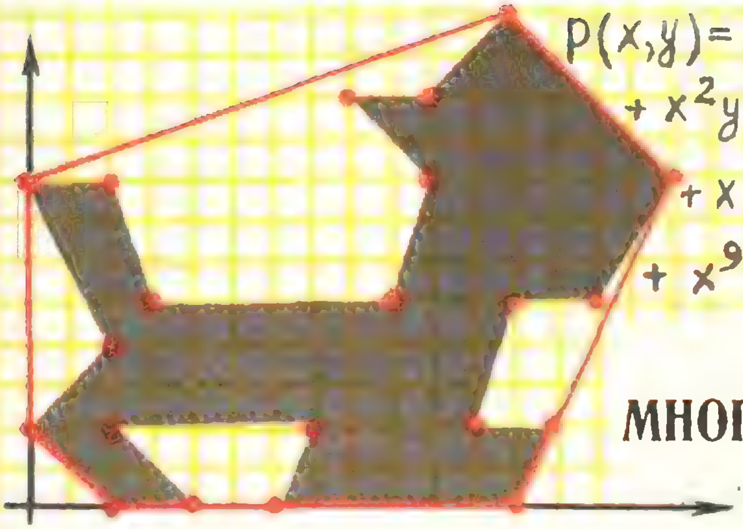


Это связано с указанным Ньютоном свойством апсид «отзываться» своим движением на нарушение закона обратных квадратов. Из-за малой поправки эллиптическая орбита Меркурия медленно поворачивается в пространстве. Это движение (в сторону обращения Меркурия на орбите) накладывается на движение, связанное с возмущающим действием Юпитера, которое объясняется ньютоновской теорией. За 100 лет накапливается дополнительное смещение 43″, объяснение которого было дано лишь общей теорией относительности.

Не всегда поправки общей теории относительности столь малы. В глубинах космоса есть области, в которых эффекты общей теории относительности оказываются основными. Это — недра тяжелых звезд, ядра галактик. При описании Вселенной как физической системы основным «инструментом» является общая теория относительности. Но дорогу к таким исследованиям открыл Ньютон. Он был первым, кто создал методы теоретической физики, и первым применил эти методы к изучению Вселенной.

---

*) Если бы сила притяжения была пропорциональна расстоянию, планета имела бы замкнутую эллиптическую орбиту только в том случае, если бы Солнце располагалось не в фокусе эллипса, а в его центре.



$$P(x,y)=x^2+x^2y^2+x^2y^4+x^2y^8+x^3y^5+x^4+x^6+x^7y^2+x^8y^{10}+x^9y^5+x^{10}y^8+\ldots$$

А. Кушниренко

МНОГОУГОЛЬНИК НЬЮТОНА

> *«Известна фундаментальная роль, которую сыграли исследования Ньютона в развитии анализа бесконечно малых. Большинство его идей растворилось в работах позднейших авторов, часто не сохранив ни имени Ньютона, ни его способа обозначений. Но в современной математике немало методов и результатов более частного характера, носящих имя Ньютона. Их значение было вскрыто лишь в гораздо более позднюю эпоху, когда общий прогресс математики дал возможность оценить важность того или иного результата Ньютона, записанного часто в виде небольшого замечания. К числу такого рода результатов относится «многоугольник», или, как его часто называют, «параллелограмм» Ньютона...»*
>
> *Н. Г. Чеботарев*

Важная характеристика многочлена от одной переменной — это его степень. Зная степень, можно многое сказать о многочлене, даже не зная его коэффициентов. Например, многочлен нечетной степени всегда имеет действительный корень, число действительных корней многочлена не превосходит его степени и т. п.

Самым простым и важным обобщением понятия степени для многочлена $P(x, y)$ от двух переменных x, y будет так называемая *полная степень* многочлена по переменным x, y. Однако более тонким обобщением понятия степени для многочлена от двух переменных является не число, а более сложная вещь — именно, *многоугольник на плоскости*.

В этой статье мы каждому многочлену от двух переменных будем сопоставлять многоугольник на плоскости. В основном эта конструкция принадлежит великому английскому математику и физику Исааку Ньютону; начиная с XVIII века этот многоугольник называют *«многоугольником Ньютона»*. Многоугольник Ньютона многочлена от двух переменных «наводит мост» между алгеброй и геометрией. Движение по этому мосту не затухает вот уже 300 лет, а в последние годы оно стало особенно интенсивным. Обычно по мосту можно двигаться в двух разных направлениях — и многоугольник Ньютона полезен в двух отношениях. Рассматривая многоугольник на плоскости как многоугольник Ньютона некоторого многочлена, мы можем использовать алгебраические свойства многочленов для решения геометрических задач про многоугольники. Наоборот, геометрические свойства многоугольника Ньютона помогают решать задачи про многочлены. Два примера использования многоугольника Ньютона при изучении многочленов подробно разобраны в § 2 и § 3. Примеры использования многочленов при изучении многоугольников гораздо сложнее, и мы не будем ими заниматься.

§ 1. Что такое многоугольник Ньютона

Диаграмма Ньютона многочлена от двух переменных

Напомним, что *одночленом* от независимых переменных x и y называется функция вида $x^m y^n$, где m и n — неотрицательные целые числа, а *многочленом* от x и y с действительными коэффициентами называется функция $P(x, y)$, заданная формулой

$$P(x, y) = a_1O_1 + a_2O_2 + \ldots \\ \ldots + a_kO_k, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — действительные числа, а $O_1, O_2, \ldots, O_k$ — попарно различные одночлены *). Если в формуле (1) коэффициент a_i отличен от нуля, то говорят, что одночлен O_i *входит* в многочлен $P(x, y)$. Например в многочлен $2+3y-\sqrt{2}x^3y^2$ входят одночлены 1, y и x^3y^2, а в многочлен $P(x, y) \equiv 0$ не входит ни один одночлен. Удобно изображать одночлены, входящие в многочлен $P(x, y)$, точками на координатной плоскости: мы отмечаем на этой плоскости точку $M(m_0; n_0)$, если одночлен $x^{m_0}y^{n_0}$ входит в многочлен $P(x, y)$. Тогда каждому ненулевому многочлену $P(x, y)$ мы сопоставляем конечное множество на плоскости Omn — будем обозначать его $Д(P)$, — изображающее наглядно одночлены, входящие в $P(x, y)$. Точку плоскости, у которой обе координаты — целые числа, мы будем называть *целой* точкой. Для любого многочлена P множество $Д(P)$ состоит только из целых точек, поэтому его удобно рисовать на клетчатой бумаге. Например, множество $Д(P)$ для многочлена

$$P(x, y) = xy - y^3 + 3x^2y^2 + \\ + 0{,}5x^4 - 2x^3y^4 \qquad (2)$$

изображено на рисунке 1. Подчеркнем, что значения ненулевых коэффициентов многочлена P никак не учитываются при построении множества $Д(P)$. Это множество обычно называют *диаграммой Ньютона* многочлена P.

Предостережение. Не следует смешивать числовую плоскость $\mathbf{R}^2$ — область определения многочлена P, с координатной плоскостью Omn, на которой мы рисуем диаграмму Ньютона многочлена P. Точки этих плоскостей имеют разную природу.

Как Ньютон определял «диаграмму Ньютона»

Ньютон тоже отмечал одночлены, входящие в многочлен от переменных x, y, на клетчатой бумаге. Ньютон расчерчивал такую бумагу сам и отмечал не углы клеток, а целые клетки. Вот как он описывает эти построения в письме одному из своих коллег.

«...Для лучшего уразумения этого правила поясню его на следующей диаграмме. Построй прямой угол BAC; стороны его BA и AC раздели на равные части и, восставив перпендикуляры, раздели угловую площадь на равные квадраты или параллелограммы, которые отметь вписанными в них измерениями букв x и y (см. рисунок 2). Затем, когда дано уравнение, отметь каким-нибудь знаком параллелограммы, соответствующие всем его членам...»

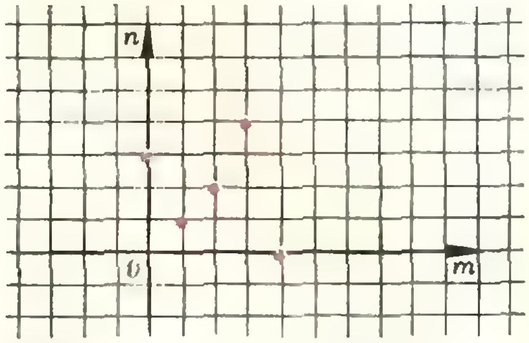


Рис. 1.

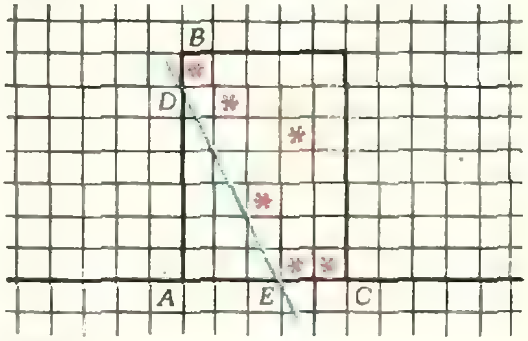


Рис. 2.

---

*) Независимые переменные x и y принимают значения в множестве действительных чисел; таким образом, функция $P(x, y)$ имеет в качестве области определения числовую плоскость, а в качестве множества значений — числовую прямую.

Здесь речь идет о построении «диаграммы Ньютона», а дальше Ньютон описывает построение «многоугольника Ньютона» (мы продолжаем прерванную цитату):

«... и приложи линейку к двум или же, что случается иногда, к нескольким из отмеченных таким образом параллелограммов, из которых один является самым нижним в столбце AB слева, другой попадает на линейку справа, а все остальные, не касающиеся линейки, находятся над ней...»

Как мы определяем многоугольник Ньютона

Мы видим, что Ньютон прикладывает линейку к множеству $Д(P)$, удовлетворяя двум условиям:

(I) *Не менее двух точек $Д(P)$ попадает на линейку.*

(II) *Множество $Д(P)$ лежит по одну сторону линейки.*

Рассмотрим *выпуклую оболочку* множества $Д(P)$, то есть наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки $Д(P)$. Этот многоугольник мы будем обозначать через $F(P)$ и называть многоугольником Ньютона многочлена $P(x, y)$. Многоугольник Ньютона многочлена (2) изображен на рисунке 3. Связь многоугольника $F(P)$ с методом Ньютона прикладывания линейки совершенно ясна. Если приложить линейку к любой стороне многоугольника Ньютона, то будут выполняться свойства (I) и (II). Обратно, если линейка приложена к множеству $Д(P)$ так, что выполняются (I) и (II), то линейка обязательно идет вдоль одной из сторон многоугольника $F(P)$.

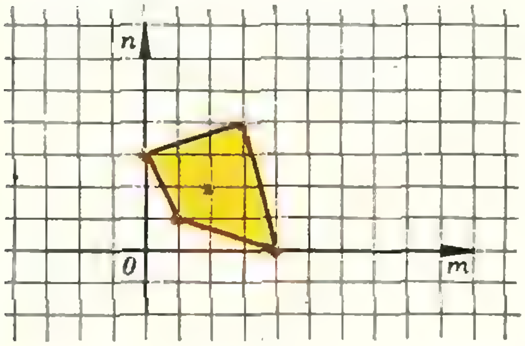


Рис. 3.

Несколько простых упражнений по многоугольнику Ньютона

Чтобы освоиться с определением многоугольника Ньютона, читателю стоит выполнить следующие

Упражнения.

1. Нарисуйте диаграмму Ньютона и многоугольник Ньютона для многочленов: x, $x+y$, $1+x+xy$, $x^2+x^2y+x^5y^7+x^{10}$, $(1+x+x^3)\ (1+y^4)$ *).

2. Докажите, что $F(\lambda P)=F(P)$ при $\lambda\neq 0$. Докажите, что $Д(P_1+P_2)\subset Д(P_1)\cup\cup Д(P_2)$. Верно ли, что $F(P_1+P_2)=F(P_1)\bigcup F(P_2)$?

3. Пусть $Q(x, y)=P(x^a, y^b)$, где a и b — натуральные числа. Как связаны между собой многоугольники $F(P)$ и $F(Q)$?

4. Придумайте определение диаграммы Ньютона и *многогранника Ньютона* для многочлена от трех переменных.

Естественно спросить, а как связан многоугольник Ньютона произведения многочленов с многоугольниками Ньютона сомножителей? Оказывается, операция, которую нужно проделать с $F(P_1)$ и $F(P_2)$, чтобы получить $F(P_1\cdot P_2)$, хорошо изучена в геометрии и носит специальное название: *сумма Минковского.*

5. Докажите, что $F(P_1\cdot P_2)=F(P_1)\dotplus F(P_2)$, где «$\dotplus$» — сумма Минковского (см. статью Н. Васильева «Сложение фигур», «Квант», 1976, № 4).

Это свойство многоугольника Ньютона обобщает известное свойство степени многочлена: при перемножении многочленов их степени складываются. Именно это свойство помогает использовать многочлены при решении чисто геометрических задач.

§ 2. Зачем Ньютону понадобился «многоугольник Ньютона»?

Ньютон решал уравнение $P(x, y)=0$, где P — многочлен от x, y. Под решением он понимал точное или приближенное выражение y через x. Как это было принято в его время, Ньютон не объясняет своего метода в общем виде, а поясняет его на конкретных примерах. Продолжим цитату, прерванную в § 1:

«...Затем возьми все те члены уравнения, которые содержатся в параллелограммах, задетых линейкой, и найди из них величину, которую следует получить в результате. Так, если нужно определить корень уравнения

---

*) Первые два примера показывают, что многоугольник Ньютона многочлена $P(x, y)$ может и не быть настоящим многоугольником, т. е. может сводиться к точке или отрезку.

$$y^6-5xy^5+\frac{x^3}{a}\ y^4-7aaxxyy+6a^3x^3+$$
$$+bbx^4=0,\quad (3)$$

то я обозначаю, как видишь (см. рис. 2), параллелограммы, соответствующие членам этого уравнения, звездочкой. Затем я прикладываю линейку DE к самому нижнему из отмеченных параллелограммов в первом столбце слева, вращаю линейку снизу вверх в правую сторону, пока она не пройдет через какой-нибудь один или несколько различных отмеченных параллелограммов. При этом я вижу, что линейка заденет те места, в которых содержатся члены x^3, $xxyy$ и y^6. Поэтому я составляю из них уравнение

$$y^6-7aaxxyy+6a^3x^3=0$$

(которое, если угодно, я затем, полагая $y=u\sqrt{ax}$, привожу к $u^6-7uu+6=0$) и из него нахожу y, который имеет четыре значения, а именно:

$$+\sqrt{ax},-\sqrt{ax},+\sqrt{2ax},-\sqrt{2ax}\ldots»$$

Ньютон подробно объясняет, что найденные решения не точные, а приближенные (тем более точные, чем ближе x и y к нулю). Он также указывает, как получить точное решение, прибавляя к уже найденному решению конечное или бесконечное число поправочных членов. За недостатком места мы не будем приводить соответствующие выдержки из трудов Ньютона.

В чем же состоит метод Ньютона приближенного решения уравнения P (x, y) = 0 при малых x и y?

В общем виде метод Ньютона можно (несколько схематично) объяснить следующим образом.

Мы хотим для достаточно малых x и y решить (приближенно) уравнение $P(x, y)=0$ (или нарисовать приближенно множество $P(x, y)=0$). Пусть γ — «обращенная к началу координат» сторона многоугольника $F(P)$ (такие стороны на рисунке 4 выделены красным). Обозначим через $P_\gamma(x, y)$ сумму взятых со старыми коэффициентами одночленов, входящих в $P(x, y)$ и отвечающих точкам γ. Пусть угловой коэффициент ребра γ равен $-k$, где $k>0$. Положив $y=ux^{\frac{1}{k}}$ в уравнении $P_\gamma(x, y)=0$, мы получим уравнение $x^lQ(u)=0$, где Q — некоторый многочлен от u. Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — ненулевые корни Q. Тогда $y_1=u_1x^{\frac{1}{k}}$, $y_2=u_2x^{\frac{1}{k}}$, ... — это точные решения уравнения $P_\gamma(x, y)=0$ и приближенные решения уравнения $P(x, y)=0$. Объединив такие решения по всем «обращенным к нулю» ребрам γ многоугольника $F(P)$, мы получим все нетривиальные *) приближенные решения уравнения $P(x, y)=0$ при малых x и y. Доказательство последней фразы и даже объяснение ее точного смысла завели бы нас слишком далеко. Наша скромная цель — научить читателя практически находить приближенные решения уравнения $P(x, y)=0$ (или, что то же самое, рисовать приближенно множество $P(x, y)=0$) при малых x и y.

Учимся работать с многоугольником Ньютона

У многоугольника Ньютона многочлена (2) к нулю обращены стороны γ_1 и γ_2 (рис. 4). Начнем со стороны γ_1: $P_{\gamma_1}=xy+0{,}5x^4$. Замена $y=ux^3$ приводит уравнение $P_{\gamma_1}=0$ к виду $x^4(u+0{,}5)=0$, откуда $y=-0{,}5x^3$. Далее, $P_{\gamma_2}=xy-y^3$; замена $y=ux^{1/2}$ приводит уравнение $P_{\gamma_2}=0$ к виду $x^{3/2}(u-u^3)=0$, откуда $y=-\sqrt{x}$ и $y=+\sqrt{x}$. Впрочем, последние два решения мож-

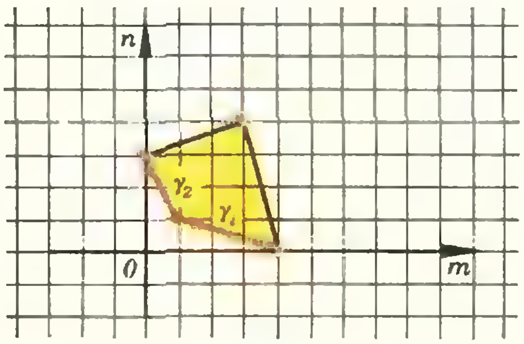


Рис. 4.

---

*) *Тривиальными* называются решения вида $x=0$ или $y=0$.

но объединить: $x = y^2$. Итак, мы получили, что при малых x и y уравнение $P(x, y) = 0$, где P задан формулой (2), имеет два приближенных решения: $y = -0{,}5x^3$ и $x = y^2$. (Тривиальных решений в этом случае нет, так как P не делится ни на x, ни на y.) Вид приближенных решений показан на рисунке 5. Этот же рисунок при малых x и y можно рассматривать как приближенный рисунок множества $P(x, y) = 0$.

Упражнение 6. Решите приближенно уравнение $x^5y + x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^4 + y^7 + 2x^4y^2 + 3x^6y^3 - x^5y^5 + x^6y^6 + 7x^2y^8 = 0$ при малых x и y (см. рис. 6).

Ньютон указал также способ, с помощью которого можно решить уравнение $P(x, y) = 0$ при очень больших x и y.

Упражнение 7. Придумайте, как с помощью многоугольника Ньютона решить (приближенно) уравнение $P(x, y)$ при очень больших x и y.

§ 3. Число решений системы двух уравнений с двумя неизвестными и многоугольник Ньютона

Теорема Безу

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными x, y:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

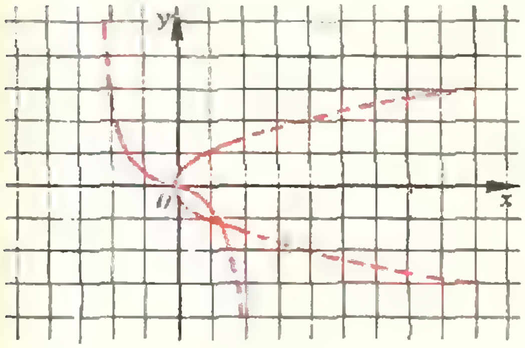


Рис. 5.

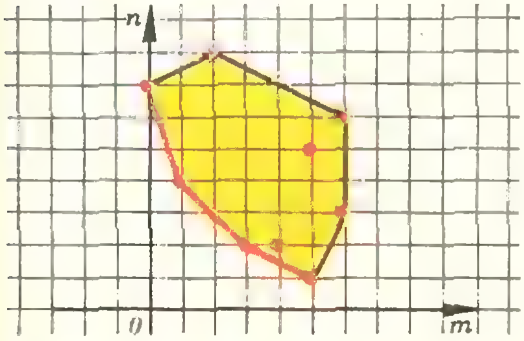


Рис. 6.

где P и Q — многочлены с действительными коэффициентами. Если P и Q — многочлены первой степени *), то число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит 1. Если P — многочлен первой степени, а Q — многочлен степени N, то, как легко видеть, число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит N. Немного сложнее доказать, что если P — многочлен второй степени, а Q — многочлен степени N, то число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит $2 \cdot N$. После этих примеров читателя не удивит формулировка хорошо известной еще в прошлом веке теоремы.

Теорема Безу. *Если P — многочлен степени M, а Q — многочлен степени N, то число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит $M \cdot N$.*

Можно ли усилить теорему Безу?

Вообще говоря, нельзя: число $M \cdot N$ в формулировке теоремы Безу ни при каких M и N не может быть заменено меньшим числом, так как существуют примеры систем, имеющих ровно $M \cdot N$ решений (например, система $(x - 1)(x - 2) \cdot \ldots \cdot (x - M) = (y - 1)(y - 2) \cdot \ldots \cdot (y - N) = 0$).

Во многих практических случаях, однако, теорема Безу дает явно завышенную оценку для числа решений системы (4).

Пример. $P = a + bx + cx^2y^2$, $Q = d + ey + fx^2y^2$. Теорема Безу утверждает, что если число решений системы $P = Q = 0$ конечно, то оно не превосходит 16. Между тем, решая эту систему непосредственно, легко получить, что если число решений конечно, то оно не превосходит 4.

Этот пример и другие более сложные примеры приводят к мысли обобщить теорему Безу. Ясно, что при этом мы должны заменить понятие степени многочлена каким-то более сложным понятием, полнее учитывающим свойства многочленов. В каче-

---

*) Напомним, что степень многочлена (иногда говорят — полная степень) — это максимум числа $m + n$ по всем одночленам x^my^n, входящим в многочлен.

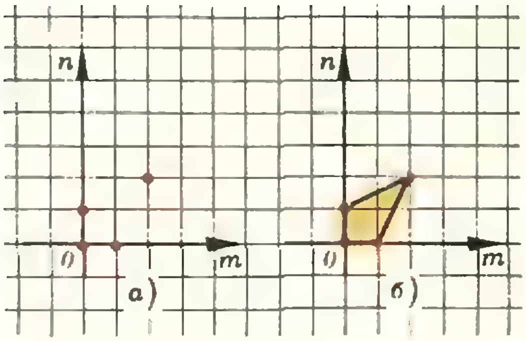


Рис. 7.

стве такого обобщения степени мы возьмем *многоугольник Ньютона системы.*

Пусть $Д(P)$ — диаграмма Ньютона многочлена P и $Д(Q)$ — диаграмма Ньютона многочлена Q. Положим $Д = Д(P) \cup Д(Q)$. $Д$ — конечное множество на плоскости Omn. Точка $M(m_0; n_0)$ принадлежит $Д$, если одночлен $x^{m_0}y^{n_0}$ входит с ненулевым коэффициентом хотя бы в один из многочленов P и Q. Снова через F обозначим выпуклую оболочку множества $Д$, то есть — наименьший выпуклый многоугольник в плоскости Omn, содержащий все точки $Д$. Многоугольник F мы назовем *многоугольником Ньютона системы* (4). (Если в нашем примере коэффициенты a, b, ..., f многочленов P и Q отличны от нуля, то множество $Д$ и многоугольник F системы (4) такие, как на рисунках 7, *а*, *б*.)

Нельзя ли, пользуясь какими-нибудь характеристиками многоугольника F, оценить сверху число решений системы (4)?

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. *Число ненулевых действительных решений системы* (4) *либо бесконечно, либо не превосходит удвоенной площади многоугольника Ньютона этой системы* (решение $(x_0; y_0)$ системы (4) называется ненулевым, если $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$).

Теорема 1 принадлежит автору настоящей статьи. Доказательство ее косвенное: предварительно доказывается теорема, в которой используется не площадь многоугольника F, а другие его характеристики — именно, число целых точек в многоугольнике F и в «удвоенном многоугольнике» $2F$. Таким образом, при работе с многоугольниками Ньютона возникают любопытные геометрические вопросы про целые точки в многоугольниках. Еще более интересные вопросы возникают в связи с многогранниками Ньютона. Подробно обо всем этом рассказано в статье «Целые точки в многоугольниках и многогранниках» («Квант», 1977, № 4).

Можно ли улучшить теорему 1?

Теорема 1 дает хорошую оценку для числа решений в тех случаях, когда многоугольники $F(P)$ и $F(Q)$ совпадают или достаточно близки (в противном случае оценка получается слишком грубая: рассмотрите систему $x^n + y^{n+1} = y^n + y^{n+1} = 0$). Для получения более точной оценки нужно рассмотреть $Д(P)$ и $Д(Q)$ порознь, как это сделал Д. Н. Бернштейн, который обобщил теорему 1 следующим образом.

Теорема 2. *Пусть A — многоугольник Ньютона многочлена P, B — многоугольник Ньютона многочлена Q и C — многоугольник Ньютона многочлена $P \cdot Q$. Тогда число ненулевых решений системы* (4) *либо бесконечно, либо не превосходит числа* $S(C) - S(A) - S(B)$. (Здесь через S обозначена площадь соответствующего многоугольника.)

Многоугольник C есть не что иное, как сумма Минковского многоугольников A и B, а для числа $S(C) - S(A) - S(B)$ в геометрии имеется специальное название: *смешанная площадь* многоугольников A и B (см. упражнение 5 и цитированную там статью Н. Васильева).

Упражнения

8. Примените теорему 1 к многочлену (2) и многочленам из упражнения 1.

9. Оцените по теореме Безу и по теореме 1 число решений системы $x^3+y^4=axy+bx^2y^2+cx^3y^2+dx^4y^3$ при $a\neq 0$ и $d\neq 0$.

10. Обобщите теорему 1 на случай системы трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными x, y, z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаак Ньютон, *Математические работы. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых.* Перевод с латинского Д. Мордухай-Болтовского, ОНТИ, 1937, с. 33—34.

2. Исаак Ньютон, *Второе письмо Ньютона к Ольденбургу, подлежащее сообщению Лейбницу. 24 октября 1976 года,* Там же, с. 251—252.

3. Н. Г. Чеботарев, *Собрание сочинений.* Т. 3. *«Многоугольник Ньютона» и его роль в современном развитии математики»,* Изд-во АН СССР. М.—Л., 1950, с. 47—80

В. Кресин

Адиабатный процесс

Различные разделы физики тесно связаны между собой. Можно привести немало иллюстрирующих примеров. Так, в данной статье рассказывается об одном из важнейших процессов, изучаемых в молекулярной физике, — адиабатном процессе. При этом процессе изменяется температура газа. Нас будет интересовать механизм изменения температуры; для этого потребуются некоторые сведения из механики. Поэтому мы и начнем с одной механической задачи.

Отражение от движущейся стенки

Рассмотрим такое механическое явление: шарик подлетает к стенке со скоростью $\vec{v}$ и после абсолютно упругого удара меняет направление своего движения. Для простоты ограничимся случаем нормального падения шарика на стенку.

Если стенка неподвижна, то ясно, что после удара направление скорости движения шарика изменится на противоположное, а абсолютная величина ее $|\vec{v}|$ останется неизменной.

Усложним теперь нашу задачу: шарик подлетает к движущейся стенке. Предположим, что стенка движется навстречу шарику со скоростью $\vec{u}$ (рис. 1). С какой скоростью в этом случае будет двигаться шарик после столкновения? Для того чтобы ответить на этот вопрос, сведем задачу к известной — соударение шарика с неподвижной стенкой. Другими словами, будем рассматривать явление в системе отсчета, связанной со стенкой. С точки зрения наблюдателя в этой системе отсчета скорость приближающегося к стенке шарика будет другой, а именно $|\vec{v}\,'| = |\vec{v}| + |\vec{u}|$. После отражения (напомним, что в рассматриваемой системе отсчета стенка покоится) скорость изменит направление, а по абсолютной величине останется прежней. Для окончательного решения задачи снова перейдем в неподвижную систему отсчета, связанную, например, с землей. Скорость удаляющегося от стенки шарика равна $|\vec{v}| + |\vec{u}|$ относительно стенки, а сама стенка движется относительно земли со скоростью $|\vec{u}|$. Следовательно, скорость шарика относительно земли равна $|\vec{v}| + 2\,|\vec{u}|$.

Таким образом, в результате упругого отражения от движущейся стенки скорость шарика возрастает на удвоенную скорость стенки.

На этом мы заканчиваем рассмотрение вспомогательной механической задачи и переходим к основному вопросу — описанию адиабатного процесса.

Механизм изменения температуры при адиабатном процессе

Пусть в цилиндре под поршнем находится идеальный газ (рис. 2). Движение поршня AB позволяет производить как сжатие, так и расшире-

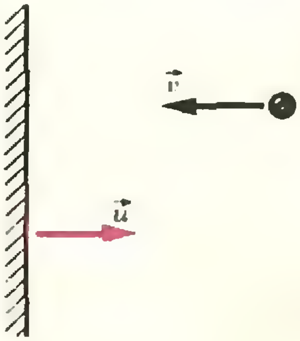


Рис. 1.

ние газа. Как известно, изменение объема газа может происходить при различных процессах, сопровождающихся изменением и других его параметров. Адиабатный процесс характеризуется отсутствием теплообмена с окружающей средой: к газу не подводится и от него не отводится теплота. При адиабатном процессе изменяется температура газа. Если газ адиабатно сжимать, его температура увеличивается, а если расширять — уменьшается. (Заметим, что при этом давление газа тоже изменяется.)

С чем связано изменение температуры при адиабатном процессе? Для ответа на этот вопрос проанализируем сначала (как это и делается обычно) адиабатный процесс с точки зрения закона сохранения энергии, а затем — на основе молекулярно-кинетических представлений. При описании процесса на молекулярном уровне и становится ясной связь с рассмотренной выше механической задачей об отражении шарика от движущейся стенки.

Предположим, газ адиабатно расширяется. При расширении он совершает работу по подъему поршня. Поскольку система теплоизолирована, то, согласно закону сохранения энергии, эта работа производится только за счет внутренней энергии газа. Таким образом, внутренняя энергия газа должна уменьшаться при его адиабатном расширении.

Внутренняя энергия идеального газа складывается из кинетических энергий его молекул. Уменьшение внутренней энергии возможно только при уменьшении кинетической энергии молекул газа, а температура газа и является мерой средней кинетической энергии молекул. Поэтому ясно, что адиабатное расширение должно сопровождаться охлаждением газа. С помощью аналогичных рассуждений легко показать, что при адиабатном сжатии газ должен нагреваться.

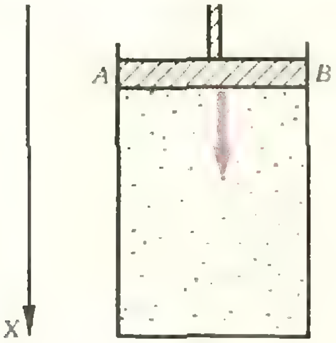


Рис. 2.

Таким образом можно установить количественные связи между температурой и объемом, давлением и объемом, характерные для адиабатного процесса. Мы же получим соответствующие формулы несколько позже, рассматривая механизм адиабатного процесса.

Как объяснить изменение температуры при адиабатном процессе с точки зрения молекулярно-кинетической теории? Почему, например, при опускании поршня увеличивается средняя скорость движения молекул, а значит, и температура газа? Каков механизм увеличения скорости? Постараемся ответить на эти вопросы.

Молекулы газа, заполняющего сосуд (см. рис. 2), совершают хаотическое тепловое движение. При этом, конечно, непрерывно происходят столкновения молекул между собой и со стенками сосуда. Для идеального газа эти столкновения описываются обычными законами механики упругого удара. При сжатии газа поршень движется вниз, и молекулы теперь сталкиваются с движущимся поршнем. Но ведь именно эта картина и обсуждалась нами в первой части статьи, где рассказывалось об отражении шарика от движущейся стенки.

Итак, молекулы ударяются о движущийся поршень и отражаются от него. При этом проекции скорости в направлении, перпендикулярном поршню, возрастают на $2|\vec{u}|$, где $\vec{u}$ — скорость движения поршня. В дальнейшем межмолекулярные соударения приводят к тому, что средняя скорость хаотического теплового движения возрастает. При этом, естественно, увеличивается и температура газа. Таков молекулярно-кинетический механизм нагревания газа при адиабатном сжатии.

Аналогично можно рассмотреть и адиабатное расширение. В этом случае понижение температуры газа связано с уменьшением скорости молекул при отражении их от удаляющегося поршня.

Основной закон адиабатного процесса

При адиабатном процессе изменение объема идеального газа сопровождается изменением его температуры. Основная задача этого раздела статьи — получить формулу, связывающую температуру и объем при адиабатном процессе. Для этого воспользуемся молекулярно-кинетической картиной этого процесса.

Рассмотрим движение какой-нибудь молекулы одноатомного идеального газа. Пусть ее скорость равна $\vec{v}$ и кинетическая энергия

$$\varepsilon = \frac{m|\vec{v}\,|^2}{2}.$$

Движение молекулы в пространстве можно представить в виде трех независимых движений по осям X, Y и Z. (В этом смысле говорят о трех степенях свободы молекулы.) С каждым из этих независимых движений связаны соответствующие проекции v_x, v_y и v_z скорости молекулы. Тогда выражение для кинетической энергии можно записать так:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}. \qquad (1)$$

Нас будут интересовать столкновения молекул с опускающимся поршнем (для определенности рассмотрим случай адиабатного сжатия). Поэтому мы будем говорить только о движении вдоль оси X (см. рис. 2). Пусть поршень опускается со скоростью $\vec{u}$. Величина энергии ε_x после столкновения с поршнем становится равной

$$\varepsilon_x' = \frac{m(|v_x| + 2|\vec{u}|)^2}{2},$$

а изменение энергии

$$\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_x' - \varepsilon_x = 2m|v_x|\,|\vec{u}| + 2m|\vec{u}|^2.$$

Обычно $|\vec{u}| \ll |v_x|$. Тогда в выражении для $\Delta\varepsilon_x$ можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым и считать

$$\Delta\varepsilon_x = 2m|v_x|\,|\vec{u}\,|. \qquad (2)$$

Формула (2) описывает изменение энергии одной молекулы в результате одного столкновения с поршнем. Каково же изменение в единицу времени всей внутренней энергии рассматриваемого идеального газа? Для ответа на этот вопрос мы должны просуммировать изменения энергии всех молекул, столкнувшихся в течение секунды с опускающимся поршнем. Обозначим через N число молекул газа в сосуде, через V — объем сосуда и через S — площадь поршня. Для простоты рассуждений будем считать, что все молекулы газа характеризуются одним и тем же численным значением проекции скорости v_x (в дальнейшем мы внесем необходимые коррективы). При этом в любой момент времени половина молекул движется к поршню, а вторая половина — от него (иначе было бы смещение всего газа как целого). В течение 1 *сек* столкновения испытают лишь те молекулы, которые, во-первых, движутся к поршню и, во-вторых, находятся от него на расстоянии, не превышающем $|v_x|$ *), то есть число молекул, испытавших соударения, равно

$$N' = \frac{1}{2}\,\frac{N}{V}\,|v_x|S. \qquad (3)$$

У всех N' молекул энергия после соударения с поршнем изменяется на величину $\Delta\varepsilon_x = 2m|v_x|\,|\vec{u}|$ (см. формулу (2)). Таким образом, полное изменение энергии газа в единицу времени

$$\Delta E = N'\Delta\varepsilon_x = \frac{1}{2}\,\frac{N}{V}\,|v_x|S\cdot 2m|v_x|\,|\vec{u}| = 2\,\frac{N}{V}\,\frac{m|v_x|^2}{2}\,|\vec{u}|S. \qquad (4)$$

---

*) Более строго это расстояние равно $|v_x| + |\vec{u}\,|$, но мы воспользуемся тем, что $|\vec{u}\,| \ll |v_x|$.

Ясно, что величина $|\vec{u}|S$ численно равна, но противоположна по знаку изменению объема сосуда: $|\vec{u}|S = -\Delta V$. Тогда

$$\Delta E = -2\frac{N}{V}\frac{m|v_x|^2}{2}\Delta V = -2N\varepsilon_x\frac{\Delta V}{V}. \qquad (5)$$

Мы считали, что все молекулы характеризуются одним и тем же значением проекции скорости v_x. Конечно, это предположение не соответствует действительности. На самом деле все молекулы движутся с различными скоростями, и реально наблюдается значительный разброс значений ε_x. Поэтому в выражении (5) вместо энергии ε_x надо взять среднее по всем молекулам значение энергии $\overline{\varepsilon_x}$:

$$\Delta E = -2N\overline{\varepsilon_x}\,\frac{\Delta V}{V}. \qquad (6)$$

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа, содержащего N молекул, равна

$$E = \frac{3}{2}\,NkT, \qquad (7)$$

где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура газа. Величина $\frac{3}{2}\,kT$ и представляет собой среднее значение энергии молекулы одноатомного идеального газа. Поскольку движение молекул складывается из трех независимых равноправных движений (по трем осям координат), ясно, что $\overline{\varepsilon_x} = \frac{kT}{2}$. Подставим это значение в выражение (6):

$$\Delta E = -NkT\,\frac{\Delta V}{V}. \qquad (8)$$

Запишем теперь иное выражение для ΔE. Воспользуемся формулой (7) для внутренней энергии идеального газа. При адиабатном сжатии температура газа изменяется. Пусть при изменении объема на ΔV температура газа изменилась на ΔT. Тогда внутренняя энергия газа, содержащего те же N молекул, равна $E' = \frac{3}{2}\,Nk(T+\Delta T)$, и изменение внутренней энергии

$$\Delta E = \frac{3}{2}\,Nk\Delta T. \qquad (9)$$

Приравняв правые части выражений (8) и (9), придем к следующему равенству:

$$-NkT\,\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\,Nk\Delta T, \qquad (10)$$

или

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3}\,\frac{\Delta V}{V}. \qquad (11)$$

Формула (11) устанавливает связь между температурой, объемом и их изменениями при адиабатном процессе.

Возникает вопрос: как должны быть связаны между собой температура T и объем V газа, чтобы при их изменениях соответственно на ΔT и ΔV выполнялось равенство (11)? Оказывается, эта связь при любых T и V должна иметь вид*)

$$\ln T = -\frac{2}{3}\ln V + \mathrm{const}, \qquad (12)$$

где ln — натуральный логарифм, то есть логарифм по основанию $e \approx 2{,}72$.

---

*) Десятиклассники могут в этом убедиться самостоятельно (см., например, «Алгебру и начала анализа 10», п. 114). Для остальных читателей приведем проверку того, что из выражения (12) действительно получается выражение (11).

В самом деле, пусть температура и объем изменились на малые величины ΔT и ΔV соответственно. Тогда из выражения (12) следует:

$$\ln(T+\Delta T) = -\frac{2}{3}\ln(V+\Delta V) + \mathrm{const},$$

или

$$\ln T + \ln\left(1+\frac{\Delta T}{T}\right) = -\frac{2}{3}\ln V - \frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right) + \mathrm{const}.$$

С учетом равенства (12) получаем

$$\ln\left(1+\frac{\Delta T}{T}\right) = -\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right).$$

Теперь воспользуемся приближенной формулой: при малых α $\ln(1+\alpha)\approx\alpha$, тогда $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3}\,\frac{\Delta V}{V}$.

Таким образом, температура и объем при адиабатном процессе связаны формулой (12), которая легко приводится к виду

$$\ln(TV^{2/3}) = \text{const},$$

или

$$TV^{2/3} = \text{const}. \qquad (13)$$

Это и есть окончательная искомая формула, выражающая основной закон адиабатного процесса для одноатомного идеального газа: $T \sim \frac{1}{V^{2/3}}$.

Показатель степени 2/3, фигурирующий в выражении (13), имеет определенный физический смысл. Можно показать (см. Приложение), что

$$\frac{2}{3} = \frac{C_p}{C_V} - 1,$$

где C_p — теплоемкость газа, если его нагрев происходит при постоянном давлении, а C_V — теплоемкость газа при постоянном объеме. Поэтому закон, описывающий адиабатный процесс (выражение (13)), обычно записывают в виде

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \qquad (14)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

Мы рассмотрели подробно адиабатный процесс для *одноатомных* газов. Но оказывается, уравнение (14) описывает адиабатный процесс и в случае *многоатомных* газов. Изменяется только значение величины γ. Например, для *двухатомных* газов $\gamma - 1 = \frac{2}{5}$ (а не 2/3, как для одноатомных газов). Это связано с тем, что для двухатомных газов внутренняя энергия $E = \frac{5}{2}\,NkT$ $\left(\text{а не } \frac{3}{2}\,NkT\right)$. Двухатомные молекулы могут совершать не только поступательное движение, но и вращение вокруг осей, проходящих через центр молекул. С этим вращением тоже связана определенная энергия. Вот почему показатель степени $\gamma - 1$ оказывается иным: $\gamma - 1 = \frac{2}{5}$. Предлагаем читателям самостоятельно получить это значение.

Приложение

Величина теплоемкости вещества зависит не только от его природы или температуры, но и от того, при каких условиях происходит процесс нагревания. Например, при нагревании в закрытом сосуде не изменяется объем газа, а в сосуде, закрытом подвижным поршнем остается неизменным давление. При этом подводимое тепло расходуется не только на увеличение внутренней энергии газа, но на совершение работы по расширению. Теплоемкость в этих двух случаях различна. В первом случае ее называют теплоемкостью при постоянном объеме и обозначают C_V, а во втором — теплоемкостью при постоянном давлении C_p. Ясно, что $C_p > C_V$. Найдем разность этих величин.

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты Q, подводимое к газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа ΔE и работы газа A:

$$Q = \Delta E + A.$$

Для одноатомных газов изменение внутренней энергии $\Delta E = \frac{3}{2}\,Nk\Delta T$. Работа газа A при малых изменениях объема ΔV равна $A = p\Delta V$ (p — давление газа). Поэтому

$$Q = \frac{3}{2}\,Nk\Delta T + p\Delta V,$$

и теплоемкость газа

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{3}{2}\,Nk + p\,\frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Если объем газа не изменяется, то его теплоемкость

$$C_V = \frac{3}{2}\,Nk.$$

Если же неизменным остается давление, то

$$C_p = \frac{3}{2}\,Nk + p\,\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}\,Nk + \frac{\Delta(NkT)}{\Delta T} = \frac{5}{2}\,Nk$$

(мы воспользовались основным уравнением состояния идеального газа $pV = NkT$). Отсюда

$$C_p - C_V = Nk.$$

Тогда формулу (10) можно записать в виде

$$-(C_p - C_V)\,T\,\frac{\Delta V}{V} = C_V\Delta T,$$

или

$$\frac{\Delta T}{T} = -\left(\frac{C_p}{C_V} - 1\right)\frac{\Delta V}{V} = -(\gamma - 1)\,\frac{\Delta V}{V},$$

откуда окончательно получаем

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Н. Васильев, А. Толпыго

Плавные последовательности

В этой заметке мы обсудим характерные соображения, возникающие при решениях задач, где на последовательность или функцию наложены некоторые локальные ограничения — ей запрещено резко меняться или круто поворачивать — и требуется оценить, насколько большим может оказаться ее колебание в целом.

Игра «гонки» и вторые разности

Вероятно, многие из наших читателей знают игру «гонки», описанную в книге М. Гарднера. «Математические новеллы».

Напомним правила игры. На клетчатой бумаге рисуется более-менее произвольная изогнутая область (трек), у одного края трека для каждого игрока отмечается своя точка старта, у другого края — линия финиша. Автомобилисты по очереди делают ходы в один из узлов сетки, причем изменять скорость разрешается только на единицу: если предыдущий ход автомобилиста был $\overrightarrow{AB}$, то следующий ход $\overrightarrow{BC}$ либо точно такой же ($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$), либо заканчивается в одном из восьми соседних с C узлов. Ходить можно только по отрезкам, целиком лежащим в пределах трека: тот, кто слишком «разогнался» и вылетел за границу, пропускает ход и начинает с единичной скоростью (так же проводится и старт, рис. 1).

По сравнению с другими играми на клетчатой бумаге (например, с «морским боем») эта игра замечательна не только близостью к реальной ситуации, но и разнообразием: ведь каждый новый трек — это новая игра.

Найти наиболее удачный путь на сложном треке — задача далеко не простая. Такие задачи очень характерны для теории оптимального управления — сравнительно молодой и быстро развивающейся области математики. Мы не будет касаться общих соображений, относящихся к этой теории, а рассмотрим одну конкретную задачу, навеянную игрой «гонки».

Задача 1. *На клетчатой бумаге на одной горизонтальной линии сетки l отмечен отрезок A_0A_1 длины 1 (сторона одной клетки). Нужно, начав с этого отрезка, построить путь, в котором:*

1) *каждый следующий шаг $A_k A_{k+1}$ либо такой же, как предыдущий ($\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$), либо отличается от него на одну единицу вверх или вниз* (в отличие от «гонок», скорость смещения вправо всегда остается одинаковой: 1 клетка за каждый шаг);

2) *последний отрезок A_nA_{n+1} лежит на той же прямой, что и первый A_0A_1.*

На какую наибольшую высоту, при заданном n, может подняться такой путь над прямой l?

Эту задачу легко, конечно, сформулировать и без клетчатой бумаги. Если считать, что отрезки A_0A_1 и A_nA_{n+1} — это отрезки $[0, 1]$ и $[n, n+1]$ оси Ox (рис. 2), то путь впол-

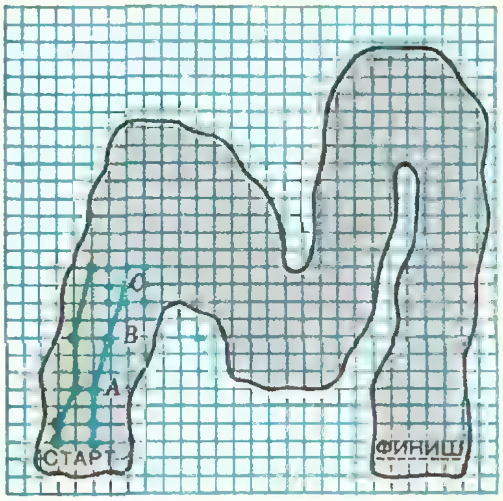


Рис. 1.

не определяется последовательностью координат $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$ точек $A_k = (k; y_k)$, причем эта последовательность должна удовлетворять таким условиям:

а) разность разностей $y_{k+1} - y_k$ и $y_k - y_{k-1}$ соседних членов последовательности, т. е. *вторая разность*

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = (y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})$$

при каждом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, не превосходит 1;

б) $y_0 = y_1 = y_n = y_{n+1} = 0$, а все другие y_k — целые числа. В задаче спрашивается, *какое наибольшее значение может иметь наибольший член этой последовательности.*

Путь, о котором говорится в первой формулировке, — в некотором смысле «график» последовательности $\{y_k\}$. Даже если бы мы начали сразу с алгебраической формулировки, его очень полезно было бы «выдумать»: он помогает наглядно представить смысл условия а).

Перейдем к решению задачи.

Чтобы удовлетворить условию 1), «верхушка» ломаной $A_m A_{m+1}$ должна быть горизонтальной. Ясно, что можно рассматривать только симметричные пути: если $A_m A_{m+1}$ — самое верхнее звено, то более длинную из частей $A_1 \ldots A_m$ и $A_{m+1} \ldots A_n$ можно укоротить, заменив ее симметричным отражением другой части относительно серединного перпендикуляра к отрезку $A_m A_{m+1}$. Итак, достаточно рассматривать лишь участок подъема (отведя на него не более $n/2 - 1$ наклонных шагов) — спуск будет точно таким же.

Кстати, отсюда видно, что для четного n максимальная высота подъема — обозначим ее h_n — будет такой же, как и для следующего за ним нечетного числа: $h_n = h_{n+1}$.

Если подниматься и опускаться под углом 45°, то максимальная высота, как нетрудно проверить, будет $[^n/_2] - 1$. Но такой способ будет наилучшим лишь до $n = 7$ (рис. 3, *а*). На рисунке 3, *б* показан путь для $n = 8$, который поднимается на высоту 4 (а не на $[^8/_2] - 1 = 3$).

Найти оптимальный путь нам еще раз помогут соображения симметрии. Ясно, что поначалу выгодно максимальным образом наращивать скорость подъема: $1 + 2 + 3 + \ldots$; но — чтобы успеть затормозить — так можно поступать лишь до середины участка подъема $[1; m]$ (рис. 4, 5).

Эти соображения можно строго оформить так. Оценим разности одновременно с двух сторон участка:

$$\begin{array}{ll}
y_1 - y_0 = 0, & y_{m+1} - y_m = 0, \\
y_2 - y_1 \leqslant 1, & y_m - y_{m-1} \leqslant 1, \\
y_3 - y_2 \leqslant 2, & y_{m-1} - y_{m-2} \leqslant 2, \\
y_4 - y_3 \leqslant 3, & y_{m-2} - y_{m-3} \leqslant 3, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Теперь, чтобы получить оценку для наибольшей высоты h_n подъема, т. е. величины $y_m - y_0 = y_{m+1} - y_0$, нужно сложить оценки первых разностей. Таким образом,

для $n = 4k - 2$ (например, $n = 18$, рис. 4)

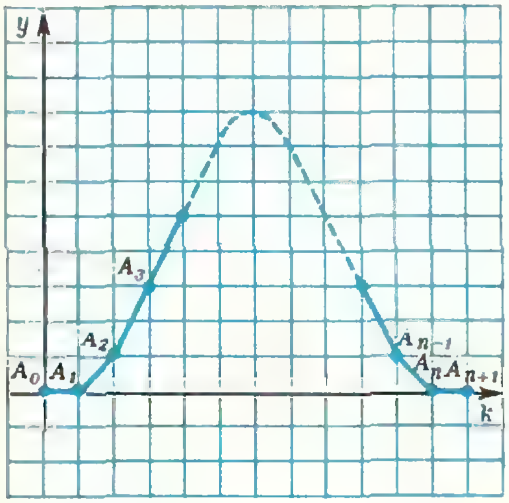


Рис. 2.

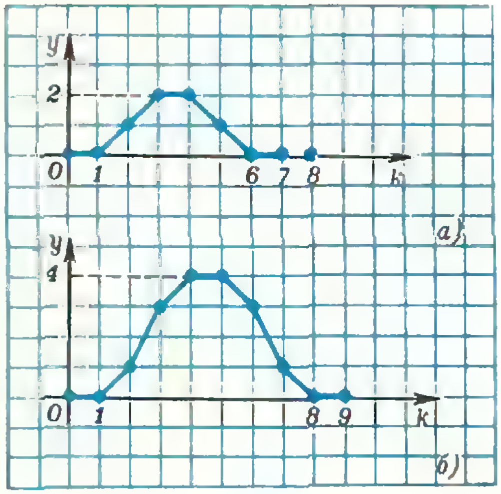


Рис. 3.

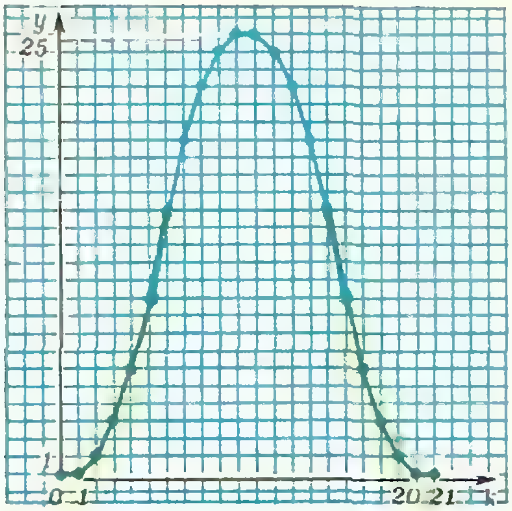


Рис. 4.

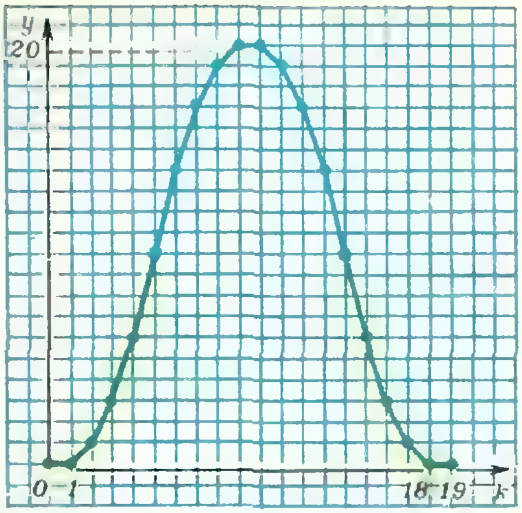


Рис. 5.

$h_n \leqslant 1 + 2 + \ldots + (k-1) + (k-1) + \ldots + 2 + 1 = k(k-1)$; для $n = 4k$ (например, $n = 20$, рис. 5)

$h_n \leqslant 1 + 2 + \ldots + (k-1) + k + (k-1) + \ldots + 2 + 1 = k(k-1) + k = k^2$.

Ясно — из тех же рисунков, — что эти оценки точные, т. е. что такую высоту подъема можно реализовать. В частности, $h_{18} = 20$, $h_{20} = 25$.

Итак, мы нашли наибольшую высоту h_n при любом n. Проверьте, что ответ можно записать в такой компактной форме: $h_n = [n/4] \times [(n+2)/4]$, или, еще короче, $h_n = [[n/2]^2/4]$. (Напомним, что $h_{n+1} = h_n$ при четном n.) Значит, при любом n достаточно точную оценку сверху для h_n дает неравенство $h_n \leqslant n^2/16$.

Заметим еще, что вершины *оптимальной траектории* в каждой ее четвертой части лежат на одной параболе. Это происходит не случайно. Ведь если последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — арифметическая прогрессия (в частности, отрезок натурального ряда), а у последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_m$ вторые разности $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$ равны между собой, то точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_m; y_m)$ лежат на одной параболе*). Именно так обстоит дело в нашем случае (рис. 4, 5): в первой и последней четвертях траектории $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 1$, а в средних четвертях $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = -1$.

Мы увидим, что и в других задачах, где ограничения накладываются на вторые разности, оптимальная траектория также склеена из парабол.

Непрерывный аналог. Скорости и ускорения

Задача 2. *Электровоз, стоявший в точке О, тронулся с места, но, дав «задний ход», через n секунд снова вернулся в точку О и остановился в ней. На какое наибольшее расстояние h он мог удалиться за это время от точки О, если абсолютная величина его ускорения ни в какой момент не превышала a см/сек^2?*

Эта задача — полный аналог задачи 1, с той разницей, что вместо дискретной последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_n$ теперь речь идет о функции $y(t)$ непрерывного аргумента t (здесь t — время; будем считать, что t пробегает отрезок от 0 до n). Аналогом первых разностей является скорость (первая производная $y'(t)$ от координаты $y(t)$), аналогом вторых разностей — ускорение (вторая производная $y''(t) = (y'(t))'$). Мы решим эту задачу, пользуясь физическими терминами; те, кто уже знаком с производной и интегралом, легко переведут условие задачи и ее решение на язык математического анализа.

Докажем, что ответ в этой задаче таков: $an^2/16$ (*см*).

---

*) Ср. «Квант», 1973, № 2, с. 28—29.

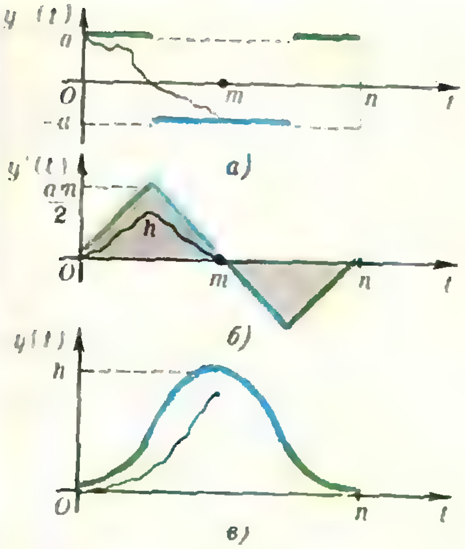


Рис. 6.

Пусть электровоз достиг самого далекого от точки O положения M в некоторый момент времени m, $0 \leqslant m \leqslant n$. Ясно, что скорость его в этот момент равна нулю. Можно считать, что $m \leqslant n/2$ (в случае $m > n/2$ мы будем следить за движением электровоза на отрезке времени от m до n, а не от 0 до m — ведь до и после момента m движение происходит совершенно аналогично).

Оценим скорость электровоза $v(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant m$. Поскольку $v(0) = 0$, то $v(t) \leqslant at$. С другой стороны, поскольку $v(m) = 0$, то $v(t) \leqslant a(m - t)$. Отсюда следует, что перемещение $h = |OM|$ — площадь под графиком скорости $v(t)$ на отрезке времени $[0, m]$ — не превышает площади треугольника с основанием m и высотой $am/2$, т. е. $h \leqslant am^2/4 \leqslant an^2/16$. Ясно, что эта оценка — точная, причем график оптимального перемещения в каждой четверти отрезка $0 \leqslant t \leqslant n$ — парабола (рис. 6, а—в).

Мы видим, что для «непрерывного» варианта (задачи 2) ответ и решение получаются более простыми, чем для «дискретного» (задачи 1).

Большинство реальных задач оптимального управления при их математическом оформлении также допускают и непрерывный, и дискретный варианты. При этом непрерывные модели обычно легче исследовать теоретически, и результаты имеют более красивую форму. Но иногда дискретность задачи диктуется существом дела или упрощает корректную постановку математической задачи; да и для расчетов на цифровых ЭВМ приходится переходить обычно к некоторому дискретному приближению непрерывной задачи.

В следующем пункте мы вновь вернемся к дискретной задаче, но теперь числа последовательности будут расположены на окружности.

Числа на окружности. Формулировка результата

Задача 3. *На окружности расположены n действительных чисел, одно из которых равно 1, а сумма всех равна 0. Доказать, что:*

а) найдутся два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$;

б) найдется число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $16/n^2$.

Далее мы очень кратко изложим решение, позволяющее получить для каждого n точные оценки в утверждениях а) и б). Эти наилучшие возможные оценки таковы:

а) максимальная из разностей между соседними числами не меньше $\frac{4}{n}$, если n четно, и не меньше $\frac{4n}{n^2-1}$, если n нечетно (заметим, что $\frac{4n}{n^2-1} > \frac{4}{n}$);

б) максимальное отклонение числа от среднего арифметического двух его соседей не меньше соответственно $\frac{16}{n^2}$, $\frac{16n}{n^3+n-2}$, $\frac{16}{n^2+4}$ или $\frac{16n}{n^3+n+2}$, если n дает при делении на 4 остаток 0, 1, 2 или 3.

На рисунках 7 и 8 изображены оптимальные последовательности (при $n = 30$):

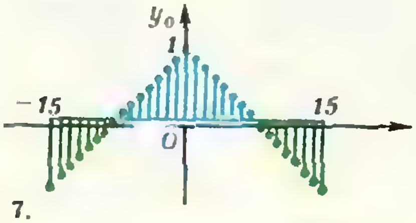


Рис. 7.

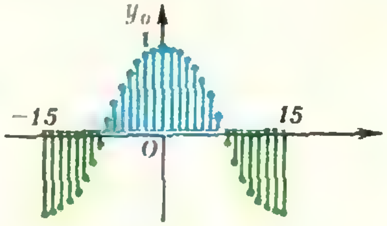


Рис. 8.

для последовательности на рисунке 7 разность между любыми двумя соседними числами не меньше 2/15 (это — $4/n$ при $n=30$); для последовательности на рисунке 8 отклонение каждого числа от среднего арифметического двух соседей не меньше 2/113 и, как и в первой задаче, точки в каждой четверти отрезка лежат на одной параболе. Доказательство результатов а) и б) мы проведем ниже лишь для $n=30$ (для других n оно примерно такое же). Тем самым мы получим решение цикла задач **М388** из «Задачника «Кванта» *).

Обозначим данные числа через $y_{-14}, y_{-13}, \ldots, y_{15}$ так, что $y_0=1$. Для задачи а) получить нужную оценку нетрудно: если $|y_{k+1}-y_k|\leqslant\alpha$ для всех $k=-14, \ldots, 15$, то, суммируя оценки разностей, как и в задаче 1, получим $y_k\geqslant 1-|k|\alpha$. Но сумма Σy_k равна нулю, поэтому

$$0=\Sigma y_k\geqslant 30-2(1+2+\ldots+14)\alpha-15\alpha= \\ =30-15^2\alpha,$$

откуда $\alpha\geqslant 2/15$.

Перейдем к задаче б). Заметим, что величина $\frac{y_{k+1}+y_{k-1}}{2}-y_k$, которую мы должны оценить, — это просто половина «второй разности» $(y_{k+1}-y_k)-(y_k-y_{k-1})$.

Нормировка и повторение. Попробуем действовать с помощью двукратного применения задачи а).

Пусть $y_{k+1}-y_k=y'_k$, $\max\limits_k |y'_k|=\alpha$ **).

Согласно а), $\alpha\geqslant 2/15$. К последовательности $z_k=y'_k/\alpha$ мы можем вновь применить а) (нетрудно убедиться, что сумма всех 30 чисел z_k равна нулю и что максимальное из z_k равно единице); поэтому $\max\limits_k |z_{k+1}-z_k|\geqslant$ $\geqslant 2/15$, а следовательно,

$$\max_k \frac{|y_{k+1}-2y_k-y_{k-1}|}{2}=$$

$$=(\alpha/2)\max_k |z_k-z_{k-1}|\geqslant(1/15)\alpha\geqslant 2/225.$$

Эта оценка примерно вдвое хуже требуемой (в общем случае так же получится оценка $8/n^2$ вместо $16/n^2$).

Идея более тонкой оценки проста: нужно, исходя из оценки $|y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}|\leqslant 2\beta$ для вторых разностей, точнее оценить первые разности, затем оценить сами числа y_k (пользуясь тем, что $y_0=1$) и, наконец, из равенства $\Sigma y_k=0$ получить оценку снизу для β.

Симметризация и комбинированная оценка. Прежде чем перейти к осуществлению нашего плана, заметим, что можно ограничиться рассмотрением лишь симметричных последовательностей: таких, для которых $y_k=y_{-k}$. В самом деле, из любой последовательности y_k, удовлетворяющей условиям $y_0=1$, $\Sigma y_k=0$, $|y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}|\leqslant 2\beta$, мы можем получить симметричную последовательность $z_k=\frac{y_k+y_{-k}}{2}$, удовлетворяющую, как нетрудно проверить, всем этим условиям. (В наших обозначениях $y_0=y_{-0}=y_{15}=y_{-15}=1$.)

Теперь имеем:

$$\begin{array}{ll} y_0-y_1=(2y_0-y_1-y_{-1})/2\leqslant\beta, & y_{14}-y_{15}\leqslant\beta, \\ y_1-y_2\leqslant 3\beta, & y_{13}-y_{14}\leqslant 3\beta, \\ y_2-y_3\leqslant 5\beta, & y_{12}-y_{13}\leqslant 5\beta, \end{array}$$

. . . .

$$y_6-y_7\leqslant 13\beta, \quad y_7-y_8\leqslant 15\beta, \quad y_8-y_9\leqslant 13\beta.$$

Из первых семи неравенств находим

$$y_k\geqslant 1-k^2\beta \text{ при } 0\leqslant k\leqslant 7;$$

из остальных

$$y_k\geqslant 1-(7^2+8^2)\beta+(15-k)^2\beta \text{ при } 7\leqslant k\leqslant 15.$$

Суммируя все y_k (напомним, что $y_k=y_{-k}$), найдем $0\geqslant 30-15(7^2+8^2)\beta$, откуда $\beta\geqslant 2/113$.

В заключение — несколько задач, в том или ином отношении связанных с рассмотренными выше.

1. В последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ числа a_0 и a_n равны нулю, а модуль разности между каждым числом и средним арифметическим двух его соседей не превосходит единицы. Докажите, что $a_k\leqslant k(n-k)$.

2. Известно, что $a_0, a_1, \ldots$ — натуральные числа, $a_1>a_0$, и $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}$ при всех $k>1$. Докажите, что $a_{100}>2^{99}$.

3. Даны числа $a_1, \ldots, a_7$. Известно, что их сумма равна нулю и что наибольшее из них по абсолютной величине $a_1=2$. Оцените максимум абсолютной величины вторых разностей.

4. Дан некоторый набор чисел $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что

$$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 2a_1,$$
$$0\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant 2a_2,$$

и т. д. Докажите, что в сумме $S=\pm a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n$ можно выбрать знаки так, чтобы выполнялось неравенство: $0\leqslant S\leqslant a_1$.

5. а) Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — две последовательности такие, что их «вторые разности» постоянны: $x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}=a$, $y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}=b$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$. Докажите, что точки $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$ …, $(x_n;y_n)$ лежат на одной прямой или на одной параболе в плоскости Oxy.

б) Докажите, что точки $(x;y)$, где $x=a_1t^2+b_1t+c_1$, $y=a_2t^2+b_2t+c$, лежат на одной прямой или на одной параболе.

6. Пусть f определена на отрезке $[0, n]$, $f(0)=f(n)=0$. Какого наибольшего значения может достигать f, если а) $|f'(x)|\leqslant M_1$, б) $|f''(x)|\leqslant M_2$? (Производные непрерывны всюду, кроме конечного числа точек; f непрерывна на $[0, n]$.)

7. Пусть функция f периодична с периодом T, имеет первую (а в задаче б) — и вторую) производную, непрерывную при всех x. Пусть $\int\limits_0^T f(x)\,dx=0$, $\max\limits_x |f(x)|=M_0$.

а) Докажите, что если $\max\limits_x |f'(x)|=M_1$, то $M_0\leqslant(M_1T)/4$.

б) Докажите, что если $\max\limits_x |f''(x)|=M_2$, то $M_0\leqslant(M_2T^2)/16$.

---

*) См. «Квант», 1976, № 8.

**) Здесь и ниже k пробегает значения $-14\leqslant k\leqslant 15$. Для $k=15$ мы полагаем $y_{k+1}=y_{-14}$, — ведь соседнее с y_{15} число на окружности — это y_{-14}.

А. Бондарь

Грампластинка и дифракция света

Явление дифракции света изучается в 10 классе, поэтому понять до конца все теоретические рассуждения, проведенные в этой статье, смогут, наверное, лишь десятиклассники. А проделать опыт, очень простой и красивый, мы советуем всем желающим.

Как известно, один из самых точных методов определения спектрального состава исследуемого излучения основан на явлении дифракции. Хорошим спектральным аппаратом является дифракционная решетка. Оказывается, обычную грампластинку тоже можно использовать для наблюдения дифракции и, в частности, для измерения длины волны видимого света.

Во время звукозаписи на поверхность пластинки на равных расстояниях друг от друга наносятся бороздки. Эти бороздки рассеивают свет, а промежутки между ними отражают его. Таким образом, грампластинка подобна отражательной дифракционной решетке. Если ширина отражающих полос равна a, а ширина рассеивающих бороздок — b, то величина $d = a + b$ является периодом решетки.

Пусть на отражательную решетку с периодом d падает плоская монохроматическая волна длины λ под углом θ к решетке (рис. 1). (Случай нормального падения лучей подробно рассмотрен в учебном пособии для 10 класса (см. § 110).) Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, каждая точка отражающей поверхности решетки становится самостоятельным точечным источником, посылающим свет по всевозможным направлениям. Рассмотрим волны, распространяющиеся под углом φ к решетке (см. рис. 1). С помощью собирающей линзы (например, хрусталика глаза) эти волны можно собрать в одну точку. Найдем условие, когда при сложении волны будут усиливать друг друга.

Разность хода лучей *1* и *2*, идущих от соответствующих точек A и B двух соседних отражающих участков решетки (рис. 2), равна

$$|AK| - |NB| = d \sin\varphi - d \sin\theta = d(\sin\varphi - \sin\theta)$$

(KB — фронт отраженной волны в направлении под углом φ, AN — фронт падающей волны). Если раз-

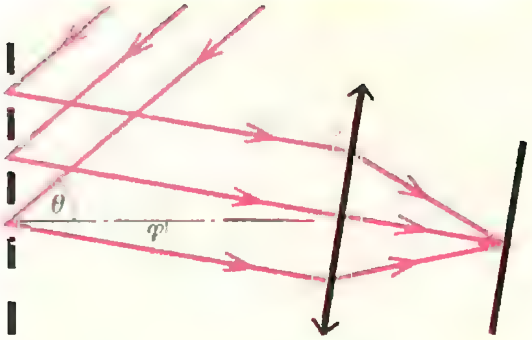


Рис. 1.

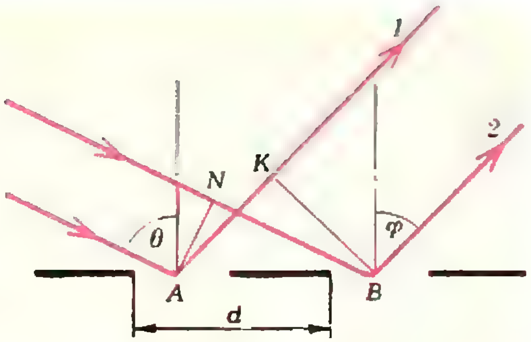


Рис. 2.

ность хода кратна длине волны, фазы колебаний, пришедших из точек *A* и *B*, будут одинаковыми, и поэтому колебания будут усиливать друг друга. Аналогично ведут себя и все остальные отражающие участки решетки. Следовательно, условие образования главных максимумов можно записать так:

$$d\,|\sin\varphi - \sin\theta| = k\lambda, \qquad (\bullet)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда можно определить длину волны λ. Для этого надо знать период решетки d, угол θ падения волны на решетку и направление на соответствующий максимум — угол φ. Обычно период решетки много больше длины волны ($d \gg \lambda$), поэтому углы φ малы. Это означает, что главные максимумы располагаются очень близко друг к другу, и дифракционная картина получается очень нечеткой. Однако чем больше угол падения лучей на решетку (угол θ), тем больше углы φ и, следовательно, тем удобнее производить необходимые измерения. Вот почему лучше использовать не нормальное, а наклонное падение лучей на решетку.

До сих пор мы говорили о монохроматическом свете. А если на решетку падает белый свет, сложный по своему спектральному составу? Из уравнения (•) непосредственно следует, что положение каждого главного максимума зависит от длины волны. Чем меньше длина волны, тем меньшему значению угла φ соответствует максимум. Таким образом, все максимумы (кроме нулевого) растягиваются в спектр, фиолетовый конец которого обращен к центру дифракционной картины, а красный — наружу. По обе стороны от центрального (нулевого) максимума расположены два спектра первого порядка,

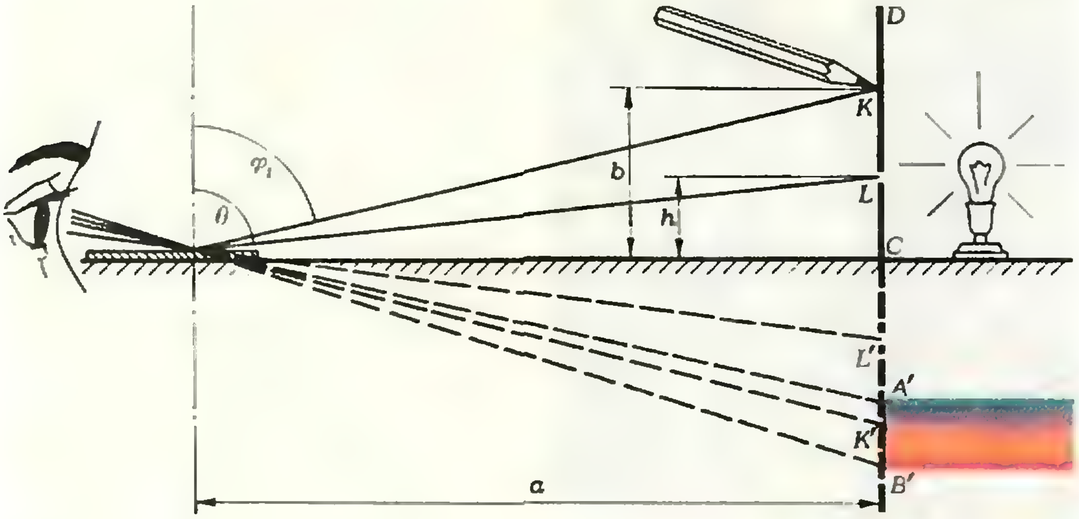


Рис. 3.

затем два спектра второго порядка и т. д. По мере увеличения порядка спектра расстояние между соответствующими линиями спектров увеличивается, так что спектры могут накладываться друг на друга. Например, для солнечного света спектры второго и третьего порядков уже частично перекрываются.

Теперь перейдем непосредственно к опыту. Чтобы измерить длину волны, соответствующую определенному цвету, надо определить период решетки (d), синус угла падения света на решетку ($\sin\theta$) и синус угла, определяющего направление на какой-нибудь максимум, например, на максимум первого порядка ($\sin\varphi_1$). Период решетки легко найти, проигрывая пластинку:

$$d=\frac{\Delta R}{n\Delta t}.$$

Здесь ΔR — абсолютная величина перемещения иглы вдоль радиуса пластинки за время Δt, n — число оборотов в единицу времени. Обычно $d\approx 0{,}01$ *см*.

В качестве источника света можно использовать обычную настольную лампу. Чтобы свет от нее не мешал наблюдению дифракционной картины, сделайте из картона экран со щелью и прикройте им лампу. При этом нить накала лампы должна быть видна через щель. Установите лампу около одной стены комнаты, пластинку положите горизонтально около противоположной стены и найдите изображение щели (рис. 3). Одновременно вы увидите размытые цветные полосы. Это и есть спектр первого порядка ($k=1$). Легко проверить, что действительно, чем больше угол θ, тем шире получается цветное изображение щели и тем точнее можно измерить угол, под которым дифрагирует свет интересующей нас длины волны.

Для определения $\sin\varphi_1$ надо попросить товарища подержать карандаш (или какой-нибудь другой предмет) над щелью так, чтобы его изображение в отраженном от решетки (как от плоского зеркала) свете совпало с выбранным участком спектра (см. рис. 3). Измерив линейкой a, b и h, найдем $\sin\varphi_1$ и $\sin\theta$:

$$\sin\varphi_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Эти выражения можно несколько упростить. Поскольку $b\ll a$ и $h\ll a$,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+b^2/a^2}}\approx 1-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}$$

и

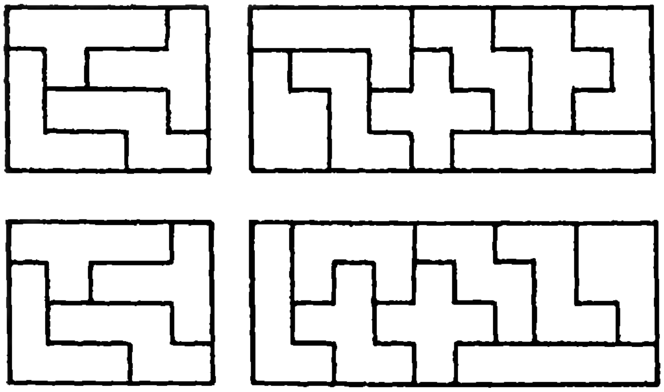
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+h^2/a^2}}\approx 1-\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}.$$

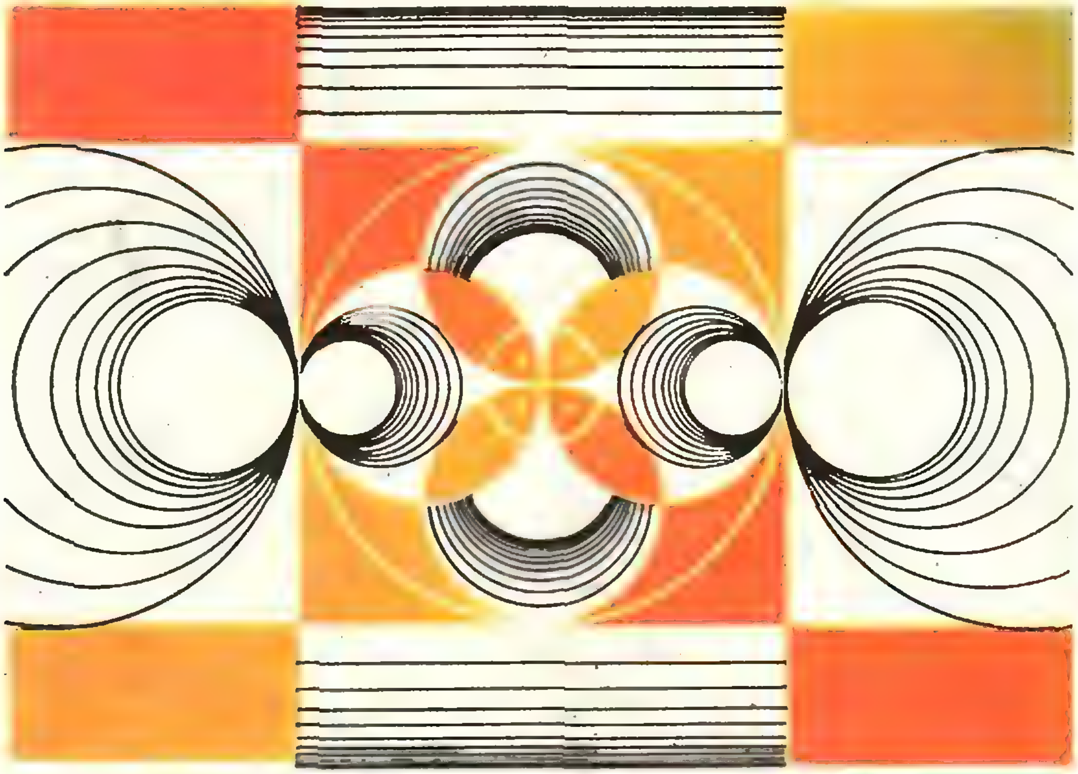
Тогда окончательно

$$\lambda=d\,|\sin\varphi_1-\sin\theta|\approx d\,\frac{|h^2-b^2|}{2a^2}.$$

Измерив длины волн света различных цветов, интересно сравнить их с табличными значениями. В наших опытах при тщательных измерениях ошибка была порядка 10^{-8} *м*. Для длин волн видимого света ($\lambda\sim 10^{-7}$ *м*) такая точность вполне допустима.

Во втором номере журнала за этот год мы предложили нашим читателям несколько задач, связанных с пентамино. Двум читателям (Л. Муталупу из Андижанской области и Ю. Стасевичу из Ворошиловградской области) удалось решить одну из них — сложить из полного набора пентамино одновременно два прямоугольника 4×5 и 4×10. Их решения совпадают для маленького прямоугольника и различны для большого. Вот они:





Геометрия круга

В. Вавилов

> *«Все мои произведения — это игры. Серьезные игры».*
>
> Мориц Эшер

На этом занятии мы расскажем об одном преобразовании плоскости — инверсии, а затем, как обычно, сформулируем задание и приложим образец для его выполнения.

1.

Определение. *Инверсией I относительно окружности γ называется преобразование плоскости, которое каждой точке M плоскости, отличной от центра O окружности, ставит в соответствие точку M' на луче OM такую, что*

$$|OM'|\cdot|OM| = r^2;$$

здесь r — радиус окружности γ.

Окружность γ называется *окружностью инверсии*, а точка O — *центром инверсии*.

Если M лежит на окружности инверсии ($M \in \gamma$), то есть, если $|OM| = r$, то тогда $|OM'| = r^2/|OM| = r$ и $M' \in \gamma$. Но точки M и M' лежат на одном луче; следовательно, они совпадают. Значит, все точки окружности γ являются неподвижными точками преобразования I: $I(M) = M$, $M \in \gamma$.

Заметим, что для центра O нет соответствующей точки. Дело в том, что величина $|OM'| = r^2/|OM|$ стремится к бесконечности, когда $|OM|$ стремится к нулю, то есть когда $M \to O$. Для того, чтобы иметь взаимно однозначное соответствие для всех без исключения точек плоскости, мы дополним плоскость *одной новой точкой* O_∞ (*«бесконечно удаленной»*) и будем считать, что точке O при инверсии I соответствует точка O_∞, а точке O_∞ — точка O.

Кроме того, будем считать, что все прямые содержат O_∞.

Пусть $M_1 = I(M)$, $M_2 = I(M_1)$. Все три точки M, M_1 и M_2 лежат на одном луче и

$$|OM_1|\cdot|OM|=r^2,$$

$$|OM_1|\cdot|OM_2|=r^2.$$

Отсюда получаем, что

$$|OM_2|=|OM|.$$

Таким образом, если M — произвольная точка плоскости, то дважды выполненная инверсия I переводит точку M снова в эту же точку. Следовательно, «квадрат» инверсии является тождественным преобразованием плоскости.

Подобным же свойством обладает симметрия относительно прямой; поэтому иногда инверсию называют *«симметрией относительно окружности»*.

Возьмем точку M, лежащую внутри круга с границей γ и отличную от O, и построим точку $I(M)=M'$. Пусть N — один из концов хорды окружности инверсии γ, проходящей через точку M перпендикулярно $[OM)$ (см. рис. 1). Тогда искомая точка M' — это точка пересечения луча OM и касательной к окружности γ в точке N. В самом деле, так как прямоугольные треугольники ONM и ONM' подобны и $|ON|=r$, то $|OM|/r=r/|OM'|$, то есть $|OM'|\cdot|OM|=r^2$. Когда же нужно построить точку $I(M)$ для точки M, лежащей вне круга с границей γ, то из этого же рисунка видно, что если N — одна из точек пересечения окружности γ с окружностью, построенной на $[OM]$ как на диаметре, то искомая точка M' — основание перпендикуляра, опущенного из точки N на $[OM]$.

Вот еще один прием геометрического построения точки $I(M)$ — при помощи одного только циркуля. Рассмотрим случай, когда точка M лежит вне круга с границей γ. Радиусом $|OM|$ опишем дугу с центром M, пересекающую γ в точках L и N (рис. 2). Затем из этих точек как из центров опишем дуги радиусом r (равным радиусу окружности γ); эти дуги пересекаются с прямой OM в двух точках — точке O и в некоторой точке M'. В равнобедренных треугольниках OLM' и OLM углы при основаниях конгруэнтны:

$$O\widehat{L}M=M\widehat{O}L=O\widehat{M'}L,$$

так что эти треугольники подобны. Поэтому

$$|OM|/|OL|=|OL|/|OM'|, \text{ то есть}$$

$$|OM|\cdot|OM'|=r^2,$$

и мы получаем, что M' — искомая точка.

Для точки M, лежащей внутри круга с границей γ, построение точки $I(M)$ остается прежним, если окружность радиуса $|OM|$ с центром M пересекается с окружностью γ в двух точках. Если же пересечений нет, то необходимы дополнительные построения. Сделайте эти построения.

Преобразование симметрии относительно прямой переводит прямые в прямые и углы в конгруэнтные им углы. Преобразование инверсии переводит углы также в конгруэнтные углы, но некоторые прямые преобразует в окружности. Более точно, *инверсия I с центром O переводит:*

1°. *Прямую, проходящую через точку O, саму в себя.*

2°. *Прямую, не проходящую через точку O, в окружность, проходящую через точку O* (рис. 3).

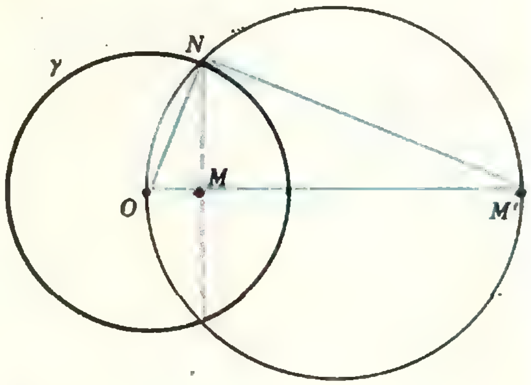


Рис. 1.

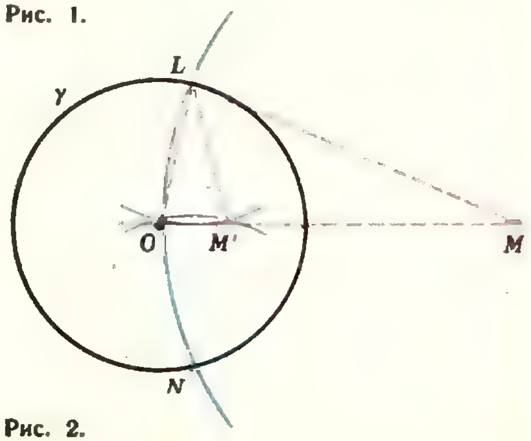


Рис. 2.

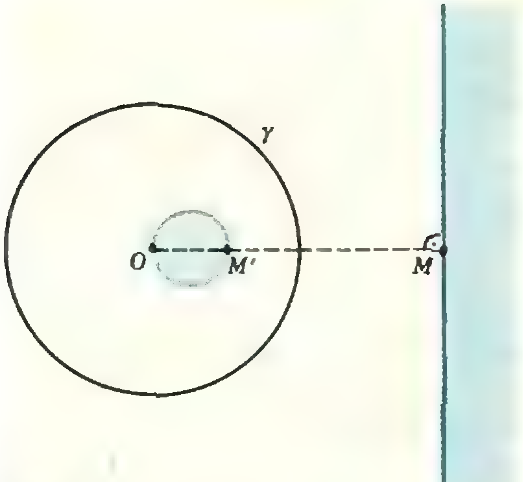


Рис. 3.

3°. *Окружность, проходящую через точку O, в прямую, не проходящую через точку O* (рис. 3).

4°. *Окружность, не проходящую через точку O, в окружность, также не проходящую через точку O* (рис. 4).

Доказательство этих свойств мы не приводим. Докажите их самостоятельно или прочитайте в статье А. П. Савина «Инверсия и окружность Аполлония» («Квант», 1971, № 8).

Из свойств 1°—4° видно, что окружности и прямые равноправны. Если условиться считать прямую линию окружностью «бесконечно большого радиуса», то перечисленные свойства означают, что *при инверсии окружность всегда переходит в окружность*. Инверсия же относительно окружности «бесконечно большого радиуса» (то есть относительно прямой линии) совпадает с обычной симметрией относительно прямой (почему?).

Определение. *Величиной угла между двумя пересекающимися окружностями (в том числе и прямыми линиями) называется величина наименьшего угла, который образуют касательные в точке их пересечения.*

Две окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом.

Отметим еще два свойства инверсии:

5°. *Инверсия переводит окружность, ортогональную к окружности инверсии γ, саму в себя.*

6°. *Инверсия не изменяет величины углов между пересекающимися окружностями.*

Свойство 5° означает, что окружность, ортогональная к окружности инверсии γ, неподвижна (но не точечно неподвижна: γ делит эту окружность на две части, которые при инверсии переходят одна в другую — см. рисунок 5).

Задача 1. Постройте образ изображенного на рисунке 6 слова при инверсии относительно окружности γ. Результат сравните с рисунком на с. 66.

Задача 2. Докажите, что точка $M=(x; y)$ при инверсии относительно окружности с центром в начале кооординат и радиусом r переходит в точку $M'=(x'; y')$, координаты которой определяются по формулам

$$x' = \frac{xr}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{yr}{x^2+y^2}.$$

Решите эти уравнения относительно x и y.

Задача 3. Основываясь на задаче 2, докажите свойства 1°—4° аналитически.

Задача 4. Во что перейдут два семейства прямых $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$, параллельных координатным осям, при инверсии относительно единичной окружности с центром в начале? Дайте ответ сначала без формул задачи 2, а затем — с помощью этих формул.

2.

Многие из вас слышали (или читали) о *геометрии Лобачевского*, отличающейся от обычной (*евклидовой*) геометрии на плоскости тем, что в ней не выполняется аксиома о парал-

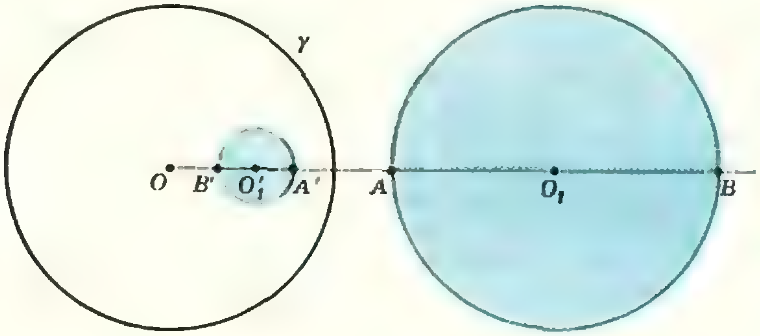


Рис. 4.

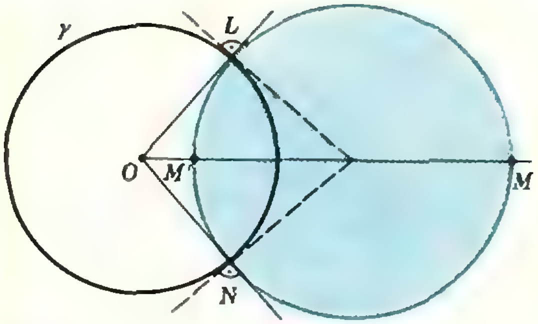


Рис. 5.

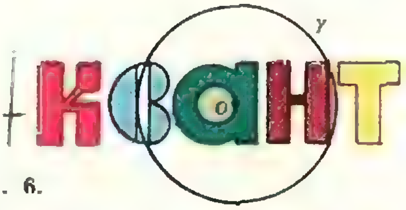


Рис. 6.

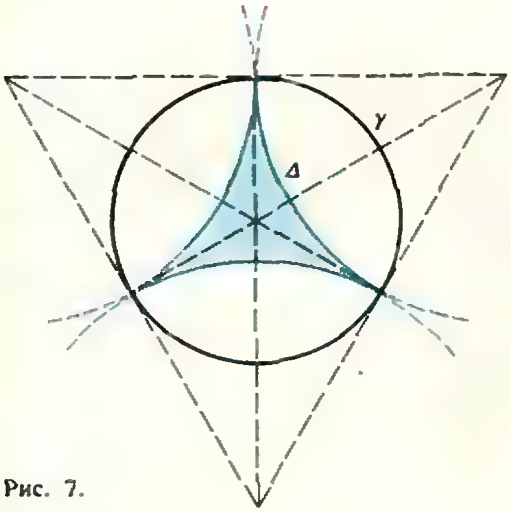


Рис. 7.

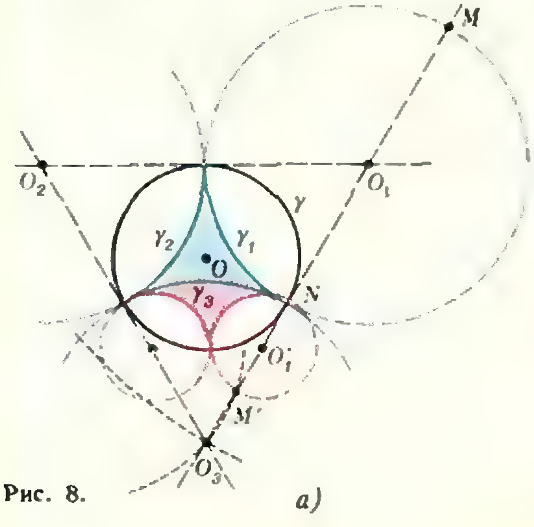


Рис. 8. а)

лельных линиях. Прекрасную модель для геометрии Лобачевского предложил французский математик Анри Пуанкаре. В этой модели «точками» являются только точки, лежащие внутри некоторого круга с границей γ (точки окружности γ не рассматриваются), а «прямые» определяются как ортогональные к γ дуги окружностей (или части прямых), также расположенные внутри рассматриваемого круга *).

Задача 5. Нарисуйте несколько «прямых» в модели Пуанкаре и проверьте аксиому о параллельных.

В геометрии Лобачевского, в отличие от евклидовой геометрии, существует «бесконечный» треугольник с нулевыми углами — он изображен на рисунке 7. Обозначим этот треугольник через Δ.

Теперь почти все готово для того, чтобы сформулировать задание нашего практикума.

Построим три новых треугольника, получающихся из треугольника Δ при симметрии относительно его сторон γ_1, γ_2, γ_3 (они являются образами треугольника Δ после трех соответствующих преобразований инверсии). Треугольник, симметричный с треугольником Δ относительно любой его стороны, будет по-прежнему иметь нулевые углы, и его вершины будут лежать на окружности γ (рис. 8). Действительно, преобразование инверсии величин углов не изменяет; а окружность γ при данных инверсиях перейдет в себя, поскольку она ортогональна сторонам γ_1, γ_2, γ_3 треугольника Δ. На рисунке 8 показан способ построения: при помощи циркуля находим точку M', симметричную точке M относительно стороны γ_3 (точка M принадлежит окружности с центром O_1, дуга γ_1 которой является стороной треугольника Δ). Тогда центр (точка O_1') искомой окружности является серединой отрезка $M'N$ (N — неподвижная точка пересечения окружности γ со стороной γ_1).

---

*) Подробно о геометрии Лобачевского и ее моделях можно прочитать в «Кванте», № 2 и № 3 за 1976 год.

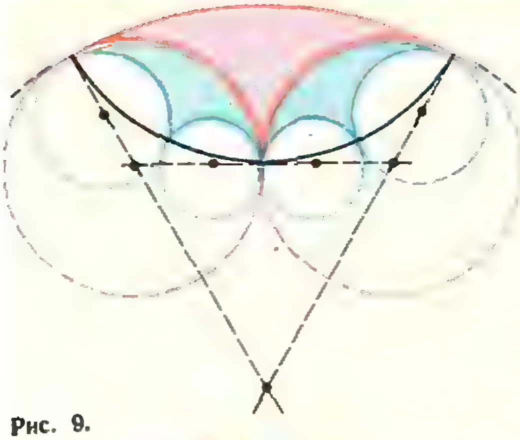


Рис. 9.

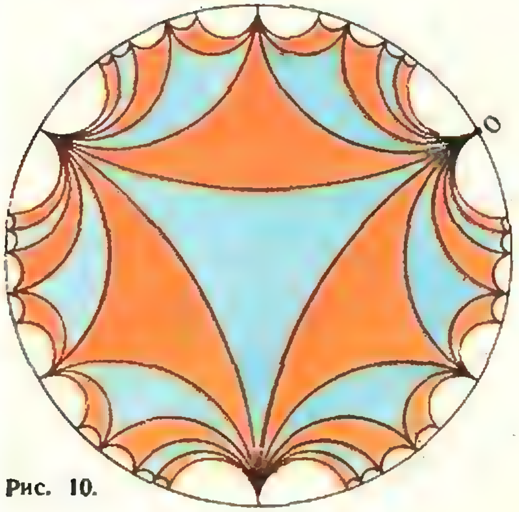


Рис. 10.

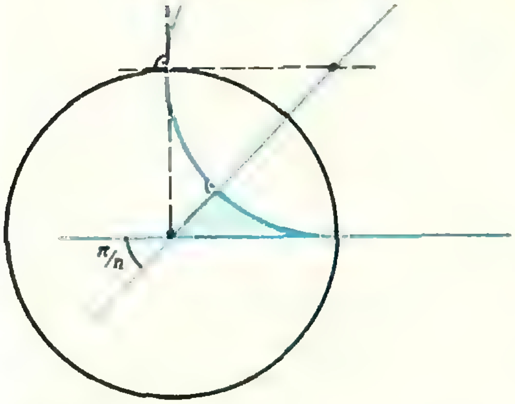


Рис. 11.

Затем каждый из трех вновь полученных треугольников симметрично отобразим относительно тех двух его сторон, которые не являются сторонами треугольника Δ (рис. 9); получим шесть треугольников «второго поколения».

Сделав четыре шага аналогичных построений, мы получим часть *модулярной фигуры*, показанную на рисунке 10.

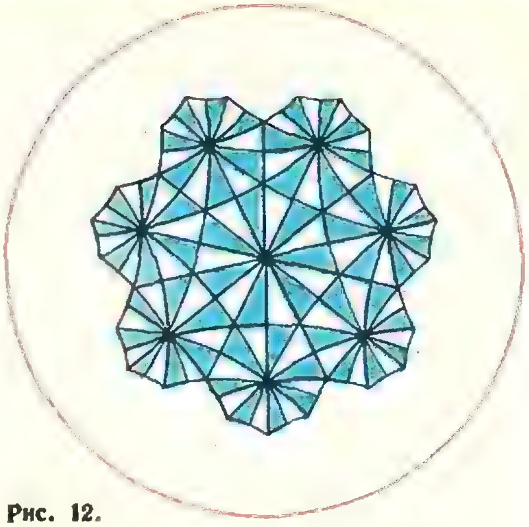


Рис. 12.

Задание

Постройте часть модулярной фигуры, порождаемую прямоугольным круговым треугольником с вершиной в начале координат и углом $\frac{\pi}{n}$ *при этой вершине; $n \geqslant 3$ — целое число* (рис. 11).

За образец для выполнения работы можно принять рисунки 10 и 12; фигура на рисунке 12 соответствует случаю $n = 7$.

Задача 6. Произведите инверсию фигуры, изображенной на рисунке 10, приняв за центр инверсии отмеченную на рисунке точку *O* (радиус окружности инверсии несущественен — почему?). Сравните результат с обложкой 3-го номера журнала «Квант» за прошлый год.

В заключение мы предлагаем вам несколько задач исследовательского характера.

Задача 7. При каких величинах углов исходного треугольника (уже не обязательно прямоугольного) можно симметриями относительно его сторон «замостить» без наложений весь исходный круг с границей γ?

Задача 8. Какие круговые многоугольные области годятся для того, чтобы получилось указанное в задаче 7 замощение?

Об инверсии и ее применениях можно прочитать в следующих книгах:

1. Д. Гильберт и Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, М.—Л., Гостехиздат, 1976.

2. Г. С. М. Коксетер, *Введение в геометрию*, М., «Наука», 1966.

3. М. Гарднер, *Математические новеллы*, М., «Мир», 1974.

Овалы Декарта

Термин «овал» происходит от латинского «ovum» (яйцо). Овалами (в широком смысле слова) называют плоские кривые яйцеобразной формы.

Овалы Декарта — это множества точек на плоскости, расстояния r_1, r_2 каждой из которых от двух фиксированных точек F_1, F_2 той же плоскости удовлетворяют одному из уравнений

$$mr_1+nr_2=a, \qquad (1)$$
$$mr_1-nr_2=a \qquad (2)$$

(m, n, a — фиксированные положительные константы). Обычно пару овалов Декарта, удовлетворяющих уравнениям (1), (2) (разумеется, при одних и тех же параметрах m, n, a), рассматривают совместно (на рисунке 1 M_1 — точка графика уравнения (1), M_2 — графика уравнения (2)). При $n=0$ уравнения (1), (2) задают окружность. Эта окружность изображена штриховой линией на второй странице обложки.

Точки F_1, F_2 называют *фокусами*. Как показал Шаль (1793—1880), помимо фокусов F_1, F_2 овалы Декарта имеют еще и третий фокус F_3, равноправный относительно основного свойства овалов с каждым из фокусов F_1, F_2, т. е. для некоторых констант m', n', a' и m'', n'', a графиком уравнений

$$m\,|MF_1|\pm n\,|MF_2|=a,$$
$$m'\,|MF_1|\pm n'\,|MF_3|=a',$$
$$m''\,|MF_2|\pm n''\,|MF_3|=a''$$

является одно и то же множество точек. Фокус F_3 помещается в пересечении прямой F_1F_2 с окружностью, проходящей через точки F_2, M_1 и M_2 (рис. 2). Доказательство и исследование этого интересного факта предоставляется читателю (в этом вам может помочь подобие треугольников).

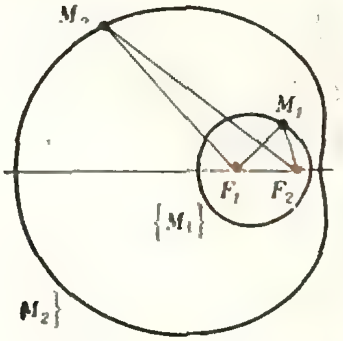


Рис. 1.

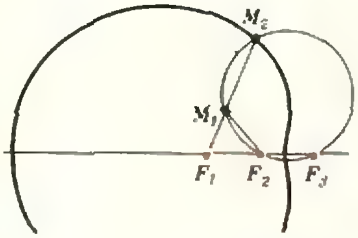


Рис. 2.

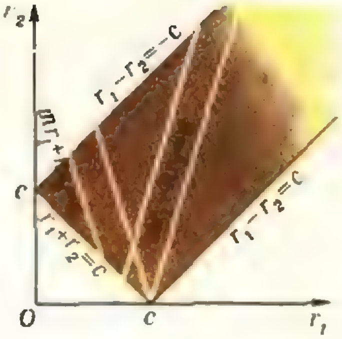


Рис. 3.

Вот еще одна задача, полегче. И. Ньютон показал, что множество точек, отношение расстояний каждой из которых от двух заданных окружностей есть величина постоянная, является одной из кривых, составляющих пару овалов Декарта. Какой именно?

Овалы Декарта представляют из себя две замкнутые линии, одна из которых объемлет другую (вторая страница обложки).

Какие значения могут принимать r_1, r_2 для точек овалов Декарта? Из $\triangle F_1MF_2$ (с учетом того, что точка M может лежать на прямой F_1F_2) $r_1+r_2\geqslant c$ и $|r_1-r_2|\leqslant c$. Решением системы этих неравенств является полуполоса, изображенная на рисунке 3. Для овалов Декарта, заданных уравнениями (1), (2) при фиксированных m, n и a, допустимые пары $\langle r_1, r_2\rangle$ получаются на рисунке 3 при пересечении построенной полуполосы с прямыми $mr_1+nr_2=a$ и $mr_1-nr_2=a$. Из рисунка видно, что овалы Декарта пересекаются только в том случае, когда точка $\langle \frac{a}{m}, 0\rangle$ пересечения этих прямых совпадает с точкой $\langle c, 0\rangle$, т. е. при $c=\frac{a}{m}$. Этому соотношению параметров соответствует *улитка Паскаля.*

Рассмотрим снова точки M_1 и M_2, лежащие на одной прямой с F_1 (рис. 2). При помощи теоремы косинусов и уравнений (1), (2) легко получить квадратное уравнение вида

$$r_1^2+pr_1+\frac{a^2-n^2c^2}{m^2-n^2}=0,$$

корнями которого являются $|M_1F_1|$ и $|M_2F_1|$. Следовательно, произведение этих расстояний постоянно для данного овала. Поэтому кривые $\{M_1\}$ и $\{M_2\}$ получаются друг из друга инверсией относительно некоторой окружности с центром в F_1.

Декарт построил свои овалы в связи с исследованиями по оптике. При усовершенствовании оптических инструментов, употребляемых в навигации, возникла задача об определении такой кривой, которая преломляла бы лучи, выходящие из заданной точки F_1, так, чтобы преломленные лучи проходили через другую заданную точку F_2. Овалы Декарта как раз и обладают нужным свойством.

В. Березин

задачник кванта

Задачи

М446 — М450; Ф458 — Ф462

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 15 сентября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М446, М447» или «...Ф458». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М446. Окружность радиуса 1 катится снаружи по окружности радиуса $\sqrt{2}$. В начальный момент времени точка касания окружностей отмечена липкой красной краской. При качении покрашенные точки той и другой окружности вновь красят точки, с которыми они соприкасаются (рис. 1). Сколько различных точек неподвижной окружности будет запачкано к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?

Д. Бернштейн

М447*. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO (где O — центр описанной окружности) продолжены до пересечения в точках D и E со сторонами AC и BC треугольника. Оказалось, что $\widehat{BDE}=50^\circ$, а $\widehat{CED}=30^\circ$. Найдите величины углов треугольника ABC и докажите равенства $|AE|=|ED|$, $|CE|=|CB|$, $|CD|=|CO|$.

Я. Суконник

М448*. Докажите, что центры всех эллипсов, вписанных в данный четырехугольник, лежат на прямой, проходящей через середины диагоналей этого четырехугольника.

Исаак Ньютон

М449. а) По одной прямой двигаются n одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений между ними может произойти?

б)* Тот же вопрос для трех шариков масс m_1, m_2 и m_3.

в) * Попробуйте доказать, что если по одной прямой двигаются n различных шариков, то общее число столкновений между ними конечно.

(В этих задачах шарики рассматриваются как материальные точки, сталкивающиеся друг с другом абсолютно упруго, т. е. с сохранением суммарных импульса и энергии, причем предполагается, что все происходящие столкновения — только парные: по три и более шариков в одной точке одновременно не оказываются.)

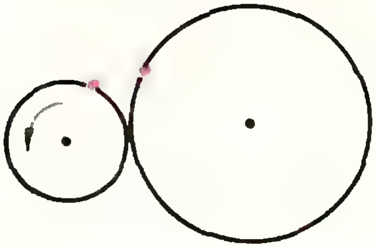


Рис. 1.

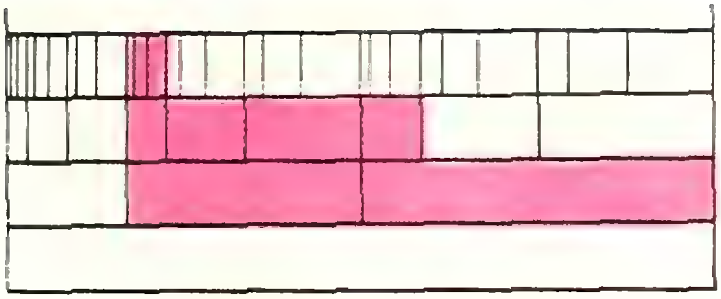


Рис. 2.

Задача M449 — ее можно было бы отнести также и к физическим задачам — потребует, возможно, длительных размышлений, и срок присылки ее решений — 15 ноября.

А. Земляков, Я. Синай

M450. Система прямоугольников из n этажей (рис. 2) построена следующим образом. Начиная с нижнего прямоугольника, образующего первый этаж, верхняя сторона каждого прямоугольника делится в отношении 1 : 2 : 3; на трех полученных отрезках как на основаниях строятся прямоугольники той же высоты, что и первоначальный, и так — до самого верхнего этажа. Из полученного множества прямоугольников выбрано некоторое подмножество, состоящее из попарно неконгруэнтных прямоугольников (одно такое подмножество на рисунке — красное). Докажите, что найдется вертикальная прямая, пересекающая не более двух из выбранных прямоугольников.

А. Клепцын

Ф458. Мальчик плывет со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. В каком направлении он должен плыть к другому берегу, чтобы его снесло течением как можно меньше?

О. Савченко

Ф459. Электроплитка содержит три спирали с сопротивлением $R=120$ *ом* каждая, соединенные параллельно друг с другом. Плитка включается в сеть последовательно с резистором $r=50$ *ом*. Как изменится время, необходимое для нагревания на этой плитке чайника с водой до кипения, при перегорании одной из спиралей?

Н. Слободецкий

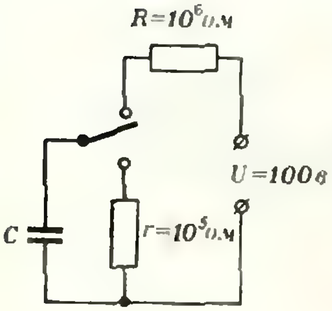


Рис. 3.

Ф460. В схеме, изображенной на рисунке 3, переключатель все время переключается из верхнего положения в нижнее и обратно. В верхнем положении он задерживается на время $\tau_1=2\cdot10^{-3}$ *сек*, в нижнем — на время $\tau_2=10^{-3}$ *сек*. Найти мощность, потребляемую от источника через очень большой промежуток времени после начала работы переключателя.

Емкость конденсатора такова, что за время τ_2 он не успевает разрядиться сколь-нибудь существенно.

А. Зильберман

Ф461. Каждый квадратный метр поверхности тела, нагретого до температуры T, излучает за единицу времени энергию $E=5{,}67\cdot10^{-8}\cdot T^4$ *вт*. На каком расстоянии от Солнца железные пылинки превратятся в капли, если плотность потока солнечного излучения (энергия, проходящая за единицу времени через единицу площади) на орбите Земли $W=1400$ *вт/м*^{2}? Температуру плавления железа принять равной 1535 °К, расстояние от Земли до Солнца $150\cdot10^9$ *м*.

А. Стасенко

Ф462. Если терморегулятор электрического утюга поставлен в положение «капрон», то утюг периодически включается на 10 *сек* и выключается на 40 *сек*. Поверхность утюга при этом нагревается до температуры 100°С. Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то утюг периодически включается на 20 *сек* и выключается на 30 *сек*. Определить установившуюся температуру поверхности утюга в этом положении терморегулятора. Найти, до какой температуры нагреется включенный утюг, если терморегулятор выйдет из строя.

Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате 20 °С.

В. Скороваров

Решения задач

М403, М405 — М409; Ф413 — Ф415, Ф417 — Ф422

М403. *Докажите, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с четным числом сторон.*

Нетрудно убедиться, что наш многогранник можно раскрасить в два цвета — скажем белый и красный — так, чтобы любые две соседние (граничащие по ребру) грани имели разные цвета. В самом деле, расположим многогранник так, чтобы все его вершины находились на разной высоте (т. е. чтобы никакое ребро и никакая диагональ не были параллельны горизонтали — см. рис. 1. Проведем через самую верхнюю вершину горизонтальную плоскость. Постепенно опуская эту плоскость, мы раскрасим многогранник требуемым образом: поскольку в каждой вершине сходится четное число граней, около верхней вершины мы можем выбрать цвет граней

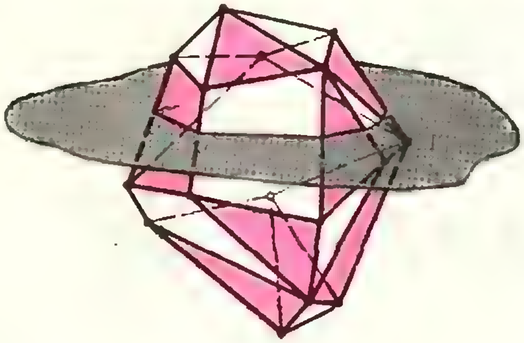


Рис. 1.

одним из двух возможных способов, а при прохождении каждой следующей вершины раскраска прилежащих к ней граней однозначно определяется.

После того как многогранник раскрашен в два цвета, утверждение задачи становится очевидным: в каждом сечении, не проходящем через вершину, «белые» и «красные» стороны чередуются.

Н. Васильев

◆

М405. *) *На шахматной доске размером 99×99 отмечена фигура Ф (эта фигура будет разной в пунктах а), б) и в)). В каждой клетке фигуры Ф сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Ф; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)*

а) Пусть фигура Ф — это «центральный крест» (см. рис. 2). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку.

б) Верно ли это утверждение, если фигура Ф — это «оконная рама» (см. рис. 3)?

в) Верно ли это утверждение, если фигура Ф — это вся доска?

а) Посмотрим, на какую из сторон креста перелетел жук из центральной клетки O. Если он остался на месте, то задача решена. Пусть, например, он перелетел вправо, на сторону OA (остальные случаи разбираются так же). Выберем среди жуков, которые сидели на стороне OA и перелетели вправо, жука X — самого далекого от клетки O. Если он отлетел на одну клетку, то задача решена. Если же он отлетел больше чем на одну клетку, то его правый сосед не может перелететь влево (иначе они перестанут быть соседями). Перелететь вправо он также не может, так как X — самый правый жук, перелетевший вправо. Следовательно, правый сосед жука X остался на месте.

б) В этом случае утверждение неверно. Чтобы показать это, организуем полет в два этапа. На первом этапе соберем всех жуков на границе правого верхнего квадратика K (см. рис. 2): каждый жук перелетает в ближайшую к нему клетку этого квадратика. При этом соседние жуки не разлетаются и все жуки, сидевшие на границе квадратика K, остаются на месте. На втором этапе заставим каждого жука перелететь в противоположную клетку квадратика K (симметричную относительно его центра). Ясно, что при этом соседние жуки также не разлетятся. Докажем, что в результате этих двух перелетов никакой жук не останется на месте и не перелетит в соседнюю клетку. Пусть на первом этапе некоторый жук из клетки A перелетел в клетку B, а на втором этапе — в клетку C. Так как C лежит на границе K, то жук из клетки C после первого этапа останется на месте. Если бы A и C оказались соседними клетками, то жуки, сидевшие в них, перелетели бы после первого этапа в соседние клетки B и C. Но B и C — противоположные клетки границы квадратика K, и соседями быть не могут. Следовательно, A и C также не являются соседями.

в) В этом случае утверждение верно. При доказательстве будем пользоваться «шахматным» расстоянием между клетками доски: *расстоянием между клетками A и B назовем наименьшее число ходов, которое потребуется шахматному королю, чтобы пройти из A в B*. Из условия задачи вытекает, что расстояния между жуками после перелета не увеличиваются.

Прямоугольник, составленный из клеток доски, будем называть *инвариантным*, если любой жук из этого прямоугольника перелетает в клетку этого же прямоугольника. Например, вся доска является инвариантным прямоугольни-

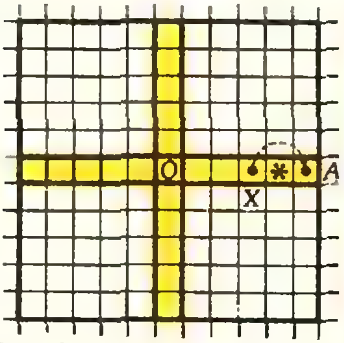


Рис. 2.

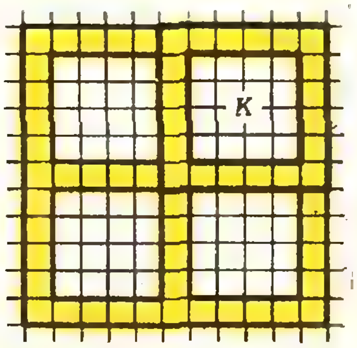


Рис. 3.

---

*) Задача М404 решена в статье А. Савина «От школьной задачи — к проблеме», «Квант», 1976, № 12

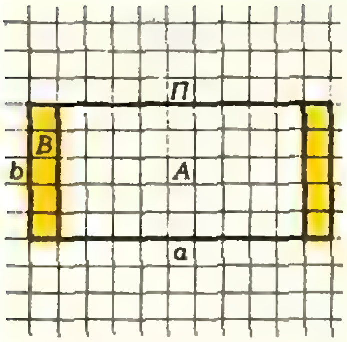


Рис. 4.

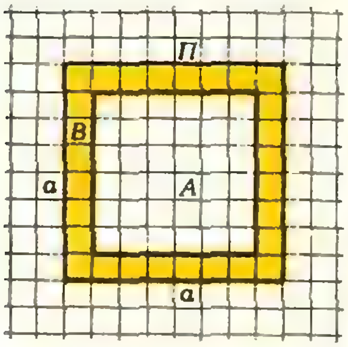


Рис. 5.

ком. Рассмотрим инвариантный прямоугольник с наименьшим числом клеток и докажем, что его размеры, как вертикальный, так и горизонтальный, не превышают двух. Тогда ясно, что любой жук из этого прямоугольника либо останется на месте, либо перелетит в соседнюю клетку.

Предположим противное: наименьший инвариантный прямоугольник $П$ имеет размеры $a \times b$, где $a \geqslant b$ и $a > 2$. Докажем, что в этом случае внутри него можно выбрать еще меньший инвариантный прямоугольник.

Разберем сначала случай $a > b$. Назовем *границей* прямоугольника две крайние полоски длины b, а оставшуюся часть назовем *внутренностью* (см. рис. 4). Заметим, что расстояние от любой внутренней клетки до любой другой клетки прямоугольника $П$ меньше, чем a. Если жуки из всех внутренних клеток перелетели во внутренние клетки, то прямоугольник, составленный из внутренних клеток, будет инвариантным, что и требовалось. Пусть теперь жук из некоторой внутренней клетки A перелетел в граничную клетку B. Рассмотрим прямоугольник M, составленный из тех клеток прямоугольника $П$, расстояние от которых до клетки B меньше, чем a. Поскольку все жуки прямоугольника $П$ находились на расстоянии меньшем чем a от клетки A, то все они перелетели в прямоугольник M. Поэтому прямоугольник M является инвариантным прямоугольником. Так как он содержит меньше клеток, чем $П$, то и в этом случае все доказано.

Осталось разобрать случай $a = b > 2$. В этом случае границей назовем край этого квадрата, а внутренностью все остальные клетки квадрата (рис. 5). Дальше проходят те же рассуждения, что и выше.

Д. Бернштейн

◆

М406. *Окружность радиуса R разделена точками A_1, A_2, A_3, A_4 на четыре равные дуги. Докажите, что сумма четвертых степеней расстояний от произвольной точки окружности M до точек A_k не зависит от положения точки M, причем*

$$|A_1M|^4 + |A_2M|^4 + |A_3M|^4 + |A_4M|^4 = 24R^4.$$

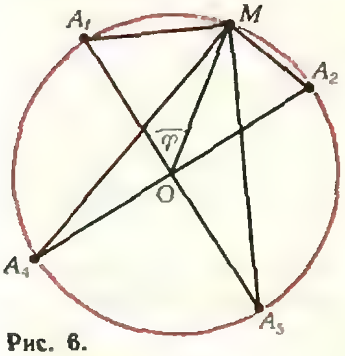


Рис. 6.

Обозначим через φ угол между радиусами OA_1 и OM (рис. 6). Тогда по теореме косинусов находим

$$|A_1M|^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\varphi,$$

$$|A_2M|^2 = 2R^3 - 2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$|A_3M|^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\pi - \varphi),$$

$$|A_4M|^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Возводя обе части каждого равенства в квадрат и складывая новые равенства, получаем:

$$|A_1M|^4 + |A_2M|^4 + |A_3M|^4 + |A_4M|^4 = 4R^4\,[(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + (1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi) + (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + (1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi)] = 24R^4,$$

что и требовалось.

Аналогично можно доказать, что если окружность радиуса R разделена на шесть равных дуг, то сумма шестых степеней расстояний от произвольной точки окружности до точек деления не зависит от положения этой точки и равна $120\,R^6$.

Ю. Бабенко

◆

М407. *Даны два натуральных числа n и m, $n > m$. Докажите, что n можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — делитель числа m, а другое не имеет с n ни одного общего делителя, кроме единицы.*

Пусть d — наибольший общий делитель чисел n и m, а m_1 — наибольший общий делитель d и m. Представим число m в виде произведения $m = m_1m_2$, где m_2 уже взаимно просто с d. Но $d =$ Н. О. Д. (m, n), а потому m_2 взаимно просто и с n. Записав теперь n в виде $n = (n - m_2) + m_2$, получим нужное представление: m_2 — делитель m, а $n - m_2$ уже не имеет с m ни одного общего делителя, кроме единицы.

С. Конягин

М408. *Из 30 конгруэнтных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?*

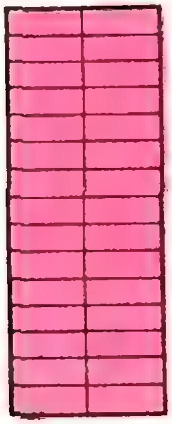


Рис. 7.

Примем длину меньшей стороны исходного (маленького) прямоугольника за единицу, а длину его большей стороны обозначим через a ($a>1$). Пусть A — длина большей стороны «составного» прямоугольника, а B — длина его меньшей стороны. Поскольку большой прямоугольник составлен из маленьких, *длины сторон которых равны* 1 *и* a, *найдутся* такие натуральные числа x, y, z и t, что $A = x + ay$, $B = z + at$. При этом площадь большого прямоугольника в 30 раз больше площади маленького. Значит, большой прямоугольник $A \times B$ подобен маленькому $a \times 1$ с коэффициентом $\sqrt{30}$. Поэтому

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{30}a, \\ z + at = \sqrt{30}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a = \frac{x}{\sqrt{30} - y} = \frac{\sqrt{30} - z}{t},$$

$$yz + 30 - xt = (y + z)\sqrt{30}. \qquad (*)$$

Поскольку $\sqrt{30}$ — число иррациональное, последнее равенство возможно только, если $y = -z$. В свою очередь равенство $y = -z$ возможно только при $y = z = 0$ (ведь y и z — также натуральные числа!). Таким образом, $A = x \cdot 1$, $B = t \cdot a$.

Это означает, что из тридцати маленьких прямоугольников можно сложить подобный им большой, располагая эти прямоугольники только так, как показано на рисунке 7: исходные прямоугольники лежат как бы поперек большого — из меньших сторон составляется бо́льшая.

Подставляя $y = z = 0$ в соотношение (*), получаем $xt = 30$, так что x и t — какие-то делители числа 30. И, наконец, искомое отношение $a = \frac{\sqrt{30}}{t}$, где t — некоторый делитель 30: $t = 1, 2, 3, 5$.

П. Панков

◆

М409. *В строчку подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом A первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз A встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом B второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз B встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой пятая и так далее.*

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Более того, докажите, что 11-я строчка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

а) Очевидно, что, начиная со второй строчки, все числа в таблице не больше 1000. Кроме того, каждое число не больше написанного под ним. Поэтому сумма чисел в третьей строке не меньше, чем во второй, и т. д.; и каждая из этих сумм *не больше миллиона.* Следовательно, поскольку все время суммы возрастать не могут, в каких-то соседних строчках суммы совпадут, а тогда совпадут и сами строчки.

б) Докажем, что если в m-й строчке, при $m \geqslant 2$, число отлично от написанного над ним, то оно не меньше чем 2^{m-2}. Действительно, для $m = 2$ это очевидно, так как все числа второй строчки натуральные. Пусть это уже проверено для всех строк с номерами, меньшими m. Пусть в $m-1$-й строчке написано число a, а под ним написано число b, большее a. Тогда в $m-1$-й строчке написано b чисел, равных a. Ясно, что в $m-2$-й строчке будет несколько групп одинаковых чисел, по a чисел в каждой группе, причем числа из разных групп различны. Отсюда вытекает, что b делится на a, то есть $b \geqslant 2a$. Кроме того, по крайней мере одно из чисел в этих группах отличается от a, а значит, по предположению индукции $a \geqslant 2^{(m-1)-2}$. Итак, $b \geqslant 2a \geqslant 2^{m-2}$. Наше утверждение доказано по индукции для всех $m \geqslant 2$. Если предположить, что 11-я строчка отлична от 12-й, то какое-то число в 12-й строчке будет больше чем $2^{12-2} = 1024 > 1000$, что невозможно.

в) Предыдущие рассуждения подсказывают пример:

0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488;
1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488;
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488;
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488;

. . . .

256, ..., 256, 488, ..., 488;
512, ..., 512, 488, ..., 488

ч	1,	6,	12,	24;
у	1,	6,	12,	24;
д	3,	12,	12,	24;
е	3,	12,	12,	24;
н	2,	6,	12,	24;
Д	3,	12,	12,	24;
н	2,	6,	12,	24;
е	3,	12,	12,	24;
п	3,	12,	12,	24;
р	2,	6,	12,	24;
п	3,	12,	12,	24;
р	2,	6,	12,	24;
и	2,	6,	12,	24;
т	1,	6,	12,	24;
и	2,	6,	12,	24;
х	1,	6,	12,	24;
о	3,	12,	12,	24;
й	1,	6,	12,	24;
п	3,	12,	12,	24;
о	3,	12,	12,	24;
г	1,	6,	12,	24;
о	3,	12,	12,	24;
д	3,	12,	12,	24;
е	3,	12,	12,	24;

Рис. 8.

(в первой строчке 0 и 1 встречаются по одному разу, 2 — два раза, 4 — четыре раза, 8 — восемь раз, ..., 256—256 раз. 488 встречается 488 раз; в 11-й строчке встречается 512 раз число 512 и 488 раз число 488).

С нашей задачей связано интересное наблюдение. Возьмем какой-нибудь осмысленный текст, записанный буквами русского (можно и любого другого) алфавита. Рядом с каждой буквой напишем, сколько раз она повторяется в этом тексте, а дальше будем составлять таблицу так, как мы это делали раньше. В примере, приведенном на рисунке 8, пятый столбец уже совпадает с предыдущим: последним оказался четвертый числовой столбец. Оказывается, для различных по содержанию и по длине осмысленных текстов количество неповторяющихся числовых столбцов не бывает меньше двух и больше четырех — примеры с одним или пятью или большим числом столбцов неизвестны. Примеры текстов с четырьмя неповторяющимися столбцами (наш пример) очень редки. Разумеется, можно найти такой набор повторяющихся букв, чтобы последним числовым столбцом в таблице оказался, скажем, десятый. Из этого набора букв можно даже составить слова, использовав все буквы; но составить осмысленный текст пока не удавалось. Почему это так, мы не знаем. Пока это только любопытное наблюдение. Попробуйте найти или составить такой осмысленный текст, чтобы в соответствующей таблице последним числовым столбцом оказался первый или пятый. Наверное, первая задача легче: ведь требование очень просто — различные буквы должны встречаться в тексте различное число раз.

М. Серо

◆

Ф413. *Имеется идеальный запирающий слой с p—n-переходом. Толщина этого слоя d, диэлектрическая проницаемость ε. Нарисуйте график напряженности и потенциала электрического поля в слое, полагая распределение плотности заряда в слое таким, как показано на рисунке 9.*

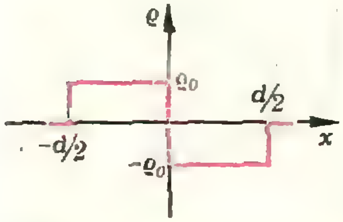


Рис. 9.

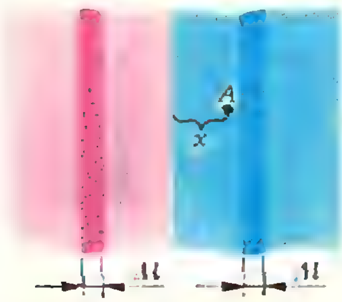


Рис. 10.

Рассмотрим точку A, находящуюся на расстоянии x от середины запирающего слоя (рис. 10), и найдем напряженность электрического поля в этой точке. Разобьем весь слой на очень тонкие участки толщиной Δl и возьмем два таких участка, расположенных симметрично относительно середины слоя. Выбранные участки образуют плоский конденсатор с плотностью заряда $\Delta\sigma = \rho_0 \Delta l$. Напряженность электрического поля, созданного этим конденсатором, между его обкладками равна

$$|\Delta\vec{E}| = \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho_0\Delta l}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

а вне конденсатора равна нулю.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность поля $\vec{E}$ в точке A равна сумме напряженностей таких конденсаторов. При этом в создании электрического поля участвуют только те конденсаторы, обкладки которых находятся на расстоянии, большем $|x|$ от середины слоя:

$$|\vec{E}| = \sum\frac{\rho_0\Delta l}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum\Delta l = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

Аналогично для точек с координатами $0 \geqslant x \geqslant -d/2$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{d}{2} + x\right).$$

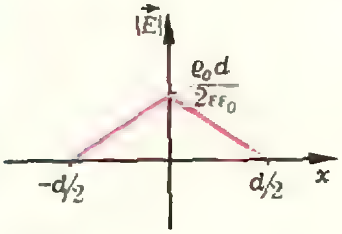


Рис. 11.

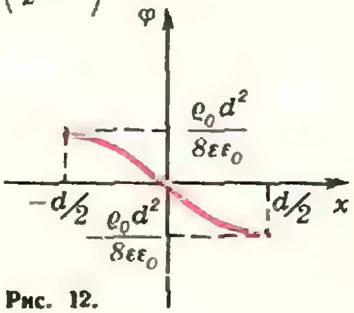


Рис. 12.

График напряженности электрического поля в запирающем слое приведен на рисунке 11.

Теперь найдем, как меняется потенциал поля. Выберем за нуль потенциал точек с координатой $x=0$, то есть середину слоя. Тогда потенциал точки A равен работе электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из этой точки к середине слоя. Сила, действующая на заряд при таком перемещении, направлена противоположно перемещению, поэтому работа, а значит, и потенциал поля в точке A отрицательны. Абсолютную величину потенциала φ_A проще всего найти графически:

$$|\varphi_A| = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0\varepsilon}x^2 - \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0\varepsilon}x.$$

(Выражение для потенциала точек с координатой $0 \geqslant x \geqslant -d/2$ получите самостоятельно.) График изменения потенциала показан на рисунке 12.

◆

Ф414. *Коэффициент жесткости резинового жгута длины l и массы m равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определить радиус R вращающегося кольца.*

Обозначим через L длину вращающегося кольца ($L=2\pi R$). Рассмотрим небольшой участок кольца длиной ΔL. Его масса

$$\Delta m = \frac{m}{L}\Delta L.$$

На выделенный участок на его концах действуют две силы натяжения $\vec{T}$, направленные по касательным к кольцу (рис. 13). Их равнодействующая $\vec{F}$ направлена по радиусу к центру кольца и сообщает рассматриваемому участку центростремительное ускорение $|\vec{a}| = \omega^2 R$. Из рисунка 13

$$|\vec{F}| = 2|\vec{T}|\sin\alpha/2.$$

Запишем уравнение движения выделенного участка:

$$|\vec{F}| = |\vec{a}|\,\Delta m,$$

или

$$2|\vec{T}|\sin\frac{\alpha}{2} = \omega^2 R\frac{m\Delta L}{L}.$$

Поскольку

$$|\vec{T}| = k(L-l),$$
$$L = 2\pi R$$

и при малых углах

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta L}{2R},$$

получаем

$$k(2\pi R - l)\frac{\Delta L}{R} = \frac{\omega^2 m}{2\pi}\Delta L.$$

Отсюда

$$R = \frac{l}{2\pi}\,\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{4\pi^2 k}}.$$

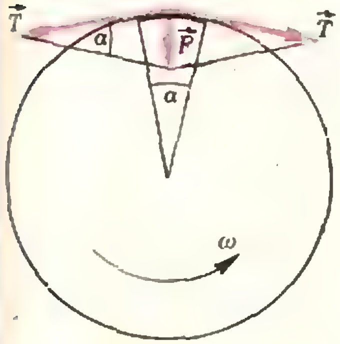


Рис. 13.

И. Слободецкий

◆

Ф415. *Упрощенно атом гелия можно представлять как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого*

Эта задача, несомненно, относится к трудным задачам и даже несколько выходит за рамки школьной программы.

По условию задачи гелий *сильно поглощает* излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}06$ *мкм*. Это означает, что такое излучение вызывает колебания электронов в атоме гелия с большой амплитудой (это и приводит к сильному поглощению), то есть наступает резонанс. *Любое вещество способно сильно поглощать излучение, частота которого совпадает с резонанс-*

гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны $\lambda = 0{,}06$ *мкм. Плотность жидкого гелия* $\rho = 0{,}14$ *г/см*^{3}.

ной частотой его атомов. Следовательно,

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{c}{\lambda} = 5\cdot10^{15}\ \text{гц}.$$

Будем считать, что электроны в атоме гелия связаны с ядром упругими связями («пружинками»). Зная резонансную частоту, можно вычислить коэффициент «жесткости» k такой «пружинки»:

$$2\pi\nu_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

и

$$k = 4\pi^2\nu_{\text{рез}}^2 m \approx 9\cdot10^2\ \text{кг/сек}^2$$

(здесь $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг* — масса электрона).

Если такой атом поместить в постоянное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, то каждый электрон сместится из положения равновесия на расстояние $\Delta x = \frac{e|\vec{E}|}{k}$, где $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ *к* — заряд электрона. Теперь атом можно рассматривать как электрический диполь. Его поведение в электрическом поле принято характеризовать дипольным моментом

$$p = 2e\Delta x = \frac{2e^2|\vec{E}|}{k}.$$

Единица объема вещества приобретает дипольный момент

$$P = Np = \frac{2e^2N}{k}|\vec{E}|.$$

Здесь N — концентрация атомов, которую можно определить, зная плотность ρ жидкого гелия и его молярную массу μ:

$$N = N_A\,\frac{\rho}{\mu} \approx 2\cdot10^{28}\ \text{м}^{-3},$$

где $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ *моль*$^{-1}$ — число Авогадро.

Явление возникновения электрических диполей в веществе в электрическом поле носит название *поляризации диэлектрика*. Способность вещества поляризоваться количественно характеризуется с помощью коэффициента поляризации α, который в единицах СИ определяется из соотношения

$$P = \alpha\varepsilon_0|\vec{E}|,$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ *к*^{2}/(*н*·*м*^{2}) — электрическая постоянная. В нашем случае

$$\alpha = \frac{P}{\varepsilon_0|\vec{E}|} = \frac{2e^2N}{\varepsilon_0 k}.$$

Диэлектрическая проницаемость вещества ε связана с коэффициентом поляризации α соотношением

$$\varepsilon = 1 + \alpha = 1 + \frac{2e^2N}{\varepsilon_0 k}.$$

Подставляя сюда числовые значения соответствующих величин, найдем

$$\varepsilon \approx 1 + \frac{2(1{,}6\cdot10^{-19})^2 2\cdot10^{28}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot9\cdot10^2} \approx 1{,}13.$$

Полученный результат достаточно хорошо согласуется с экспериментальным значением диэлектрической проницаемости жидкого гелия.

С. Козел

Ф417*). *В теплоизолированном баллоне находится 5 г водорода и 12 г кислорода. Смесь поджигают. Определить давление и температуру в сосуде, если известно, что при образовании 1 моля воды выделяется количество теплоты $Q_0=2{,}4\cdot10^5$ дж. Объем сосуда 100 литров. Начальная температура смеси кислорода и водорода $t_0=20°C$. Удельная теплоемкость водорода при постоянном объеме равна $c_в=14{,}3$ кдж/(кг·град), а водяных паров — $c_п=2{,}1$ кдж/(кг·град).*

При горении смеси происходит химическая реакция

$$2H_2+O_2=2H_2O,$$

в результате которой образуется вода (точнее, водяные пары). При этом 2 моля (или 4 *г*) водорода соединяются с 1 молем (или 32 *г*) кислорода. Так как в сосуде имеется только 12 *г* кислорода, в реакцию вступят $\frac{4\cdot12}{32}=1{,}5$ *г* водорода, и образуется $m_1=13{,}5$ *г* водяных паров. Остальные $m_2=3{,}5$ *г* водорода не прореагируют и будут присутствовать в сосуде вместе с водяными парами.

Поскольку молярная масса воды равна 18 *г/моль*, 13,5 *г* воды составляют $n=\frac{13{,}5}{18}$ моля и при сгорании смеси выделяется количество теплоты $Q\approx nQ_0=1{,}8\cdot10^5$ *дж*. Эта энергия идет на увеличение внутренней энергии водяных паров и водорода:

$$Q=(c_пm_1+c_вm_2)\,\Delta T,$$

где $\Delta T=T-T_0$ — изменение температуры газов. Отсюда найдем T:

$$T=T_0+\Delta T=T_0+\frac{Q}{c_пm_1+c_вm_2}\approx2800\ \textit{град}.$$

По закону Дальтона давление в сосуде равно сумме парциальных давлений водяных паров и водорода:

$$p=p_п+p_в.$$

Согласно уравнению газового состояния,

$$p_п=\frac{m_1}{\mu_п}\frac{RT}{V}\ \text{ и }\ p_в=\frac{m_2}{\mu_в}\frac{RT}{V}.$$

Следовательно,

$$p=\left(\frac{m_1}{\mu_п}+\frac{m_2}{\mu_в}\right)\frac{RT}{V}\approx5{,}6\cdot10^5\ н/м^2.$$

И. Слободецкий

◆

Ф418. *Сложенные вместе смоченные оконные стекла практически невозможно отделить друг от друга, пытаясь оторвать одно стекло от другого. Почему?*

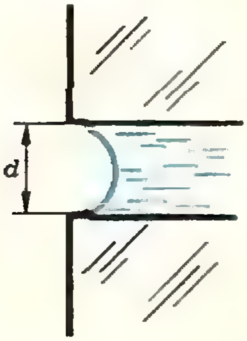


Рис. 14.

Пусть края пластин — прямые линии, толщина слоя воды между пластинами — d. Так как вода смачивает стекло, свободная поверхность воды по краям пластин будет искривлена. Будем считать, что вода полностью смачивает стекло. Тогда ее свободная поверхность — это часть поверхности цилиндра с радиусом поперечного сечения $r=d/2$ (рис. 14). Искривление поверхности жидкости приводит к тому, что давление внутри жидкости (в воде между пластинами) и давление снаружи не одинаковы. Посмотрим, какова разность этих давлений.

На тонкий слой жидкости, прилегающий к ее свободной поверхности, действуют *сила внешнего давления*, сила давления со стороны воды и сила поверхностного натяжения. Если длина границы свободной поверхности равна l (линейный размер пластины), то сила поверхностного натяжения равна $2\sigma l$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Запишем условие равновесия жидкости:

$$pld=2\sigma l+p'ld,$$

где p — внешнее давление, а p' — давление внутри жидкости. Отсюда разность давлений

$$\Delta p=p-p'=\frac{2\sigma}{d}=\frac{\sigma}{r}.$$

Итак, давление внутри жидкости между пластинами меньше внешнего давления на величину σ/r. Под действием избыточного давления (и, разумеется, под действием силы тяжести) верхняя пластина прижимается к нижней.

Поверхность стекла обычно не идеально гладкая, а имеет неровности, бугорки. В состоянии равновесия пластины со прикасаются друг с другом в вершинах бугорков (рис. 15) Возникающие при этом силы реакции, действующие со ст

---

*) Решение задачи Ф416 будет опубликовано в одном из ближайших номеров журнала.

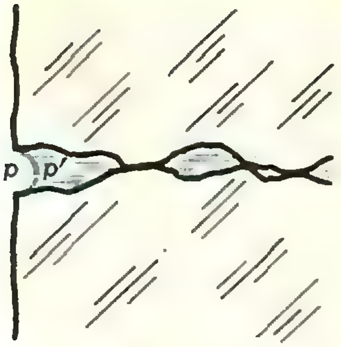


Рис. 15.

роны нижней пластины на верхнюю, таковы, что в сумме с силой давления, действующей на пластину со стороны жидкости, они уравновешивают силу тяжести и силу внешнего давления. Когда мы пытаемся оторвать верхнюю пластину, мы в первый момент разъединяем стекла, так что они уже не соприкасаются. И в дальнейшем, для того чтобы просто удерживать пластину неподвижной, нам надо прикладывать силу, равную по абсолютной величине сумме силы тяжести пластины и силы избыточного внешнего давления.

Оценим, каково дополнительное усилие, необходимое для отрыва мокрой пластины от стекла (не будем учитывать действия силы тяжести). Если высота бугорков на поверхности стекол $d \sim 10^{-6}$ *м*, то

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d} \approx \frac{2 \cdot 70 \cdot 10^{-3}\ н/м}{10^{-6}\ м} = 1{,}4 \cdot 10^{5}\ н/м^{2}.$$

При площади пластины $\sim 10^{-2}$ $м^2$ удерживающая сила должна быть порядка $1{,}4 \cdot 10^{3}$ *н* (!).

Т. Петрова

◆

Ф419*). *В некоторой Галактике обнаружена система планет, аналогичная нашей Солнечной системе. Средние плотности планет и Солнца в этой системе в $n_1=2$ раза меньше средних плотностей планет и Солнца в нашей системе, а все линейные размеры — в $n_2=3$ раза меньше соответствующих размеров в нашей системе. Сколько земных суток длится год на обнаруженном аналоге Земли?*

Запишем уравнение движения планеты массы m (аналога Земли) вокруг своего Солнца массы M:

$$\gamma \frac{mM}{L^2} = m\omega^2 L,$$

где L — радиус орбиты планеты, ω — угловая скорость вращения планеты. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{L^3}}.$$

Выразим массу Солнца через его радиус R и плотность ρ. Получим

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\gamma\pi\rho\frac{R^3}{L^3}}.$$

Аналогичное выражение можно записать для угловой скорости ω_0 вращения Земли вокруг Солнца в нашей системе:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{3}\gamma\pi\rho_0\frac{R_0^3}{L_0^3}}.$$

Найдем отношение угловых скоростей обращения аналога Земли и самой Земли:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{4/3\gamma\pi\rho\,(R/L)^3}{4/3\gamma\pi\rho_0\,(R_0/L_0)^3}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3\left(\frac{L_0}{L}\right)^3} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{n_2}\right)^3 (n_2)^3} = \sqrt{\frac{1}{n_1}}.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{n_1}}\,\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_0$$

— угловая скорость движения аналога Земли в $\sqrt{2}$ раза меньше угловой скорости движения самой Земли. Поэтому на аналоге Земли год длится $\frac{365}{\sqrt{2}} \approx 260$ земных суток.

И. Слободецкий

---

*) В опубликованном ранее условии этой задачи (см. «Квант», 1976, № 10) была допущена неточность.

Ф420. *На кронштейне ACBOE из 6 невесомых жестких стержней одинаковой длины, соединенных шарнирно (рис. 16), в точке C подвешен груз массы m. Растянут или сжат стержень AB? Найти силу упругости в этом стержне.*

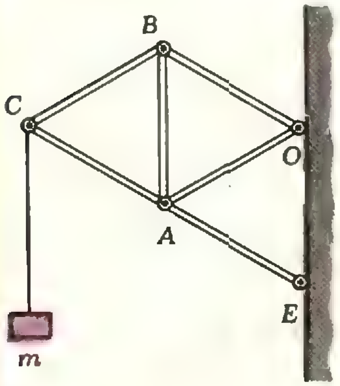


Рис. 16.

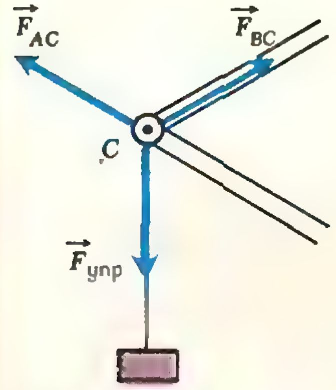


Рис. 17.

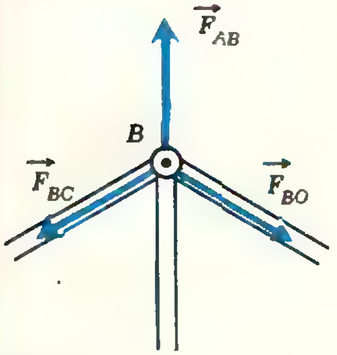


Рис. 18.

Ф421. *Тонкостенный цилиндр радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и поставили в угол (рис. 19). Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром равен μ. Определить, сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.*

Выяснить, растянут или сжат тот или иной стержень в шарнирной системе, проще всего следующим образом. Удалим мысленно из системы интересующий нас стержень и посмотрим, как будет вести себя оставшаяся часть системы. Если шарниры, которые раньше находились на концах рассматриваемого стержня, после его (мысленного) удаления начнут сближаться, значит, стержень был сжат и препятствовал сближению. И наоборот, если эти два шарнира будут расходиться, значит, мы убрали растянутый стержень.

Применяя этот метод, легко установить, что в кронштейне ACBOE стержни CB, BO и OA растянуты, а стержни AC, AE и интересующий нас стержень AB сжаты.

Теперь найдем численное значение силы упругости в стержне AB. Прежде всего, заметим, что любой стержень может действовать на шарнир, находящийся на его конце, лишь с силой, направленной *вдоль самого стержня*. Действительно, если бы это было не так, то по третьему закону Ньютона шарнир также действовал бы на стержень с силой, направленной не вдоль стержня. Такая сила создала бы момент относительно оси, проходящей через шарнир на другом конце стержня. В результате стержень вращался бы вокруг второго шарнира, а не находился в равновесии.

Рассмотрим шарнир C (рис. 17). Так как стержень AC сжат, а BC растянут, на шарнир C действуют три силы, составляющие друг с другом углы по 120°. Поскольку шарнир покоится, все три силы должны быть равны по модулю. Одна из них — сила упругости $\vec F_{\text{упр}}$ нити, на которой неподвижно висит груз массы m. Поэтому

$$|\vec F_{\text{упр}}| = m|\vec g|, \text{ и } |\vec F_{AC}| = |\vec F_{BC}| = m\,|\vec g|.$$

На шарнир B также действуют три силы, составляющие друг с другом углы по 120° (рис. 18). Одна из сил известна. Это сила упругости растянутого стержня BC: $|\vec F_{BC}| = m\,|\vec g|$. Следовательно, и остальные силы, приложенные к шарниру B, а именно — сила упругости растянутого стержня BO и искомая сила упругости сжатого стержня AB, равны тому же. Иначе говоря,

$$|\vec F_{AB}| = m\,|\vec g|.$$

Эту задачу можно решить и энергетически. Предположим, что нам удалось удлинить стержень AB на ничтожно малую величину Δx. Для этого пришлось совершить работу против искомой силы упругости $\vec F_{AB}$. Эта работа $\Delta A = |\vec F_{AB}|\Delta x$ пойдет на увеличение потенциальной энергии системы, так как груз массы m поднимется. Причем поднимется на столько же, на сколько поднимется шарнир C. Величину перемещения шарнира C можно найти из таких соображений. Диагональ (воображаемая) OC ромба OACB, проходящая через середину стержня AB, до удлинения стержня AB была горизонтальна. После удлинения стержня на малую величину Δx середина стержня AB поднялась на $\Delta x/2$. Следовательно, поднялась на $\Delta x/2$ и середина воображаемой диагонали ромба. Конец же этой диагонали (то есть точка C) поднялся на $\Delta h = 2\Delta x/2 = \Delta x$. Отсюда $|\vec F_{AB}|\Delta x = m|\vec g|\Delta h$, и следовательно,

$$|\vec F_{AB}| = m\,|\vec g|.$$

Б. Буховцев

◆

Поскольку между цилиндром и стенками угла есть трение, угловая скорость вращения цилиндра со временем уменьшается. Согласно теореме о кинетической энергии, изменение кинетической энергии цилиндра равно работе действующих на него сил. Очевидно, что в нашем случае речь идет о работе сил трения $\vec F_{\text{тр}1}$ и $\vec F_{\text{тр}2}$ (см. рис. 19). Поэтому прежде всего найдем эти силы.

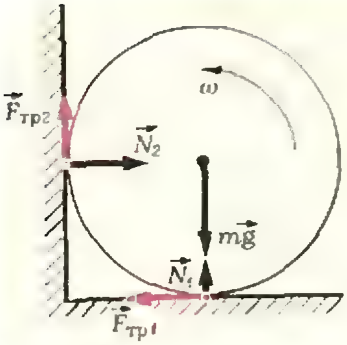


Рис. 19.

Цилиндр поступательно не перемещается. Это означает, что равнодействующая силы тяжести $m\vec{g}$, сил реакции стенок угла $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и сил трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ равна нулю. Спроектируем силы на вертикальную и горизонтальную оси и запишем соответствующие условия равновесия:

$$|\vec{N}_1| + |\vec{F}_{тр2}| - |m\vec{g}| = 0, \quad |\vec{N}_2| - |\vec{F}_{тр1}| = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec{F}_{тр1}| = \mu|\vec{N}_1| \text{ и } |\vec{F}_{тр2}| = \mu\,|\vec{N}_2|.$$

Отсюда

$$|\vec{F}_{тр1}| = \frac{\mu m\,|\vec{g}\,|}{1+\mu^2} \text{ и } |\vec{F}_{тр2}| = \frac{\mu^2 m\,|\vec{g}\,|}{1+\mu^2}.$$

Пусть цилиндр до остановки сделал n оборотов. Это соответствует смещению точек приложения сил трения на расстояние $2\pi Rn$. Работа сил трения при этом равна

$$-(|\vec{F}_{тр1}| + |\vec{F}_{тр2}|)\,2\pi Rn = -\frac{2\pi Rn\mu(1+\mu)\,m\,|\vec{g}\,|}{1+\mu^2}.$$

Приравняв эту работу изменению кинетической энергии цилиндра

$$0 - \frac{m\omega^2R^2}{2},$$

найдем n:

$$n = \frac{\omega^2R(1+\mu^2)}{4\pi\mu\,|\vec{g}\,|(1+\mu)}.$$

◆

Ф422. *Половина сферического конденсатора заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 20). Найти отношение плотностей зарядов на верхней и нижней половинах конденсатора и его емкость.*

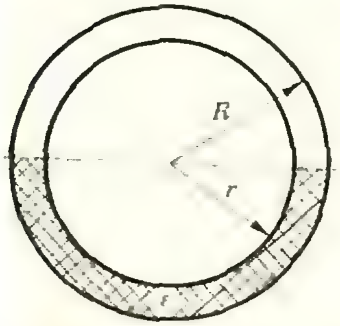


Рис. 20.

В диэлектрике напряженность электрического поля ослабляется в ε раз. Поэтому при одной и той же плотности зарядов напряженность поля в нижней половине конденсатора была бы в ε раз меньше, чем в верхней.

В то же время обкладки сферического конденсатора эквипотенциальны, поскольку они представляют собой проводящие поверхности. Следовательно, между любыми двумя точками, принадлежащими разным сферам, разность потенциалов должна быть одна и та же. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы плотность зарядов на нижней половине конденсатора была в ε раз больше, чем на верхней. При этом электрическое поле во всем конденсаторе будет таким же, как в конденсаторе без диэлектрика, но с одинаковой плотностью заряда на верхней и нижней половинах.

Теперь найдем емкость конденсатора. Для этого надо знать заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками. Обозначим через σ плотность заряда на верхней половине конденсатора, а через S — площадь поверхности внутренней сферы. Тогда заряд конденсатора

$$q = \sigma S/2 + \varepsilon\sigma S/2.$$

Как мы уже говорили, электрическое поле внутри данного конденсатора такое же, как в конденсаторе без диэлектрика, но с одинаковой плотностью заряда σ, то есть с равномерно распределенным зарядом

$$q' = \sigma S.$$

Следовательно, разность потенциалов между обкладками

$$\Delta\varphi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R-r}{rR}.$$

Разделив q на $\Delta\varphi$, найдем емкость конденсатора C:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{(1+\varepsilon)\,\sigma S/2}{\dfrac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{R-r}{rR}} = \frac{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon)\,rR}{R-r}.$$

И. Слободецкий

А. Лодкин

Функциональное уравнение на сфере

В этой заметке мы решим задачу, предлагавшуюся десятиклассникам на втором (исследовательском) туре X Всесоюзной олимпиады по математике. Эта задача была помещена в «Задачнике «Кванта» («Квант», 1976, № 10, М410). Напомним ее формулировку.

На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f, ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством:

> *если M_1, M_2, M_3 — концы трех взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$.* (*)

Во всех следующих пунктах f — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б) Пусть M и N — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем точка N, то $f(M) \geqslant f(N)$.

в) Пусть M и N — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M) \geqslant f(N)$.

г) Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

Решение задачи а)

Задача а) на самом деле есть в школьном учебнике «Геометрия 10» (§ 43, задача 14). Вот ее решение. Пусть нам задан прямоугольный базис (репер) $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OP}$, где P — полюс сферы. Обозначим через $F(M)$ квадрат скалярного произведения вектора $\overrightarrow{OM}$ на $\overrightarrow{OP}$: $F(M)=(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP})^2$. Ясно, что F — это та самая функция, о которой говорится в пункте а). Координаты вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, очевидно, равны расстояниям от точек M_1, M_2, M_3 до плоскости экватора. Но скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{OP}$ равен единице. Это и дает нам соотношение $F(M_1)+F(M_2)+F(M_3)=1$ для функции F.

Всюду дальше у нас f — произвольная неотрицательная функция на сфере, равная нулю во всех точках экватора и обладающая свойством (*).

Решение задач б) и в)

Очевидно, что пункт б) задачи следует из в); поэтому сразу докажем утверждение пункта в).

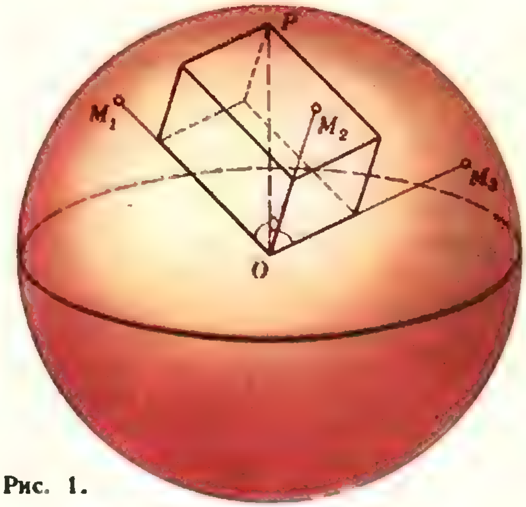


Рис. 1.

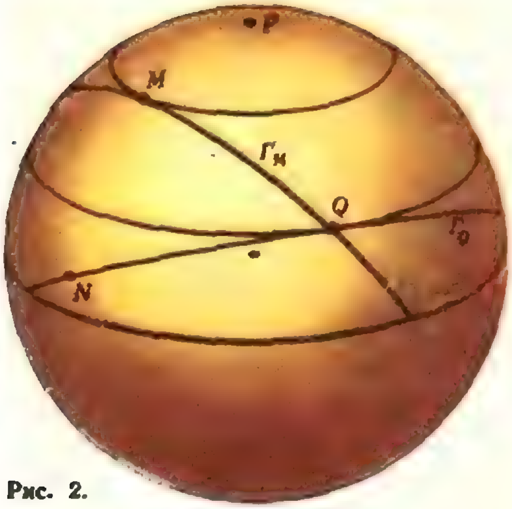


Рис. 2.

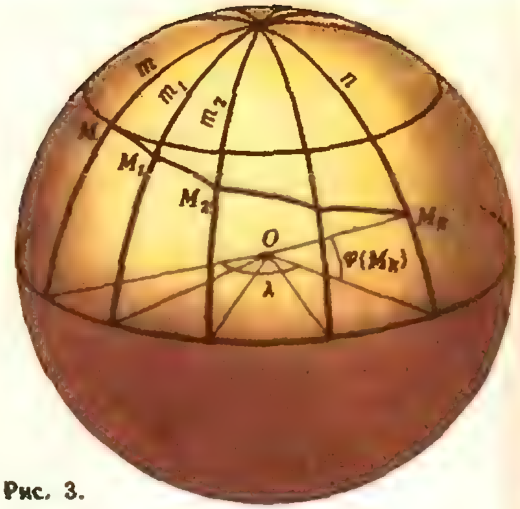


Рис. 3.

Из условия (*) следует, что функция f принимает одинаковые значения в диаметрально противоположных точках сферы. Поэтому нам достаточно рассмотреть значения функции только для точек северного полушария.

Итак, *пусть M и N — две точки северного полушария. Докажем, что если M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M) \geqslant f(N)$.*

Доказательство. Рассмотрим окружность большого круга, самой северной точкой которой является M. Пусть Γ_M — часть этой окружности, лежащая в северном полушарии.

Предположим вначале, что N также лежит на Γ_M. Обозначим через N' такую точку дуги Γ_M, что $[ON'] \perp [ON]$, через M' — одну из двух точек пересечения дуги Γ_M с экватором. Тогда из (*) следует равенство $f(N) + f(N') = f(M) + f(M')$, поскольку $[OM] \perp [OM']$, и точки M, M', N, N' лежат в одной плоскости, — так что для точек M, M' и N, N' «третьей» точкой будет одна и та же: конец радиуса, перпендикулярного плоскости окружности Γ_M. Так как $f(M') = 0$, то $f(M) \geqslant f(N)$.

Пусть теперь точка N находится в области северного полушария, лежащей к югу от Γ_M. Тогда найдется такая точка Q на Γ_M, что дуга большого круга Γ_Q проходит через N (рис. 2). Применяя предыдущее рассуждение к парам точек M и Q, Q и N, получаем неравенства $f(M) \geqslant f(Q) \geqslant f(N)$.

Если же N лежит к северу от Γ_M, то для «спуска» из M в N может понадобиться уже более двух шагов. Разделим угол λ между плоскостями меридианов m и n, проходящих через точки M и N соответственно, на k равных частей плоскостями меридианов $m_1, \ldots, m_{k-1}$ (рис. 3). Выйдем из M по дуге Γ_M и в точке M_1 пересечения этой дуги с меридианом m_1 свернем на дугу Γ_{M_1}. Дойдя до точки M_2 пересечения Γ_{M_1} с m_2, повернем на Γ_{M_2} и т. д. Последней точкой нашего путешествия будет точка M_k на n. Вы, очевидно, заметили, что чем больше k, тем «положе» траектория спуска. Нетрудно доказать, что широта $\varphi(M_k)$ точки M_k может сколь угодно приближаться к $\varphi(M)$ (заметьте, что $\operatorname{tg}\varphi(M_k) =$

$$= \operatorname{tg}\varphi(M_{k-1})\cos\frac{\lambda}{k} = \cdots =$$

$$= \operatorname{tg}\varphi(M)\cos^k\frac{\lambda}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \operatorname{tg}\varphi(M)),$$ и следовательно, M_k при достаточно большом k окажется севернее N. На спуск из M_k в N понадобится уже не более двух шагов.

Функция f (M) зависит только от широты

Обозначим параллель, находящуюся на расстоянии $\sqrt{x}$ от плоскости экватора, через Π_x. Чтобы решить задачу г), нам понадобится такая

Лемма. *Если $x+y+z=1$, то можно построить прямоугольный ба-*

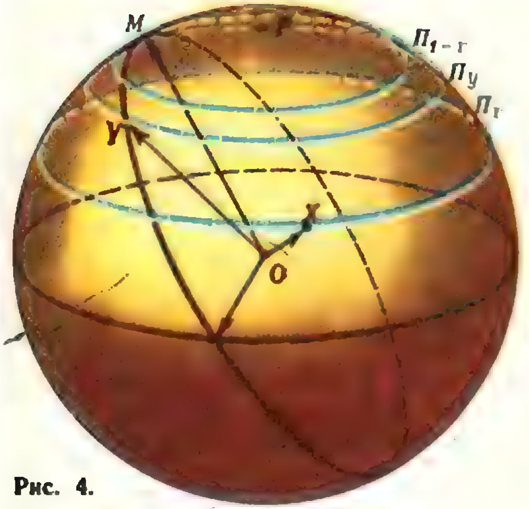


Рис. 4.

зис с концами на этих параллелях $П_x$, $П_y$, $П_z$.

Доказательство. Возьмем радиус OX с концами в какой-то точке X параллели $П_x$. Построим перпендикулярный к нему радиус OY с концами на параллели $П_y$. Для этого возьмем большой круг, плоскость которого перпендикулярна радиусу OX (рис. 4). Если $y=1-x$, то три радиуса с концами в точке X, в одной из точек пересечения окружности этого большого круга с экватором и в самой северной точке окружности этого круга, дадут нам нужный ортогональный репер. Если же $y<1-x$, то, взяв любую из двух точек пересечения окружности этого большого круга с параллелью $П_y$, получим радиус OY, перпендикулярный OX.

Проведем теперь радиус, ортогональный к OX и OY; пусть его конец оказался в точке V параллели $П_v$. Из задачи а) следует, что $F(X)+F(Y)+F(V)=x+y+v=1$ (напомним, что функция F каждой точке сферы ставит в соответствие квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора). Но, с другой стороны, и $x+y+z=1$; значит, $z=v$, т. е. параллели $П_v$ и $П_z$ совпадают. Лемма доказана.

Докажем теперь, что функция f постоянна на каждой параллели, то есть что она действительно зависит только от широты.

Будем говорить, что функция f на параллели $П_x$ *претерпевает разрыв, не меньший* ε ($\varepsilon>0$), если на $П_x$ найдутся такие точки X и X', что $|f(X)-f(X')|\geqslant\varepsilon$. Возьмем параллель $П_x$, на которой у f разрыв, не меньший ε, и пусть две параллели $П_y$ и $П_z$ таковы, что концы трех взаимно перпендикулярных радиусов (репера) соответственно находятся на параллелях $П_x$, $П_y$ и $П_z$. Как мы уже доказали, $F(X)+F(Y)+F(Z)=x+y+z=1$ для всех $X\in П_x$, $Y\in П_y$, $Z\in П_z$ (F — это функция из пункта а)).

Начнем вращать этот ортогональный репер вокруг оси сферы, проходящей через полюсы; при этом концы наших радиусов будут перемещаться — каждый по своей параллели. Покажем, что либо на параллели $П_z$, либо на параллели $П_y$ функция f претерпевает разрыв, не меньший $\frac{\varepsilon}{2}$, то есть докажем, что либо на $П_y$ найдутся две точки Y, Y' такие, что $|f(Y)-f(Y')|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$, либо на $П_z$ найдутся точки Z, Z' такие, что $|f(Z)-f(Z')|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Допустим, что это не так; тогда для всех Y_1, $Y_2\in П_y$ и Z_1, $Z_2\in П_z$ будет $|f(Y_1)-f(Y_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(Z_1-f(Z_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Но мы знаем, что в соответствующих тройках точек X, Y, Z и X', Y', Z'

$$f(X)+f(Y)+f(Z)=$$
$$=f(X')+f(Y')+f(Z')=1.$$

Отсюда

$$\varepsilon\leqslant|f(X)-f(X')|=|f(Y')-f(Y)+$$
$$+f(Z')-f(Z)|\leqslant|f(Y)-f(Y')|+$$
$$+|f(Z)-f(Z')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon<\varepsilon$ — противоречие. Тем самым либо на параллели $П_y$, либо на $П_z$ будет разрыв не меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$.

Из леммы следует, что если $y+z=1-x$, то либо на $П_y$, либо на $П_z$ функция f терпит разрыв, не меньший $\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $N>\frac{2}{\varepsilon}$ и рассмотрим $2N$ параллелей

$$П_{y_1},\ П_{y_2},\ \ldots,\ П_{y_N},\ П_{z_1},\ П_{z_2},\ \ldots,\ П_{z_N},$$

соответствующих числам

$$y_1<y_2<\ldots<y_N<\frac{1-x}{2},\ z_1>z_2>\ldots$$

$\ldots > z_N$, $z_i = 1 - x - y_i$ (параллель Π_x, т. е. число x, у нас фиксирована). По доказанному либо на Π_{y_i}, либо на Π_{z_i} у f разрыв не меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$, так что, пройдя через эти $2N$ параллелей с юга на север, мы получим, что $f > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = 1$ (поскольку f неотрицательна), что невозможно. Значит, предположение, что f не постоянна хотя бы на одной параллели, неверно.

Таким образом, f фактически зависит только от x, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, и мы можем от функции f, заданной на сфере, перейти к функции g, определенной на отрезке $[0, 1]$: $g(x) = f(X)$, где $X \in \Pi_x$. Выше мы доказали, что если $x + y + z = 1$, то $g(x) + g(y) + g(z) = 1$. Но легко сообразить, что $g(x) + g(1 - x) = 1$; следовательно, $1 - g[1 - (x + y)] = g(x + y)$. Отсюда получаем, что

$$g(x) + g(y) = g(x + y) \qquad (**)$$

для всех x и y, таких, что $x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Решение задачи г)

Решая задачу в), мы доказали, что $g(x) \leqslant g(y)$, если $x \leqslant y$. Кроме того, $g(1) = 1$. Докажем, что монотонная (неубывающая) и ограниченная функция g, определенная на отрезке $[0, 1]$ и обладающая свойством (**), — обязательно линейная функция, а именно, $g(x) = x$.

Действительно, из соотношения (**) моментально следует, что $g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n) = g(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, откуда $g(nx) = ng(x)$, если $nx < 1$. Отсюда $ng\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = g(1) = 1$, следовательно, $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Поэтому $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$ при $m < n$, то есть $g(x) = x$ при всех рациональных x. Пусть теперь x иррационально, r_1 и r_2 — рациональные числа и $r_1 < x < r_2$. Тогда $r_1 = g(r_1) \leqslant g(x) \leqslant g(r_2) = r_2$. Сравнивая эти два неравенства, получаем $|g(x) - x| \leqslant |r_2 - r_1|$. Так как разность $r_2 - r_1$ может быть сколь угодно малой (можно в качестве r_1 и r_2 брать десятичные приближения x), левая часть неравенства обязана быть нулем. Следовательно, $g(x) = x$ теперь уже для произвольного x. Вспоминая, что $g(x) = f(X)$, где $X \in \Pi_x$, получаем, что $f(X) = x$ для всех $X \in \Pi_x$, то есть функция $f(M)$ совпадает с функцией, о которой говорится в задаче а).

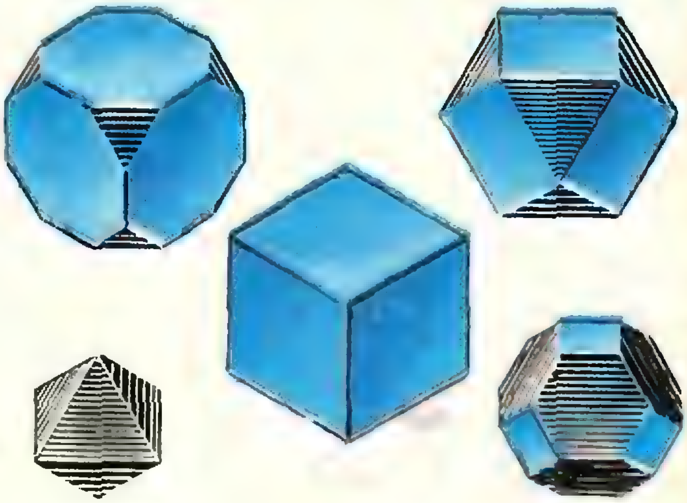
Пять многогранников

На этом рисунке вы видите пять многогранников, все их грани — правильные многоугольники. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из гексаэдра (куба) с помощью одной и той же операции, только применяется она в разных случаях по-разному.

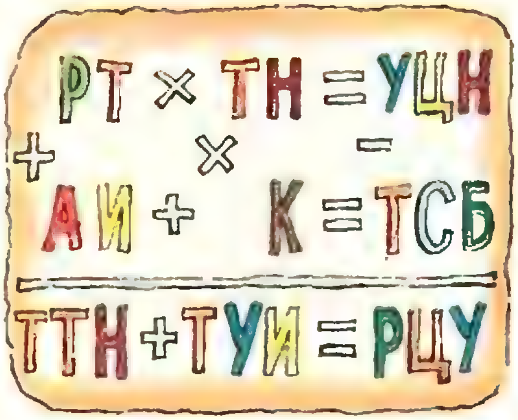
Как вы думаете, что это за операция?

Вычислите длины ребер всех многогранников, если длина ребра гексаэдра равна 1.

В. Тихонов



«Квант» для младших школьников



Задачи

1. В действиях на рисунке каждая цифра зашифрована некоторой буквой. Расшифруйте эту запись, а затем запишите буквы по номерам в порядке возрастания (с 0 до 9). Какое слово у вас получилось?

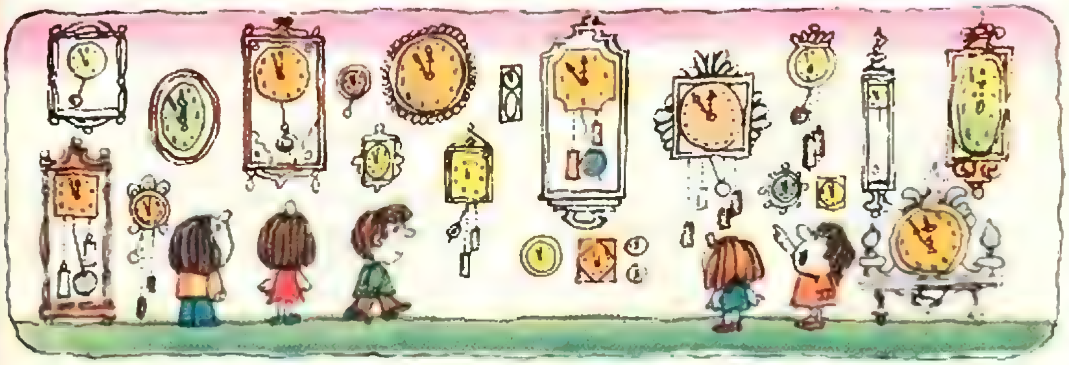
2. Как без помощи линейки узнать, является ли данный лист бумаги с прямолинейными границами квадратом?

3. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в восемь раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли еще два ученика, и оказалось, что отсутствуют 20 % от числа учеников, присутствующих в классе.

Сколько всего учеников в классе?

4. «Бьют часы двенадцать раз...» поется в популярной песне. А сколько всего ударов в сутки делают часы, если в двенадцать часов (дня или ночи) они бьют двенадцать раз, в два часа — два раза и т. д., да еще в промежутках бьют один раз, отмечая середину каждого часа?

5. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.



Н. Носов

Витя Малеев решает задачи

Пришел я домой и сразу взялся за дело. Такая решимость меня одолела, что я даже сам удивился. Сначала я задумал сделать самые трудные уроки, как Ольга Николаевна нас учила, а потом взяться за то, что полегче. Как раз в этот день была задана задача по арифметике. Недолго думая я раскрыл задачник и принялся читать задачу:

«В магазине было 8 пил, а топоров в три раз больше. Одной бригаде плотников продали половину топоров и три пилы за 84 рубля. Оставшиеся топоры и пилы продали другой бригаде плотников за 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила?»

Сначала я совсем ничего не понял и начал читать задачу во второй раз, потом в третий... Постепенно я понял, что тот, кто составляет задачи, нарочно запутывает их, чтоб ученики не могли сразу решить. Написано: «В магазине было 8 пил, а топоров в три раза больше». Ну и написали бы просто, что топоров было 24 штуки. Ведь если пил было 8, а топоров было в три раз больше, то каждому ясно, что топоров было 24. Нечего тут и огород городить! И еще: «Одной бригаде плотников продали половину топоров и 3 пилы за 84 рубля». Сказали бы просто: «Продали 12 топоров». Будто не ясно, раз топоров было 24, то половина будет 12. И вот все это продали, значит, за 84 рубля. Дальше опять говорится, что оставшиеся пилы и топоры продали другой бригаде плотников за 100 рублей. Какие это оставшиеся? Будто нельзя сказать по-человечески? Если всего было 24 топора, а продали 12, то и осталось, значит, 12. А пил было всего-навсего 8; 3 продали одной бригаде, значит, другой бригаде продали 5. Так бы и написали, а то запутают, запутают, а потом небось говорят, что ребята бестолковые — не умеют задачи решать!

Я переписал задачу по-своему, чтоб она выглядела попроще, и вот что у меня получилось:

«В магазине было 8 пил и 24 топора. Одной бригаде плотников продали 12 топоров и 3 пилы за 84 рубля. Другой бригаде плотников продали 12 топоров и 5 пил за 100 рублей. Сколько стоит одна пила и один топор?»

Переписавши задачу, я снова прочитал ее и увидел, что она стала немножко короче, но все-таки я не мог додуматься, как ее сделать, потому что цифры путались у меня в голове и мешали мне думать. Я решил как-нибудь подсократить задачу, чтоб в ней было меньше цифр. Ведь совершенно не важно, сколько было в магазине этих самых пил и топоров, если в конце концов их все продали. Я сократил задачу, и она получилась вот какая:

«Одной бригаде продали 12 топоров и 3 пилы за 84 рубля. Другой бригаде продали 12 топоров и 5 пил за 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила?»

Задача стала короче, и я стал думать, как бы ее еще сократить. Ведь

---

*) Отрывок из книги Н. Носова «Витя Малеев в школе и дома», Москва, «Детзиг», 1959.

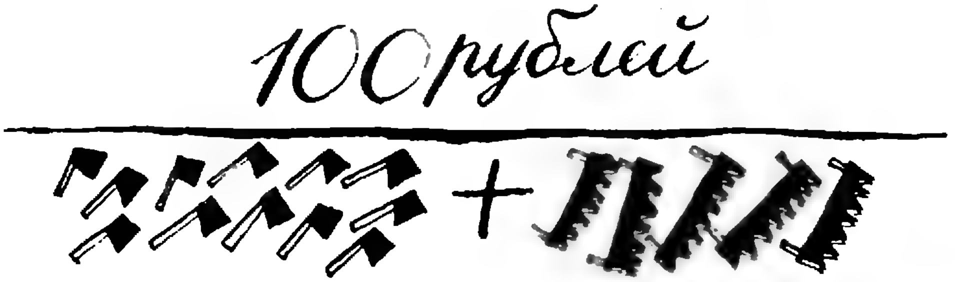
не важно, кому продали эти пилы и топоры. Важно только, за сколько продали. Я подумал, подумал — и задача получилась такая:

«12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля.

12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей.

Сколько стоит один топор и одна пила?»

Сокращать больше было нельзя, и я стал думать, как решить задачу. Сначала я подумал, что если 12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля, то надо сложить все топоры и пилы вместе и 84 поделить на то, что получилось. Я сложил 12 топоров и 3 пилы, получилось 15. Тогда я стал делить 84 на 15, но у меня не поделилось, потому что получился остаток. Я понял, что произошла какая-то ошибка и стал искать другой выход. Другой выход нашелся такой: я сложил 12 топоров и 5 пил, получилось 17, и тогда я стал делить 100 на 17, но у меня опять получился остаток. Тогда я сложил все 24 топора между собой и прибавил к ним 8 пил, а рубли тоже сложил между собой и стал делить рубли на топоры с пилами, но деление все равно не вышло. Тогда я стал отнимать пилы от топоров, а деньги делить на то, что получилось, но все равно у меня ничего не получилось. Потом я еще пробовал складывать между собой пилы и топоры по отдельности, а потом отнимать топоры от денег и то, что осталось, делить на пилы, и чего я только ни делал, никакого толку не выходило. Тогда я взял задачу и пошел к Ване Пахомову.



— Слушай, — говорю, — Ваня, 12 топоров и 3 пилы вместе стоят 84 рубля, а 12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила? Как, по-твоему, нужно сделать эту задачу?

— А как ты думаешь? — спрашивает он.

— Я думаю, нужно сложить 12 топоров и 3 пилы и 84 поделить на 15.

— Постой! Зачем тебе складывать пилы и топоры?

— Ну, я узнаю, сколько было всего, потом 84 разделю на сколько всего и узнаю, сколько стоила одна.

— Что «одна»? Одна пила или один топор?

— Пила, — говорю, — или топор.

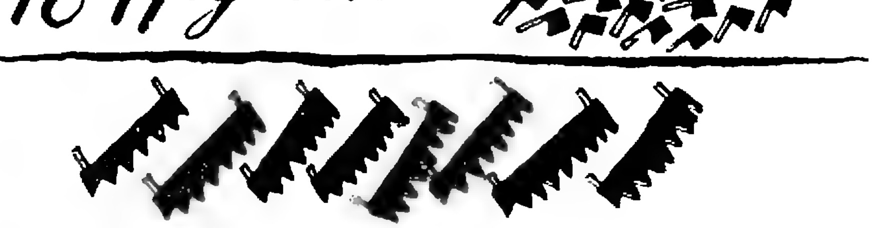
— Тогда у тебя получится, что они стоили одинаково.

— А они разве не одинаково?

— Конечно, не одинаково. Ведь в задаче не говорится, что они стоили поровну. Наоборот, спрашивается, сколько стоит топор и сколько пила отдельно. Значит, мы не имеем права их складывать.

— Да их, — говорю, — хоть складывай, хоть не складывай, все равно ничего не выходит!

— Вот поэтому и не выходит.



— Что же делать? — спрашиваю я.

— А ты подумай.

— Да я уже два часа думал!

— Ну, присмотрись к задаче, — говорит Ваня. — Что ты видишь?

— Вижу, — говорю, — что 12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля, а 12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей.

— Ну, ты замечаешь, что в первый раз и во второй топоров куплено одинаковое количество, а пил на две больше?

— Замечаю, — говорю я.

— А замечаешь, что во второй раз уплатили на 16 рублей дороже?

— Тоже замечаю. В первые раз уплатили 84 рубля, а во второй раз — 100 рублей. 100 минус 84, будет 16.

— А как ты думаешь, почему во второй раз уплатили на 16 рублей больше?

— Это каждому ясно, — ответил я, — купили 2 лишние пилы, вот и пришлось уплатить лишних 16 рублей.

— Значит, 16 рублей заплатили за 2 пилы?

— Да, — говорю, — за 2.

— Сколько же стоит одна пила?

— Раз две 16, то одна, — говорю, — 8.

— Вот ты и узнал, сколько стоит одна пила.

— Тьфу! — говорю. — Совсем простая задача! Как это я сам не догадался?!

— Постой, тебе еще надо узнать, сколько стоит топор.

— Ну, это уж пустяк, — говорю я. — 12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля. 3 пилы стоят 24 рубля. 84 минус 24, будет 60. Значит, 12 топоров стоят 60 рублей, а один топор — 60 поделить на 12, будет 5 рублей.

Я пошел домой, и очень мне было досадно, что я не сделал эту задачу сам. Но я решил в следующий раз обязательно сам сделать задачу. Хоть пять часов буду сидеть, а сделаю.

На следующий день нам по арифметике ничего не было задано, и я был рад, потому что это не такое уж большое удовольствие задачи решать.

«Ничего, — думаю, — хоть один день отдохну от арифметики».

Но все вышло совсем не так, как я думал. Только я сел за уроки, вдруг Лика говорит:

— Витя, нам тут задачу задали, я никак не могу решить. Помоги мне.

Я только поглядел на задачу и думаю:

«Вот будет история, если я не смогу решить! Сразу весь авторитет пропадет».

Я говорю ей:

— Мне сейчас очень некогда. У меня тут своих уроков полно. Ты поди погуляй часика два, а потом придешь, я помогу тебе.

Думаю: «Пока она будет гулять, я тут над задачей подумаю, а потом объясню ей».

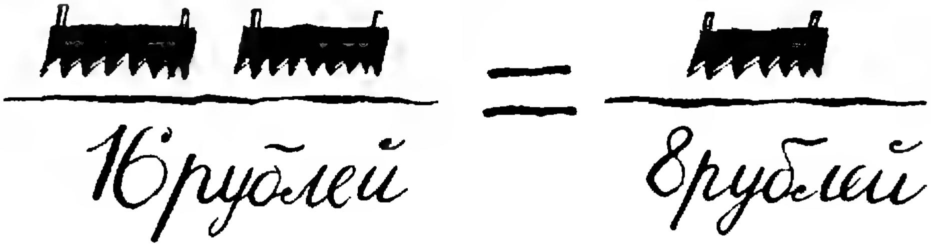
— Ну, я пойду к подруге, — говорит Лика.

— Иди, иди, — говорю, — только не приходи слишком скоро. Часа два можешь гулять или три. В общем, гуляй сколько хочешь.

Она ушла, а я взял задачник и стал читать задачу:

«Мальчик и девочка рвали в лесу орехи. Они сорвали всего 120 штук. Девочка сорвала в два раза меньше мальчика. Сколько орехов было у мальчика и девочки?

Прочитал я задачу, и даже смех меня разобрал. «Вот так задача! — думаю. — Чего тут не понимать? Ясно, 120 надо поделить на 2, получится 60. Значит, девочка сорвала 60 орехов. Теперь нужно узнать, сколько мальчик: 120 отнять 60, тоже будет



60... Только как же это так? Получается, что они сорвали поровну, а в задаче сказано, что девочка сорвала в два раза меньше орехов. Ага! — думаю. — Значит, 60 надо поделить на 2, получится 30. Значит, мальчик сорвал 60, а девочка 30 орехов». Посмотрел в ответ, а там: мальчик 80, а девочка 40.

— Позвольте! — говорю. — Как же это? У меня получается 30 и 60, а тут 40 и 80.

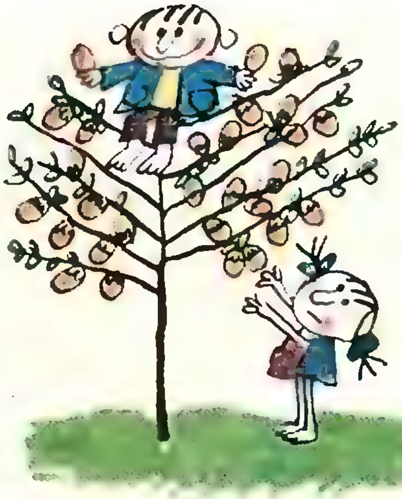
Стал проверять — всего сорвали 120 орехов. Если мальчик сорвал 60, а девочка 30, то всего получается 90. Значит, неправильно! Снова стал делать задачу. Опять у меня получается 30 и 60! Откуда же в ответе берутся 40 и 80? Прямо заколдованный круг получается!

Вот тут-то я и задумался. Читал задачу раз десять подряд и никак не мог найти, в чем здесь загвоздка.

«Ну, — думаю, — это третьеклассникам задают такие задачи, что и четвероклассник не может решить! Как же они учатся, бедные?»

Стал я думать над этой задачей. Стыдно мне было не решить ее. Вот, скажет Лика, в четвертом классе, а для третьего класса задачу не смог решить! Стал я думать еще усиленнее. Ничего не выходит. Прямо затмение на меня нашло! Сижу и не знаю, что делать. В задаче говорится, что всего орехов было 120, и вот надо разделить их так, чтоб у одного было в два раза больше, чем у другого. Если б тут были какие-нибудь другие цифры, то еще можно было бы что-нибудь придумать, а тут сколько ни дели 120 на 2, сколько ни отнимай 2 от 120, сколько ни умножай 120 на 2, все равно 40 и 80 не получится.

С отчаяния я нарисовал в тетрадке ореховое дерево, а под деревом мальчика и девочку, а на дереве 120 орехов. И вот я рисовал эти орехи, рисовал, а сам все думал и думал. Только мысли мои куда-то не туда шли, куда надо. Сначала я думал, почему мальчик нарвал вдвое больше, а потом догадался, что мальчик, наверно, на дерево влез, а девочка снизу рвала, вот у нее и получилось меньше. Потом я стал рвать орехи, то есть просто стирал их резинкой с дерева и отдавал мальчику и девочке, то есть пририсовывать орехи у них над головой. Потом я стал думать, что они складывали орехи в карманы. Мальчик был в курточке, я нарисовал ему по бокам два кармана, а девочка была в передничке. Я на этом передничке нарисовал один карман. Тогда я стал думать, что может быть, девочка нарвала орехов меньше потому, что у нее был только один карман. И вот я сидел и смотрел на них: у мальчика два кармана, у девочки один карман, и у меня в голове стали появляться какие-то проблески. Я стер орехи у них над головами и нарисовал им карманы, оттопыренные, будто в них лежали орехи. Все 120 орехов теперь лежали у них в трех карманах: в двух карманах у мальчика и в одном кармане у девочки, а всего, значит, в трех. И вдруг у меня в голове, будто молния, блеснула мысль: «Все 120 орехов надо делить на три части! Девочка возьмет себе одну часть, а две части останутся мальчику, вот и будет у него вдвое больше!» Я быстро поделил 120 на 3, получилось 40. Значит, одна часть 40. Это у девочки было 40 орехов, а у мальчика две части. Значит, 40 помножить на 2, будет 80! Точно, как в ответе. Я чуть не подпрыгнул от радости и скорей побежал к Ване Пахомову, рассказать ему, как я сам додумался решить задачу.



Выбегаю на улицу, смотрю — идет Шишкин.

— Слушай, — говорю, — Костя, мальчик и девочка рвали в лесу орехи, нарвали 120 штук, мальчик взял себе вдвое больше, чем девочка. Что делать, по-твоему?

— Надавать, — говорит, — ему по шее, чтоб не обижал девочек!

— Да я не про то спрашиваю! Как им разделить, чтоб у него было вдвое?

— Пусть делят, как сами хотят. Чего ты ко мне пристал! Пусть поровну делят.

— Да нельзя поровну. Это задача такая.

— Какая еще задача?

— Ну, задача по арифметике.

— Тьфу! — говорит Шишкин. — У меня морская свинка подохла, я ее только позавчера купил, а он тут с задачами лезет!

Послесловие

С тех пор, как Николаем Носовым была написана замечательная повесть «Витя Малеев в школе и дома», преподавание математики в школе сильно изменилось. Теперь предмет стал называться математикой, а не арифметикой, изменилось и его содержание. Нынешний третьеклассник или четвероклассник уже не станет мучительно раздумывать над задачей об орехах. Он обозначит число орехов у девочки через «x», а тогда у мальчика будет «$2x$» орехов. Таким образом, всего орехов было «$3x$», а известно, что их было 120. Значит, $3x = 120$, отсюда $x = 40$, $2x = 80$. Задача решена.

Что же касается задачи о «пилах и топорах», то и здесь может прийти на помощь всемогущий «x». Вспомним окончательную форму задачи, которую она приняла после упрощений:

«12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля.
12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей».

Обозначим стоимость пилы через «x», тогда из первого условия 12 топоров стоят $84 - 3x$ рублей, а один топор $(84 - 3x) : 12$ рублей. Запишем теперь второе условие:

$$12 \cdot (84 - 3x) : 12 + 5x = 100$$

или

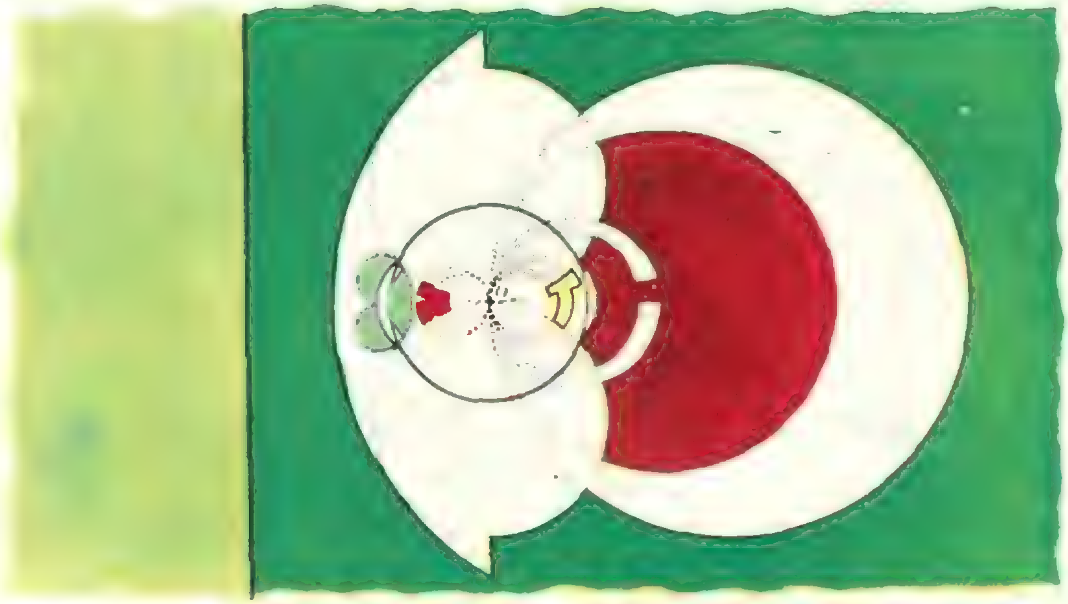
$$84 - 3x + 5x = 100,$$

откуда $x = 8$ (рублей). Снова на помощь пришел стандартный метод, который приводит к цели без долгих раздумий.

Однако не кажется ли вам, что решение Вани Пахомова гораздо красивее. Оно покоряет нас простотой и изяществом логического рассуждения, приводящего к решению задачи. Попробуйте и вы решать задачи не только стандартным способом (с помощью уравнений), но и просто логическим рассуждением. Напишите нам, какие задачи из учебников 3—5 классов проще решать логически, чем с помощью уравнений.

А. Савин

К статье В. Вавилова «Геометрия круга» (см. с. 40).



И. Константинов

Насыщенный пар

Давление газа зависит как от его температуры, так и от плотности газа (то есть от массы газа и занимаемого им объема). В то же время давление насыщенного пара зависит только от температуры и при данной температуре — вполне определенная величина, характеризующая вещество жидкости. С чем связано это различие между паром и газом?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, выясним, прежде всего, почему жидкость испаряется.

На молекулы поверхности жидкости действуют силы притяжения, направленные внутрь жидкости. Почему же молекулы вылетают наружу? Все объясняется тем, что молекулы в жидкости движутся хаотически. Поэтому вблизи поверхности всегда найдутся молекулы, скорости которых направлены наружу, и если абсолютные значения скоростей таких молекул достаточно велики, то они «прорвутся» через поверхность жидкости, то есть испарятся. Для испарения каждой молекулы силы притяжения должны совершить вполне определенную работу A. Назовем ее работой испарения молекулы. Очевидно, что эта работа отрицательна, так как силы притяжения направлены против перемещения молекулы. Следовательно, при испарении молекулы ее кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$ уменьшается. Значит, через поверхность жидкости могут прорваться только те молекулы, кинетическая энергия которых $\frac{mv^2}{2}$ больше работы испарения A. Именно такие быстрые молекулы вылетают из жидкости и образуют над ее поверхностью пар.

Так как при испарении жидкости из нее вылетают наиболее быстрые молекулы, то средняя кинетическая энергия молекул в оставшейся жидкости уменьшается; значит, жидкость при испарении должна охладиться. Опыт подтверждает, что это действительно так. (Вспомните, например, как охлаждается поверхность нашей кожи, когда она смочена быстроиспаряющимся спиртом или эфиром.) Чтобы испаряющаяся жидкость не охлаждалась, к ней необходимо подводить определенное количество теплоты от какого-нибудь источника. Например, при испарении воды с поверхности морей и океанов таким источником служит Солнце. Напомним, что количество теплоты, которое необходимо подвести к жидкости, чтобы при испарении одного килограмма жидкости ее температура не изменялась, называется удельной теплотой испарения.

Надо помнить, что молекулы пара над жидкостью тоже движутся хаотически, и часть их достигает поверхности жидкости. Эти молекулы снова возвращаются в жидкость. Одновременно с испарением жидкости происходит обратный процесс возвращения молекул пара в жидкость, или конденсация пара. От этого процесс превращения жидкости в пар замедляется. Но если непрерывно удалять образующийся пар, например, сдувая его, испарение жидкости ускорится. Ясно, что при этом жидкость быстрее охлаждается. Вот почему дуют на горячий суп или чай. Едва ли нужно пояснять, что при конденсации пара выделяется столько же теплоты, сколько поглощается при испарении.

Выше мы рассмотрели процесс испарения жидкости с открытой ее поверхности в сосуде, из которого жидкость может постепенно испариться целиком. Иное дело, когда жидкость находится в закрытом сосуде и не заполняет его. В таком случае образующийся пар не удаляется из сосуда.

В герметически закрытом сосуде, температура которого поддерживается неизменной, жидкость может сохраняться сколь угодно долго, не изменяя своего объема. Значит ли это, что испарение прекратилось? Конечно, нет. По-прежнему «быстрые» молекулы покидают поверхность жидкости, но одновременно происходит конденсация образовавшегося над жидкостью пара. И когда число молекул, вылетающих за данное время из жидкости, станет равным числу молекул, возвращающихся обратно за то же время, тогда массы как жидкости, так и пара будут оставаться неизменными. Наступает *равновесие* между жидкостью и паром. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называют насыщенным паром.

Находящиеся в равновесии жидкость и соприкасающийся с нею пар непрерывно обмениваются своими молекулами. Каково же число обмениваемых за данное время молекул? Сколько молекул вылетает из жидкости и возвращается обратно за данное время?

Пусть через единицу площади поверхности за единицу времени вылетает в среднем одно и то же число молекул z_0, а попадает в нее z молекул. Между жидкостью и паром наступает равновесие, когда $z_0 = z$.

Вычислить значение z_0 трудно хотя бы потому, что мы не знаем точного значения сил притяжения между молекулами пара и жидкости. Зато рассчитать значение z довольно просто. Действительно, внутрь жидкости проникает каждая молекула пара, попавшая на поверхность жидкости; следовательно, z равно числу молекул, попадающих за единицу времени на единицу площади поверхности жидкости. Найдем это число.

Направим ось X перпендикулярно свободной поверхности жидкости в сосуде (рис. 1). Будем считать, что проекции скоростей всех молекул пара на ось X одинаковы по абсолютной величине. Тогда у половины всех молекул проекция скорости на ось X

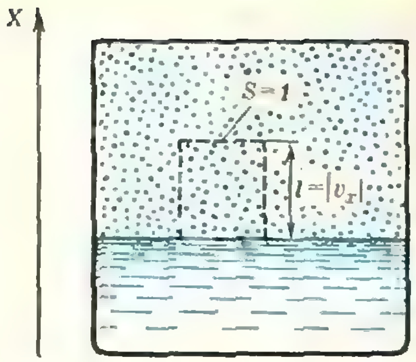


Рис. 1.

положительна и равна $|v_x|$, а у половины — отрицательна и равна $-|v_x|$.

За единицу времени на единицу площади поверхности попадут те молекулы пара, которые находятся от нее на расстоянии $l \leqslant |v_x|$ и имеют проекцию скорости на ось X, равную $-|v_x|$. Иными словами, за единицу времени на единицу площади поверхности жидкости попадет половина молекул пара, находящихся в объеме $V_1 = |v_x|$, примыкающем к поверхности. Если объем, занимаемый в сосуде паром, равен V и в этом объеме находится N молекул пара, то в объеме V_1 число молекул пара равно $N_1 = \frac{N}{V} V_1 = \frac{N|v_x|}{V}$.

Таким образом, число молекул пара, попадающих за единицу времени на единицу площади поверхности жидкости, равно

$$z = \frac{1}{2} \frac{N}{V} |v_x|.$$

Мы считали, что проекции скоростей молекул на ось X одинаковы по абсолютной величине. Однако это не так, и точнее было бы пользоваться не значением $|v_x|$, а средним значением этой величины. Поэтому

$$z = \frac{1}{2} \frac{N}{V} |\overline{v_x}|.$$

Если число z_0 молекул, покидающих жидкость через единицу площади поверхности за единицу времени, равно этому значению z, то между жидкостью и паром устанавливается равновесие.

Итак, число молекул, возвращающихся из пара в жидкость, зависит не только от температуры (от $|\bar{v}_x|$), но *и от плотности пара* $\left(\text{от } \frac{N}{V}\right)$. Следовательно, пар над жидкостью станет насыщенным, когда в занимаемом им объеме V накопится как раз столько молекул N, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2}\,\frac{N}{V}\,|\bar{v}_x| = z_0. \qquad (1)$$

Напомним, что отношение $\frac{N}{V}$ определяет давление p пара при данной температуре:

$$p = \frac{N}{V}\,kT. \qquad (2)$$

Если пар насыщенный, то, согласно (1), $\frac{N}{V} = \frac{2z_0}{|\bar{v}_x|}$, и давление пара равно

$$p_н = \frac{2z_0 kT}{|\bar{v}_x|}. \qquad (3)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что давление насыщенного пара действительно *не зависит от занимаемого* им объема и при данной температуре вполне определенная величина, характерная *для данной жидкости.*

Может показаться, что независимость давления насыщенного пара от объема противоречит *уравнению газового* состояния (2), из которого следует, что при постоянной температуре T давление газа обратно *пропорционально* занимаемому им объему V. Может быть, для насыщенного пара неприменимо уравнение *состояния газа?* В действительности никакого противоречия нет, и уравнение (2) вполне применимо.

Из уравнения (2) следует, что давление p газа обратно пропорционально его объему *при условии, что* N постоянно, то есть когда масса газа не изменяется. А для насыщенного пара это условие *не выполняется.* При изменении объема насыщенного пара его масса тоже изменяется. Действительно, если *сжать насыщенный* пар так, что его объем уменьшится от значения V до какого-нибудь значения V_1, немедленно *увеличится* отношение N/V_1. Тогда, как видно из формулы (1), увеличится число z молекул, возвращающихся *из пара* в жидкость, и оно превысит число z_0 «испаряющихся» молекул. Вследствие этого число N молекул пара начнет уменьшаться. Когда оно уменьшится до такого значения N_1, при котором

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N}{V},$$

равновесие восстановится. Но тогда, в соответствии с уравнением (2), восстановится и давление p пара. Так это и происходит на опыте.

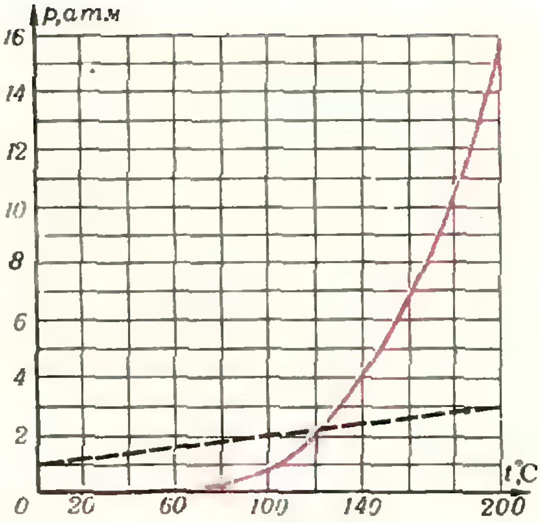


Рис. 2.

При уменьшении объема насыщенного пара часть его конденсируется и масса пара уменьшается во столько раз, во сколько раз уменьшается его объем. Поэтому давление насыщенного пара не зависит от его объема. (Нетрудно догадаться, что при увеличении объема, занимаемого насыщенным паром, от значения V до значения V_1 все произойдет в обратном порядке: число «конденсирующихся» молекул станет меньше чем число испаряющихся, вследствие этого число молекул в паре увеличится до такого значения N_1, при котором $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N}{V}$, и давление пара останется прежним.)

Итак, мы выяснили, что давление насыщенного пара при заданной температуре имеет вполне определенное значение, характерное для данного вещества. Мы подчеркнули «при заданной температуре», так как опыт показывает, что давление насыщенного пара над жидкостью зависит от температуры.

Получить из опыта эту зависимость нетрудно. Для этого нужно снабженный манометром закрытый сосуд с жидкостью поместить в нагреватель и измерять давление пара при разных температурах. На рисунке 2 приведен типичный график зависимости давления насыщенного пара от температуры для воды. Эта зависимость совсем не похожа на знакомую нам линейную зависимость давления газа или ненасыщенного пара от температуры, которая показана на том же графике пунктиром. Из графика, например, видно, что при повышении температуры от 373 °К (100 °С) до 473 °К (200 °С) давление насыщенного пара воды возрастает в 16 раз, от одной атмосферы до 16 атмосфер. Давление же газа или ненасыщенного пара возрастает всего лишь на 27 %, как это и следует из уравнения состояния газа.

Чем же объясняется такое сильное различие?

Обратимся еще раз к уравнению состояния газа

$$p = \frac{N}{V} kT.$$

Из этого уравнения видно, что когда плотность молекул $\frac{N}{V}$ не изменяется с изменением температуры, то давление пара пропорционально температуре T. Наблюдаемую на опыте более «крутую» зависимость давления p насыщенного пара от температуры можно объяснить только тем, что с повышением температуры растет и отношение $\frac{N}{V}$, то есть растет плотность пара.

Почему повышение температуры вызывает увеличение плотности насыщенного пара? Потому что с повышением температуры жидкости резко возрастает доля ее молекул, у которых кинетическая энергия больше работы испарения. Значит, при повышении температуры резко увеличивается число z_0 молекул, испаряющихся из жидкости. А это, в свою очередь, приводит к увеличению плотности молекул пара $\frac{N}{V}$ и его давления p.

Правда, с увеличением температуры растет и скорость молекул пара, то есть растет значение $|\bar{v}_x|$, но этот рост мал по сравнению с ростом плотности $\frac{N}{V}$.

Давление насыщенного пара растет при повышении температуры главным образом за счет увеличения количества жидкости, переходящей в пар.

Ясно, что если вся жидкость в закрытом сосуде испарится целиком, пар станет ненасыщенным и при дальнейшем нагревании его давление p растет пропорционально температуре T. Ненасыщенный пар можно превратить в насыщенный. Для этого его надо охладить. По мере понижения температуры давление пара будет падать пропорционально температуре до тех пор, пока не начнется его конденсация — на стенках сосуда появятся мелкие капельки жидкости в виде росы. Это значит, что пар стал насыщенным. Температура, при которой пар становится насыщенным, получила название точки росы.

Упражнения

1. Вычислить давление ненасыщенного водяного пара в сосуде при температуре 17 °С, если точка росы оказалась равной 5 °С.

2. За сколько времени испарится 1 *кг* воды в сосуде, если пространство над его поверхностью откачивается насосом, а температура воды поддерживается постоянной, равной 100 °С?

Площадь поверхности воды равна 0,01 $м^2$. Давление насыщенного пара воды при 100 °С равно 1 *бар*. Считать, что $\bar{v}_x = \sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}}$.

Н. Розов

Читатели советуют

В обширной редакционной почте «Кванта» есть довольно много писем, в которых содержатся разнообразные предложения, замечания, наблюдения, близкие к тематике «Практикума абитуриента». На письма, посвященные частным вопросам, редакция отвечает лично их авторам. Но с содержанием некоторых писем, на наш взгляд, полезно познакомиться всем читателям «Кванта». Хотя приводимые в этих письмах соображения не всегда новы и оригинальны, они могут представить интерес для поступающих. Не считая возможным публиковать такие письма целиком, редакция решила подготовить подборку материалов, составленную по предложениям читателей, с необходимыми дополнительными комментариями.

В ряде писем читатели рекомендуют познакомить абитуриентов с одним любопытным приемом решения уравнений с параметром.

Прежде чем пояснить сущность этого приема, рассмотрим такую задачу.

Пример 1. *Разложить на множители многочлен*

$$P = 4x^4 - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 + 2xy - 2x - 1.$$

На первый взгляд многочлен кажется довольно сложным. Но если заметить, что старшая степень y равна двум, и корни квадратного относительно y уравнения

$$-x^2y^2 + 2\,(x^2 + x)\,y + (4x^4 - x^2 - 2x - 1) = 0$$

легко находятся:

$$y_{1,2} = \frac{-(x^2+x) \pm 2x^3}{-x^2} = \frac{x+1}{x} \pm 2x,$$

получаем

$$P = -x^2(y - y_1)(y - y_2) = (2x^2 + x + 1 - xy)(2x^2 - x - 1 + xy).$$

Пусть теперь надо решить уравнение относительно x с параметром a:

$$f\,(x,\ a) = 0, \qquad (1)$$

причем $f\,(x,\ a)$ — некоторый многочлен от переменных x и a. Предположим, что непосредственное решение уравнения (1) относительно x затруднительно (скажем, уравнение (1) — кубическое относительно x и т. п.). Если в то же время левая часть уравнения (1) представляет собой квадратный трехчлен относительно a, то, найдя корни этого трехчлена

$$a_1 = f_1(x),\ a_2 = f_2(x),$$

перепишем уравнение в виде

$$(a - f_1(x))(a - f_2(x)) = 0.$$

Тем самым уравнение (1) распадается на два уравнения:

$$f_1(x) = a,\ f_2(x) = a.$$

Наш читатель *М. Л. Крайзман* (Львов) приводит в своем письме несколько уравнений, которые удается решить указанным приемом.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$x^4 - 10x^3 - 2\,(a - 11)\,x^2 + 2\,(5a + 6)\,x + 2a + a^2 = 0.$$

Заметив, что левая часть этого уравнения (четвертой степени) представляет собой квадратный трехчлен относительно a:

$$a^2 - 2a\,(x^2 - 5x - 1) + (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = 0,$$

и вычислив корни написанного квадратного трехчлена, получим два квадратных относительно x уравнения

$$x^2 - 6x - a = 0,$$
$$x^2 - 4x - a - 2 = 0.$$

Отсюда без особого труда получается окончательный ответ:

при $a \in\ ]-\infty;\ 9[$ корней нет;

при $a = -9$ один корень: $x = 3$;

при $a \in\ ]-9;\ -6[$ два корня: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+a}$;

при $a = -6$ три корня: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = 2$;

при $a \in\ ]-6;\ -5[\ \cup\ ]-5;\ \infty[$ четыре корня: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+a}$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{6+a}$;

при $a = -5$ три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Изложенный прием можно применять и в случае, когда рассматриваемое уравнение приводится к виду (1) после ряда преобразований. При этом, конечно, нужно следить за тем, чтобы не потерять корни и не приобрести посторонние решения, что требует особой аккуратности в связи с наличием в уравнении параметра.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$x^2-\sqrt{a-x}=a.$$

Переписав данное уравнение в виде $x^2-a=\sqrt{a-x}$, немедленно заключаем *), что мы должны решить уравнение

$$(x^2-a)^2=a-x \qquad (2)$$

и отобрать те его корни, которые удовлетворяют неравенству

$$x^2-a\geqslant 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) можно рассматривать как квадратное относительно a:

$$a^2-a(2x^2+1)+(x^4+x)=0,$$

откуда $a=x^2+x$ или $a=x^2-x+1$.

Уравнение

$$x^2+x-a=0 \qquad (4)$$

имеет корни при $a\in[-1/4;\ \infty[$:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2},$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

причем $x_1=x_2$ при $a=-1/4$. Поскольку для корней $x_{1,2}$ в силу равенства (4) имеем

$$x^2-a=-x,$$

то проверка неравенства (3) сводится к проверке неравенства $-x\geqslant 0$, которое для x_1 справедливо для всех $a\in[-1/4;\ \infty[$, а для x_2 выполнено лишь при $a\in[-1/4;\ 0]$.

Уравнение

$$x^2-x+1-a=0 \qquad (5)$$

имеет корни при $a\in[3/4;\ \infty[$:

$$x_3=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2},$$

$$x_4=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},$$

причем $x_3=x_4$ при $a=3/4$. Поскольку для корней $x_{3,4}$ в силу равенства (5) имеем

$$x^2-a=x-1,$$

то проверка неравенства (3) сводится к проверке неравенства $x-1\geqslant 0$, которое для x_3 неверно при любых a, а для x_4 выполнено при $a\in[1;\ \infty[$.

Подведя итог, запишем ответ:

при $a\in]-\infty;\ -1/4[$ корней нет;

при $a=-1/4$ один корень: $x=-1/2$;

при $a\in]-1/4;\ 0]$ два корня: $x=x_1$, $x=x_2$;

при $a\in]0;\ 1[$ один корень: $x=x_1$;

при $a\in[1,\ \infty[$ два корня: $x=x_1$, $x=x_4$.

В следующей задаче тот же прием с успехом применяется для решения системы уравнений.

Пример 4. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} ax^2+2by=a,\\ by^2+2ax=b.\end{cases}$$

Ясно, что если $a=b=0$, то любая пара чисел $(x,\ y)$ удовлетворяет системе. Если $b=0$, но $a\neq 0$ или если $a=0$, но $b\neq 0$, то система решений не имеет. Пусть, наконец, $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Тогда, выразив y из первого уравнения системы и подставив во второе, получаем уравнение четвертой степени относительно x с двумя параметрами a и b, которое можно рассматривать как квадратное относительно b:

$$4b^2-2b\cdot 4ax-a^2(1-x^2)^2=0.$$

Отсюда находим два уравнения:

$$b=\frac{a(1+x)^2}{2},\quad b=-\frac{a(1-x)^2}{2}.$$

Поучительную задачу прислали в своем письме наши читатели *А. М. Авоян* и *В. М. Анумян* (Ереван). Оказывается, что рассматриваемым приемом иногда удается решать и такие уравнения, в которых никакого параметра нет.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3. \qquad (6)$$

Последовательное возведение обеих частей уравнения в квадрат приводит к уравнению четвертой степени, решить которое очень трудно. Поэтому поступим следующим образом.

---

*) См., например, Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М., «Наука», 1976, с. 176—177).

Нетрудно сообразить, что корнями уравнения (6) будут те и только те корни уравнения

$$3+\sqrt{x}=(3-x)^2, \qquad (7)$$

которые удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant 3$, то есть $x\in[0;\ 3]$. Рассмотрим вместо уравнения (7) более общее уравнение с параметром

$$a+\sqrt{x}=(a-x)^2, \qquad (8)$$

совпадающее с уравнением (7) при $a=3$. Записав уравнение (8) как квадратное относительно a:

$$a^2-a(2x+1)+(x^2-\sqrt{x})=0,$$

легко получим два уравнения:

$$x+\sqrt{x}+1-a=0,\ \ x-\sqrt{x}-a=0,$$

или, полагая $a=3$,

$$x+\sqrt{x}-2=0,\ \ x-\sqrt{x}-3=0.$$

Решив эти уравнения и отобрав те их корни, которые удовлетворяют условию $x\in[0;\ 3]$, найдем корень уравнения (6): $x=1$.

Упражнения

1. Разложить на множители следующие многочлены:

а) $(1+x^2)y^2+2(x-y)(1+xy)+1$;

б) $(x^2-1)^2+(y+1)(4x-y-1)$.

2. Решить уравнения

а) $x^6+(c^2-b^2)x^2-bc^2=0$;

б) $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$;

в) $x^3+2\sqrt{3}\,x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$;

г) $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=bx+cy-az, \\ y^2+z^2=ay+bz-cx, \\ z^2+x^2=cz+ax-by. \end{cases}$$

Наш читатель *Г. Ф. Пискарев* (с. Прозорово Ярославской области) прислал в редакцию неравенство, для доказательства которого необходимо вспомнить изучаемое в школе соотношение между тангенсом и его аргументом.

4. Доказать, что при $0<x<\pi/2$

$$\operatorname{tg}x-\sin x>\frac{x^3}{2}.$$

* * *

Свое письмо в редакцию наш читатель *Б. Я. Старобин* (г. Северодонецк Ворошиловградской области) посвятил подробному анализу одной геометрической задачи, предложенной Заочной физико-технической школой при МФТИ (задание № 5 для учащихся девятых классов).

Пример 6. *Стороны AB и CD выпуклого плоского четырехугольника ABCD взаимно перпендикулярны и являются диаметрами двух конгруэнтных касающихся друг друга внешним образом окружностей радиуса r. Найти площадь четырехугольника ABCD, если известно, что* $|BC|:|AD|=1:3$.

Казалось бы, в этой задаче нет ничего особенного, каждый решал много таких задач. Познакомимся с решением, которое предлагают авторы задания ЗФТШ.

Используя обозначения, очевидные из чертежа (см. рис. 1), и учитывая, что $(AO)\perp(OD)$, можем написать

$$S_{ABCD}=S_{AOD}-S_{BOC}=$$

$$=\frac{1}{2}(2r+x)(2r+y)-\frac{1}{2}xy=$$

$$=r(x+y)+2r^2.$$

Запишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников BOC, O_1OO_2, AOD:

$$x^2+y^2=z^2, \qquad (9)$$

$$(r+x)^2+(r+y)^2=4r^2, \qquad (10)$$

$$(2r+x)^2+(2r+y)^2=t^2. \qquad (11)$$

Из соотношений (9) и (10) следует равенство

$$r(x+y)=r^2-\frac{1}{2}z^2. \qquad (12)$$

С учетом условия $z:t=1:3$ и равен-

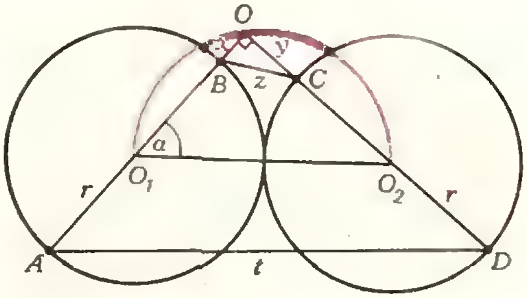


Рис. 1.

ства (12) из соотношений (9) и (11) легко исключить z и t:

$$x+y=\frac{2}{5}r. \qquad (13)$$

Поэтому окончательно $S_{ABCD}=\frac{12}{5}r^2$.

Ответ получен, в вычислениях ошибки нет. Но любознательный абитуриент, захотевший найти x и y, будет немало удивлен. Ведь из равенств (9), (12) и (13) получается, что

$$x^2+y^2=\frac{6}{5}r^2,$$

а это уравнение с учетом уравнения (13) дает для величин x и y значения $\frac{1\pm\sqrt{14}}{5}r$, так что одна из длин x или y отрицательна!

В чем же причина столь парадоксального результата? Дело в том, что изображенная на чертеже геометрическая картина несовместима с указанными в условии числовыми данными. Авторы задачи не заметили, что в ней речь идет о «невозможном объекте».

Чтобы убедиться в этом, найдем возможные значения величины $u=z/t$, совместимые с остальными геометрическими данными, указанными в условии задачи.

Поскольку O есть точка пересечения взаимно перпендикулярных прямых AB и CD, она лежит на полуокружности, имеющей отрезок O_1O_2 своим диаметром. Введем параметр $\alpha=\widehat{BO_1O_2}$. Тогда $x=|OO_1|-|BO_1|=2r\cos\alpha-r$, $y=2r\sin\alpha-r$, $z^2=x^2+y^2=6-4(\sin\alpha+\cos\alpha)$; аналогично $t^2=6+4(\sin\alpha+\cos\alpha)$, откуда

$$u^2=\frac{3-2(\sin\alpha+\cos\alpha)}{3+2(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{3-2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{3+2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)},$$

причем $\alpha\in]\pi/6;\pi/3[$, так как четырехугольник $ABCD$ — выпуклый. Легко видеть, что функция $u(\alpha)$ принимает наименьшее значение при $\alpha=\pi/4$, а наибольшие — при $\alpha=\pi/3$ и $\alpha=\pi/6$, причем $u(\pi/4)=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ $u(\pi/6)=\frac{1}{\sqrt{11+6\sqrt{3}}}$, то есть приближенно $u\in]0{,}171;0{,}217[$.

Таким образом, при сформулированных в условии задачи геометрических предположениях *отношение* $\frac{|BC|}{|AD|}$ *не может принимать значения* 1/3.

Конечно, от поступающих в вузы не требуется (если не оговорено противное) проводить анализ условий существования предложенной в задаче геометрической конфигурации. Однако надо иметь в виду, что различные данные задачи могут быть тесно связаны между собой, зависимы, и тогда произвольно выбирать эти данные уже нельзя.

Упражнения

В следующих задачах проведите «решение», исходя из «естественного» чертежа, а затем покажите, что описанные геометрические конфигурации невозможны.

5. Стороны параллелограмма равны 1 *см* и 0,5 *см*, а угол между диагоналями 60°. Найти площадь параллелограмма.

6. Сторона треугольника равна 12 *см*, а высота, проведенная к этой стороне, 10 *см*. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 *см* (см. «Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы» под ред. М. И. Сканави, М., «Высшая школа», 1972, задача 10.260).

7. Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены диаметр AB и хорда CD. Из точки D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (точка F лежит между точками A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на диаметр AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $|AM|=2|MO|$, $8|AH|=5|AB|$. Найти $\widehat{AMO}$.

* * *

Задача ученика 8 класса *Р. Азизяна* (пос. Разина Азербайджанской ССР) не сложная. Поэтому не торопитесь составлять уравнение — сначала попытайтесь найти ответ без вычислений. Если ничего не получится — решите задачу и подумайте, привлекая физические представления, почему ответ действительно очевиден. Объясните также, почему ответ не зависит от того, какая из двух величин v_1 и v_2 больше.

8. Два велосипедиста одновременно приняли старт в пункте A и должны финишировать в пункте B. Первый велосипедист первую половину времени движения до финиша едет равномерно со скоростью v_1, а вторую половину своего времени движения до фи-

ниша — равномерно со скоростью v_2. Второй велосипедист первую половину пути до финиша едет равномерно со скоростью v_2, а вторую половину пути до финиша — равномерно со скоростью v_1. Кто финиширует раньше?

* *
*

Введение понятия производной в школьный курс математики дает учащимся возможность проводить подробный анализ широкого класса функций, в частности, довольно быстро и единообразно решать задачи «на наибольшее или наименьшее значение», даже геометрические. Один пример такой задачи прислал в редакцию наш читатель *Э. Г. Готман* (г. Арзамас Горьковской области).

Пример 7. *Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна a. Известно, что длины высот, опущенных из вершины пирамиды на две противоположные стороны основания, равны h. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?*

Пусть $NABCD$ — данная пирамида, $[NL]$ и $[NM]$ — высоты граней ABN и CDN, $[NO]$ — высота равнобедренного треугольника LNM (рис. 2). Тогда $(AB)\perp(NL)$ и $(AB)\perp(NM)$, следовательно, $(AB)\perp(LM)$ и $(AB)\perp\perp(NO)$. Поэтому $[LM]$ — высота ромба $ABCD$, а $[NO]$ — высота пирамиды.

Согласно условию $|AB|=a$, $|NL|=|MN|=h$. Положим $|LM|=2|LO|=x$, тогда $S_{ABCD}=ax$, $|NO|=\sqrt{h^2-\frac{x^2}{4}}$, а объем V пирамиды равен

$$V(x)=\frac{1}{6}a\sqrt{(4h^2-x^2)x^2}.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения на отрезке $[0;\ a]$ функции V, которого она достигает одновременно с функцией

$$f(x)=-x^4+4h^2x^2.$$

Так как $f'(x)=-4x^3+8h^2x$, то, приравняв производную нулю, получим уравнение

$$x(x^2-2h^2)=0$$

для критических точек, из которых

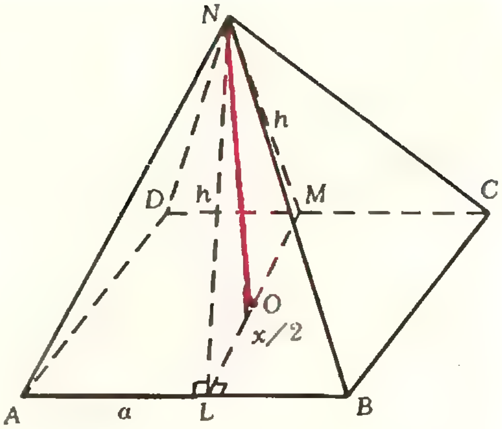


Рис. 2.

нас может интересовать только $x=h\sqrt{2}$.

Точка $h\sqrt{2}$ принадлежит промежутку $[0;\ a]$ в том и только в том случае, когда $a\geqslant h\sqrt{2}$. Будем сначала считать, что это условие выполнено. Сравнивая значение функции $f(x)$ в найденной точке и в концах промежутка $[0;\ a]$, заключаем, что функция $f(x)$ принимает наибольшее значение при $x=h\sqrt{2}$. Следовательно, если $a\geqslant h\sqrt{2}$, то $V_{\max}=\frac{1}{3}ah^2$.

Пусть теперь $a<h\sqrt{2}$, так что точка $x=h\sqrt{2}$ лежит вне промежутка $[0;\ a]$. Поскольку на отрезке $[0;\ h\sqrt{2}]$ функция $f(x)$ — возрастающая, то свое наибольшее значение она принимает в конце промежутка — при $x=a$. Следовательно, если $a<h\sqrt{2}$, то

$$V_{\max}=\frac{1}{6}a^2\sqrt{4h^2-a^2}.$$

Окончательный ответ выглядит так:

$$V_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{3}ah^2, \text{ если } a\geqslant h\sqrt{2};\\ \frac{1}{6}a^2\sqrt{4h^2-a^2}, \text{ если } a<h\sqrt{2}.\end{cases}$$

Упражнения

9 (МГУ, мехмат, 1966). Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 *см*². Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна равняться 20 *см*. При каких размерах коробки ее полная поверхность будет наибольшей?

10 (МГУ, физфак, 1971). Из прямоугольника, длина большей стороны которого равна l, вырезаются два полукруга, диаметрами которых служат меньшие стороны прямоугольника. При каком значении длины меньшей стороны прямоугольника площадь оставшейся части будет максимальной?

* * *

Вниманию читателей журнала было предложено уравнение

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}-5x=0$$

(см. «Квант», 1976, № 4, с. 43). Опубликованное решение этого уравнения (см. «Квант», 1976, № 5, с. 79) использовало некоторую специальную замену неизвестного.

В своем письме в редакцию школьница *Н. Кириллова* (г. Чкаловск Таджикской ССР) указывает иной путь решения. Переписав уравнение в виде

$$x^4+4-5x^3+10x=0,$$

она после удачной группировки членов раскладывает левую часть на множители:

$$\begin{gathered}(x^4-4x^2+4)+4x^2-\\ -5x(x^2-2)=0,\\ (x^2-2)^2-x(x^2-2)+\\ +4x^2-4x(x^2-2)=0,\\ (x^2-2)(x^2-2-x)+\\ +4x(x-x^2+2)=0,\\ (x^2-x-2)(x^2-4x-2)=0.\end{gathered}$$

В результате находятся корни уравнения:

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=2\pm\sqrt{6}.$$

* * *

Некоторые геометрические факты, прямо не формулируемые в школьных учебниках как теоремы, оказываются иногда очень полезными при решении конкурсных задач. Конечно, любую задачу для поступающих можно решить и без всяких «дополнительных» фактов. Однако такого рода факты часто позволяют быстрее «увидеть» решение и прийти к цели наиболее простым путем, поэтому их стоит запомнить. На один из таких фактов обращает внимание абитуриентов наш читатель *П. И. Горнштейн* (Киев). Рассмотрим следующую задачу (см. «Геометрия 7», 1975, с. 155).

Пример 8. *Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что суммы квадратов длин двух его противоположных сторон равны.*

Эта задача довольно проста — ее решение легко получается с помощью теоремы Пифагора. Мы сейчас увидим, что знание этого свойства четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями позволяет весьма экономно решить целый ряд задач, предлагавшихся на конкурсных экзаменах.

Пример 9. (МГУ, мехмат, 1971). *В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной оркружности равен R и $|AB|=2|BC|$.*

Пусть $|BC|=x$, $|CD|=y$ (рис. 3); тогда $|AB|=2x$. Так как в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $|AB|+|CD|=|BC|+|AD|$, откуда $|AD|=x+y$. По свойству четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями можем записать: $x^2+(x+y)^2=4x^2+y^2$, откуда $x=y$. Теперь можно показать, что диагональ AC является диаметром круга, описанного около четырехугольника $ABCD$ (убедитесь в этом!), поэтому из прямоугольного треугольника ABC имеем $x^2+4x^2=4R^2$, $x^2=\frac{4}{5}R^2$, а тогда

$$S_{ABCD}=2S_{ABC}=2x^2=8R^2/5.$$

Удачно воспользовавшись свойством четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями, мы очень быстро получили ответ. Попыт-

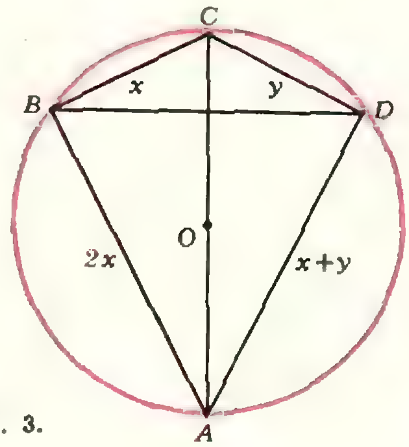


Рис. 3.

ка решить эту задачу применением тригонометрии приводит к сложным и громоздким вычислениям.

Пример 10. (МГУ, биофак, 1973). *Около четырехугольника $ABCD$ можно описать и в него можно вписать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны, $|AB| = |CD|$, радиус вписанной окружности равен 1. Чему равна площадь четырехугольника?*

Пусть $|AB| = |CD| = x$, $|BC| = y$; тогда $|AD| = 2x - y$ (почему?). По свойству четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями $x^2 + x^2 = y^2 + (2x-y)^2$, откуда $x = y$. Теперь легко доказать, что $ABCD$ — квадрат, $S_{ABCD} = 4$.

Упражнения

11 (МГУ, мехмат, 1973). В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что $[AM] \perp [DK]$, $[CK] \perp [BM]$, $\widehat{CKD} = 60^\circ$. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

12. Найти отношения длин сторон выпуклого четырехугольника, имеющего угол $\pi/3$, если этот четырехугольник описан около окружности и имеет конгруэнтные и взаимно перпендикулярные диагонали.

13 (НГУ). В круге взяты две перпендикулярные хорды. Доказать, что квадрат диаметра круга равен сумме квадратов длин четырех отрезков, на которые данные хорды делятся точкой их пересечения.

* * *

Ученик 10 класса *Г. Панаитов* (с. Конгаз Молдавской ССР) предлагает читателям журнала решить следующую придуманную им задачу.

14. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения взаимно перпендикулярных диагоналей основания $ABCD$. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ASC равна 300 *см*^{2}, а $|BD| = 10$ *см*.

* * *

Обратимся в заключение к одной хорошо известной задаче, предлагавшейся и на вступительных экзаменах в вузы.

Пример 11. *Дан угол XAY, меньший развернутого, и точка O внутри него. Через эту точку проведена прямая l, пересекающая стороны угла в точках B и C. Найти такое положение прямой l, при котором треугольник ABC имеет наименьшую площадь.*

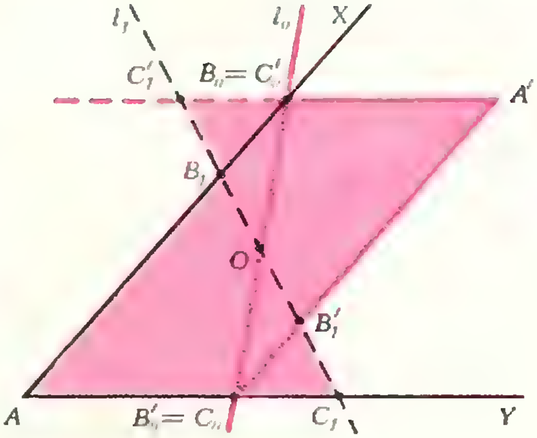


Рис. 4.

Решение этой задачи, основанное на вычислении площади треугольника ABC, приводится, например, в книге В. Б. Лидского и др. «Задачи по элементарной математике» (М., «Наука», 1967, с. 67, 293). В своем письме в редакцию *Б. В. Ванин* (Москва) указывает два чисто геометрических решения задачи, не использующих никаких вычислений. Познакомим читателей журнала с одним из этих решений.

Пусть l — некоторое положение секущей. Отразим отсекаемый треугольник ABC относительно точки O, получим треугольник $A'B'C'$. Если секущая l_0 такова, что ее отрезок B_0C_0 делится точкой O пополам (рис. 4), то объединение треугольников AB_0C_0 и $A'B_0'C_0'$ образует параллелограмм $AB_0A'C_0$, площадь которого вдвое больше площади треугольника AB_0C_0. Для любой другой секущей l_1 объединение треугольников AB_1C_1 и $A'B_1'C_1'$ образует многоугольник, площадь которого также вдвое больше площади треугольника AB_1C_1, но упомянутый параллелограмм содержится в этом многоугольнике (докажите!), а потому его площадь меньше. Следовательно, площадь треугольника ABC наименьшая, когда $[A'B] \parallel [AY)$, $[A'C] \parallel [AX)$.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 году

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

О Ленинградском государственном университете подробно было рассказано в «Кванте» № 6 за 1975 год и № 4 за 1976 год. В этом номере мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике на различных факультетах ЛГУ в 1976 году.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики - процессов управления

1. В кибернетическое устройство сначала вводится p *бит* некоторой информации (*бит* — единица количества информации), затем эта информация перерабатывается кибернетическим устройством по заданной программе, а потом полученная новая информация выдается на печатающее устройство. Определить наименьшую из возможных продолжительностей работы кибернетического устройства по приему, переработке и выдаче информации, если известно, что скорость переработки информации равна c *бит/сек* и в 3 раза меньше суммы скоростей ввода и выдачи информации, а количества информации на входе и выходе одинаковы.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)}>\frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}$$

при всех значениях параметра a.

3. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{\sin x+\sin 2x-\cos x}=\cos x.$$

4. Дан равносторонний треугольник ABC со сторонами длины a. На сторонах AB, BC и CA отложены равной длины отрезки AA', BB' и CC' по направлениям AB, BC и CA так, что площадь треугольника $A'B'C'$ в k раз меньше площади треугольника ABC. Найти длины указанных отрезков.

5. Дана окружность радиуса R с центром в точке O и ее диаметр AB. Через точку P, лежащую между O и A, проведена хорда CD, перпендикулярная диаметру AB. Известно, что сумма площадей поверхности, полученной вращением радиуса OC вокруг диаметра, и шарового сегмента, полученного вращением дуги AC, равна площади шарового сегмента, полученного вращением дуги CB. Найти $|OP|$.

Физический факультет

1. Лунная тележка приближается к обрыву, причем в начальный момент времени ее скорость равна v, ускорение a ($a \geqslant 0$), расстояние до обрыва S (считая по прямой, по которой движется тележка). Через какое время, считая от начального момента, надо подать команду с Земли на включение тормозов (при этом ускорение тележки становится равным a_1), чтобы тележка остановилась на краю обрыва? Расстояние от Земли до Луны равно L, скорость распространения радиосигнала c.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDH$, длина стороны основания которой равна a, бокового ребра b, проведена плоскость параллельно диагонали основания AC и ребру DH. Найти максимальную из возможных площадей фигуры, получающейся в сечении пирамиды этой плоскостью.

3. Найти корни уравнения

$$2(\sin x-\cos x+1)\times$$
$$\times\left(2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x\cdot\operatorname{tg}x-1\right)+$$
$$+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0,$$

лежащие в интервале $|x|<10$.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+2}(x^2-2x+p)\geqslant 2$$

при всех значениях параметра p.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1,\\[2mm] xy^2+\dfrac{1}{x^2y}=1+\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

Химический, психологический и экономический факультеты

1. В начальный момент использования гальванического элемента один из внутренних электродов содержал 20 *г* чистой ртути. В результате восстановления в течение первых суток увеличение чистой ртути было на 5% меньше по сравнению с процентным увеличением в течение вторых суток. Определить процентное увеличение чистой ртути в течение первых суток, если известно, что в течение вторых суток количество чистой ртути увеличилось на 1,648 *г*.

2. Решить неравенство

$$\log_a(x-1)+\log_a x>2.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{2}=\frac{\sin^3 x+3\cos^3 x}{\sin x+3\cos x}.$$

4. Дан треугольник ABC со сторонами $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Через точку D, лежащую на стороне AB, проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC; E и F — точки пересечения этих прямых со сторонами AC и BC. Известно, что $|DE|=|DF|$. Найти $|AD|$.

5. Даны шар радиуса R и секущая плоскость. Известно, что площадь полной поверхности меньшей части шара, отсекаемой данной плоскостью, в k раз меньше площади поверхности шара. Определить расстояние от центра шара до данной секущей плоскости.

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. Желая попасть в пункт B в нужное время, автомобилист выехал из пункта A со скоростью 64 *км/час*. В течение трех часов он ехал с этой скоростью. Затем «пробка» на дороге заставила его остановиться. Простояв 50 минут, автомобилист решил проехать в пункт B объездным путем, поэтому его путь увеличился на 31 *км*. В результате он приехал в пункт B с опозданием на 1 *час* 5 *мин*, хотя и ехал вторую часть пути со скоростью на 6 *км/час* большей, чем сначала. Найти кратчайшее расстояние между пунктами A и B по той дороге, по которой автомобилист хотел попасть в пункт B.

2. Решить уравнение

$$16^{\cos 2x} = 6\cdot 4^{-2\sin^2 x} + 1.$$

3. Решить неравенство

$$3x + \sqrt{5x-1} < 1.$$

4. Решить уравнение

$$\log_{(x+1)}(1-3x) = -1 + \log_{\sqrt{1-3x}}(1-2x-3x^2).$$

5. В прямоугольном треугольнике один острый угол вдвое больше другого острого угла, а сумма длин катетов равна l. Найти площадь треугольника.

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. Бригада выполнила план работы на 98%. Увеличение производительности труда каждого рабочего на 1/20 планового объема работы всей бригады позволило, освободив трех человек для выполнения других заданий, выполнить работу на 132%. Сколько человек было в бригаде?

2. Решить неравенство

$$\log_a x > \sqrt{\frac{6}{(\log_a x - 1)\log_x a}}.$$

3а (Только для биолого-почвенного факультета). Решить уравнение

$$\cos 3x\cdot\sin^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin 3x\cdot\cos^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{8}.$$

3б (Только для географического факультета). Решить уравнение

$$\frac{2(\cos^3 x - \cos 3x)}{3\sin x} = 1 + 5\cos 2x.$$

4. В равнобедренный треугольник ABC, у которого $|AB| = |AC|$, $\widehat{A} = \alpha$, а площадь равна S, вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти наименьшее из расстояний от вершины A до вершин квадрата.

5. Основанием призмы является квадрат со стороной длины a, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под острым углом α, причем проекция одного из них содержит диагональ квадрата. Из вершины квадрата, для которой проходящее через нее ребро и диагональ квадрата образуют острый угол, параллельно другой диагонали проведена секущая плоскость под углом β к плоскости основания. Найти площадь сечения в предположении, что сечение не пересекает верхнее основание.

В. Осипов, А. Шепелявый

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте», 1973, № 7 мы рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1976 году.

Математика

Математико-механический факультет

1. При каком значении параметра m корни x_1, x_2 уравнения $mx^2 + x + m = 0$ вещественны, различны и удовлетворяют неравенству $|x_1 - x_2| + (x_1x_2)^m + x_1 + x_2 \leqslant 0$?

2. У параллелепипеда все грани — ромбы со сторонами a и острым углом α. Найти объем этого параллелепипеда.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям: $\cos x - \cos 11x = 0$, $\cos 2x + \sin 3x = 1$, $|x| < 3$.

4. Решить уравнение

$$(\log_{\operatorname{tg} x}\cos x + 2)\log_{\operatorname{tg} x}\cos x = 2 - \log_{\operatorname{ctg} x}\cos x.$$

Физический факультет

1. К звезде X послан с Земли космический аппарат A, а через 12 лет — аппарат B. Оба аппарата достигли цели и, не останавливаясь, направились к Земле. Аппарат B вернулся на 8 лет раньше A. Через сколько лет после запуска A эти аппараты встретились, если в момент, когда A достиг X, B прошел 9/10 своего пути к X? Скорости аппаратов и расстояние до звезды считать постоянными.

2. Основание прямоугольного параллелепипеда вписано в круг радиуса R. Одна

из сторон основания стягивает дугу окружности величины 2α. Найти объем этого параллелепипеда, зная его боковую поверхность S.

3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(2^{-x}-2^{x})-\log_{3}(1-2^{x+1}+4^{x})<2.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$$

Физика

Математико-механический факультет

1. За какое время t тяжелое тело спустится с вершины наклонной плоскости высотой $h = 2$ *м* и углом при основании $\alpha = 45°$, если предельный угол, при котором тело может покоиться на этой плоскости, $\beta = 30°$?

2. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 0{,}1$ включена в сеть с напряжением $U_1 = 120$ *в*. Сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 1{,}2$ *ом*. Определить напряжение на вторичной обмотке при токе нагрузки $I_н = 5$ *а*. Потерями в первичной обмотке трансформатора пренебречь.

3. К батарее через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, то показание вольтметра возрастет вдвое. Во сколько раз изменится показание вольтметра, если R уменьшить до нуля? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Точечный источник света находится на оси вогнутого сферического зеркала. Расстояние между источником и оптическим центром зеркала равно d, а между источником и его изображением L. Определить радиус кривизны зеркала.

Физический факультет

1. Планета представляет собой однородный шар плотностью ρ. Каков период обращения искусственного спутника, движущегося вблизи ее поверхности?

2. При изотермическом сжатии газа уменьшение объема на 1 *л* сопровождается увеличением давления на 20%. На сколько процентов увеличится давление этого же количества газа, если объем уменьшить на 2 *л*?

3. Чему равен диаметр d изображения Солнца в зеркальном шарике диаметром $a = 0{,}4$ *см*? Диаметр Солнца $D = 1{,}4\cdot10^{9}$ *м*, а расстояние до него $L = 1{,}5\cdot10^{11}$ *м*.

4. Столб вертикально вбит в дно реки глубиной $h_1 = 2$ *м*. Часть столба высотой $h_2 = 1$ *м* возвышается над водой. Найти длину тени столба на дне реки, если высота Солнца над горизонтом 45°. Принять приближенно $n_{воды} = \sqrt{2}$.

Э. Голубов

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Хозяйственная деятельность человека теснейшим образом связана с природными особенностями Земли, поэтому всем нужны хорошие карты. По карте можно в короткое время ознакомиться с интересующим нас районом, с его ландшафтом, размещением природных месторождений и промышленных объектов. Велика роль карт и в обороне страны.

Но создать хорошую карту нелегко. Создание карт тесно связано с рядом специальных наук, в первую очередь с геодезией, аэрофотосъемкой и картографией. Ныне эти науки немыслимы без современных приборов. Исследования космического пространства и глубин океана выполняются приборами, основной частью которых являются оптические средства обработки информации, работающие как в видимой для глаза области спектра, так и в невидимой. В связи с этим важную роль играет оптическое приборостроение, в задачу которого входит разработка, проектирование и изготовление высокоточных оптических приборов, аэрофотоаппаратов, оптических и лазерных дальномеров, гироскопических приборов для определения направления истинного меридиана и др.

Специалистов для нужд картографии готовит один из старейших вузов страны — Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. Он был основан 14 мая 1779 года, когда при Московской межевой канцелярии была основана Землемерная школа, переименованная в 1819 году в Константиновское землемерное училище. В 1835 году училище было переименовано в Константиновский межевой институт, первым директором которого был русский писатель Сергей Тимофеевич Аксаков.

В настоящее время в составе института имеются следующие факультеты: геодезический по специальностям астрономо-геодезия (специализация: морская геодезия), прикладная геодезия, космическая геодезия; аэрофотогеодезический со специальностью аэрофотогеодезия; картографический со специальностью картография (специализации: проектирование и составление карт, издание карт); оптико-механический, готовящий специалистов широкого профиля по оптическим и оптико-электронным приборам; заочный факультет со специальностями прикладная геодезия, аэрофотогеодезия, картография; вечерний оптико-механический факультет.

Учебный процесс в институте предусматривает наряду с лекциями большое число лабораторных, практических и семинарских занятий; значительное место отведено учебной и производственной практике на геополигонах института.

Окончившие институт получают квалификацию инженеров соответствующей специальности и работают на предприятиях ГУГК, на картографических фабриках, в проектных и научно-исследовательских организациях.

В институте действует подготовительное отделение, очные и заочные подготовительные курсы. Кроме этого, для всех абитуриентов ежегодно с 1 июля по 1 августа организуются бесплатные подготовительные курсы.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в МИИГАиКе в 1976 году.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

2. Решить уравнение

$$9^{1/x} = 6^{1/x} + 2\cdot 4^{1/x}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/4}[(x+3)(x-5)] > -2.$$

4. Отношение площади боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти величину угла между боковым ребром и высотой пирамиды.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3\cdot 5^{\lg x-1} - 13\cdot 7^{\lg x-1}.$$

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} < 3^{-x}.$$

4. Найти отношение площади поверхности и объема шара соответственно к площади полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним треугольником в осевом сечении.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x).$$

3. Решить неравенство

$$3^{2x+5} \leqslant 3^{x+2} + 2.$$

4. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде даны: длина d диагонали, величина α двугранного угла при нижнем основании и длина H высоты. Найти объем усеченной пирамиды.

Физика

1. Мотоциклист проехал 0,4 пути между двумя городами со скоростью 72 *км/час*, а оставшуюся часть пути — со скоростью 54 *км/час*. Определить среднюю скорость мотоциклиста.

2. Свободно падающее тело прошло последние 10 *м* за 0,25 *сек*. Определить высоту падения и скорость в последний момент падения.

3. Определить натяжение троса при равноускоренном опускании кабины лифта массой 400 *кг*, если за 10 *сек* она прошла расстояние 30 *м*.

4. В море плавает льдина, часть которой объемом 195 $м^3$ находится над водой. Определить объем всей льдины и ее подводной части. Плотность льда 0,9 $г/см^3$, плотность морской воды 1,03 $г/см^3$.

5. Пуля массой 9 *г*, летящая горизонтально со скоростью 400 *м/сек*, пробивает бревно толщиной 30 *см* и вылетает из него со скоростью 100 *м/сек*. Какова средняя сила сопротивления движению пули в бревне?

6. Какова плотность азота при температуре 0 °С и давлении 10^5 $н/м^2$?

7. Определить скорость электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 300 *в*. Начальную скорость электрона принять равной нулю. Масса электрона $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг*, заряд $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*.

8. На столбе высотой 8 *м* подвешена электрическая лампочка, дающая полный световой поток 3768 *лм*. Определить освещенность поверхности земли у основания столба и на расстоянии 4 *м* от основания столба.

9. Предмет высотой $h = 5$ *см* находится на расстоянии $d = 12$ *см* от вогнутого зеркала с фокусным расстоянием 10 *см*. Где и какого размера получится изображение?

10. С какой скоростью вылетают электроны из поверхностного слоя цезия при освещении желтым светом с длиной волны $\lambda = 5{,}9\cdot 10^{-7}$ *м*, если работа выхода $A = 30{,}2\cdot 10^{-20}$ *дж*? Постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ *дж·сек*, масса электрона $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг*, скорость света в вакууме $c = 3\cdot 10^8$ *м/сек*.

М. Хорошев

Московский институт стали и сплавов

Московский институт стали и сплавов начал свое существование как металлургический факультет Московской горной академии, созданной по прямому указанию В. И. Ленина декретом Совета Народных Комиссаров от 4 сентября 1918 года. Сейчас Московский ордена Трудового Красного Знамени институт стали и сплавов является ведущим металлургическим и металловедческим вузом страны. В нем готовят инженерные и научные кадры для черной и цветной металлургии, а также для ряда новых отраслей науки и техники.

В нашем институте найдут себе специальность по душе все увлеченные математикой, физикой, химией, ибо металлургия сегодня самым тесным образом связана с этими фундаментальными науками. У нас готовят специалистов в области металлургии черных, цветных, редких, радиоактивных металлов, высокотемпературных материалов, алмазов и сверхтвердых сплавов, физики металлов, физико-химических методов исследований, полупроводниковой техники, экономики и кибернетики металлургических процессов.

Наибольший интерес у наших читателей вызывает физико-химический факультет. Расскажем о нем несколько подробнее.

Развитие техники предъявляет все более высокие и разнообразные требования к металлическим материалам. Например, необходимы сплавы, работающие при температурах, близких к абсолютному нулю и превышающих тысячи градусов, или магнитные сплавы, сильно намагничивающиеся или легко размагничивающиеся. В последнее время особую важность приобрели сверхпроводящие сплавы, уже сейчас применяемые для создания сильных магнитных полей, а в будущем — для передачи электрической энергии на далекие расстояния.

Для решения различных проблем, связанных с созданием и изучением новых материалов, нужны специалисты, обладающие знаниями как технологии, так и физики и математики на уровне выпускников физических факультетов университетов. Таких специалистов и готовит физико-химический факультет Московского института стали и сплавов (МИСиС).

Девять кафедр факультета руководят подготовкой инженеров по трем специальностям:

1) физика металлов (специализации: изучение электронной и атомной структуры металлов, металлофизика высокопрочных сплавов, прецизионные сплавы, сверхпроводящие материалы);

2) физико-химические исследования металлургических процессов (специализации: кибернетика металлургического производства, высокотемпературные материалы, коррозия и защита металлов, металлургия черных металлов, производство искусственных алмазов и сверхтвердых материалов);

3) металловедение, оборудование и технология термической обработки металлов.

В подготовке специалистов по физике металлов участвует Институт физики твердого тела АН СССР, где студенты ведут научно-исследовательскую работу и где им читается ряд специальных курсов.

Исследовательская работа студентов на кафедрах начинается с первых курсов, а с IV курса для участия в научно-исследовательской работе отводится специальное время в учебном расписании. При выполнении этой работы студенты овладевают методами современного эксперимента (ядерная спектроскопия, электронный парамагнитный резонанс, рентгеновский и электронно-оптический анализы, внутреннее трение, изучение механических, термодинамических и других свойств материалов в широком интервале температур и т. д.).

Выпускники физико-химического факультета направляются на работу в научно-исследовательские и проектные организации и в заводские лаборатории.

О высоком уровне математической подготовки наших студентов говорит их убедительная победа на VI Московской городской олимпиаде «Студент и научно-технический прогресс» (1-е место в подгруппе ведущих технических вузов г. Москвы).

Требования к поступающим на различные факультеты и специальности института различны. На технологических факультетах курс математики наиболее простой. На теоретических факультетах предъявляются повышенные требования по математике и физике. Уровень этих требований виден по приведенным ниже вариантам вступительных письменных экзаменов по математике на различных факультетах МИСиС и задачам из билетов устного экзамена по физике на физико-химическом факультете МИСиС 1976 года. В 1977 году примерно такие же варианты будут предложены абитуриентам, изучавшим математику по старой школьной программе. Задачи по новой школьной программе опубликованы в «Кванте» № 3 за 1977 год, а примерные варианты по новой программе публикуются ниже.

Математика, 1976 г.

Физико-химический факультет

1. Решить неравенство

$$\frac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|}>0.$$

2. При каком иррациональном значении x три числа

$$0{,}2727\ldots;\; x;\; 0{,}7272\ldots$$

могут составить прогрессию (арифметическую или геометрическую)? Найти x и сумму четырех членов этой прогрессии.

3. Решить уравнение

$$\cos 3x\cdot\operatorname{tg} 5x=\sin 7x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2^2(x+y)=1+\log_2^2 x-\log_2^2 y,\\ \log_2(x+y)=\log_2 x\cdot\log_2 y.\end{cases}$$

5. Шарик лежит на основании правильной треугольной пирамиды, касаясь основания в его центре. Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шарика. Найти радиус шарика, если высота пирамиды равна H, сторона основания пирамиды a.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. Два тела движутся навстречу одно другому из двух мест, находящихся на расстоянии 153 *м*. Первое проходит по 10 *м* в секунду, а второе в первую секунду прошло 3 *м*, а в каждую следующую секунду на 5 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{y} = 3xy, \\ y^2 + x = 5x^2y^2. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/3} (\log_4 (x^2 - 5)) > 0.$$

4. Решить уравнение

$$\sin x - \sin x \cdot \cos 6x = 2.$$

5. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем конуса, если его полная поверхность равна S.

Факультет металлургии цветных, редких металлов и сплавов

1. Решить неравенство

$$\frac{27^x - 3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x}{\sqrt{1 - x^2}} \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{2} \lg (x - 30) + \lg \sqrt{x + 30} = 1 + 2 \lg 2.$$

3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее членов, стоящих на четных местах, в три раза меньше суммы всех ее членов, стоящих на нечетных местах, и сумма первых пяти членов этой прогрессии равна 484.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3} + \sin 2x + 3 \cos x}{1 + 2 \sin x} = -\sqrt{3} + \cos x.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к плоскости основания проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна l, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α.

Факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. Решить уравнение

$$| x^2 + 2x - 1 | = \frac{5}{3} x + \frac{11}{3}.$$

2. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 3, а сумма их кубов равна 4. Найти эти числа.

3. Решить неравенство

$$x^2 \log_2^2 x + (x + 2) \log_2 x + 2x + 4 \geqslant$$
$$\geqslant (x + 2) \log_2^2 x + x^2 \log_2 x + 2x^2.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \left(x + \frac{5\pi}{4} \right) = 1.$$

5. В шар радиуса R вписан правильный тетраэдр. Поворотом его на угол $\pi/3$ вокруг высоты получается новый тетраэдр, вписанный в шар. Найти объем части шара, внешней по отношению к обоим тетраэдрам.

Математика, 1977 г.

Вариант А предназначается абитуриентам физико-химического факультета и факультета полупроводниковых материалов и приборов, варианты Б, В — абитуриентам всех остальных факультетов.

Вариант А

1. Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{4x - x^3} + \lg (x^2 - 1).$$

2. На отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ найти все решения уравнения

$$2 \sin 5x \cdot \sin \frac{3}{2} x = \cos \frac{x}{2}.$$

3. Коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения бинома $(a + b)^n$ составляют арифметическую прогрессию. Найти эти коэффициенты.

4. Равносторонний треугольник со стороной a вращается около внешней оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от нее на расстоянии, равном половине высоты треугольника. Найти объем тела вращения.

5. Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $f(x) = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. В какой точке графика функции $f(x) = x^2$ следует провести к нему касательную, чтобы она отсекла от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Вариант Б

1. Найти

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}.$$

2. Решить уравнение

$$\lg (3x - 2) - 2 = \frac{1}{2} \lg (x + 2) - \lg 50.$$

3. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \geqslant 0, \\ x - y \leqslant 0, \\ x - 4y + 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

4. Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника, причем справедливо равенство

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} =$$
$$= 2 \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Доказать, что один из углов треугольника равен 120°.

5. Криволинейный треугольник ограничен графиком функции $y(x) = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \right)$: Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку $O\,(0; 0)$, чтобы эта прямая разбивала криволинейный треугольник на две равновеликие части?

Вариант В

1. Дана функция

$$f(x) = \lg \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Найти ее область определения и показать, что

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a + b}{1 + ab}\right).$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(x) = \sin 2x - x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

3. Найти n, если $A_n^5 = 18\,A_{n-2}^4$, где A_n^k — число размещений из n элементов по k.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A\ (-3;\ -2;\ 0)$, $B\ (3;\ -3;\ 1)$ и $C\ (5;\ 0;\ 2)$. Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

5. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого равны 12, 10, 10. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найти объем пирамиды.

Физика

Физико-химический факультет

1. Шарик массой $m = 100$ *г* подвешен на нерастяжимой нити длиной $l = 1$ *м*. Определить энергию E маятника и скорость $|\vec{v}|$ шарика при прохождении положения равновесия, если наибольший угол отклонения маятника от вертикального направления $\alpha = 45°$.

2. Озеро имеет глубину $h = 18$ *м*. На дне температура воды $t_1 = 6\ °C$, а на поверхности $t_2 = 19\ °C$, атмосферное давление $p_0 = 760$ *мм рт. ст.* Пузырек воздуха, имеющий первоначально объем $V_1 = 1$ *мм*^{3}, медленно поднимается со дна. Чему будет равен его объем V_2 у поверхности воды?

3. Медный шар диаметром $d = 1$ *см* помещен в масло. Чему равен заряд q шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Напряженность электрического поля направлена вертикально вверх и $|\vec{E}| = 36\,000$ *в/см*. Плотность масла $\rho_1 = 800$ *кг/см*^{3}, меди $\rho_2 = 8600$ *кг/м*^{3}.

4. Тонкая стеклянная линза имеет в воздухе оптическую силу $D_1 = 5$ *дптр*. Показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}5$. Если эту линзу погрузить в жидкость с показателем преломления n_2, она действует как рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = -90$ *см*. Определить n_2.

Н. Квачева,
О. Малючков,
В. Треногин

Московский институт электронного машиностроения

Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ) — один из самых молодых вузов Москвы. Его создание — следствие бурного развития радиоэлектроники, полупроводникового и электровакуумного приборостроения, вычислительной техники и математического обеспечения современных ЭВМ, потребовавшего большого числа специалистов, сочетающих глубокие инженерные знания с отличной физико-математической подготовкой.

МИЭМ имеет следующие факультеты: полупроводниковое и электровакуумное машиностроение, автоматика и вычислительная техника, радиотехника, прикладная математика, вечерний и два специальных факультета прикладной математики и автоматизированных систем управления.

МИЭМ имеет также подготовительное отделение, где занятия ведутся по дневной форме обучения. На подготовительном отделении учатся в течение 8 месяцев передовые рабочие и демобилизованные из рядов Советской Армии. Все слушатели подготовительного отделения получают такую же стипендию, как первокурсники, и при успешной сдаче выпускных экзаменов зачисляются на 1-й курс института без дополнительных экзаменов.

Характерной особенностью подготовки инженеров в МИЭМ является сочетание фундаментального и прикладного характера образования, предусматривающего высокую физико-математическую подготовку.

Естественно, это обстоятельство учитывается при отборе абитуриентов на вступительных экзаменах.

Ниже приводятся варианты вступительных письменных экзаменов по математике и задачи устного экзамена по физике в МИЭМ в 1976 году.

Математика

Вариант 1

1. ЭВМ должна решить две задачи. Первая состоит из 9 миллионов операций типа A и 16 миллионов операций типа B и требует 11 минут 40 секунд машинного времени. Вторая задача содержит вдвое больше операций типа A и вдвое меньше операций типа B, на ее решение машина тратит 13 минут 20 секунд. Сколько операций каждого типа может выполнить ЭВМ в секунду?

2. Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\sin x = \frac{9\sin x - 2\sin 3x - 9\sin 7x}{\cos^2 2x + 4\cos 4x}$$

и найти сумму его корней, лежащих в промежутке $]-12;\ 39[$.

3. Решить уравнение $(a > 0,\ \ b > 0)$:

$$\frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}} = 1.$$

4. Решить неравенство

$$\log_a (x - 2) + \log_a x > 1.$$

5. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна c, а величина острого угла α. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол величины β. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

Вариант 2

1. При одновременной работе два трактора марки *A* и один трактор марки *B* могут вспахать поле площади 400 *га* за 10 суток. Один трактор марки *B* может вспахать это поле на $8^1/_3$ суток быстрее, чем один трактор марки *A*. За какое время могут вспахать поле в 960 *га* четыре трактора марки *A* и три трактора марки *B*?

2. Решить уравнение.

$$\frac{3 \sin 4x + 2 \sin 2x}{3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3} + 2 \operatorname{tg} x = 0$$

и найти сумму его корней, лежащих в промежутке $]-18;\ 53[$.

3. Решить неравенство $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant \frac{3}{2}$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \log_x \sqrt{a^3}} \cdot \log_a x + 1 = 0.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде, у которой высота длины H составляет с боковыми ребрами угол величины α, через диагональ основания проведена плоскость под углом β к основанию. Определить площадь сечения.

В. Тонян

Физика

1. Тело *1* бросают вертикально вверх с начальной скоростью $|\vec{v}_0| = 30$ *м/сек* (рис. 1). Тело *2*, находящееся на высоте $h = 40$ *м* над поверхностью Земли, бросают горизонтально со скоростью $|\vec{u}| = 20$ *м/сек*. С каким запаздыванием или опережением τ нужно бросить второе тело, чтобы тела столкнулись в воздухе, если $s = 20$ *м* и $|\vec{g}| = 10$ *м/сек²*? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Два тела с массами $m_1 = 200$ *г* и $m_2 = 300$ *г*, движущиеся со скоростями $|\vec{v}_1| = 4$ *м/сек* и $|\vec{v}_2| = 3$ *м/сек*, направленными перпендикулярно друг другу, испытывают абсолютно неупругое соударение. После соударения они движутся как единое целое. На сколько градусов повысится температура этих тел, если их удельная теплоемкость одна и та же и равна $c = 0{,}03$ *кал/(г·град)*?

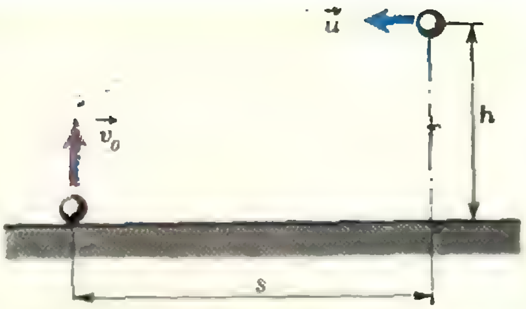


Рис. 1.

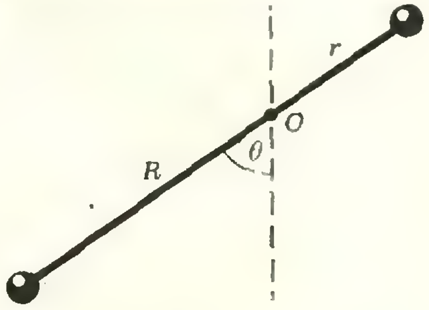


Рис. 2.

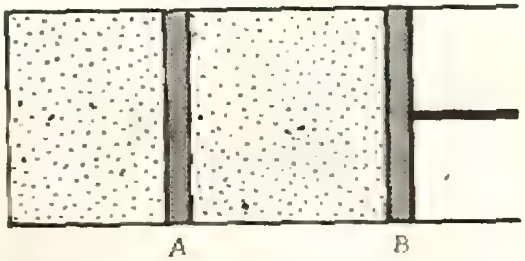


Рис. 3.

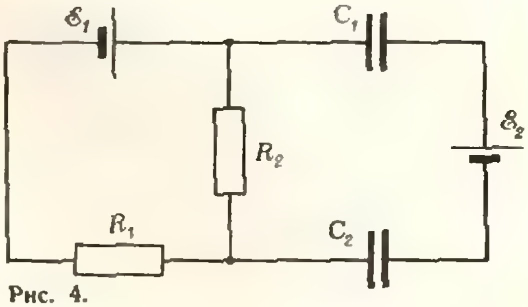


Рис. 4.

3. Два груза одинаковой массы, связанных невесомым стержнем, совершают колебания (рис. 2). Расстояние от точки подвеса O до одного из грузов $r = 10$ *см*, а до другого — $R = 30$ *см*. С какой угловой скоростью стержень проходит положение равновесия, если наибольший угол отклонения стержня от вертикали $\theta = 60°$?

4. В двух частях цилиндра, разделенных поршнем *A*, находятся разные массы m_1 и m_2 воздуха при одной и той же температуре (рис. 3). Правый конец цилиндра закрыт подвижным поршнем *B*. На сколько сместится поршень *A*, если поршень *B* передвинуть вправо на расстояние $b = 4$ *см*? При равновесии в цилиндре устанавливается первоначальная температура. Отношение масс $m_1/m_2 = 3$.

5. В вершины квадрата со стороной $a = 25$ *см* поместили 4 одноименных электрических заряда величиной $Q = 7 \cdot 10^{-9}$ *к* каждый и отпустили. С какими скоростями будут двигаться эти заряды, когда расстояние между ними удвоится? Массы всех зарядов одинаковы и равны $m = 5.41$ *г*.

6. Определить напряжение на конденсаторах емкостью $C_1 = 1$ *мкф* и $C_2 = 3$ *мкф* (рис. 4), если $\mathscr{E}_1 = 4$ *в*, $\mathscr{E}_2 = 10$ *в*, $R_1 = 100$ *ом* и $R_2 = 300$ *ом*. Внутренним сопротивлением источников можно пренебречь.

7. Электрон, движущийся со скоростью $|\vec{v}| = 10^7$ *м/сек*, влетает в однородное магнитное поле $|\vec{B}| = 2$ *тл* под углом $\alpha = 60°$ к линиям магнитной индукции. Определить шаг винтовой траектории электрона. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

8. При лобовом столкновении атома водорода, двигавшегося со скоростью $|\vec{v}_0| = 7 \cdot 10^4$ *м/сек*, с покоившимся атомом водорода был испущен световой квант с длиной волны $\lambda = 0{,}122$ *мкм*. Пренебрегая импульсом фотона, определить скорости атомов после столкновения. Масса атома водорода $m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*.

Г. Ефашкин

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт имени В. И. Ленина (МГПИ) является старейшим высшим педагогическим учебным заведением страны. Институт был создан на базе Высших женских курсов, организованных в Москве в 1872 году, и ныне является крупнейшим учебно-педагогическим и научно-исследовательским центром в системе народного образования.

На математическом факультете МГПИ имеется 7 кафедр: математического анализа, алгебры, геометрии, теории чисел, вычислительной математики и программирования, методики преподавания математики, физики. В течение пяти лет студенты изучают математический анализ, алгебру и теорию чисел, геометрию, вычислительную математику и программирование, теорию аналитических функций, уравнения математической физики, теорию вероятностей, математическую логику, общую физику и теоретическую механику, астрономию, методику преподавания математики, педагогику, психологию и целый ряд других специальных общеобразовательных и общественно-экономических дисциплин. Кроме того, студенты по своему выбору слушают специальные курсы по самым различным вопросам современной математики и участвуют в работе специальных математических и методических семинаров.

Мастерством преподавания математики в средней школе, умением передавать основы этой науки, свою любовь и увлеченность математикой следующему поколению студенты овладевают на занятиях по методике преподавания математики и на педагогической практике у лучших учителей московских школ.

В вычислительном центре математического факультета МГПИ студенты знакомятся с современной вычислительной техникой, приобретают навыки работы на самых совершенных электронно-вычислительных машинах. Большие возможности предоставляет факультет и для научной деятельности студентов. Научное студенческое общество привлекает студентов к научно-исследовательской работе по математике, по вопросам преподавания математики и программирования в средней школе. Лучшие работы студентов отмечаются на общеинститутских, городских и всесоюзных смотрах студенческих научных работ.

Физический факультет МГПИ готовит учителей физики для средней школы по специальности: физика и астрономия.

В составе факультета 6 кафедр: общей и экспериментальной физики, теоретической физики, физики твердого тела, методики преподавания физики, математической физики и общетехнических дисциплин.

Кроме основных курсов на всех кафедрах читаются разнообразные спецкурсы, организована работа в спецпрактикумах, научных кружках и проблемных лабораториях.

На факультете работает студенческое научное общество.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике на математическом и физическом факультетах МГПИ им. В. И. Ленина в 1976 году.

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. Две бригады колхозников должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, а потому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

2. Решить уравнение

$$\sin 4x \cdot \cos x = \sin 3x \cdot \cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$5^{3 \lg x} = 12{,}5x.$$

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B и середины M и N ребер AD и CC_1 проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости грани $ABCD$.

5. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $|AB| = \frac{1}{2}|AD|$, $|BC| = \frac{1}{2}|CD|$. Зная, что $|AB| = a$, $|AC| = b$, вычислить $|BC|$.

Вариант 2

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 *км*, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый курьер достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 *км/час*?

2. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{3}{2} - 2\cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

4. Длина каждого ребра правильной шестиугольной призмы равна 1 *дм*. Найти площадь сечения, проходящего через сторону основания и большую диагональ призмы.

5. В полуокружности радиуса R с диаметром AB проведены две хорды AC и AD. Длина первой равна длине стороны квадрата, а второй — длине стороны правильного треугольника, вписанных в данную окружность. Определить длину хорды CD.

Физический факультет

Вариант 3

1. Основанием пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$, длина стороны которого равна a, величина острого угла ABC равна α. Две боковые грани SAB и SBC перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

2. Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = 1 - 3x + 6x^2.$$

Построить график этой функции.

3. Решить уравнение

$$\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x = 7.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\log_{a\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0.$$

Вариант 4

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ, ее длина равна l, острый угол между диагоналями основания β. Определить объем параллелепипеда.

2. Решить неравенство

$$3x < 2x^2 + 1.$$

Построить графики функций $y = 3x$ и $y = 2x^2 + 1$, использовать эти графики для проверки решения.

3. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

Физика

1. Радиус планеты Марс составляет 0,53 радиуса Земли, а ее масса равна 0,11 массы Земли. Определить, во сколько раз сила притяжения на поверхности Марса меньше силы притяжения на Земле.

2. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выдаваясь над поверхностью на $a = 2$ *см*. Какова масса льдины, если ее площадь $S = 150$ *см*^{2}? Плотность льда $\rho = 0{,}92$ *г/см*^{3}.

3. Шарик массой $m = 200$ *г*, подвешенный на нити длиной $l = 20$ *см*, отклонен от положения равновесия так, что нить составляет угол $\alpha = 60°$ с вертикалью. Шарику сообщили скорость $|\vec{v}| = 2$ *м/сек* в направлении, перпендикулярном нити. Какова должна быть прочность нити, чтобы шарик при движении не оборвал ее?

4. Пуля массой $m = 10$ *г* попадает в деревянный брусок массы $M = 990$ *г*, подвешенный на длинной нити, и застревает в нем. Определить скорость бруска сразу после попадания в него пули, если скорость пули $|\vec{v}_0| = 500$ *м/сек*. Какая часть кинетической энергии пули перешла в тепло?

5. Закрытый цилиндр объемом $V = 1$ *л* разделен на две части подвижным невесомым поршнем. В одной части цилиндра находится газ при температуре $t_1 = 0\,°$C, в другой — такая же масса данного газа при температуре $t_2 = 100\,°$C. Определить объемы V_1 и V_2 частей цилиндра при равновесии поршня. Поршень и стенки сосуда теплонепроницаемы.

6. Два заряда, находясь в воздухе на расстоянии $r_1 = 10$ *см*, действуют друг на друга с силой $|\vec{F}_1| = 56$ *дин*, а в некоторой непроводящей жидкости на расстоянии $r_2 = 5$ *см* — с силой $|\vec{F}_2| = 4$ *дин*. Какова диэлектрическая проницаемость ε жидкости?

7. Найти внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при двух значениях внешнего сопротивления: $R_1 = 5$ *ом* и $R_2 = 0{,}2$ *ом*.

8. В однородном магнитном поле, индукция которого $|\vec{B}| = 1$ *тл*, находится плоский виток площадью $S = 10^{-2}$ *м*^{2}, расположенный перпендикулярно к магнитным линиям. Сопротивление витка $R = 0{,}2$ *ом*. Какой заряд протечет по витку, если поле исчезнет?

9. Расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения одинаковы и равны $a = 0{,}4$ *м*. Как изменится положение и величина изображения, если предмет сместить на расстояние $l = 20$ *см* по направлению от линзы?

10. Определить длину волны λ света, которым освещается поверхность металлического сплава, если кинетическая энергия фотоэлектронов $W = 0{,}35 \cdot 10^{-19}$ *дж*, а работа выхода электронов из сплава $A = 4{,}15 \times 10^{-19}$ *дж*. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*.

В. Бестаева, О. Овчинников, Г. Шадрин

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт (ВЗФЭИ) был организован в 1930 году. В настоящее время это один из крупнейших вузов страны, базовый институт заочного экономического образования в нашей стране. В нем обучаются более 30 тысяч студентов.

Институт готовит экономистов высшей квалификации следующих специальностей: финансы и кредит (специализации: финансы, кредит, финансирование и кредитование капитальных вложений, финансы промышленности), бухгалтерский учет (специализации: учет в промышленности, учет в строительстве, учет в сельском хозяйстве), планирование промышленности, экономика труда, статистика, планирование народного хозяйства, экономика и планирование материально-технического снабжения.

Учебно-методическая и научно-исследовательская работа в институте осуществляется двадцатью кафедрами, в составе которых имеются видные советские ученые-экономисты.

Студенты ВЗФЭИ изучают высшую математику на трех курсах: на первом — общий курс (аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, теория рядов), на втором — теория вероятностей и математическая статистика, на третьем — математическое программирование.

Основной формой обучения студентов во ВЗФЭИ является их самостоятельная работа. Однако студенты обязаны посещать установленные учебным планом очные занятия.

Учебный процесс максимально приближен к месту жительства студентов. Он осуществляется в 24 территориальных подразделениях института (филиалы, факультеты, учебно-консультационные пункты), расположенных в Архангельске, Барнауле, Белгороде, Брянске, Владимире, Волгограде, Воронеже, Горьком, Калуге, Кемерове, Кирове, Курске, Липецке, Москве, Омске, Орле, Оренбурге, Пензе, Смоленске, Туле, Уфе, Хабаровске, Челябинске, Ярославле. Студентам, живущим в этих городах, регулярно (два-три раза в неделю) в течение всего учебного года читаются лекции, проводятся практические занятия, консультации. Студенты, проживающие в других местах («периферия») в начале учебного года вызываются на «установочные» лекции. Экзамены для всех студентов проводятся два раза в год (зимой и летом).

Поступающие во ВЗФЭИ сдают вступительные экзамены по математике (письменно), русскому языку и литературе (письменно), истории СССР (устно) и географии СССР (устно).

На основе конкурсного отбора в первую очередь зачисляются лица, характер работы которых соответствует избранной в вузе специальности (если они работают по этой специальности не менее шести месяцев), выпускники средних специальных и средних профессионально-технических учебных заведений, поступающие на родственные специальности, а также уволенные в запас военнослужащие срочной службы (если с момента увольнения в запас прошло не более трех лет).

Ниже приведены два варианта заданий на вступительном письменном экзамене по математике во ВЗФЭИ в 1976 году.

Вариант 1

1. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если первый работал в эту смену 6 часов, а второй — 7 часов, причем вместе они обработали 616 деталей?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y 9^x = 81, \\ 2\lg(x+y) - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$$

3. Решить неравенство $\dfrac{2}{x} > \dfrac{1}{2}$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}-1} + \sqrt{\sqrt[3]{x}+2} = 3.$$

5. Около круга описан равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 10 *см*, основания 12 *см*. Определить радиус круга.

Вариант 2

1. Две организации приобрели некоторое количество разных туристических путевок, первая — на 300 рублей, вторая — на 270 рублей. Вторая организация купила на 5 путевок меньше, но заплатила за каждую путевку на 3 рубля больше. Сколько путевок купила каждая организация?

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3-2x} = 15\frac{5}{8}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{x+4}{x+2} < 2.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y = 100, \\ \lg x - \lg y = \lg 1{,}6. \end{cases}$$

5. Упростить выражение ($1+\cos 2\alpha \neq 0$, $1+\cos\alpha \neq 0$)

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

А. Карасев

Примерные варианты вступительных письменных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

В этом номере мы продолжаем публиковать примерные варианты вступительных письменных экзаменов по математике в вузы в 1977 году, проводимых по новой программе (см. «Квант» № 2).

Варианты I уровня соответствуют физико-математическим факультетам университетов и факультетам прикладной математики втузов, II уровня — факультетам технических вузов.

I уровень

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_{2x}(3x+1)>2.$$

2. Найти множество значений функции

$$f(x)=\sin x\cdot\cos 2x.$$

3. Доказать, что плоскости, заданные уравнениями $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, $(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=0$, содержат общую прямую.

4. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC соответственно выбраны точки D и E так, что $|BD|=|CD|$, $|AE|=2|CE|$. Найти $\frac{|BC|}{|AB|}$, если известно, что прямые AD и BE взаимно перпендикулярны, а $\widehat{ABC}=60^\circ$.

5. При каком положительном a площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\frac{x}{6}+\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=a$, $x=2a$, принимает наименьшее значение?

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$x^3(x-2)^3-x\sqrt{x(x-2)^3}=2.$$

2. Доказать, что если $|x|\leqslant 2$, то $3x^5-5x^3-30x<40$.

3. При каком значении $x_0\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ касательные к графику функции $f(x)=\sin x+\sin 2x$ в точках с абсциссами x_0 и $x_0+\frac{\pi}{2}$ параллельны?

4. Разносторонний треугольник разрезан на два треугольника. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около этих двух треугольников, различны.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1, L—центр грани CC_1D_1D. Найти угол между плоскостями BKL и AD_1C.

II уровень

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3(6x^2-x)}>2.$$

2. Найти наименьший член последовательности

$$x_n=n^4-5n^3-3n^2.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x\cos 3x=2\sin x\sin 3x.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой 2 и осью абсцисс.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1, L — середина ребра AD, M — центр грани CC_1D_1D. Доказать, что прямые KM и B_1L взаимно перпендикулярны.

Ю. Ионин

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева, 1977

Вариант 1

1. Исследовать функцию

$$y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2$$

и построить схематически ее график.

2. Сколько четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

3. Решить уравнение

$$\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1.$$

5. В кубе, длина ребра которого равна a, проведены плоскости через его центр и каждое ребро. Определить объем и поверхность каждой из образовавшихся пирамид.

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+2x+8$ и осью абсцисс.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$$

3. Даны координаты точек: $A(0;1;-2)$, $B(1;-1;-4)$, $C(2;7;1)$. Найти $\widehat{BAC}$.

4. Решить уравнение

$$1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

5. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны, их длины $\sqrt{70}$ *см*, $\sqrt{99}$ *см*, $\sqrt{126}$ *см*. Найти объем и площадь основания пирамиды.

В. Ляховский

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на доступные школьникам книги по математике и физике, вышедшие во II квартале 1977 года. Большинство из них можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., *Элементы комбинаторики.* Перевод с укр. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Комбинаторика — один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике. Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей — физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по теории кодов.

В этой книге излагаются основные понятия комбинаторики и методы решения комбинаторных задач. При этом систематически используются понятие множества и операции над множествами, поскольку большинство комбинаторных задач можно сформулировать как задачи теории конечных множеств. Особо нужно отметить метод производящих функций и метод траекторий. Эти методы важны сами по себе, так как находят применение не только в комбинаторике, но и в других разделах современной математики.

Книга предназначена школьникам старших классов. В основу книги положены лекции, прочитанные учащимся Украинской заочной физико-математической школы.

Издательство «Мир»

2. Линдгрен Г. *Занимательные задачи на разрезание.* Перевод с англ. Объем 12 л., тираж 50 000 экз., цена 85 к.

Среди «математических развлечений» задачи на разрезание и складывание фигур традиционно занимают почетное место. Автор настоящей книги, Гарри Линдгрен, — не профессиональный математик, он всего лишь скромный служащий патентного бюро в Канберре (Австралия); а геометрические разрезания — это его хобби. Собранные и придуманные Линдгреном задачи на первый взгляд могут показаться бесконечно многообразными. Однако в большинстве из них используются всего лишь несколько типов разрезаний (как правило, это те, с помощью которых из одного параллелограмма можно получить другой). И оказывается, существуют более или менее стандартные приемы, позволяющие найти нужное решение. Вот этим-то приемам и посвящена книга Линдгрена.

В основе книги лежит известная еще с античных времен задача о равновеликих и равносоставленных фигурах. Ясно, что если две фигуры равносоставлены, то они равновелики; так что *равновеликость фигур является необходимым условием их равносоставленности.* Для плоских многоугольников равновеликость является также и достаточным условием их равносоставленности — этот факт был установлен еще в 1832 году венгром *Фаркашем Бойяи* и год спустя — немецким офицером *Гервином.* Однако в случае пространственных многогранников это уже не так: в 1900 году ученик знаменитого Давида Гильберта *Макс Денн* показал, что равновеликость многогранников не является достаточным условием их равносоставленности, и указал некоторые дополнительные условия, необходимые для равносоставленности двух равновеликих многогранников. (В 1974 году ученик Хадвигера *Жан-Пьер Сидлер* доказал, что сформулированные М. Денном необходимые условия являются также и достаточными.)

Проблематика, связанная с задачами на разрезание, до сих пор привлекает к себе внимание крупных математиков; многие примыкающие к ней задачи еще не решены. Однако в данной книге все построения осуществляются, в основном, для плоских многоугольников и укладываются, тем самым, в рамки сформулированой выше теоремы Бойяи — Гервина. Предмет книги составляет, по существу, одна проблема: требуется разрезать заданную плоскую фигуру на наименьшее возможное число частей, из которых можно сложить другую плоскую фигуру, равновеликую первой. Требование минимальности числа частей здесь существенно — во всех случаях ищется самое лучшее разбиение фигуры на меньшие части.

Геометрические задачи на разрезание еще далеко не исчерпаны. Техника, описываемая Линдгреном, вовсе не является обязательной. Тот, кто достаточно сообразителен и не пожалеет времени, всегда найдет достойное открытия разрезание. Так что эта книга предоставляет читателю широкие возможности для личного творчества. «Испытайте себя в области разрезаний, — пишет Линдгрен. — Я надеюсь, что эта книга убедит вас, что такое времяпрепровождение не слишком утомительно и отнюдь не тривиально».

Физика

Издательство «Наука»

1. Китайгородский А. И. *Порядок и беспорядок в мире атомов.* Издание 5-е, испр. и доп. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 33 к.

Книга представляет собой популярное изложение учения о строении вещества — от простейших молекул до сложнейших биологических систем. Автор избрал оригинальный своеобразный подход к этой большой теме. Вопросы атомной структуры рассмотрены как проявления порядка и беспорядка в мире атомов. Такой подход очень плодотворен, поскольку наряду с телами, для которых слова «порядок» или «беспорядок» являются точной характеристикой расположения в них частиц, часто встречаются тела, в которых порядок и беспорядок неотделимы друг от друга. Проблема строения биологических веществ — мускулов, тканей, клетки, не говоря уже о молекулах белков и нуклеиновых кислот, является интереснейшей иллюстрацией своеобразной борьбы порядка и беспорядка в живой материи.

Книга написана очень живо, читается с большим интересом и рассчитана на самый широкий круг читателей, знакомых лишь с основами физики.

2. Капица П. Л. *Эксперимент, теория, практика.* Объем 19 л., тираж 30 000 экз., цена 89 к.

В этой книге собраны доклады академика П. Л. Капицы, сделанные им в различные годы перед широкой аудиторией.

Часть из этих выступлений содержит популярное изложение проводимых им экспериментов, другая часть посвящена изложению деятельности выдающихся ученых, дается анализ их научного творчества.

Большая часть выступлений, публикуемых в книге, посвящена вопросам творческого воспитания молодежи, подготовке и отбору научных кадров.

В книгу вошли также выступления и статьи, посвященные вопросам организации науки, укреплению ее связи с практикой, перспективам развития науки, проблемам отношения человека и природы, борьбе за мир и прогресс.

Книга будет интересна самым широким кругам читателей.

Издательство «Высшая школа»

3. Милковская Л. Б. *Повторим физику.* Издание 3-е, перераб. и доп. Объем 30 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 09 к.

Это пособие предназначено для абитуриентов. Оно составлено в полном соответствии с программой по физике для поступающих в вузы. Каждая глава посвящена одной из тем программы. В ней наряду с освещением данной темы приведены примеры решения задач, задачи для самостоятельных решений и вопросы для повторения.

Книга будет полезна для всех лиц, самостоятельно готовящихся к поступлению в вузы.

Издательство «Просвещение»

4. Левитан Е. П. *Астрофизика школьникам.* Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 25 к.

В интересной и вполне доступной для учащихся форме автор рассказывает о современных проблемах астрофизики. В книге затрагивается широкий круг астрономических явлений и объектов: Солнце, звезды, галактики, квазары, планеты.

Книгу чрезвычайно оживляет большое количество задач и вопросов, предназначенных для самостоятельных решений.

5. *Школьный астрономический календарь на 1977/78 учебный год.* Составитель М. М. Дагаев. Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 20 к.

Календарь содержит основные сведения о Солнце, Луне, планетах, звездах и других небесных объектах, а также справочные данные, необходимые для наблюдения астрономических явлений в 1977/78 учебном году.

Книга предназначена в первую очередь для астрономических кружков.

«Атомиздат»

6. Погодин С. Л., Либман Э. П. *Как добыли советский радий.* Издание 2-е, доп. Объем 18 л., тираж 50 000 экз., цена 80 к.

В книге живо и занимательно на основе богатейших архивных материалов излагается история создания отечественной радиевой промышленности.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

7. Блохинцев Д. П. *Рождение мирного атома.* Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 20 к.

Автор книги — крупный ученый в области ядерной физики, Герой Социалистического Труда Дмитрий Иванович Блохинцев — с момента создания занимал пост директора Объединенного института ядерных исследований в г. Дубне (с 1956 по 1965 г.). Ныне он руководит лабораторией теоретической физики в этом институте. Имя Д. И. Блохинцева связано с созданием первой в мире атомной электростанции. В 50-х годах, будучи директором Физико-энергетического института, автор книги руководил работами по проектированию и сооружению первой в мире АЭС. С позиций непосредственного участника он рассказывает об этом великом событии, о первых попытках мирного применения ядерной энергии, о первой мирной атомной стройке.

Книга написана живым языком и переносит читателя в трудное и увлекательное время, в общество интереснейших людей и захватывающих научных проблем. Читатель сам ощутит атмосферу напряженного творческого поиска, испытает радость победителя.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей и будет интересна как специалистам, так и школьникам.

И. Клумова, М. Смолянский

К статье «Читатели советуют»

1. а) $(xy-y+1)(xy+2x-y+1)$;

б) $(x^2+2x-y)(x^2-2x+y+2)$.

2. а) Указание. Рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно b.

в) Указание. Рассмотреть уравнение $x^3+2ax^2+a^2x+a-1=0$.

3. Указание. Решить систему относительно параметров a, b, c.

4. Указание. Применить выражения для $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$ и заметить, что $\operatorname{tg}^4(x/2) \in]0;\ 1[$ при $x \in]0;\ \pi/2[$. Далее воспользоваться известным неравенством $\operatorname{tg} y > y$ при $y \in]0;\ \pi/2[$.

5. «Ответ»: $S=\frac{3}{8}\sqrt{3}$ *см*². Далее воспользоваться тем, что площадь параллелограмма со сторонами a и b не превосходит площади прямоугольника с такими же сторонами.

6. «Ответ»: 5 *см*. Пусть BH — высота треугольника ABC, о которой идет речь в условии задачи, O — центр вписанного круга, K — точка касания этого круга со стороной AC треугольника, $|AC| = 12$ *см*. Заметить, что $|BH| < |BO| + |OK|$.

7. «Ответ»: $\arccos\frac{25}{28}$. Пусть диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке T. Доказать, что из данных задачи следует неравенство $|OT| > R$, где R — радиус круга.

8. Первый велосипедист финиширует раньше. Получить ответ, используя понятие средней скорости движения или привлекая графики движения.

9. Ребра коробки 5/2 *см*, 2 *см*, 1/2 *см*.

10. $2l/\pi$.

11. $4\sqrt{3}/3$.

12. $1:1:\sqrt{2-\sqrt{3}}:\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

14. 1000 *см*³. Указание. Рассмотреть пирамиду $SABCD$ как объединение пирамид $BASC$ и $DASC$ (с высотами, лежащими на прямой BD).

К статье «Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова»

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики-процессов управления

1. $7p/3c$ *сек*. Указание. Если x (*бит/сек*) — скорость ввода информации, то время работы кибернетического устройства равно

$$T=\frac{p}{x}+\frac{p}{c}+\frac{p}{3c-x}=\frac{p}{c}+\frac{3cp}{x(3c-x)}.$$

2. Если $a=0$, то решений нет;

если $a>0$, то $\frac{24-5\sqrt{5}}{11}a<x<\frac{24+5\sqrt{5}}{11}a$;

если $a<0$, то $|a|\leqslant x<\frac{8+5\sqrt{5}}{3}|a|$.

Указание. $\sqrt{2(x-\sqrt{x^2-a^2})}=|\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}|$.

3. $x=-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Указание. Для $t=\cos x-\sin x$ получаем уравнение $\sqrt{-t-t^2+1}=t$, откуда $2t^2+t-1=0$, $t=1/2$ или $t=-1$. Корень $t=-1$ является посторонним.

4. $\frac{3k\pm\sqrt{12k-3k^2}}{6k}a$ $(1<k\leqslant 4)$.

5. $R/\sqrt{17}$.

Физический факультет

1. Указание. Пусть t — искомое время, $T=t+L/c$, τ — время торможения, тогда

$$\begin{cases} S=vT+\dfrac{aT^2}{2}+(v+aT)\tau+\dfrac{a_1\tau^2}{2}, \\ v+at+a_1\tau=0. \end{cases}$$

Исключая τ, получим для T уравнение

$$a(a-a_1)T^2+2v(a-a_1)T+(v^2+2a_1S)=0.$$

Находя из него T и учитывая ограничение $t \geqslant 0$, получаем ответ:

если $a=0$ и $S>v\left(\frac{L}{c}-\frac{v}{2a_1}\right)$, то

$$t=\frac{S}{v}+\frac{v}{2a_1}-\frac{L}{c};$$

если $a>0$ и

$$S\geqslant\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a_1}\right)\left(v+\frac{aL}{c}\right)^2-\frac{v^2}{2a},$$

то

$$t=\frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{a_1(v^2+2aS)}{a_1-a}}-v\right)-\frac{L}{c};$$

в остальных случаях решения нет.

2. $\sqrt{2}\,ab/3$. Указание. Если секущая плоскость пересекает сторону DC в точке L и $|DL|=x$, то площадь сечения

$$S=\frac{b}{2\sqrt{2a}}x(4a-3x),$$

поэтому $S(x)$ достигает наибольшего значения при $x=2a/3$.

3. $x=0$, $\pm 2\pi$. Указание. Для $t=\sin x-\cos x$ получаем уравнение $t^2-8t-9=0$, откуда $t=-1$ или $t=9$. Корень $t=9$ посторонний.

4. Если $p \leqslant -8$, то решений нет; если $-8 < p \leqslant -3$, то $(p-4)/6 \leqslant x < 1 - \sqrt{1-p}$; если $-3 < p < -2$, то $(p-4)/6 \leqslant x < -1$; если $p = -2$, то решений нет; если $p > -2$, то $-1 < x \leqslant (p-4)/6$. Указание. Если $0 < x + 2 < 1$, то уравнение принимает вид $p \leqslant 6x + 4$, а если $x + 2 > 1$, то $p \geqslant 6x + 4$. Учтите, что $x^2 - 2x + p > 0$.

5. $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $y_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y_4 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Химический, психологический и экономический факультеты

1. 3%. 2. Если $a > 1$, то $x > \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; если $0 < a < 1$, то $1 < x < \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. 3. $x_1 = \pi/4 + k\pi$, $x_2 = \pm\pi/3 + k\pi$ $(k \in Z)$. Указание. Привести уравнение к виду $(\sin^2 x - 3\cos^2 x) \times (\cos x - \sin x) = 0$. 4. $bc/(a+b)$. Указание. $[CD)$ — биссектриса угла ACB. 5. $R\,(2\sqrt{k^2-k} - k)/k$ $(k > 4/3)$.

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. 336 *км*. 2. $x = \pm\pi/6 + k\pi$ $(k \in Z)$.

3. $1/5 \leqslant x < 2/9$. 4. $x = -2/3$.

5. $(2\sqrt{3} - 3)\, l^2/4$.

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. 14 человек. 2. Если $a > 1$, то $x > a^3$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^3$. Указание. Обозначить $\log_a x$ через t. 3а. $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$. 3б. $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = k\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$ $(k \in Z)$.

4. $\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha/2}\,(2\sin\alpha/2 + \cos\alpha/2)}$.

5. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\, a^2$.

К статье «Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

Математика

Математико-механический факультет

1. $m \in [\,2/5;\ 1/2\,[$. 2. При $\alpha \in\ ]\,0;\ \pi/3\,]$ $V_1 = 2a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$; при $\alpha \in\ ]\,\pi/3;\ \pi/2\,[$ $V = V_1$ или $V = 2a^3 \times \cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}}$. 3. $x = 0$. 4. $x_1 = \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$ $(k \in Z)$.

Физический факультет

1. 31,2 года. 2. $RS\sin 2\alpha/(2\sin\alpha + 2\cos\alpha)$. 3. $x \in\ ]-1;\ 0\,]$. 4. $x = (-1)^{n+1}\pi/12 + n\pi/2$ $(n \in Z)$.

Физика

Математико-механический факультет

1. $t = \sqrt{\dfrac{2h}{|\vec{g}|\,(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)\sin\alpha}} \approx 1{,}4$ *сек*.

2. $U_2 = kU_1 - I_н r_2 = 6$ *в*.

3. Показание вольтметра увеличится в 4 раза.

4. $R = 2d\,\dfrac{L-d}{L-2d}$.

Физический факультет

1. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\gamma\rho}}$.

2. $\Delta p/p = 50\%$.

3. $d \approx \dfrac{Da}{4L} \approx 10^{-5}$ *м* $= 10^{-2}$ *мм*.

4. $l = h_2 + h_1 \operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n}\right) \approx 2{,}2$ *м*.

К статье «Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии»

Математика

Вариант 1

1. $x_1 = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$, $x_2 = \pi/2 + k\pi$, $x_3 = (-1)^k\,\pi/6 + k\pi$ $(k \in Z)$. Указание. Привести уравнение к виду $\cos x\,(2\cos x + 1) \times (2\sin x - 1) = 0$. 2. $x = \log_2 3 - 1$. Указание. Привести уравнение к виду $(3/2)^{2/x} = (3/2)^{1/x} + 2$. 3. $x \in\ ]-4;\ -3\,[\ \cup\ ]\,5;\ 6\,[$. 4. $\operatorname{arcctg}(\sqrt{k^2-1}/2)$.

Вариант 2

1. $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ $(k \in Z)$. 2. $x = 100$. Указание. Привести уравнение к виду $(5/7)^2 = (5/7)^{\lg x}$. 3. $x \in [-2;\ 2\,[$. 4. 4/9, 4/9.

Вариант 3

1. $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \pm\pi/3 + 2k\pi =$ $= (k \in Z)$. 2. $x = 10$. 3. $x \in\ ]-\infty;\ -2]$. 4. $H\,((d^2 - H^2)/2 + H^2\operatorname{ctg}^2\alpha/3)$.

Физика

1. $|\vec{v}_{ср}| = \dfrac{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}{0{,}4|\vec{v}_2| + 0{,}6|\vec{v}_1|} \approx 16{,}7$ *м/сек* ≈ 60 *км/час*.

2. $h \approx 86{,}4$ *м*; $|\vec{v}| \approx 41{,}2$ *м/сек*.

3. $|\vec{F}_н| = m\left(|\vec{g}| - \frac{2s}{t^2}\right) = 3680$ *н*.

4. $V_л = \frac{\rho_в V}{\rho_в - \rho_л} = 1545$ *м*^{3}; $V_п = 1350$ *м*^{3}.

5. $|\vec{F}_{ср}| = \frac{m(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_2|^2)}{2d} = 2250$ *н*.

6. $\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1{,}23$ *кг/м*^{3}.

7. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1{,}02 \cdot 10^7$ *м/сек*

8. $E_1 = \frac{\Phi}{4\pi h^2} = 4{,}68$ *лк*; $E_2 = \frac{\Phi h}{4\pi (h^2 + l^2)^{3/2}} = 3{,}33$ *лк*.

9. $f = \frac{Fd}{d - F} = 60$ *см*; $H = h\frac{f}{d} = 25$ *см*.

10. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda} - \frac{2A}{m}} \approx 2{,}75 \cdot 10^6$ *м/сек*.

К статье «Московский институт стали и сплавов»

Математика, 1976 г.

Физико-химический факультет

1. $x \in \,]0;\ 1/2[\, \cup \,]2;\ 3[$. 2. $x = \pm 2\sqrt{6}/11$; $S = 1 \pm 2\sqrt{6}/3$. 3. $x_1 = k\pi, x_2 = \pi/20 + k\pi/10\ (k \in Z)$. 4. $x = (-1 + \sqrt{17})/4$, $y = 1/2$. 5. $a(\sqrt{48H^2 + a^2} - a)/(48H)$.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. 6 секунд. 2. $x_{1,2} = 1/2$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Указание. Разделить первое уравнение на xy, второе на x^2y^2. 3. $x \in \,]-3;\ -\sqrt{6}[\, \cup \,]\sqrt{6};\ 3[$. 4. $x = \pi/2 + 2k\pi\ (k \in Z)$. Указание. Из условия следует система $\sin x = 1$, $\cos 6x = -1$. 5. $S\sqrt{S\cos\alpha} \times \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Big/ \left(3\sqrt{2\pi}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Факультет металлургии цветных, редких металлов и сплавов

1. $x \in \,]-1;\ 0] \cup [\log_3 2;\ 1[$. 2. $x = 50$. 3. 486. 4. $x = -\pi/2 + 2k\pi\ (k \in Z)$. 5. $l^2 \sin^2 2\alpha \cos\beta / \sin^2(\alpha + \beta)$.

Факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. $x \in \{-1;\ 2\}$. 2. $(6 \pm \sqrt{6})/6$, 1, $(6 \mp \sqrt{6})/6$. 3. $x \in [1/2;\ 2] \cup [4;\ \infty[$. 4. $x_1 = \pi/4 + k\pi$, $x_2 = \pi/2 + k\pi\ (k \in Z)$. 5. $R^3(4\pi/3 - 32\sqrt{3}/81)$.

Математика, 1977 г.

Вариант А

1. $]-\infty;\ -2] \cup \,]1;\ 2]$. 2. $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/9$. Указание. Уравнение приводится к виду $\cos\frac{7x}{2}(1 - 2\cos 3x) = 0$. 3. По условию $C_n^3 + C_n^1 = 2C_n^2$, откуда $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + n = 2\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $n(n^2 - 9n + 14) = 0$, $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 7$. Первые два значения n не подходят (нет четвертого члена разложения), при $n = 7$ получаем коэффициенты 7,21,35. 4. $V = 5\pi a^3/8$. Указание. Пусть треугольник ABC вращается вокруг оси l, параллельной стороне AC. Тогда цилиндр с образующей $[AC]$ и осью l дополняет тело вращения до двух усеченных конусов с осью l и образующими $[BC]$ и $[AB]$. 5. Касательную надо провести в точке M (3/2; 9/4). Указание. Уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке с абсциссой t и ординатой t^2 имеет вид $y = 2tx - t^2$ (по формуле $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, поскольку $x_0 = t$, $f'(x_0) = f'(t) = 2t$). Подставляя сюда $x = 1$ и $x = 2$, находим основания трапеции, а затем ее площадь $S(t) = 3t - t^2$. Далее уравнение $S'(t) = 0$ дает $3 - 2t = 0$, $t = 3/2$ (критическая точка). $S(3/2) = 9/4$, что больше $S(1) = S(2) = 2$; значит, в точке $t = 3/2$ функция $S(t)$ принимает наибольшее значение.

Вариант Б

1. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x + 3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 9)}{(x + 3)(x^2 + 1)}$.

Сокращая на $(x + 3)$ и подставляя $x = -3$, получаем ответ: $-7\frac{1}{5}$. 2. $x = 2$. 3. Указание. Каждое неравенство системы задает на плоскости xOy полуплоскость, а вся система — пересечение этих полуплоскостей, в данном случае — треугольник с вершинами A (0; 0), B (−2; 1), C (2; 2). 4. Указание. Получить равенство $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$.

5. $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$. Указание. Площадь криволинейного треугольника равна 1.

Вариант В

1. $D(f) = \,]-1;\ 1[$. 2. Наибольшее значение $y(\pi/6) = \frac{3\sqrt{3} - 11}{6}$, наименьшее $y(5\pi/6) = \frac{-3\sqrt{3} - 5\pi}{6}$. Указание. Производная $y'(x) = 2\cos 2x - 1$ (определена всюду). Из уравнения $y'(x) = 0$ находим критические точки $x_1 = \pi/6$, $x_2 = 5\pi/6$ и сравниваем значения функции в точках 0, $\pi/6$, $5\pi/6$, π. 3. $n_1 = 9$, $n_2 = 10$. Указание. Из условия задачи получаем уравнение $n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4) = 18(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$, откуда $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n^2 - 19n + 90) = 0$, но $n \geqslant 5$. 4. $D(-1;\ 1;\ 1)$; $(\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}}) = 120°$. Указание. $\vec{AB} = (6;$

—1; 1). $\vec{AB}=\vec{DC}$, $\vec{AC}=(8;\ 2;\ 2)$, $\vec{BD}=(-4;\ 4;\ 0)$. $\cos(\widehat{\vec{AC},\ \vec{BD}})=-{}^1/{}_2$. **5.** 48. Указание. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

Физика

Физико-химический факультет

1. $E = m|\vec{g}|\,l\,(1-\cos\alpha)\approx 0{,}3$ *дж*, $|\vec{v}|=\sqrt{2|\vec{g}|\,l\,(1-\cos\alpha)}\approx 2{,}4$ *м/сек*.

2. $V_2=\dfrac{V_1(p_0+\rho|\vec{g}|h)\,T_2}{p_0T_1}\approx 2{,}9$ *мм*^{3}.

3. $q=\dfrac{\pi d^3|\vec{g}|(\rho_2-\rho_1)}{6|\vec{E}|}\approx 33$ ед. заряда СГСЭ.

4. $n_2=\dfrac{n_1}{1+\dfrac{n_1-1}{D_1F_2}}\approx 1{,}7$.

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Математика

Вариант 1

1. Пусть в секунду ЭВМ выполняет x операций типа A и y операций типа B. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{9\cdot10^6}{x}+\dfrac{16\cdot10^6}{y}=700,\\[2mm] \dfrac{18\cdot10^6}{x}+\dfrac{8\cdot10^6}{y}=800,\end{cases}$$

откуда $x=3\cdot10^4$, $y=4\cdot10^4$.

2. Упростив данное уравнение, получим

$$\frac{4}{3}\sin x=-\frac{4\sin 3x\,(9\cos 4x+1)}{1+9\cos 4x}$$

или

$$3\sin 3x+\sin x=0,$$

откуда $\sin x=0$, $x=\pi k$ или $\sin x=\pm\sqrt{5/6}$, но тогда $\cos 2x=-\dfrac{2}{3}$, $\cos 4x=-\dfrac{1}{9}$, а эти значения x не входят в ОДЗ. Найдем требуемую сумму корней. Имеем $-12<k\pi<39$, откуда $-3\leqslant k\leqslant 12$ и $-3\pi-2\pi-\ldots+11\pi+12\pi=72\pi$.

3. Из условия следует, что $\dfrac{1+bx}{1-bx}>0$ и $\dfrac{1-ax}{1+ax}>0$, откуда $x^2<\dfrac{1}{b^2}$ и $x^2<\dfrac{1}{a^2}$. Возводя данное уравнение в квадрат и упрощая, получим $2x\,(a^2bx^2+b-2a)=0$, откуда $x=0$ (это — решение уравнения при любых значениях a и b) или $x^2=\dfrac{2a-b}{a^2b}$. Учитывая еще найденные выше необходимые условия, получаем ответ:

$x=0$ при $a\geqslant b>0$ или $b\geqslant 2a>0$;

$x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{(2a-b)/(a^2b)}$ при $0<a<b<2a$.

4. ОДЗ: $a>0$, $a\neq 1$, $x>2$. Пусть $a>1$. Тогда, потенцируя, получаем $x^2-2x-a>0$, откуда с учетом ОДЗ $x>1+\sqrt{1+a}$. Пусть $0<a<1$, тогда $x^2-2x-a<0$, $2<x<1+\sqrt{1+a}$.

Ответ: $x\in\,]\,2;\ 1+\sqrt{1+a}\,[$ при $a\in\,]\,0;1\,[$;

$x\in\,]\,1+\sqrt{1+a};\ \infty\,[$ при $a\in\,]\,1;\ \infty\,[$.

5. $c^3\sin^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta/24$.

Вариант 2

1. 10 суток. **2.** $x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, сумма равна 121π. **3.** $x\in\,]\,1;\ 3/\sqrt{5}\,]$. **4.** $x=a^{-2}$ при $a\in\,]\,0;\ 1\,[\,\cup\,]\,1;\ \infty\,[$; при остальных a решений нет. **5.** $H^2\sin^2\alpha/[\cos\alpha\cos(\beta-\alpha)]$.

Физика

1. Второе тело надо бросить с запаздыванием $\tau_{1,2}=\dfrac{|\vec{v}_0|}{|\vec{g}|}-\dfrac{s}{|\vec{u}|}\pm\sqrt{\dfrac{s^2}{|\vec{u}|^2}+\dfrac{|\vec{v}_0|^2}{|\vec{g}|^2}-2\dfrac{h}{|\vec{g}|}}$; окончательно $\tau_1\approx 3{,}4$ *сек* и $\tau_2\approx 0{,}6$ *сек*.

2. $\Delta t=\dfrac{m_1m_2(|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2)}{2c(m_1+m_2)^2}\approx 0{,}024$ *град*.

3. $\omega=\sqrt{2|\vec{g}|\dfrac{R-r}{R^2+r^2}(1-\cos\theta)}\approx 4{,}45$ *рад/сек*.

4. $a=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\ \ b=3\cdot10^{-2}$ *м*.

5. $|\vec{v}|=2{,}1\cdot10^{-2}$ *м/сек*.

6. $U_1=\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\,\dfrac{(\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}=5{,}25$ *в*,

$$U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}\,\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}=1{,}75\ в.$$

7. $h=\dfrac{2\pi m|\vec{v}|\cos\alpha}{e|\vec{B}|}\approx 9\cdot10^{-6}$ *м*.

8. $|\vec{v}_{1,2}|=\dfrac{|\vec{v}_0|}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{4hc}{m|\vec{v}_0|^2\lambda}}\right)$;

$|\vec{v}_1|\approx 5\cdot10^4$ *м/сек* и $|\vec{v}_2|\approx 2\cdot10^4$ *м/сек*.

К статье «Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина»

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. 28 дней, 21 день. 2. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pi/4 + k\pi/2$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. $x = 10$.

4. $\operatorname{arctg}(\sqrt{5}/4)$. 5. $\sqrt{(5b^2 - 8a^2)/8}$.

Вариант 2

1. 30 *км/час*. 2. $x = \pm\pi/6 + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. $x = 2$. 4. 3 *дм*². 5. $R(\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$.

Физический факультет

Вариант 3

1. $a^2 \sin\alpha(1 + \sin\varphi)/\cos\varphi$. 2. $x = 1/4$, $y = 5/8$. 3. $x = \pm\pi/3 + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 4. При $a \in]-\infty; 0] \cup \{1/\sqrt{2}, 1\}$ корней нет; при $a \in]0; 1/\sqrt{2}[\cup]1/\sqrt{2}; 1[\cup]1; \infty[$ $x = a^2$.

Вариант 4

1. $\frac{1}{2} l^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\beta$. 2. $x \in]-\infty; 1/2[\cup]1; \infty[$. 3. $x_1 = k\pi/2$, $x_2 = \pi/8 + k\pi/4$ $(k \in \mathbf{Z})$. 4. $x_1 = 125$, $y_1 = 4$, $x_2 = 625$, $y_2 = 3$.

Физика

1. $$\frac{|\vec{F}_\text{З}|}{|\vec{F}_\text{М}|} = \frac{M_\text{З}}{M_\text{М}} \left(\frac{R_\text{М}}{R_\text{З}}\right)^2 \approx 2{,}55.$$

2. $$m = \frac{\rho\rho_\text{в} a S}{\rho_\text{в} - \rho} = 3{,}45 \text{ кг}.$$

3. $$|\vec{F}_{\max}| = m|\vec{g}|(3 - 2\cos\alpha + |\vec{v}|^2/(l|\vec{g}|)) = 8 \text{ н}.$$

4. $$|\vec{v}| = \frac{m|\vec{v}_0|}{m + M} = 5 \text{ м/сек}; \quad \frac{Q}{K} = 0{,}99.$$

5. $$V_1 = \frac{T_1 V}{T_1 + T_2} \approx 0{,}42 \text{ л}; \quad V_2 = V - V_1 \approx 0{,}58 \text{ л}.$$

6. $$\varepsilon = \frac{|\vec{F}_1| r_1^2}{|\vec{F}_2| r_2^2} = 56.$$

7. $$r = \sqrt{R_1 R_2} = 1 \text{ ом}.$$

8. $$q = \frac{S|\vec{B}|}{R} = 0{,}05 \text{ к}.$$

9. Уменьшенное в 2 раза изображение переместится на 0,1 *м* ближе к линзе.

10. $$\lambda = \frac{hc}{W + A} = 4{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

К статье «Всесоюзный заочный финансово-экономический институт»

Вариант 1

1. 336 и 280. 2. $x = 1$, $y = 2$. 3. $0 < x < 4$. 4. $x = 8$. 5. 3 *см*.

Вариант 2

1. 20 и 15. 2. $x = 3$. 3. $x > 0$, $x < -2$. 4. $x = 16$, $y = 10$. 5. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

К головоломкам «Пять многогранников»

(см. с. 60)

Искомая операция состоит в отсечении плоскостями углов гексаэдра. Если отсечь пирамидки с длиной a бокового ребра, равной $(2 - \sqrt{2})/2$, то получится многогранник, который называют *усеченным гексаэдром* (на рисунке в задаче сверху слева); если $a = {}^1/_2$, то получится *кубооктаэдр* (сверху справа); если $a = {}^3/_4$, то получится *усеченный октаэдр* (внизу справа); если $a = 1$, то получается *октаэдр* (внизу слева).

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант»* № 5)

1. $$\begin{array}{ccccc} 64 & \times & 14 & = & 896 \\ + & & + & & : \\ 21 & - & 13 & = & 8 \\ \hline 85 & + & 27 & = & 112. \end{array}$$

2. Останется яйцо № 73; нет, не может — шестое яйцо окажется и простым, и золотым.

3. X—IX=I, X=III+VII, XXV—XIII=XII, XXXV=XV+XX.

4. 241 950:3=80 650.

К статье «Семиклассникам о вероятности»

(см. «Квант» № 5)

2: 6/14 = 3/7. Указание. В этом опыте 14 исходов (извлечение любого шара; шары удобно занумеровать), из которых 6 благоприятствуют рассматриваемому событию.

3. 1/8.

4. 8/28.

5. 2/10 = 1/5; «а» (с вероятностью 3/10).

6. 3/18; 5/27; 3/18 < 5/27.

Над номером работали:
А. Виленкин. И. Клумова, Т. Петрова.
В. Тихомирова. Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах. Г. Красиков. В. Машатин.
Э Назаров. А. Пономарева.
И. Смирнова. Э. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

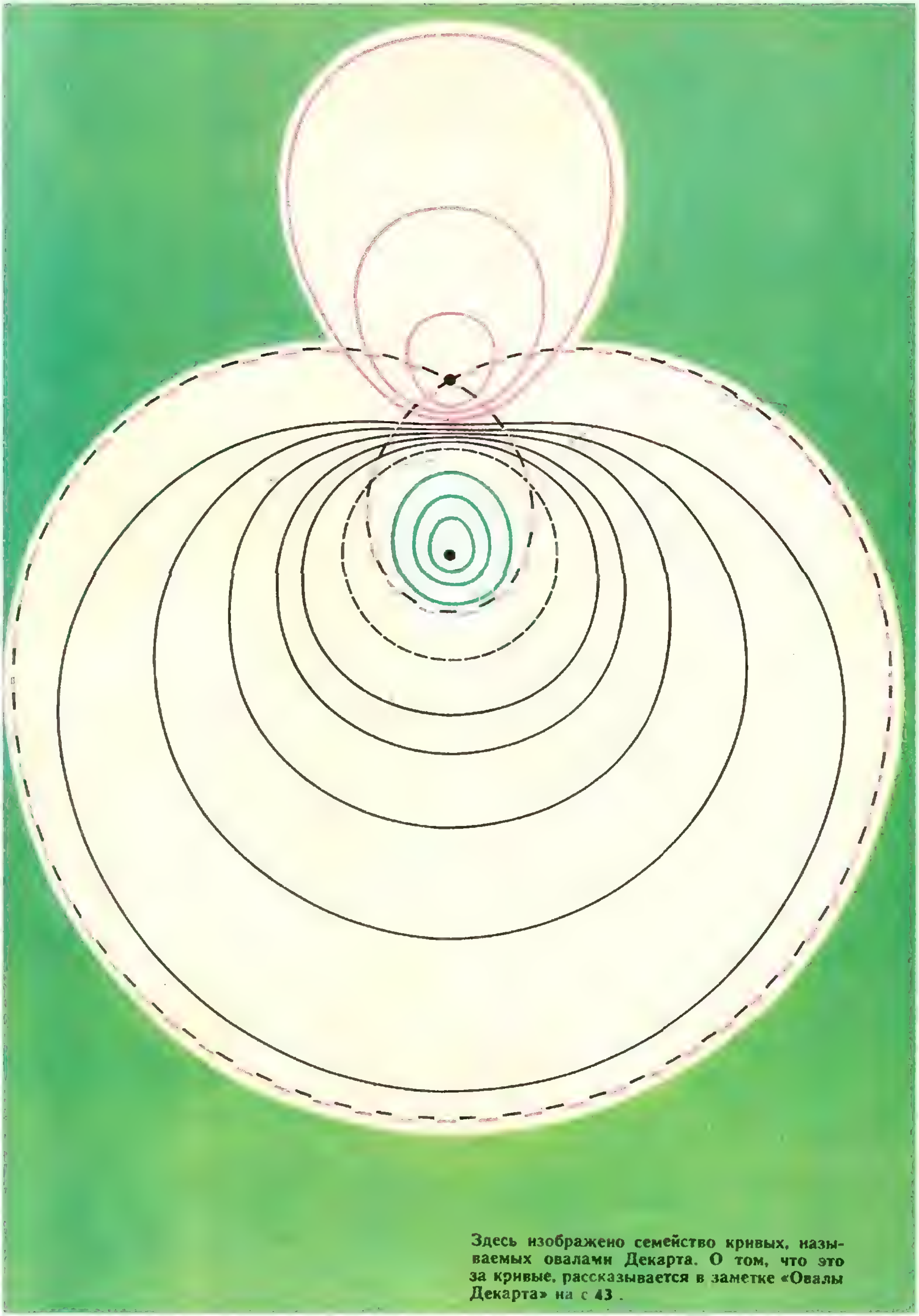
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

113035. Москва. М-35. Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 28/III 1977 г.
Подписано в печать 10/V 1977 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 6.
Усл. печ. л. 8. 4. Уч.-изд. л. 9,53 Т-08444.
Цена 30 коп. Заказ 576. Тираж 298090 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств.
полиграфии и книжной торговли.
г Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



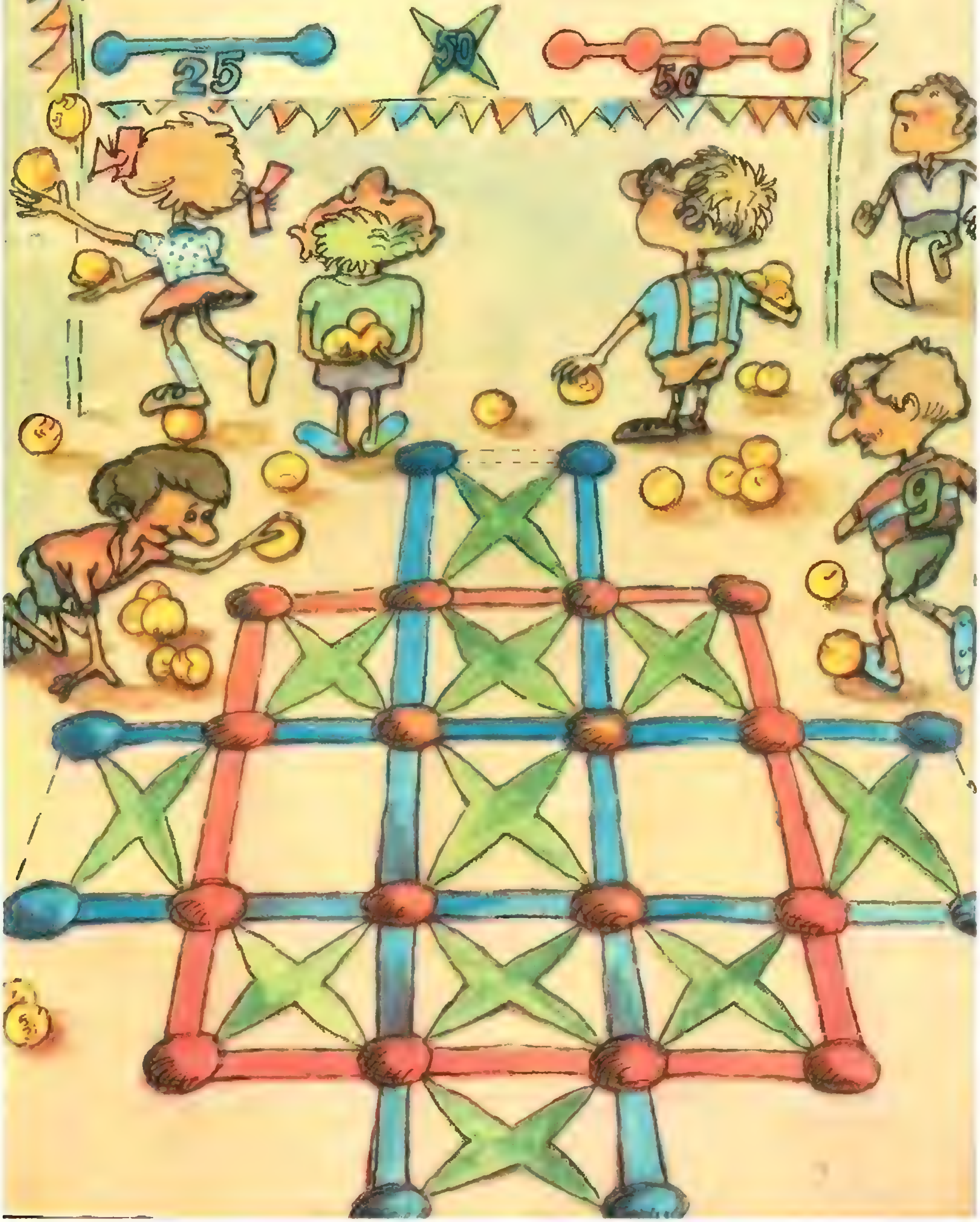
Здесь изображено семейство кривых, называемых овалами Декарта. О том, что это за кривые, рассказывается в заметке «Овалы Декарта» на с 43 .

РАССТАВЬТЕ ЧИСЛА

В кружки фигуры, изображенной на рисунке, надо расставить числа от 1 до 24 так, чтобы сумма чисел в двух синих кружках на каждой синей прямой равнялась 25, сумма чисел, стоящих на каждой красной прямой, равнялась 50, а сумма чисел, стоящих в вершинах каждого из одиннадцати квадратов, отмеченных зеленой звездочкой, также равнялась 50.

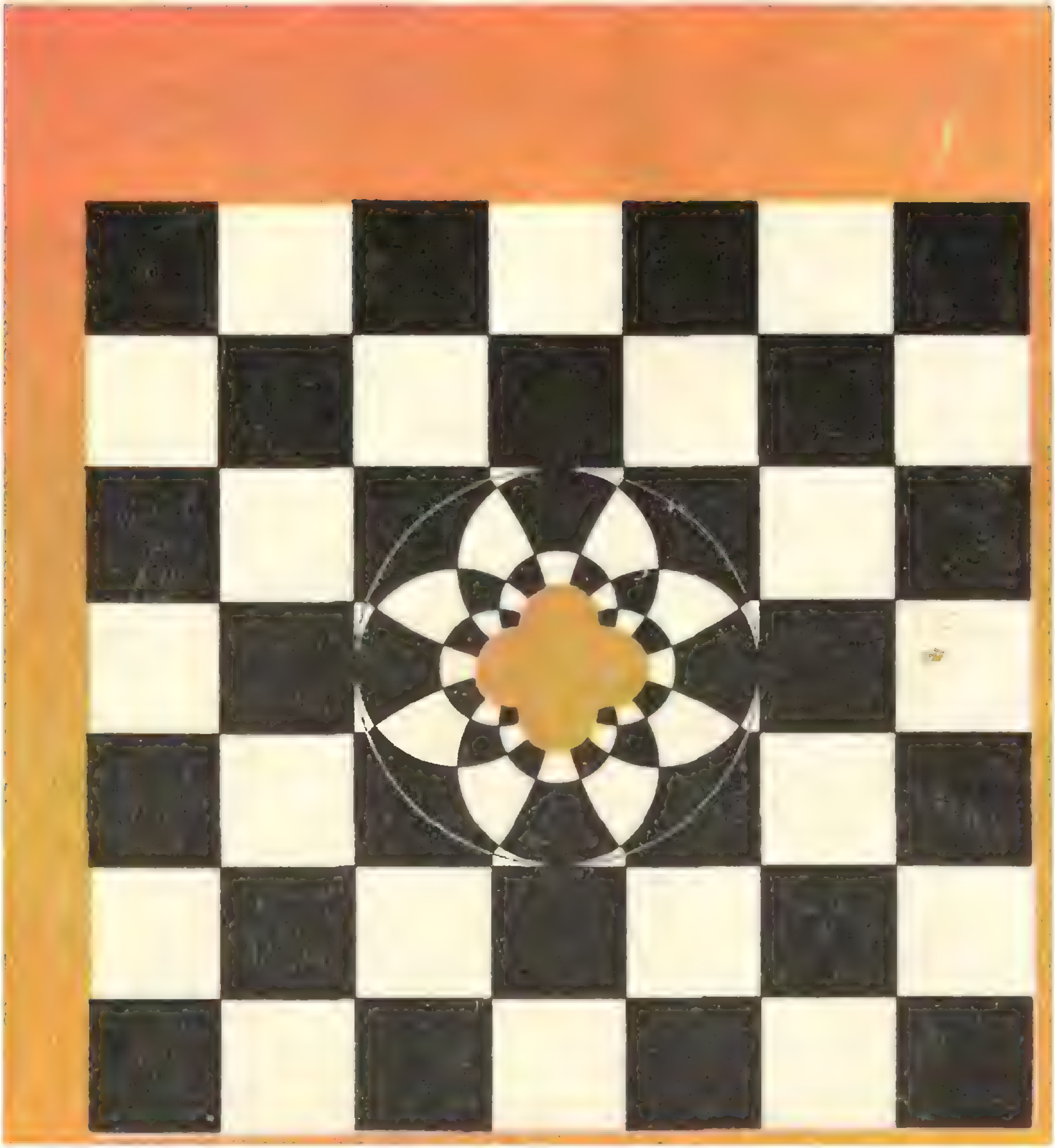
Попробуйте найти хотя бы одну такую расстановку чисел.

Я. Алексеев



Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом рисунке вы видите вне окружности шахматную доску 7×7 на оранжевой плоскости, а внутри окружности — ту же доску и плоскость, но уже после инверсии. О том, что такое инверсия, вы можете прочитать на с. 38 .



НОМЕР
7

Основан в 1970 году

КВАНТ

7
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Кириллов.* О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма
10 *А. Митрофанов.* Качающаяся скала
14 *А. Футер.* Сигналы, графы и короли на торе
20 *Я. Смородинский.* Масса атома и число Авогадро

Лаборатория «Кванта»
23 *В. Майер, Р. Э. Шафир.* Звук и струя

Математический кружок
26 *Ю. Ионин, А. Плоткин.* Среднее значение функции

Задачник «Кванта»
32 Задачи М451—М455; Ф463—Ф467
34 Решения задач М411, М412, М14, М415; Ф423—Ф427

По страницам школьных учебников
41 *Н. Виленкин.* Как возникло и развивалось понятие функции

«Квант» для младших школьников
47 Задачи
48 *Г. Розова.* Случай с пятиклассником

Практикум абитуриента
Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 году
49 *Л. Беркович, А. Тетерев, С. Фоминых.* Куйбышевский государственный университет
50 *О. Михненков.* Московский институт управления им. С. Орджоникидзе
52 *А. Беликов, Г. Гинзбург.* Московский институт инженеров землеустройства
53 *А. Боцу, В. Зрайченко, Е. Коваленок.* Курский политехнический институт
55 *И. Калашникова, А. Веденеев.* Немного об экзаменах
56 *В. Френкель.* Из творческого наследия Козьмы Пруткова
63 **Ответы, указания, решения**

Смесь (с. 9, 13, 22, 31, 45, 46)

На первой странице обложки изображен рисунок доктора физико-математических наук А. Г. Фоменко. Подробнее об этом топологическом объекте можно прочитать на с. 22.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

А. Кириллов

О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма

4 5 6 8 10 12
3·5·17·257

1. Пролог

Задачи на геометрические построения — одни из самых популярных в школьной математике. Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно, не случайно. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет, и уже древние греки достигли здесь большого искусства. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей* *).

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшиеся неразрешимыми: *о квадратуре круга*, *трисекции угла* и *удвоении куба* **).

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серия задач: *для каждого натурального числа $n \geqslant 3$ требуется с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник.*

Для некоторых значений n эта задача совсем простая (например, для $n = 3, 4, 6, 8, 12$); для других — посложнее ($n = 5, 10, 15$; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих — очень сложная ($n = 17$ или 257)*). Наконец, существуют такие значения n, для которых эта задача вообще неразрешима (например, $n = 7, 9, 11$).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная с $n = 3$, и отметим красным цветом те числа n, для которых можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, ...

Есть ли какая-нибудь закономерность в распределении «красных» и «черных» чисел? Оказывается, есть; но найти ее довольно трудно. Эта закономерность имеет арифметическую природу; чтобы ее описать, нам придется временно оставить геометрию и заняться элементами теории чисел — высшего раздела арифметики.

---

*) См. статью «Инверсия и задача Аполлония» («Квант», 1971, № 8).

**) По поводу последних двух задач см. статью «Циркулем и линейкой» («Квант», 1975, № 6).

*) Способ построения циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника впервые был открыт К. Ф. Гауссом в 1801 году. Этот способ описывается в статье «Дебют Гаусса» («Квант», 1971, № 1).

2. Функция Эйлера

Важной арифметической характеристикой числа n является количество чисел, меньших n и взаимно простых с n. Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он предложил для этого количества обозначение $\varphi(n)$, и с тех пор функция $n \to \varphi(n)$ известна под именем *«функции Эйлера»* [*]). Например, для $n = 10$ имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что $\varphi(10) = 4$.

Функция φ обладает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто еще самим Эйлером: *для любых двух взаимно простых чисел m и n справедливо равенство:*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n). \qquad (1)$$

Кроме того, легко проверить, что *если p — простое число, то* $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^2) = p^2 - p$, и вообще

$$\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1). \qquad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений n. Например,

$$\varphi(10) = \varphi(2)\cdot\varphi(5) = 1\cdot 4 = 4,$$

$$\varphi(100) = \varphi(4)\cdot\varphi(25) = 2\cdot 20 = 40.$$

Мы приводим здесь значения функции Эйлера для n от 1 до 42 (см. таблицы 1, *а* и *б*).

Таблица 1, *а*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, *б*

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\varphi(n)$	12	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел n и значением $\varphi(n)$ уже легко угадывается? Мы видим, что если правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствующее значение функции $\varphi(n)$ является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности построения правильного n-угольника.

В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы приведем достаточно простые и убедительные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим задачам на построение — например, к задаче о трисекции угла.

3. Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задач на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических инструментов. Скажем лишь, что окончательное решение задачи на построение должно быть (хотя бы в

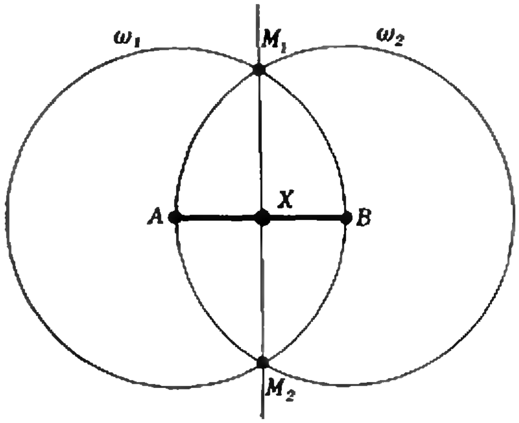


Рис. 1.

---

[*]) На страницах «Кванта» функция Эйлера упоминалась неоднократно. Подробно о ней рассказано в статье «Малая теорема Ферма» («Квант», 1972, № 10); некоторые ее свойства перечислены также в статье «Близкие дроби» («Квант», 1975, № 3).

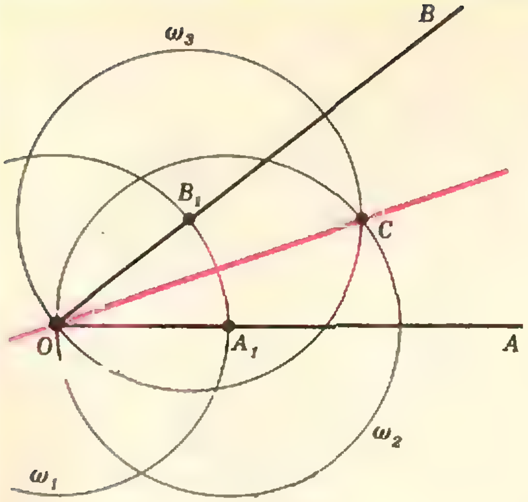


Рис. 2.

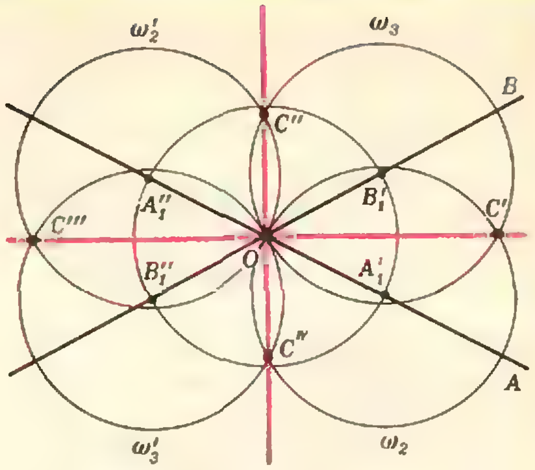


Рис. 3.

принципе) записываемо в виде цепочки *элементарных операций*, напоминающей систему команд, отдаваемых электронной вычислительной машине.

Например, задача о построении середины отрезка AB решается следующей «программой» (см. рис. 1):

1. *Циркулем построить окружность ω_1 с центром A и радиусом $|AB|$.*
2. *Циркулем построить окружность ω_2 с центром B и радиусом $|BA|$.*
3. *Отметить точки пересечения M_1 и M_2 окружностей ω_1 и ω_2.*
4. *По линейке провести прямую M_1M_2.*
5. *Отметить точку X пересечения прямых M_1M_2 и AB.*

Еще один пример: построение биссектрисы заданного угла AOB (рис. 2). Соответствующая система команд имеет вид:

1. *Циркулем построить окружность ω_1 с центром O и любым радиусом R.*

2, 3. *Отметить точки пересечения этой окружности: A_1— с прямой OA, B_1— с прямой OB.*

4, 5. *Циркулем построить окружности ω_2, ω_3 с центрами A_1, B_1 и радиусом R.*

6. *Отметить точки пересечения C окружностей ω_2 и ω_3.*

7. *По линейке провести прямую OC.*

Однако в этом случае в пунктах 2 и 3 программа сформулирована неточно. В самом деле, окружность ω_1 имеет с прямыми OA и OB по две точки пересечения, и неясно, какие из этих точек нужно обозначить через A_1 и B_1. Вы можете возразить, что речь идет о лучах OA и OB, которые пересекаются с окружностью в единственной точке, но понятие «луч» выходит за рамки понимания нашей «математической машины». Ей доступно только понятие «прямая».

Посмотрим, что получится, если понимать выражение «точка пересечения» как «какая-нибудь точка пересечения». Тогда нашей программе будет соответствовать рисунок 3: вместо точек A_1 и B_1 мы берем по две точки: A_1', A_1'' и B_1' и B_1''. И теперь одной точке C соответствует четыре разных точки C', C'', C''' и C^{IV}. Это, однако, приводит всего лишь к двум разным ответам: прямые OC' и OC''' совпадают, так же, как и прямые OC'' и OC^{IV}.

К скольким же разным ответам может привести одна и та же программа, решающая задачу на построение? Любая такая программа состоит из элементарных операций. Их всего пять: проведение прямой через две данные точки; проведение окружности с данным центром и данным радиусом; пересечение двух данных прямых; прямой и окружности; двух данных окружностей. Первые три операции однозначны, две последние содержат двузначную неопределенность *).

Если в программу входят лишь однозначные операции, то мы получаем только один ответ. Если в ней есть одна двузначная операция, то выполнение этой операции приводит к двум реализациям (как в разобранном выше примере). Вообще, если в программе есть k двузначных операций, то эту программу можно реализовать 2^k способами.

---

*) Окружность и прямая, так же как и две окружности, могут совсем не пересекаться или касаться друг друга. Эти случаи также могут быть включены в общую схему, но сейчас мы предпочитаем не говорить об этом.

Мы видели, что некоторые неопределенности могут в конце концов «сокращаться» и не влиять на окончательный ответ. Оказывается (это можно строго доказать, но не в этом цель настоящей статьи), такие сокращения всегда происходят согласованным образом, так что неопределенность в окончательном ответе всегда имеет вид 2^l ($l \leqslant k$). Этот факт имеет не геометрическую, а алгебраическую природу (соответствующая часть алгебры называется теорией Галуа). Очень поучительно проверить самостоятельно справедливость этого утверждения на примере какой-нибудь конкретной задачи на построение. Мы рекомендуем вам разобрать с этой точки зрения задачу о построении общей касательной к двум окружностям.

Для решения этой задачи можно воспользоваться, например, следующей программой (мы для краткости указываем общую схему и не разбиваем «команды» на элементарные операции).

1. *По линейке провести прямую O_1O_2, соединяющую центры O_1 и O_2 данных окружностей ω_1 и ω_2, и найти точки A_1 и A_2 пересечения окружностей ω_1 и ω_2 с этой прямой* (рис. 4).

2. *Из точки A_1 циркулем построить окружность ω_3 радиуса $|O_2A_2|$ и отметить точку B пересечения окружности ω_3 с прямой O_1O_2.*

3. *Циркулем построить окружность ω_4 с центром O_1 и радиусом $|O_1B|$.*

4. *Циркулем на отрезке O_1O_2 как на диаметре построить окружность ω_5.*

5. *Отметить точку C пересечения окружностей ω_4 и ω_5 и по линейке соединить точку C с точкой O_1.*

6. *Найти точку D пересечения прямой O_1C с окружностью ω_1 и через полученную точку D провести перпендикуляр к O_1C.*

Этот перпендикуляр и есть искомая касательная.

Вернемся к задаче о построении биссектрисы. Наша программа, кроме биссектрисы угла AOB, дает также и биссектрису внешнего угла AOB_1'' (рис. 3). Это решение не надо рассматривать как «постороннее». С точки зрения циркуля и линейки, «понимающих» угол только как пару пересекающихся прямых, этот угол ничем не хуже исходного угла AOB. Попробовав определить понятие биссектрисы в терминах, «доступных» циркулю и линейке, мы увидим, что биссектриса внешнего угла будет удовлетворять этому определению так же, как и биссектриса внутреннего угла.

Это обстоятельство имеет общий характер: все 2^l решений, доставляемых программой, содержащей неопределенности, являются «настоящими», а не посторонними решениями, если только правильно сформулировать задачу.

Например, задача: *вписать окружность в данный треугольник* — решается программой с неопределенностью 16 (нужно построить биссектрисы двух углов), и приводит к четырем разным ответам (одна впи-

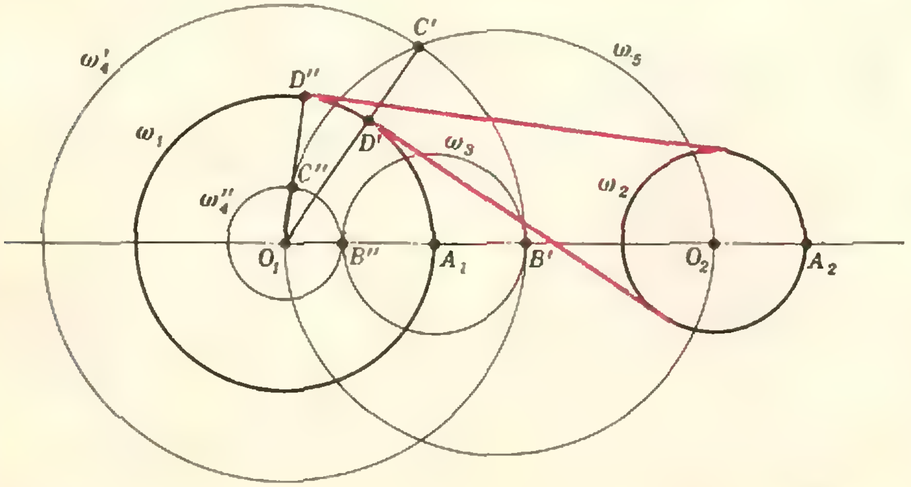


Рис. 4.

санная и три вневписанные окружности), причем все эти ответы равноправны, если сформулировать задачу так: *построить окружность, касающуюся трех данных прямых*. Отличие вписанной окружности от вневписанных основано на понятии «между» (или «внутри») и недоступно пониманию нашей машины.

Разобранные примеры показывают также, что если задача на построение имеет несколько решений, то программа построения дает все эти решения. Это утверждение также справедливо в общем случае.

Поучительный пример: геометрическое построение одного из корней квадратного уравнения автоматически приводит к построению и второго корня.

Таким образом, мы приходим к следующему принципу.

Всякая задача на построение, разрешимая с помощью циркуля и линейки, имеет 2^l решений.

Строгое доказательство этого утверждения дается теорией Галуа и не может быть изложено в этой статье. Однако само утверждение выглядит очень просто и вполне могло бы быть открыто математиками древности. Возникает вопрос, почему же это открытие было сделано лишь в прошлом веке, хотя многие подтверждающие примеры известны уже несколько тысячелетий? (Например, упоминавшаяся выше задача Аполлония имеет 8 решений.)

Одна из возможных причин — отсутствие современной, «машинной» постановки задачи. Другая причина — рассмотрение каждой задачи в отдельности вместо целых серий однотипных задач (вроде задач на построение правильного n-угольника для каждого n).

Возможно, эта тема привлечет внимание историков математики, и они полнее объяснят нам причину этой «упущенной возможности».

4. Правильные многоугольники

Вернемся к нашей основной задаче. Мы хотим знать, когда с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник. Рассуждение предыдущего параграфа наводят на мысль — посмотреть, сколько решений имеет эта задача. Чтобы получить разумный ответ, нужно уточнить постановку задачи. А именно, нужно фиксировать *размер* и *положение* правильного n-угольника (иначе, разумеется, число решений будет бесконечно, при условии, что есть хотя бы одно решение). Итак, будем считать, что наш n-угольник вписан в данную окружность ω с центром O, и фиксировано положение A_0 одной его вершины. Требуется определить положения $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ остальных вершин. Разумеется, достаточно найти положение точки A_1 — откладывая последовательно дугу A_0A_1, мы получим точки A_2, A_3, A_4 и т. д.

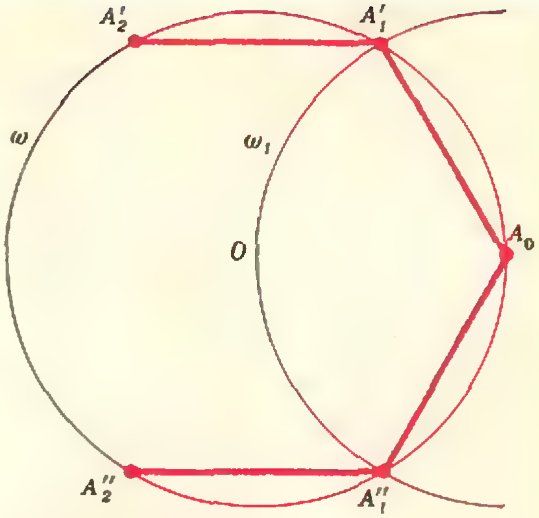


Рис. 5.

Проще всего эта задача решается при $n = 6$. Известно, что сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу данной окружности. Поэтому нужная «программа» выглядит так (рис. 5):

1. *Циркулем построить из точки A_0 окружность ω_1 радиуса $|OA_0|$.*
2. *Отметить точку A_1 пересечения окружностей ω и ω_1.*

Мы видим, что эта программа приводит к двум разным ответам, но соответствующие шестиугольники $A_0A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ и $A_0A_1''A_2''A_3''A_4''A_5''$ отличаются лишь порядком нумерации вершин.

Такая же ситуация наблюдается в случаях $n = 3$ и $n = 4$. Более интересны случаи $n = 5$ и $n = 10$. Способ построения правильного пятиугольника описан в статье А. Савина «Как нарисовать пятиконечную звезду» («Квант», 1976, № 1). Мы разберем здесь случай $n = 10$.

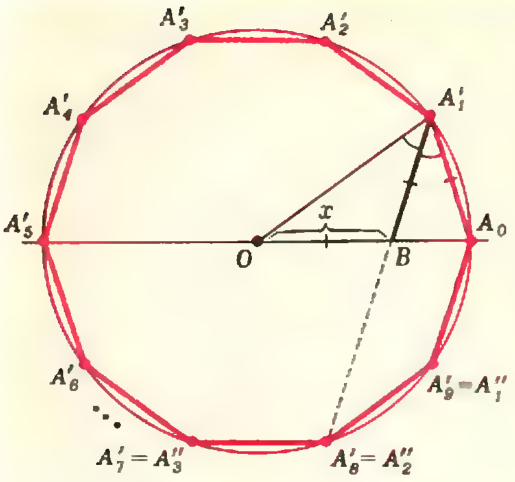


Рис. 6.

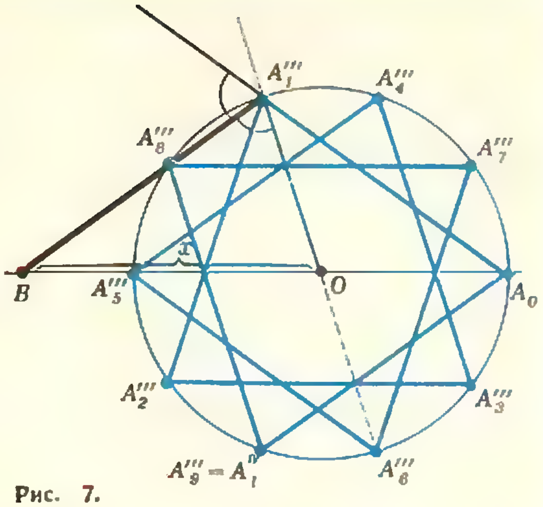


Рис. 7.

Если провести биссектрису A_1B угла OA_1A_0, то образовавшиеся треугольники OA_1B, BA_1A_0 будут равнобедренными (рис. 6), и треугольники OA_1A_0 и BA_1A_0 — подобными. Будем считать прямую OA_0 числовой осью, на которой точка O соответствует нулю, а точка A_0 — единице. Пусть точка B соответствует числу x. Тогда мы получаем уравнение:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \text{ или } x^2 + x - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, мы найдем точку B. Искомая точка A_1 найдется как точка пересечения данной окружности ω с окружностью с центром в точке A_0 и радиусом длины x. Таких точек две — и мы получаем два решения: точки A_1' и A_1'' (рис. 6).

Но у нашего квадратного уравнения два корня: $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Второй корень отрицателен и по этой причине вроде бы не годится. Однако не будем спешить «отбрасывать» этот корень, а попробуем понять его геометрический смысл.

Восстановим рисунок 6, считая, что точка B находится не справа, а слева от точки O. Мы получим рисунок 7. Это дает для искомой точки A_1 еще два возможных положения: A_1''' и A_1^{IV}.

Итак, мы пришли к четырем различным возможностям для точки A_1. В результате получаются два разных десятиугольника: *выпуклый* и *звездчатый*, причем на каждом из них возможны две разные нумерации вершин (см. рисунки 6 и 7).

Заметим, что с «точки зрения» циркуля и линейки звездчатый десятиугольник ничем не хуже выпуклого.

Возможно возражение: у выпуклого многоугольника несмежные стороны не пересекаются, а у звездчатого — пересекаются. Но это возражение отпадает, если мы стороной будем называть не отрезок между двумя вершинами (понятия «между» у нас нет!), а всю прямую. Тогда правильный чертеж «выпуклого» десятиугольника будет иметь вид, лишь размером отличающийся от «звездчатого» (рис. 8).

Аналогичная ситуация возникает в случае пятиугольников. Здесь тоже имеется 4 решения, приводящих к двум различным пятиугольникам (рис. 9, *а*, *б*) с двумя различными нумерациями вершин на каждом.

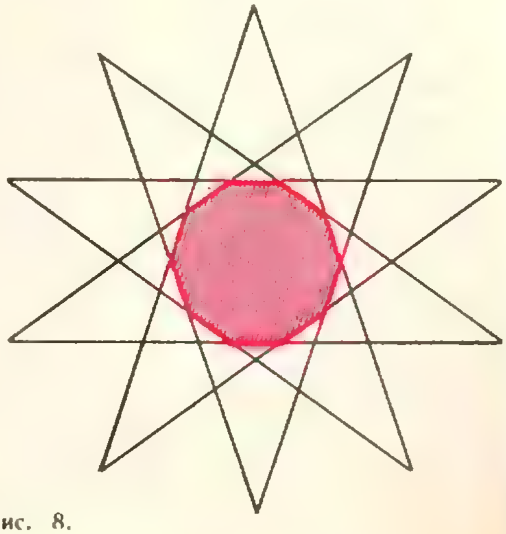


Рис. 8.

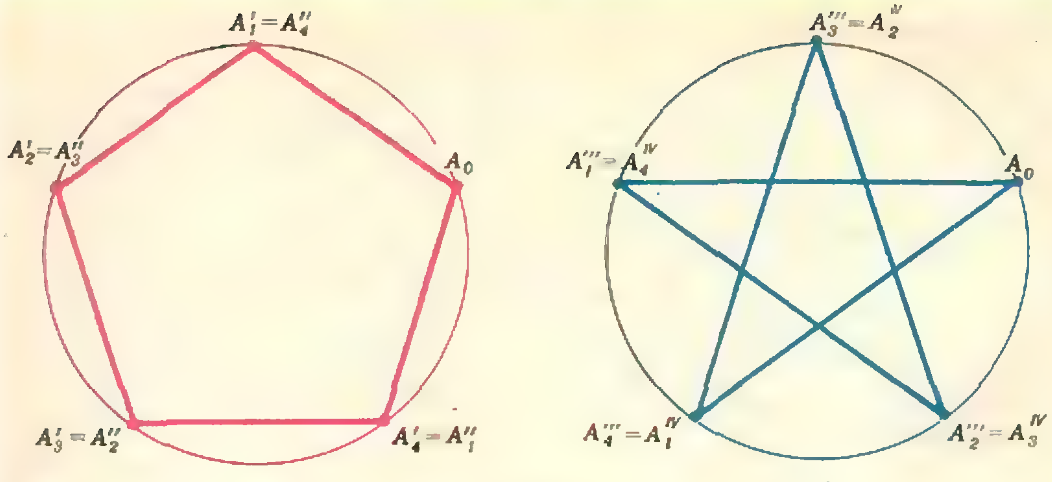


Рис. 9. а) б)

Теперь, не решая явно задачи на построение произвольного правильного n-угольника, попробуем установить, сколько у нее различных решений. (Напомним, что мы считаем заданными окружность ω и точку A_0 на ней.) Обозначим через x длину дуги A_0A_1. Точка A_1 является решением задачи (с точки зрения циркуля), если, откладывая дугу длины x от точки A_0 последовательно n раз, мы вернемся в исходную точку A_0, а откладывая меньшее число раз — не вернемся.

Последняя оговорка существенна. Иначе в случае, например, $n=6$ нам пришлось бы назвать «правильным вписанным шестиугольником» дважды пройденный треугольник, или трижды пройденный диаметр, или даже шесть раз повторенную точку A_0.

На языке арифметики, принимая длину всей окружности за единицу, наше условие можно сформулировать так: *число* nx — *целое, а числа* x, $2x$, $3x$, ..., $(n-1)\,x$ — *не целые*. Если $n = 10$, то в качестве x можно взять, например, $1/10$. Но это не единственный возможный выбор. Можно взять x также равным $3/10$, $7/10$ или $9/10$. Это соответствует тем четырем решениям, которые мы раньше нашли геометрическим способом. Заметим, что если взять в качестве x число $11/10$ (или $13/10$, $17/10$, ...), то новых геометрических решений мы не получим: положение точки на окружности зависит не от самого числа $x = \frac{k}{n}$, а от остатка, который дает k при делении на n.

Ясно, что несократимые дроби $\frac{m}{n}$ $(m < n)$ и только они обладают тем свойством, что $k \cdot \frac{m}{n}$ попадает в целое число (в начальную точку окружности) лишь при $k = n$. Таким образом, каждое число, меньшее n и взаимно простое с ним, дает решение задачи о правильном n-угольнике, и мы получаем, что число различных решений этой задачи дается функцией Эйлера (см. п. 2)! В частности,

$$\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2,$$
$$\varphi(5) = \varphi(10) = 4,$$

что согласуется с результатами, полученными выше геометрическим путем.

Вспомнив теперь, что всякая разрешимая задача на построение с помощью циркуля и линейки должна иметь 2^l различных решений (см. п. 3), мы получим удобное необходимое условие для разрешимости задачи построения правильного n-угольника.

Правильный n-угольник допускает построение циркулем и линейкой только тогда, когда $\varphi(n) = 2^l$ для некоторого целого l.

(Например, правильный семиугольник построить невозможно, так как число $\varphi(7) = 6$ не является степенью двойки.)

Необходимость этого условия мы постарались объяснить. То, что оно является также и достаточным,— отдельный результат, и здесь мы им заниматься не будем.

5. Числа Ферма

Однако полученный результат не исчерпывает полностью поставленную задачу. Остается невыясненным вопрос — а много ли вообще таких чисел n, для которых $\varphi(n)=2^l$, то есть много ли вообще «красных» чисел?

Разумеется, про каждое отдельное число мы можем довольно быстро сказать, красное оно или черное — достаточно вычислить $\varphi(n)$. Но это не дает наглядного описания всей совокупности красных чисел. Оказывается, поиск такого описания приводит к трудной и до сих пор не решенной проблеме из теории чисел. Расскажем кратко, в чем суть этой проблемы.

Разложим n на простые множители:

$$n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k},$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, и посчитаем $\varphi(n)$. Из свойств функции Эйлера (1) и (2) (см. п. 2) мы получаем:

$$\varphi(n)=\varphi(p_1^{m_1})\cdot\varphi(p_2^{m_2})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k^{m_k})=$$
$$=p_1^{m_1-1}\cdot p_2^{m_2-1}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k-1}\times$$
$$\times(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1).$$

Чтобы правая часть последнего выражения была степенью двойки, нужно, чтобы каждый нечетный простой множитель p_i входил в него с показателем $m_i=1$; при этом само число p_i обязано иметь вид $p_i=2^l+1$. С другой стороны, выражение 2^l+1 может быть простым лишь тогда, когда l — степень двойки (если l делится на нечетное число $m>1$, то 2^l+1 делится на $2^{l/m}+1$). Итак, каждый нечетный множитель $p_i=2^{2^k}+1$.

Числа вида $2^{2^k}+1$ получили название *чисел Ферма*. Первые пять чисел Ферма (при $k=0, 1, 2, 3, 4$): 3, 5, 17, 257, 65537 — действительно оказались простыми. Как обнаружил Эйлер, шестое число Ферма $2^{2^5}+1$ делится на 641.

Со времен Эйлера числами Ферма интересовались математики разных стран. В частности, почти ровно сто лет тому назад, в 1878 году, на заседании Петербургской академии наук слушалось сообщение Е. И. Золотарева о работе, представленной в академию священником Иоанном Первушиным. В этой работе устанавливалось, что число $2^{2^{23}}+1$ делится на $167\,722\,161=5\cdot2^{25}+1$.

В последнее время многие числа Ферма исследованы на быстродействующих вычислительных машинах. Среди них обнаружены как простые, так и составные. Однако до сих пор не известно, конечно или бесконечно количество простых чисел Ферма. Поэтому мы вынуждены сформулировать ответ на нашу задачу в следующей, еще не окончательной форме:

Правильный n-угольник допускает построение циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n=2^s\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, где p_i — попарно различные простые числа Ферма.

Возможно, кто-нибудь из читателей этой статьи внесет свой вклад в окончательное решение этой очень интересной и трудной задачи.

«Квадратное уравнение»

Предложите своему товарищу написать два члена полного квадратного уравнения. Допустим, что ваше предложение принято и на листе бумаги появилось:

$$97x^2-217x\ \ldots=0.$$

Тогда вы моментально дописываете третий член и сообщаете корни уравнения:

$$97x^2-217x+120=0,$$
$$x_1=1,\quad x_2=1^{23}/_{97}.$$

Если же ваш товарищ напишет другие два члена:

$$839x^2\ \ldots-391=0,$$

то вы немедленно «решаете» такое уравнение:

$$839x^2-448x-391=0$$

и пишете его корни:

$$x_1=1,\quad x_2=-391/839.$$

Ну а если вам напишут

$$\ldots-978x+39=0,$$

то вы быстро дописываете первый член и сообщаете корни уравнения:

$$939x^2-978x+39=0,$$
$$x_1=1,\quad x_2=13/313.$$

Внимательно рассмотрев корни написанных здесь уравнений, найдите теорему, на которой основан этот фокус, и научитесь показывать его сами.

А. Пресман

А. Митрофанов

Качающаяся скала

«...Надо сказать, что в этих местах не редкость встретить так называемую «качающуюся скалу» — весьма любопытное явление, суть которого в том, что отдельный кусок скалы в незапамятные времена получает устойчивость равновесия. Он обыкновенно стоит на каменной площадке и, если его раскачивать, он, подобно ваньке-встаньке, принимает первоначальное положение. Такие скалы весят иногда тысячи тонн, но послушны движению руки человека средней силы. Такая скала упасть не может, если, конечно, ее не взорвут ...»

Это — строки из рассказа Александра Грина «Качающаяся скала» — грустной истории о бедном охотнике, которому предложили за три миллиона опрокинуть огромный столб, качающийся около положения равновесия. Охотник, несмотря на все свои усилия, не справился с задачей и сошел с ума (но так и не оставил своей затеи и все пытался столкнуть камень).

Попробуем понять, почему же устойчива «качающаяся скала».

Мы знаем, что для того чтобы тело находилось в положении равновесия, должны выполняться два условия:

векторная сумма всех сил,
действующих на тело,
равна нулю; (*)
алгебраическая сумма
моментов всех сил
относительно произвольной точки
равна нулю. (**)

Не всякое положение равновесия является устойчивым. Например, иголка, на которую действует только сила тяжести и реакция опоры, не стоит свободно на гладком столе, хотя, если иголку поставить строго вертикально, условия (*) и (**) будут выполняться. Но при малейшем отклонении иголки от вертикали возникают моменты сил, опрокидывающие иголку. В то же время кирпич стоит устойчиво на любой грани. И как бы мы ни уменьшали кирпич, сохраняя его форму, он по-прежнему будет устойчиво стоять на столе. Но тот же кирпич очень трудно «уравновесить», например, на футбольном мяче (мяч при этом будем удерживать неподвижным).

Из сказанного можно сделать вывод, что от формы тела (точнее, его основания) и поверхности опоры зависит устойчивость равновесия тела. Чтобы вывести критерий устойчивости, обратимся снова к качающейся скале и рассмотрим случай, когда камень и опора в области соприкосновения имеют сферическую форму. Будем предполагать, что камень и глыба, на которой он стоит, сточились или обветрились и стали гладкими, без сколов и выступов, так что область контакта камня с опорой мала и может быть принята за точку. На рисунке 1 показано сечение камня и опоры вертикальной плоскостью, проходящей через точку их соприкосновения (точка C). O и O' — центры сферических поверхностей камня и опоры в области контакта, r и R — соответствующие радиусы.

Для равновесия камня необходимо прежде всего, чтобы центр тяжести (точка P) лежал на вертикали OO'. При этом условия (*) и (**) выполняются. Посмотрим, к чему приведет небольшое отклонение камня от первоначального положения.

Пусть в результате отклонения положение камня на опоре стало таким, как на рисунке 2. Если при этом центр тяжести камня окажется правее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки опоры A будет способствовать дальнейшему отклонению, и камень уже не вернется в первоначальное положение. Если же точка P окажется левее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки A будет возвращать камень в первоначальное положение. А это значит, что равновесие камня устойчиво.

Итак, если $CP < CQ$ (см. рис. 2), то равновесие устойчиво. Посмотрим, как при этом связаны между собой CP R и r. В треугольнике OAQ

$$\angle OAQ = \alpha, \angle AOQ = \beta = \frac{\overset{\frown}{CA}}{r} = \frac{\overset{\frown}{C'A}}{r} =$$

$$= \alpha \frac{R}{r}$$ (так как α мало). По теореме синусов имеем:

$$\frac{OQ}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} =$$
$$= \frac{r}{\sin\left(\alpha + \alpha \frac{R}{r}\right)}. \qquad (1)$$

Нас интересуют малые отклонения камня от положения равновесия. Говоря «малое отклонение», мы имеем в виду, что расстояние, «проходимое» точкой контакта на поверхности опоры, т. е. дуга $\overset{\frown}{C'A}$ (и, следовательно, дуга $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{C'A}$), мало по сравнению с радиусами r и R поверхностей камня и опоры. А это и означает, что углы α и β малы, т. е. $\alpha \ll 1$ и $\beta = \alpha \frac{R}{r} \ll 1$.

Для малых углов, как известно, синус угла с хорошей точностью равен самому углу. Поэтому выражение

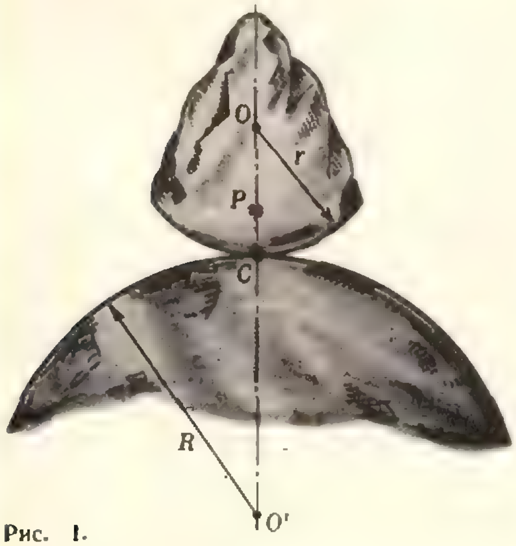


Рис. 1.

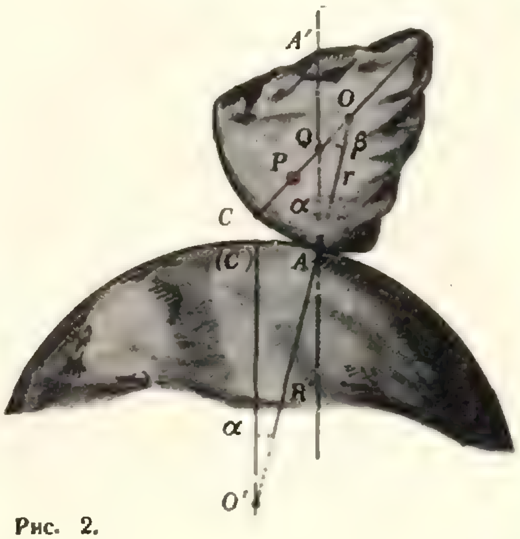


Рис. 2.

(1) можно записать так:

$$\frac{OQ}{r}=\frac{1}{1+\frac{R}{r}}.$$

Отсюда $OQ=\frac{r^2}{R+r}$. Так как $CQ=$ $=r-OQ=\frac{Rr}{R+r}$, то условие устойчивого равновесия камня (т. е. условие $CP<CQ$) записывается в виде неравенства

$$CP<\frac{Rr}{R+r}. \qquad (2)$$

Если поверхность имеет вогнутую форму с радиусом R (форму внутренней поверхности сферы радиуса R), то условие устойчивого равновесия камня на опоре выглядит так:

$$CP<\frac{Rr}{R-r}$$

(CP — по-прежнему расстояние от точки контакта до центра тяжести в положении равновесия). Попробуйте вывести эту формулу самостоятельно.

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Допустим, что равновесие камня на опоре устойчивое. При отклонении камня от положения равновесия возникает момент силы, препятствующий этому отклонению: у силы тяжести относительно новой точки опоры появляется плечо (см. рис. 2). Чтобы удержать камень в новом положении неподвижным, требуется приложить внешнюю силу такую, чтобы ее момент относительно новой точки опоры был равен по величине и противоположен по направлению моменту силы тяжести. (Величина и направление этой силы определяются условием (*).) Значит, даже для небольшого отклонения тела от положения устойчивого равновесия необходимо совершить работу против силы тяжести. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии тела. А это означает, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела имеет минимальное значение, или, что то же самое, центр тяжести тела занимает наинизшее положение. Поэтому условие (2) можно вывести иначе, посмотрев, что происходит с центром тяжести камня при его небольшом отклонении (см. упражнение 1). Такие два различных подхода к решению проблемы устойчивости по существу полностью эквивалентны.

Если камень слегка отклонить от положения устойчивого равновесия и не удерживать его в новом положении, то он начнет возвращаться назад, «проскочит» (по инерции) положение равновесия, снова вернется к нему и т. д. То есть камень будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия.

Если небольшое отклонение тела от положения равновесия приводит к тому, что центр тяжести его опускается, то равновесие тела неустойчиво. При малейшем отклонении возникает момент силы тяжести, направленный в сторону отклонения и стремящийся его увеличить, и тело «опрокидывается».

Бывают случаи, когда отклонение тела от положения равновесия не изменяет высоту центра тяжести тела над точкой опоры. Такое положение называют безразличным равновесием. В безразличном равновесии находится, например, однородный шарик на горизонтальной плоскости.

Теперь нам понятно, что такое «качающаяся скала»: это вертикально стоящий камень с низко расположенным центром тяжести или большим радиусом кривизны основания. Отклонение камня (правда, в некоторых пределах; см. упражнение 2) приводит к его колебаниям около положения равновесия. Качающаяся скала — это камень-маятник.

Конечно, нелегко рукой «средней силы» расшатать огромный каменный столб. Дело не только в том, что у качающейся скалы большая масса и для того, чтобы сообщить ей ускорение, нужно приложить очень большую силу. Из-за деформации опоры под действием веса камня могут возникать силы реакции, препятствующие отклонению скалы от вертикали. И тем не менее, качающиеся скалы существуют в природе. Может быть, и вы среди каменных валунов встречали нечто подобное?

В заключение рассмотрим примеры, которые не требуют путешествия в горы, их можно изучить и на столе, но по своей природе они такие же, как качающаяся скала.

Пример 1. У однородного шара центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Поэтому шар неустойчив на выпуклой поверхности. Однако, если у шара срезана «верхушка», то он может стоять устойчиво на вершине выпуклой поверхности (см. упражнение 3).

Пример 2. Забавная детская игрушка «ванька-встанька» напоминает пример 1. Кусок свинца или стали, спрятанный у шарообразного основания ваньки-встаньки, придает игрушке удивительную устойчивость.

А все ли знают, что у ваньки-встаньки были (а может быть, есть кое-где и сейчас) родственники? Послушайте.

«Было когда-то на свете двадцать пять оловянных солдатиков. Все они были сыновьями одной матери — старой оловянной ложки — и, значит, приходились друг другу родными братьями. Они были очень красивы: ружье на плече, грудь колесом, мундир красный с синим. Чудо, что за солдатики...» Это стойкие оловянные солдатики из сказки Андерсена. Почему их называли стойкими? Наверное, потому, что, как бы их ни наклоняли, они всегда возвращались в вертикальное положение. Когда открывали коробку, в которой были уложены такие солдатики, все они вскакивали, словно по команде. Каждый солдатик крепился на гладком срезе свинцовой полусферы и стоял удивительно устойчиво.

Пример 3. Существует легенда, что Королевский совет, проверяя находчивость и хитроумие Колумба, предложил ему поставить яйцо острым концом на стол. Колумб решил задачу в два счета; он надбил его и установил на столе. При этом он не только изменил форму поверхности в месте контакта, сделав ее похожей на плоскость, но и понизил центр тяжести яйца.

Упражнения

1. Выведите условие (2), используя тот факт, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела минимальна.

2. Ванька-встанька стоит на неподвижном шаре. Радиусы шара и основания ваньки-встаньки одинаковы и равны R. Максимальный угол, на который можно отклонить от вертикали игрушку так, чтобы она не упала с шара, равен α_0 (проскальзывания нет). Найдите, где расположен центр тяжести ваньки-встаньки.

3. Полушарие радиуса r стоит устойчиво на неподвижном шаре радиуса R, если выполняется условие $r < 0{,}6R$. Где расположен центр тяжести полушария?

Необычное в обычном

Вдумчивый подход к любым явлениям раскрывает неожиданные и красивые их стороны. Вот один пример. Надо возвести число 487 в квадрат? Пожалуйста, пишем:

$$487-250=237,$$
$$(500-487)^2=169.$$

Теперь записываем полученные числа один за другим:

237 169.

Это и есть 487 в квадрате. Неожиданно? Красиво? Может быть, случайно? Посмотрим предыдущее число:

$$486-250=236,$$
$$(500-486)^2=196,$$
$$486^2=236196.$$

Опять верно. Следующее число 488, для него

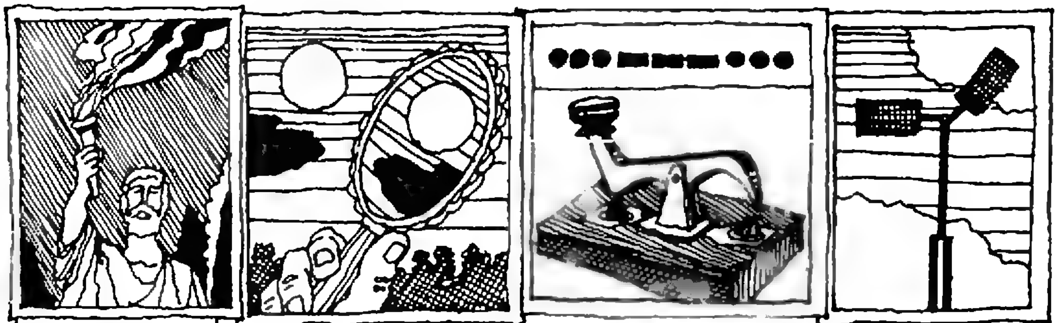
$$488-250=238,$$
$$(500-488)^2=144,$$
$$488^2=238144.$$

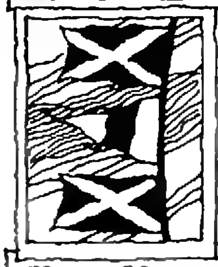
Весьма интересные квадраты, не правда ли? Стоит немного исследовать свойства этих чисел. И тогда вы, наверное, возводя 46 в квадрат, не станете перемножать 46×46 и не станете расписывать $(40+6)^2$ как квадрат суммы, а сразу напишете ответ:

$$2100+16=2116.$$

Не так ли?

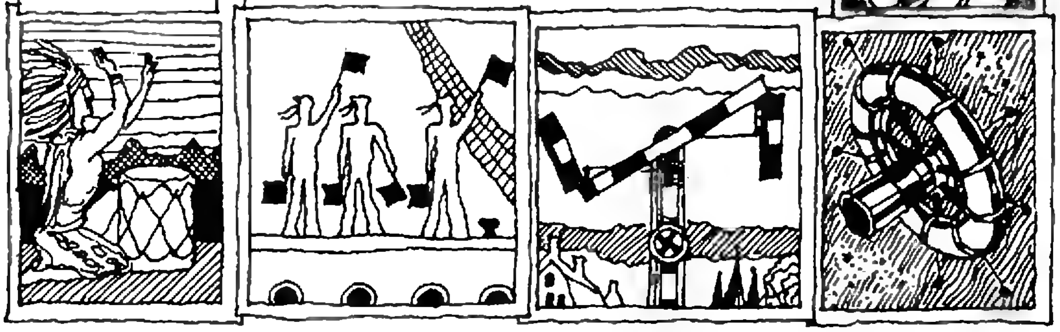
В. Заварин





А. Футер

Сигналы, графы и короли на торе



> *Наутро телефон как зазвонит! Я вскочил неодетый, схватил трубку и кричу:*
> *— Слушаю!*
> *А из трубки в ответ:*
> *— Ты чего хрюкаешь?*
> *— Как это — хрюкаю? Я не хрюкаю, — говорю я.*
> *— Брось хрюкать! Говори по-человечески! — кричит Мишка.*
> *— Я и говорю по-человечески. Зачем хрюкать?*
> *— Ну, довольно тебе баловаться! Все равно я не поверю, что ты поросенка в комнату притащил.*
>
> Н. Носов. Телефон

Когда два человека ведут неторопливую беседу, слова каждого из них обычно вполне понятны собеседнику. Переспрашивать, уточнять непонятные слова приходится редко. Если тот же самый разговор вести по телефону, то, в зависимости от качества связи, неясно расслышанные слова встречаются чаще, иногда сильно затрудняя понимание. Если же мы попробуем передавать по телефону не осмысленные слова, а просто последовательность букв, что-нибудь вроде

рптфффскалааам...,

то окажется, что некоторые буквы часто перепутываются, например «ф» и «с», «б» и «г» и т. д.

Искажает сигналы практически каждый способ связи, будь то телефон, радио, бинокль. С этим явлением существуют разные способы борьбы, но все они снижают эффективность связи. Например, по телефону можно передавать не отдельные буквы, а связные слова: «б» как «Борис», «г» как «Григорий» и т. п., — но тогда вместо одной буквы нам придется передавать 5—8. Можно повторять каждый сигнал много раз, как передавались, например, на Землю первые фотографии обратной стороны Луны в 1959 году, но это займет во столько же раз больше времени. В этой заметке исследуется один экономный способ борьбы с искажением сигналов при передаче*). Идея этого способа проста: если уж мы знаем, какие сигналы с какими можно спутать, то будем передавать лишь один сигнал из каждой такой группы, а от остальных откажемся. Например, по телефону из звуков «ф», «с», «ш» — только звук «с».

---

*) Впервые эти вопросы исследовал американский кибернетик (француз по происхождению) Клод Шеннон.

Графы ошибок

Каждое сообщение обычно состоит из отдельных «элементарных» сигналов: слов (в разговоре по телефону), букв (в морской флажковой сигнализации «семафор») или других знаков (точка и тире на телеграфе). Пусть эти элементарные сигналы образуют множество S — *входной алфавит*. Изобразим каждый сигнал из S кружочком и соединим пару кружочков отрезком («ребром»), если соответствующие им сигналы при передаче можно спутать друг с другом. Получится граф *) с множеством вершин S. Назовем его *графом ошибок* нашего передающего аппарата.

Приведем пример. Минутная стрелка электрических часов меняет свое положение скачком: как только кончается очередная минута, стрелка прыгает к следующей. Если эти часы находятся далеко от нас, то мы не можем точно определить положение минутной стрелки. Но пусть мы ошибаемся каждый раз не очень сильно — не более, чем на минуту. Тогда входной алфавит будет содержать 60 элементов — 60 возможных положений минутной стрелки (каждому из них соответствует точка на окружности — границе циферблата), а графом ошибок Γ будет правильный 60-угольник — каждая точка соединена отрезками с двумя соседями.

А теперь попытаемся выяснить, что надо сделать, чтобы можно было безошибочно распознать наибольшее число показаний минутной стрелки. Переделаем часы так, чтобы минутная стрелка прыгала через каждые 2 минуты, то есть чтобы часы показывали лишь четное число минут. Тогда уже никакое видимое нам показание ни с каким другим спутать нельзя — ведь ошибок в 2 минуты или больше мы не допускаем. Таким образом, если договориться, что множество передаваемых сигналов — это только 30 четных чисел от 0 до 58, то все они будут безошибочно определены. С другой стороны, очевидно, что 30 — максимальное значение: если в графе Γ взять 31 вершину или больше, то какие-нибудь две из них обязательно будут соединены (докажите!).

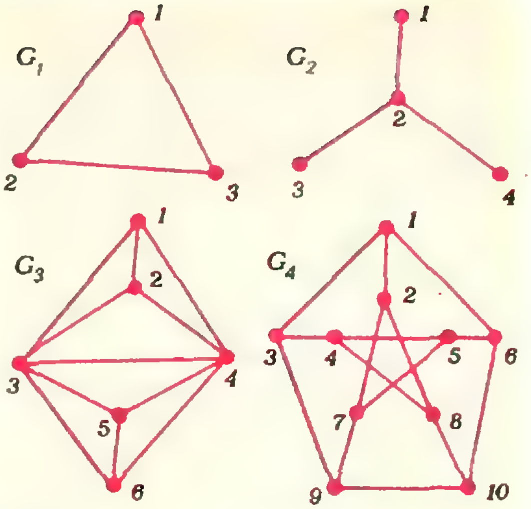


Рис. 1.

В этом примере мы построили множество M вершин графа, обладающее следующим свойством: *любые две вершины из M не соединены ребром.* Такое множество M называется *независимым множеством* (н. м.). В нашем примере независимы любые наборы четных показаний минутной стрелки, например: {2, 8, 34, 52, 56}, — или набор показаний, делящихся на 5: {0, 5, 10, ..., 55}.

Если н. м. M вершин некоторого графа G содержит наибольшее число вершин среди всех его н. м., то оно называется *наибольшим независимым множеством* (н. н. м.), а число $\alpha(G)$ вершин в нем — *числом независимости* (ч. н.) графа G.

В рассмотренном выше графе Γ много различных н. м., а н. н. м. — всего два (совокупность четных чисел от 0 до 58 и совокупность нечетных чисел от 1 до 59), и $\alpha(\Gamma) = 30$.

Если граф G является графом ошибок некоторого передающего аппарата A, то $\alpha(G)$ — это наибольшее число различных сигналов, которые можно передать через этот аппарат без перепутывания. Поэтому $\alpha(G)$ называют еще *пропускной способностью* аппарата A.

---

*) Напомним, что *графом* называется совокупность точек (вершин графа), некоторые пары которых соединены отрезками (ребрами). Если вершины v и w в графе соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, обозначается это так: $v \sim w$.

Задача 1. Определить н. н. м. и ч. н. для графов, изображенных на рисунке 1.

Задача 2. На окружности расположены n точек. Каждая из них соединена с $2k$ точками — по k ближайших точек в каждую сторону. Определить ч. н. полученного графа.

Квадрат алфавита

С каждым передающим аппаратом A мы связали входной алфавит S, граф ошибок G и число независимости графа G (пропускная способность аппарата A) $\alpha(G)$. А как быть, если аппарат A задан раз и навсегда, а его пропускная способность для нас недостаточна? Скажем, если A — телеграфный аппарат, передающий только точки и тире, а мы хотим передавать по телеграфу буквы? Выход известен — это азбука Морзе: надо передавать через A пачки из нескольких знаков (точек — тире) и считать каждую такую пачку одним сигналом.

Сначала попробуем передавать через тот же аппарат A по два последовательных сигнала из S. Посмотрим, сколь сильно возрастут теперь наши возможности.

Можно считать, что у нас появился новый передающий аппарат A^2, входной алфавит которого S^2 состоит из двухбуквенных сигналов $(v_1;\ v_2)$, где $v_1 \in S$, $v_2 \in S$ (в дальнейшем мы для удобства элементы любого алфавита будем называть буквами).

Попробуем определить пропускную способность аппарата A^2. Для этого прежде всего надо построить граф его ошибок, обозначаемый через G^2. Посмотрим, при каких условиях сигнал $(v_1;\ v_2)$ можно спутать с сигналом $(w_1;\ w_2)$. Очевидно, для этого должно выполняться одно из следующих трех условий:

а) $v_1 = w_1, \quad v_2 \sim w_2;$
б) $v_1 \sim w_1, \quad v_2 = w_2;$
в) $v_1 \sim w_1, \quad v_2 \sim w_2.$

Таким образом, вершины $(v_1;\ v_2)$ и $(w_1;\ w_2)$ графа G^2 соединены ребром, если в графе G есть ребра $v_1 - w_1$ (или $v_1 = w_1$) и $v_2 - w_2$ (или $v_2 = w_2$). Например, если граф G содержит всего две вершины, соединенные ребром, то G^2 — это квадрат с диагоналями (рис. 2).

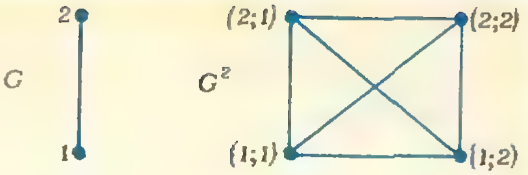


Рис. 2.

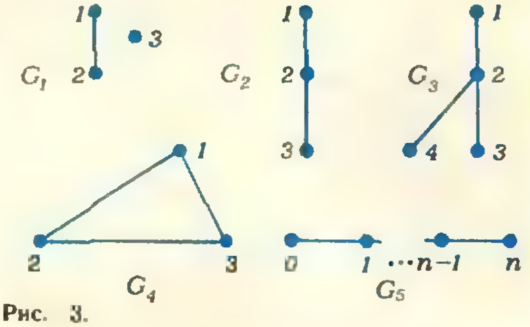


Рис. 3.

Задача 3. Построить граф G^2 для каждого из графов G, изображенных на рисунке 3.

Таким образом, можно считать, что G^2 — это «слоеный» граф: каждый его вертикальный или горизонтальный слой совпадает с G, а каждому ребру $a - b$ графа G соответствует квадрат с диагоналями в графе G^2.

Попробуем найти какое-нибудь независимое множество в графе G^2.

Пусть в графе G множество M независимо. Это означает, что элементы из M при передаче аппаратом A друг с другом не путаются. Тогда при передаче пар букв из M ни одна из этих букв не исказится, поэтому в алфавите S^2 не путаются друг с другом элементы вида $(a;\ b)$, где $a \in M$, $b \in M$. Множество пар $(a;\ b)$, где $a \in M$, $b \in M$, обозначается символом M^2. Легко видеть, что если p — число элементов в M, то число элементов в множестве M^2 равно p^2. Таким образом, пропускная способность аппарата A^2 является как минимум квадратом пропускной способности аппарата A, то есть на языке графов

$$\alpha(G^2) \geqslant (\alpha(G))^2.$$

Заметим, однако, что такое увеличение пропускной способности дается не даром — вдвое падает скорость передачи сигналов.

На самом деле буквы по телеграфу передаются несколько иначе. В принципе для всех 33 букв алфавита необходимы наборы из 6 знаков (пятизнаковых не хватит), но по телеграфу можно передавать не только точ-

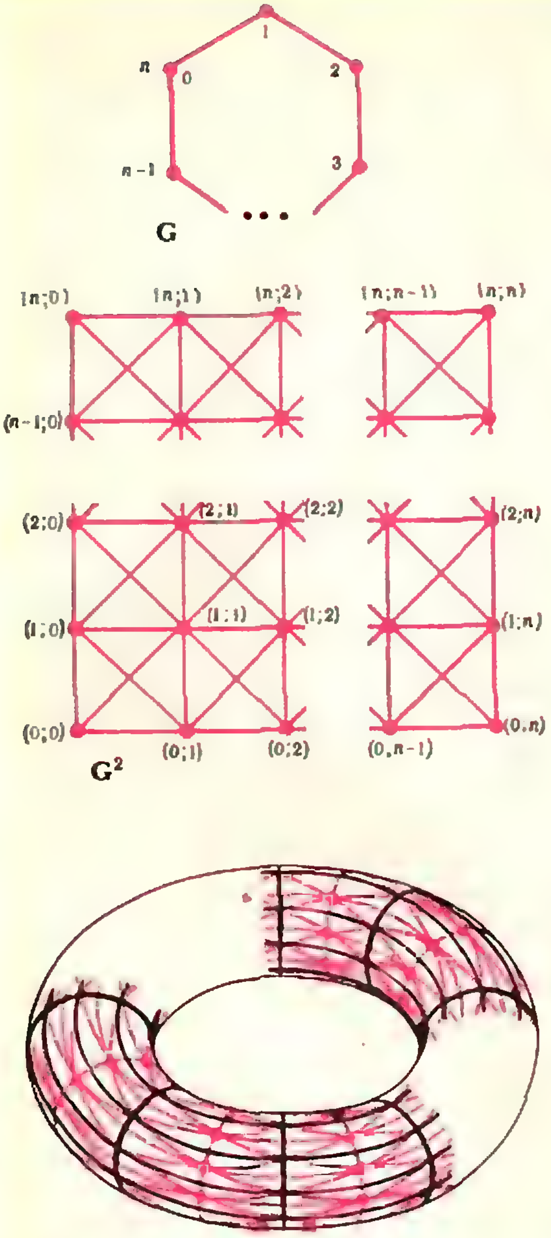


Рис. 4.

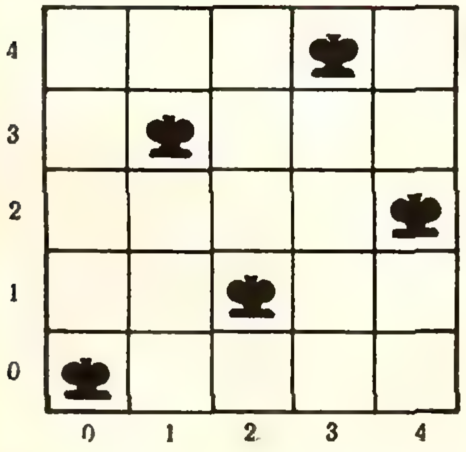


Рис. 5.

ки и тире, но и «пробел» (как увеличенный интервал между сигналами). Поэтому не обязательно использовать для всех букв наборы из 6 знаков — рациональнее за часто используемыми буквами закрепить короткие наборы (точка — за буквой *е*, тире — *т*, точка-тире — *а*), а редко встречающимся буквам оставить длинные наборы (тире-точка-тире-точка — *ц*). Но даже наличие такого специфического сигнала, как «пробел», позволяет наборами не более чем из четырех знаков передавать 31 букву алфавита (наборами из одного знака — две буквы, наборами из двух знаков — еще четыре буквы и т. д.). Так вот, на телеграфе отождествили буквы *ь* и *ъ* (тире-точка-точка-тире) и *е*, *ё* (точка), поэтому для всех букв алфавита хватает наборов не более чем из 4 знаков, а более длинные используются для цифр (точка-точка-точка-тире-тире — 3) и знаков препинания (точка-тире-точка-тире-точка-тире — *запятая*).

Короли на торе

Усложним немного граф G_5 рисунка 3: склеим точки 0 и n. Получится n-угольник 012 ... $(n-1)$. Обозначим этот граф через P_n. Его квадрат P_n^2 получится из квадрата отрезка, если склеить попарно две горизонтальные и две вертикальные его стороны. Но квадрат отрезка — настоящий квадрат, а если еще склеить его противоположные стороны, то получится тор! А точнее, сетка на торе, содержащая n^2 квадратиков 1×1 с диагоналями (рис. 4).

Если вершины этих квадратиков отождествить с клетками торической шахматной доски размером $n\times n$, то соседние в шахматном смысле поля доски окажутся соединенными отрезками сетки, или, что то же самое, ребрами графа P_n^2, а задача М415 о максимальном числе несоседних королей на торе превратится в задачу определения числа независимости графа P_n^2. Ее решение приведено в этом номере журнала (см. с. 37).

Если вы хотите яснее представить себе структуру н. н. м. графа P_n^2, решите следующие задачи.

Задача 4. Пусть множество M — н. н. м. графа P_n^2 (или, что то же самое, торической шахматной доски $n\times n$). Докажите, что

а) если $n=2s$, то M_1^2, где M_1 — некоторое н. н. м. P_n, является н. н. м., и $\alpha(P_{2s}^2)=s^2$;

б) если $n=4s+1$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали доски располагаются ровно $s=\left[\frac{n}{4}\right]$ точек (королей) из M (здесь $[a]$— целая часть числа a);

в) если $n=4s+3$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали торической доски располагаются либо s, либо $s+1$ точек из M.

Задача 5. Будем изображать граф P_5^2 (тор) квадратом, помня, что противоположные стороны его склеены. Назовем *циклическим сдвигом* графа P_n^2 отображение «параллельный перенос», при котором элемент (0; 0) переходит в $(s;\ t)$.

Докажите, что любое н. н. м. M графа P_5^2 можно привести к виду, изображенному на рисунке 5, если разрешить циклические сдвиги графа доски и симметрии относительно диагонали, вертикали и горизонтали квадрата.

Примечание. Симметрию относительно диагонали (0; 0) $(n-1;\ n-1)$ квадрата можно записать формулой $(x;\ y)\rightarrow(y;x)$. Циклический сдвиг можно было бы записать так: $(x,\ y)\rightarrow(x+s;\ \ y+t)$, но в этой формуле будет одна неточность. Хотелось бы отождествить числа n и 0, $n+1$ и 1 и т. д. Для этого применяются значки $\equiv$ и (mod n). Говорят, что a *сравнимо с* b *по модулю* n и пишут $a\equiv b$ (mod n), если a и b при делении на n дают равные остатки. Обозначим через a (mod n) остаток от деления a на n. Тогда можно сказать, что элемент $(x;\ y)$ переходит при циклическом сдвиге графа в элемент $((x+s)$ (mod n); $(y+t)$ (mod n)), а при отражении относительно, скажем, прямой $x=a$ — в элемент $(2a-x)$ (mod n); y).

Все, что известно

Попробуем дальше усложнить наш передающий аппарат; построим аппарат A^k, где k — некоторое натуральное число. Это значит, что с помощью аппарата A мы будем передавать пачки из k букв, каждая из которых берется из начального входного алфавита S.

По аналогии с двухбуквенными сигналами несложно построить граф G^k ошибок аппарата A^k. Его множество вершин — это алфавит S^k, состоящий из всевозможных наборов букв длины k: $(v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_k)$, где все v_i берутся из алфавита S. Несложно построить и ребра в графе G^k, то есть понять, какие сигналы $(v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_k)$ и $(w_1;\ w_2;\ \ldots,\ w_k)$ могут перепутаться. Для этого должны перепутаться между собой буквы каждой из координат, то есть для каждого i $(1\leqslant i\leqslant k)$ должно выполняться одно из двух условий: либо $v_i=w_i$, либо $v_i\sim w_i$ (если $v_i=w_i$ для каждого i, то данные наборы совпадают).

Определять точное значение пропускной способности аппарата A^k в общем случае довольно сложно, но можно оценить ее снизу.

Задача 6. Докажите, что

$$\alpha\,(G^k)\geqslant(\alpha\,(G))^k.$$

А дальше... Даже в одном из самых простых случаев, когда граф ошибок — это n-угольник P_n, об $\alpha\,(P_n^k)$ известно мало. Все, что известно из литературы, сейчас и будет рассказано.

Торическую шахматную доску размером $n\times n$ называют еще *двумерным тором*. Аналогично k-ю степень n-угольника (граф P_n^k) можно назвать *k-мерным тором* со стороной n. Вер-

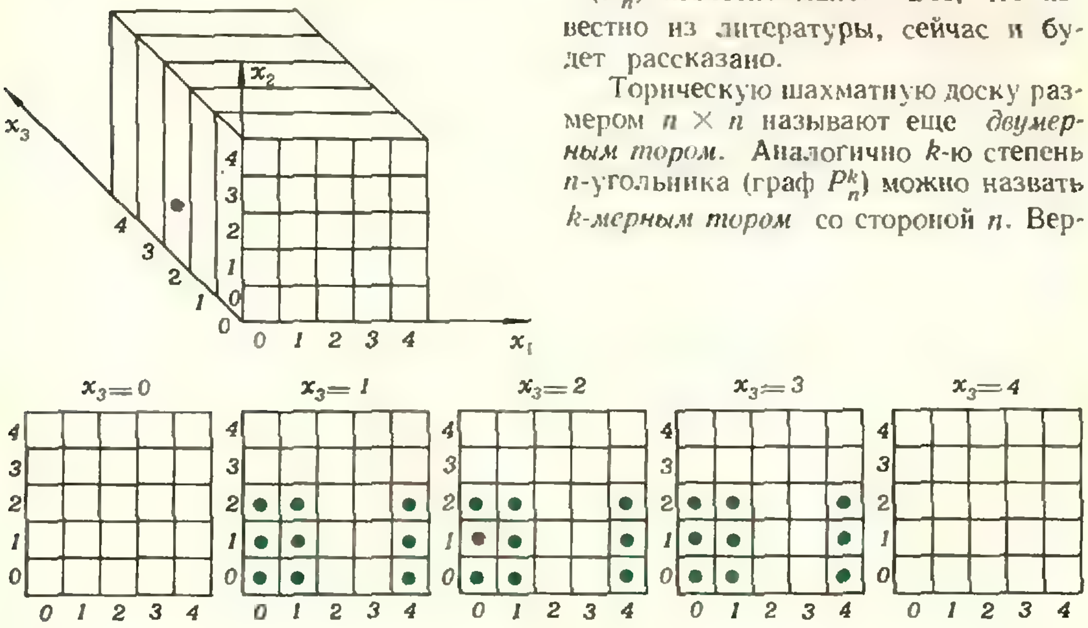


Рис. 6.

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32
5	2	5	10	25	▭
6	3	9	27	81	243
7	3	10	33	▭	▭
8	4	16	64	256	1024
9	4	18	81	▭	▭
10	5	25	125	625	3125
11	5	27	▭	▭	▭
12	6	36	216	1296	7776
13	6	39	▭	▭	▭
14	7	49	343	2401	16 807
15	7	52	▭	▭	▭

Рис. 7.

шины графа P_n^k можно отождествить с набором из k целых чисел: $(x_1; x_2; \ldots; x_k)$, где каждое число x_i изменяется от 0 до $n-1$.

Задача 7. Определите число вершин в графе P_n^k.

Согласно определению, два набора $(x_1; x_2; \ldots; x_k)$ и $(y_1; y_2; \ldots; y_k)$ смежны в графе P_n^k, если в n-угольнике каждая пара координат x_i, y_i — соседи, то есть для каждого i значения i-той координаты различаются не более, чем на единицу: $|x_i - y_i| \equiv h_i \pmod{n} \in \{0, 1\}$ для всех i от 1 до k (например, на рисунке 6 для случая $k = 3$, $n = 5$ отмечены соседи набора (0; 1; 2)).

Задача 8. Определите число соседей каждой вершины k-мерного тора.

Задача 9. Докажите, что

$$\alpha(P_n^k) \leqslant \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right].$$

Задача 10. Определите $\alpha(P_n^k)$, если n — четное.

Для нечетных n справедлива оценка

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k \leqslant \alpha(P_n^k) \leqslant \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right].$$

а иногда известно и точное значение $\alpha(P_n^k)$.

Теорема. *Если $n-1$ делится на 2^k, то*

$$\alpha(P_n^k) = \frac{n-1}{2^k} \cdot n^{k-1}.$$

Полное доказательство этой теоремы довольно длинно, поэтому покажем лишь, как определить независимое множество с таким числом элементов. По каждому набору $(x_1; x_2; \ldots; x_{k-1})$ первых $k-1$ координат получим $r = \frac{n-1}{2^k}$ значений k-той координаты:

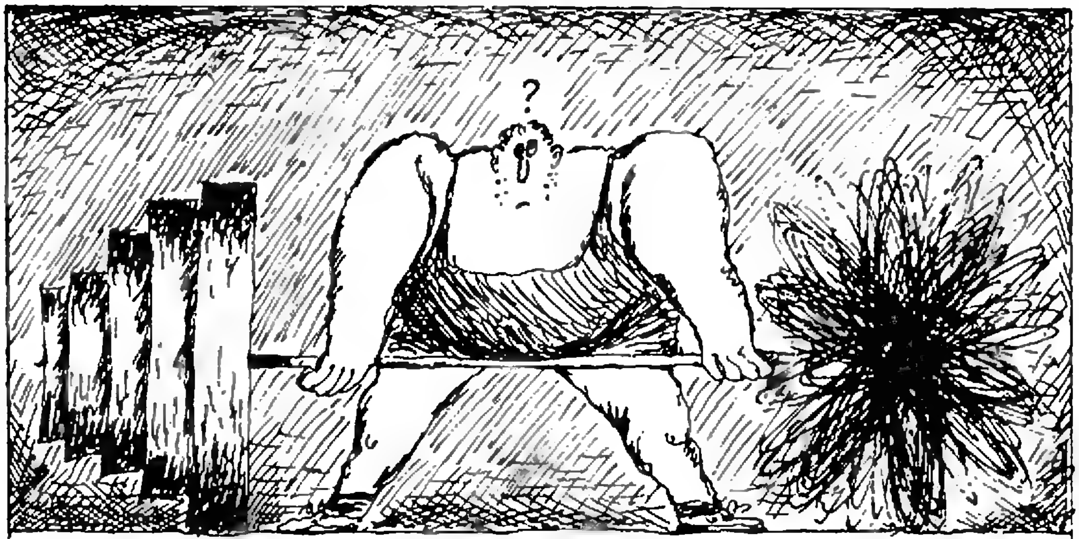
$$x_k \equiv 2l + r(2^{k-1}x_1 + 2^{k-2}x_2 + \ldots + 2^1 x_{k-1}) \pmod{n}.$$

Здесь l — любое целое число от 0 до $r-1$.

Если для случая $k=2$ вы изобразите множество вершин, координаты которых заданы последней формулой, то получится ответ задачи М415 при $n-1$, делящемся на 4.

Эти результаты позволяют построить таблицу значений $\alpha(P_n^k)$ (рис. 7). В ней часть чисел получена теоретически, а остальные — при помощи вычислительной машины. Вы видите, что с ростом k и n доля незаполненных мест становится все весомее.

Может быть, кто-то из вас заполнит пропуски в этой таблице и решит задачу об определении пропускной способности передающих аппаратов?



Я. Смородинский

Масса атома и число Авогадро

Масса тела определяется взвешиванием — сравнением с массой гирь. Масса гири определяется сравнением со специальным эталоном. Этот эталон сравнивается с другим, более точным. В конце концов цепочка сравнений заканчивается сравнением с главным эталоном, массу которого весь мир условился считать равной одному килограмму. Когда-то думали, что удобно определить килограмм как массу одного литра воды при 4°С. Казалось бы, при таком определении каждая лаборатория сможет иметь свой эталон. К сожалению, на практике так не получилось. Ведь задача состоит в том, чтобы сделать точный эталон, а отмерить точно 1 литр воды не просто. Но даже если сделать это достаточно точно, все равно нельзя быть уверенным, что отмерен литр «эталонной» воды — ведь масса воды различна в зависимости от количества растворенного в ней воздуха, примесей всяких солей. Наконец, и температуру 4°С точно выдержать нелегко. С таким «водяным» эталоном вряд ли можно задать массу в 1 *кг* с относительной ошибкой меньшей, чем 0,1%, или, в лучшем случае, 0,01%. Поэтому «водяной» эталон массы продержался сравнительно недолго и был заменен.

В качестве эталона массы в 1 *кг* была принята масса специально изготовленного образца из сплава платины и иридия. Копию этого эталона, хранящегося в Севре, можно изготовить из хорошего сплава с большой точностью. Массы современных копий отличаются от эталонной не более чем на 10^{-8} *кг*, то есть с относительной ошибкой, не превышающей 10^{-6}%. Поэтому сейчас и определяют массу в 1 *кг* с помощью одного-единственного эталона, созданного руками человека.

Есть другой путь определения массы — через единицу массы, которой пользуются в химии и молекулярной физике. Масса атома или молекулы определяется сравнением с 1/12 массы атома изотопа углерода ^{12}C. Отношение массы атома или молекулы к 1/12 массы атома ^{12}C, как известно, называют относительной атомной или молекулярной массой. Преимущество такого определения очевидно: эталон массы можно создать в любой лаборатории, так как массы атомов ^{12}C абсолютно одинаковы. Отношение же масс разных атомов можно определять с большой точностью. Это делают с помощью масс-спектрометра.

1/12 массы атома ^{12}C называют атомной единицей массы (а. е. м.).

Точность измерения в а. е. м. очень высока. Так, относительная масса водорода по современным измерениям равна

$\mu_H = 1{,}007825036\ (11)$ *а. е. м.*

Число в скобках (11) означает, что указанная величина известна с такой точностью, что в последних двух знаках возможна ошибка примерно в 11 единиц. Иначе говоря, последние две цифры могут быть на самом деле и 47, и 25, и любым другим числом, заключенным между ними.

Таким образом, масса в а. е. м. определяется с большей точностью, чем масса в килограммах. Но вот беда: физики не умеют измерять массу макроскопического тела, например, металлической детали непосредственно в а. е. м. В килограммах умеют, а в а. е. м.— нет. Деталь в масс-спектрометр не «запустить», а атом углерода нельзя положить на весы. Значит, надо найти какой-то путь, чтобы измерить массу атома углерода в килограммах, а тогда мы легко будем переводить массу, измеренную в а. е. м., в килограммы и обратно — из килограмма в а. е. м. О том, как была измерена масса атома в килограммах, и притом с большой точностью, мы и расскажем.

Но прежде объясним, как связано со всем сказанным выше число Авогадро. Дело в том, что число Авогадро и 1/12 массы атома ^{12}C связаны. Действительно, число Авогадро — N_A — это, по определению, число частиц в моле вещества. В 1 моле, т. е. в 12 *г* углерода ^{12}C, содержится N_A атомов:

$$N_A = \frac{12\,г/моль}{m_{^{12}C}\,г}.$$

Но $m_{^{12}C}$ (*г*) = 12 *а. е. м.*, так что численное значение величины N_A равно

$$N_A = \frac{1}{\frac{1}{12} m_{^{12}C}}.$$

Таким образом, число Авогадро есть просто обратная величина атомной единицы массы, выраженной в граммах. Можно было бы вообще не вводить N_A, однако во многих формулах по привычке пишут N_A, а поэтому число Авогадро осталось в физике, как константа, равная числу частиц в моле вещества.

Измерить N_A — это то же самое, что измерить массу какого-либо атома в граммах — «взвесить» атом. Зная же массу атома, уже нетрудно определить значение атомной единицы массы в граммах (т. е. обратную величину числа Авогадро).

Три года назад в Американском Бюро стандартов — институте, специализирующемся на сверхточных измерениях,— группа физиков провела очень точные измерения числа Авогадро. Эксперименты проводились по такому плану. Сначала измерялся объем V_0 (*см*³), который приходится на один атом в кристалле. Это делается очень точно при помощи рентгеноструктурного анализа образца. Затем измерялась плотность кристалла ρ (*г/см*³). Затем, зная молярную массу μ вещества кристалла и массу атома $m = \rho V_0$, находим число Авогадро

$$N_A = \frac{\mu}{\rho V_0}.$$

При помощи масс-спектрометра с очень высокой степенью точности определяли относительную атомную массу Si. Тем самым, с той же точностью находили молярную массу Si. Это оказалось необходимо в связи с тем, что она незначительно различалась у разных образцов природного кремния.

Далее необходимо было как можно точнее измерить плотность кремния. Для этого надо было очень точно определить массу образца и его объем. Массу определяют достаточно точно путем взвешивания. Чтобы определить объем, поступили примерно так, как когда-то поступил Архимед с короной царя Гиерона.

Образец опустили в тяжелую жидкость (четырехфтористый углерод). Измерив массу вытесненной жидкости $m_ж$ (это можно сделать с большой точностью) и поделив ее на плотность жидкости $\rho_ж$, можно было бы найти объем вытесненной жидкости, т. е. объем образца V. Однако плотность жидкости известна с недостаточно высокой точностью. Чтобы «избавиться» от нее в последующих вычислениях, поступили так. В ту же жидкость опустили стальной шарик, объем которого был измерен с очень высокой точностью (чего нельзя сделать с кристаллом кремния). Измерив массу вытесненной жидкости $m'_{ж}$ и поделив ее на объем шарика $V_{ш}$, нашли $\rho_{ж}$. Итак, объем образца равен $V = \frac{m_{жк}}{m'_{ж}} V_{ш}$. Поделив массу образца на его объем, нашли плотность кремния ρ.

По результатам всех измерений было найдено число Авогадро. Оно оказалось равным

$$N_A = 6{,}0220941\ (53) \cdot 10^{23}\ моль^{-1}.$$

Относительная ошибка вычисленной величины меньше 10^{-6}%. Пользуясь этим значением N_A, можно получить с такой же точностью величину массы протона в килограммах: обратная величина N_A есть а. е. м. в килограммах

$$1\ а.\ е.\ м. = 1{,}6726348\ (15) \cdot 10^{-27}\ кг;$$

умножив это число на значение относительной атомной массы протона, получим массу протона в килограммах:

$$m_p = 1{,}6326348\ (15) \cdot 10^{-27}\ кг.$$

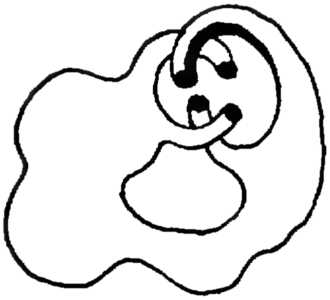
Погрешность в определении N_A относительно мала. Но она еще слишком велика, чтобы можно было определить массу протона в килограммах с точностью, которая позволила бы принять ее за эталон массы. Масса, определяемая эталоном килограмма, пока еще остается намного точнее. Надо уменьшить ошибку в числе Авогадро раз в 50—100 для того, чтобы можно было отказаться от эталона массы, сделанного человеком, и перейти к естественному эталону — протону.

Рогатая сфера Александера

Каждый из вас прекрасно знает, что такое сфера. Представьте себе теперь, что сфера изготовлена из прочной пленки, которую можно растягивать и сжимать, но запрещается склеивать и рвать. Тогда из сферы можно получить поверхности, сильно от нее отличающиеся, например, тетраэдр, куб или цилиндр с днищами. С точки зрения одного из разделов «высшей геометрии» — *топологии* — все эти поверхности одинаковы.

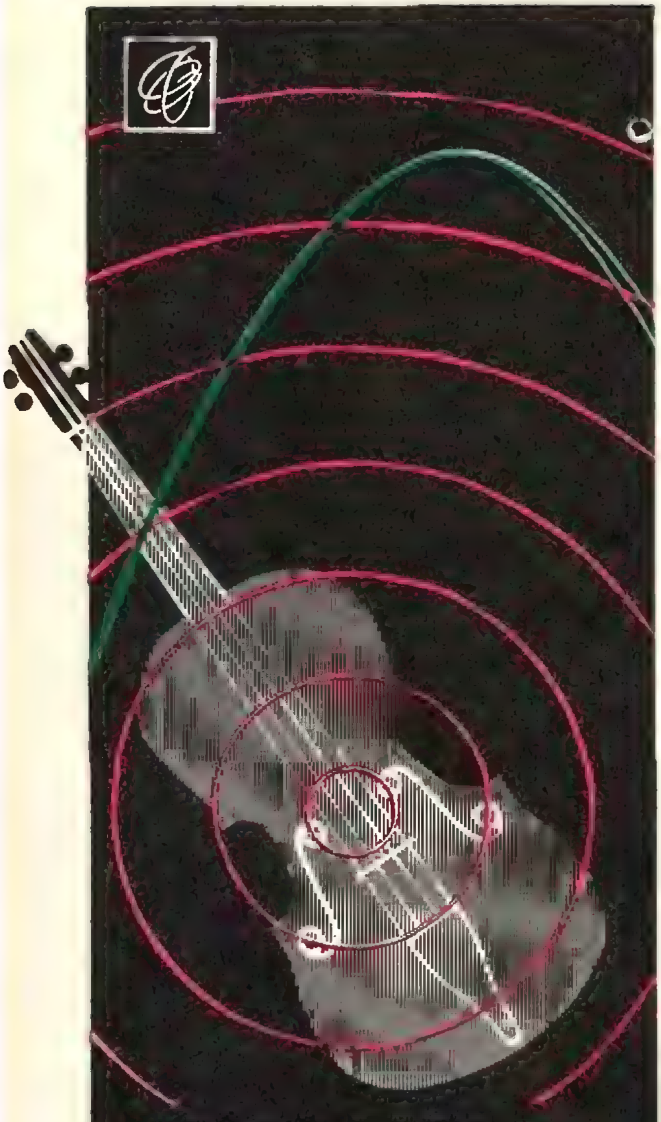
На обложке вы видите одну из таких «одинаковых со сферой» поверхностей (*топологический образ сферы*) — *рогатую сферу Александера*. Из обычной сферы ее можно получить бесконечной итерацией процесса изображенного на рисунке 1. На первом шаге получается конструкция «сцепленные пальцы». Затем эту конструкцию следует повторить на каждой паре зачерненных на рисунке «дисков», снова сцепить «пальцы» (следующего порядка) и т. д.

Рогатая сфера Александера обладает одним удивительным свойством. Если вы рассмотрите обычную сферу и любую окружность, целиком лежащую вне этой сферы или внутри ее, то эту окружность можно стянуть в точку, не пересекая поверхности сферы. Иначе говоря, области, на которые сфера делит пространство, односвязны. Долгое время математики думали, что любой топологический образ сферы делит пространство на две односвязные области (обобщение знаменитой леммы Жордана о том, что произвольная замкнутая несамопересекающаяся линия делит сферу на две односвязные области). Однако в 1924 году американскому математику Дж. У. Александеру удалось построить «рогатую сферу», которая, как и обычная сфера, разбивает пространство на две области A и B («внутренность» и «внешность»), но внешняя область B не односвязна.



Если вы хотите познакомиться с топологией поближе, рекомендуем вам прочитать статью В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича в сборниках «Математическое просвещение» — №№ 2, 3, 4 и 5 (Москва, 1957—1960 г.).

И. К.



В. Майер, Р.-Э. Шафир

Звук и струя

В первом номере нашего журнала за текущий год была напечатана статья этих же авторов «Струйный автогенератор звука». В ней рассказывалось о возможности получения незатухающих звуковых колебаний с помощью водяной струи. Статья заканчивалась такими вопросами: «Действительно ли звуковые волны воздействуют на струю? В чем выражается это воздействие? Каков его механизм?» Проще всего на эти вопросы ответить экспериментально. О том, как это можно сделать, и рассказывается в предлагаемой ниже статье.

Описанные в статье опыты известны уже более ста лет, однако время не наложило на них отпечатка старости. Мы не знаем, предвидели ли ученые, исследовавшие жидкие струи, возможность практического применения обнаруженных ими явлений. Скорее всего нет. Тем не менее, как это всегда и бывает (так уж устроен мир!), восхищаясь красотой и постигая сущность вещей, человек извлекает из этого далекого от повседневности занятия непосредственную пользу. Сейчас жидкие струи широко используются на практике — струйные усилители, генераторы и т. п.

Звуковой генератор

Необходимый для опытов звуковой генератор в наши дни проще всего собрать на транзисторах. Их и другие необходимые детали можно приобрести в любом радиомагазине.

Принципиальная схема звукового генератора приведена на рисунке 1. Собственно генератор собран на транзисторах T_1 и T_2. Такой генератор дает колебания, по форме близкие к прямоугольной, то есть состоящие из множества синусоидальных гармоник. Вот почему его называют мультивибратором (multum — много, vibro — колебание). Частота колебаний, даваемых мультивибратором, определяется емкостями конденсаторов C_1, C_2 и сопротивлениями резисторов R_2, R_3, R_4. Переменный резистор R_3 служит для плавного изменения частоты. На транзисторе T_3 собран усилитель низкой частоты. Нагрузкой транзистора T_3 является первичная обмотка трансформатора Tp, ко вторичной обмотке которого подключен динамик (громкоговоритель) $Гp$.

Звуковой генератор может быть собран, например, так, как показано на рисунке 2. В налаживании этот прибор не нуждается, и, если детали исправны, а прибор собран в соответствии со схемой, генератор начинает работать сразу по включении питания.

Влияние звука на водяную струю

Анализируя работу струйного автогенератора, мы уже говорили о том, что звук должен каким-то образом влиять на струю. Предлагаем вам выяснить на опыте, так ли это на самом деле.

Стеклянную трубку с отверстием диаметром около 1 *мм* вденьте в конец резинового шланга, другой конец которого опустите в сосуд с водой, расположенный на высоте 0,5—1 *м* над поверхностью стола. Стеклянную трубку укрепите на столе под произвольным углом к горизонту. Ртом вытяните из шланга воздух и получите струю.

В опытах со струйным автогенератором мы рекомендовали шланг соединять непосредственно с водопроводным краном. Здесь такой способ получения струи нежелателен потому, что по железным трубам водопровода хорошо распространяются различные звуки и, если они как-то влияют на струю, будут мешать наблюдениям.

Выходящая из отверстия стеклянной трубки струя неоднородна. Вблизи отверстия она сплошная, затем мутнеет и уже в верхней части траектории разбивается на совершенно обособленные капли, которые падают настолько быстро, что создают ощущение целого снопа непрерывных струй (рис. 3, *а*). Теперь рядом со стеклянной трубкой поставьте на стол динамик и подключите его к звуковому генератору. Включите питание и постепенно изменяйте переменным резистором частоту звука. Вы заметите, что при определенной частоте сплошной (прозрачный) участок струи резко сокращается, а сноп струй слипается, образуя одну внешне совершенно непрерывную струю (рис. 3, *б*)! Это настолько удивительно, что все, кто видит описанное явление первый раз, приходят в изумление. Оказывается, водяная струя чрезвычайно чувствительна к звуку. Можно расположить динамик в любом месте стола, отнести его на другой стол — все равно, если частота звука подобрана правильно, струя реагирует на звук. Меняя частоту звука, можно получить из снопа струй и две струи, примерно равные по толщине (рис. 3, *в*), и три струи, и две струи, одна из которых значительно тоньше другой и бьет как-то в сторону (рис. 3, *г*), и т. д.

Если для проведения опытов вы не решились собрать звуковой генератор, его можно заменить любым другим источником звука, частоту которого можно изменять. Самый доступный из них — это ваш голос. Надо только иметь в виду, что звук, на который реагирует струя, должен быть достаточно низким. Лучше всего, если его частота лежит в пределах 200—500 *гц*. Громко кричать струе вовсе не обязательно: она довольно послушна, если вы умеете приказывать струе на понятном ей языке. Другим возможным источником звука является, например, гитара. Прикоснитесь ею к поверхности стола и перебирайте струны. Вы без особого труда подберете звук такой частоты, при котором размазанная струя слипается. Взяв одновременно звуки слегка отличающихся частот, можно получить звуковые биения, и тогда струя будет слипаться в такт с изменениями звука.

Попробуем объяснить, почему же разбрызганная струя слипается под действием звука. Заметим еще раз, что как только струя начинает реаги-

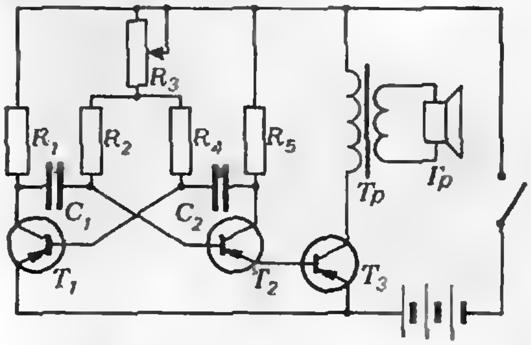


Рис. 1. Принципиальная схема генератора. Параметры схемы: транзисторы T_1 — T_3 типа МП41; динамик *Гр* типа 0,5ГД21; трансформатор *Тр* — выходной от карманного радиоприемника; напряжение питания 4,5—9 *в* (одна или две последовательно соединенные батарейки для карманного фонаря); $R_1 = R_5 = 10$ *ком*, $R_2 = R_4 = 47$ *ком*, $R_3 = 68$ *ком*, $C_1 = C_2 = 0,05$ *мкф*.

Рис. 2. Внешний вид генератора.

ровать на звук (при определенной частоте последнего), прозрачный участок струи уменьшается. Это означает, что процесс образования капель теперь начинается раньше. В чем причина?

В отсутствие звука струя сама распадается на капли, причем капли появляются более или менее упорядоченным образом. Однако в силу случайных обстоятельств капли оказываются немного различными. Каждая из них, обладая своей массой и скоростью, летит по соответствующей траектории, а все движущиеся капли вместе создают впечатление снопа струй. При совпадении частоты звука с частотой естественного образования капель этот процесс образования начинается раньше (сплошная часть струи укорачивается) и происходит почти со строгой периодичностью. Звук как бы отрывает от струи через равные промежутки времени одинаковые капли. Эти капли быстро движутся по одной траектории и производят впечатление одной слипшейся струи.

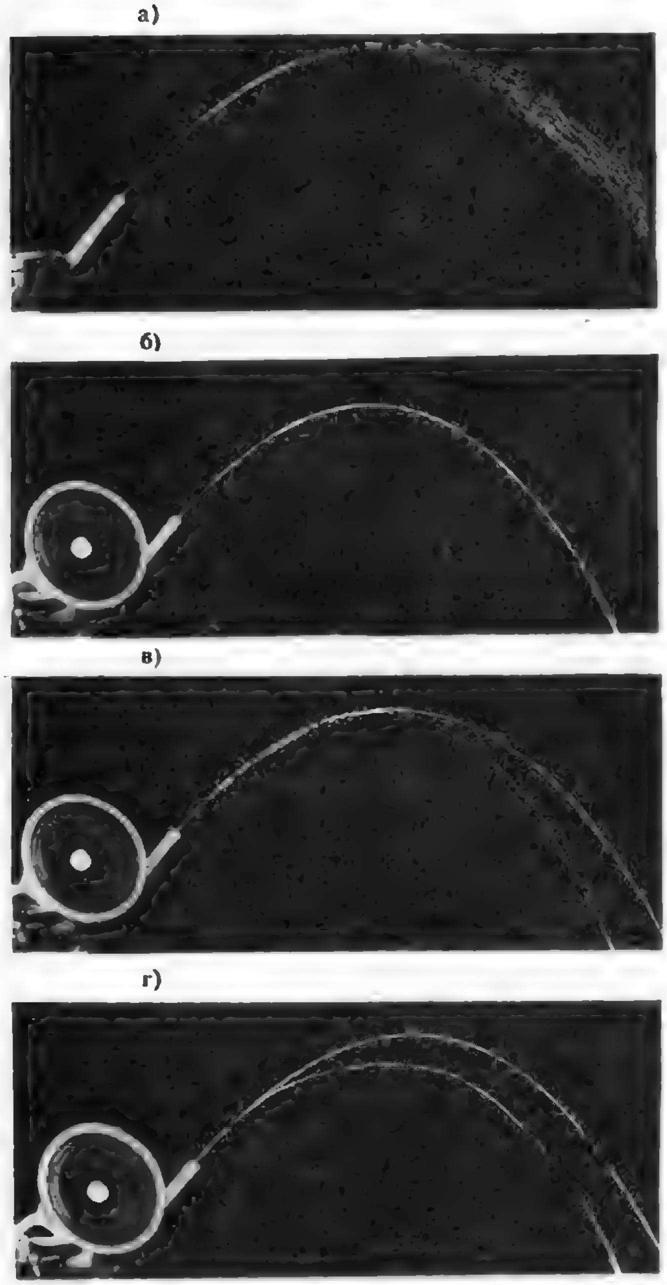

а)
б)
в)
г)

Рис. 3. Струи при различных частотах звука.

Чтобы проверить правильность этого качественного объяснения, изготовьте простейший стробоскоп.

К валу микроэлектродвигателя припаяйте жестяную насадку диаметром около 30 *мм* и толщиной 0,5—1 *мм*. Двумя болтами с гайками закрепите на этой насадке картонный диск диаметром 150 *мм* с четырьмя симметрично расположенными прорезями. Микроэлектродвигатель соедините с одной (или двумя) батарейками через реостат, изготовленный из грифеля простого карандаша. Передвигая контакт по грифелю (или наоборот), можно менять сопротивление реостата и тем самым регулировать скорость вращения диска стробоскопа.

Получите слипшуюся струю и посмотрите на нее через стробоскоп. Правильно подобрав скорость вращения диска, вы заметите, что слипшаяся струя на самом деле состоит из отдельных капель, следующих друг за другом через равные промежутки времени (рис. 4). Для улучшения условий наблюдения струю можно сбоку осветить, а за ней расположить темный фон, на который не попадает прямой свет от осветительной лампы.

Рис. 4. Вид слипшейся струи через стробоскоп.

Ю. Ионин, А. Плоткин

Среднее значение функции

В этой статье понятие среднего арифметического n чисел обобщается на функции, определенные на отрезке, окружности и сфере. Кроме того, в ней решается задача М394 («Квант», 1976, № 7).

1. На конечном множестве

Выступая на классном собрании, Макар Ливанов сказал: «Давайте бороться за то, чтобы успеваемость каждого ученика нашего класса была выше средней!». Видимо, Макар не очень хорошо знал математику. Давайте разберемся.

Как известно, средним арифметическим n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, задаваемое равенством

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (1)$$

Следуя призыву Макара, мы должны были бы добиться одновременного выполнения неравенств $x_1 > M$, $x_2 > M$, ..., $x_n > M$. Сложив эти n неравенств, мы получим противоречие с (1).

Отметим некоторые важные свойства среднего арифметического:

I. $M(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) + M(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

II. $M(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

III. $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Упражнение 1. Докажите свойства I—III.

Упражнение 2. Докажите для $n > 1$ неравенство $C_{2n}^n > \frac{2^{2n-1}}{n}$. Это легко сделать методом математической индукции, но можно — при помощи свойства III.

Свойство III часто используется следующим образом: чтобы установить, что среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть число, большее числа d, достаточно проверить, что $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) > d$. Рассмотрим, например, задачу, предлагавшуюся на X Всесоюзной математической олимпиаде.

Задача 1. *На круглом столе как-то лежат 50 правильно идущих круглых часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.*

Решение. Обозначим через $f(t)$ сумму расстояний от центра стола O до концов минутных стрелок в момент времени t *час*, а через d — сумму расстояний от точки O до центров часов. Требуется доказать, что $f(t) > d$ в некоторый момент t. Мы покажем, что существует t_0, для которого $M\left(f(t_0), f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right)\right) > d$. Значит, один из моментов t_0, $t_0 + \frac{1}{2}$ — искомый.

Обозначим через O_i центр i-х часов, через A_i — конец минутной стрелки этих часов в некоторый момент t, через B_i — конец минутной стрелки тех же часов через полчаса, т. е. в момент $t + \frac{1}{2}$. Поскольку по условию все часы «правильно идут», найдется такой момент t_0, в который точки O, A_1 и B_1 не лежат на одной прямой. Рассмотрим треугольник OA_1B_1 и медиану OO_1 в нем (рис. 1). Легко доказать, что в любом треугольнике длина медианы меньше полусуммы длин сторон, между которыми она заключена (докажите!). Поэтому в момент t_0 мы имеем

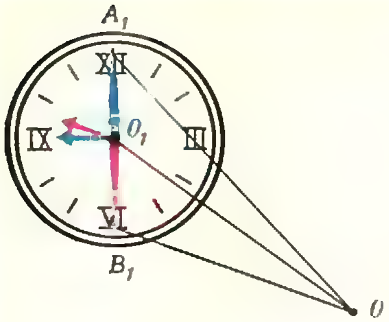


Рис. 1.

$\frac{OA_1|+|OB_1|}{2}>|OO_1|$. Для остальных часов в этот момент $\frac{|OA_i|+|OB_i|}{2}\geqslant$ $\geqslant|OO_i|$ (почему только $\geqslant$, а не $>$?). Сложив 50 неравенств, получим $M\left(f(t_0),\ f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)\right)>d$.

2. На отрезке

В задаче 1 оказалось достаточным оценить среднее арифметическое двух значений функции. А нельзя ли рассмотреть среднее всех значений? Чтобы подойти к определению этого понятия, придадим геометрический смысл среднему n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разобьем какой-нибудь отрезок $[a;\ b]$ на n равных частей и построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат получившиеся отрезочки длины $\frac{b-a}{n}$, а высоты равны, соответственно, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (рис. 2). Площадь этой ступенчатой фигуры равна $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot(b-a)$. Таким образом, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это высота прямоугольника с основанием $[a;\ b]$, равновеликого построенной ступенчатой фигуре.

Пусть теперь f — функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;\ b]$. Давайте под *средним значением $M(f)$ функции f на отрезке $[a;\ b]$* понимать высоту прямоугольника с основанием $[a;\ b]$, равновеликого соответствующей криволинейной трапеции (рис. 3). Поскольку в рассматриваемом случае площадь

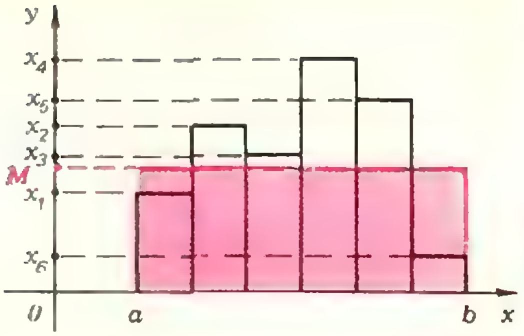


Рис. 2.

этой трапеции равна $\int_a^b f(x)\,dx$ («Алгебра и начала анализа 10», п. 101), $M(f)$ определяется формулой

$$M(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Определение (2) годится не только для непрерывной и неотрицательной функции, но и для любой функции, определенной на $[a;\ b]$, для которой правая часть равенства (2) имеет смысл.

Так определенное среднее значение обладает свойствами, аналогичными свойствам I—III:

I′. $M(f+g)=M(f)+M(g)$.

II′. $M(\alpha f)=\alpha M(f)$.

III.′ $\min\limits_{[a;\ b]} f\leqslant M(f)\leqslant\max\limits_{[a;\ b]} f$.

Упражнение 3. Докажите свойства I′—III′.

Упражнение 4. Выведите из I′—III′ свойство

IV′. Если $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in[a;\ b]$, то $M(f)\leqslant M(g)$.

Со средним значением функции на отрезке вы уже сталкивались в заметке А. Виленкина «Игла Бюффона» («Квант», 1977, № 5). Приведем еще один пример применения этого понятия.

Задача 2. *На плоскости даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите неравенство*

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant$$
$$\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|. \quad (3)$$

Наше решение этой задачи будет опираться на ее одномерный вариант:

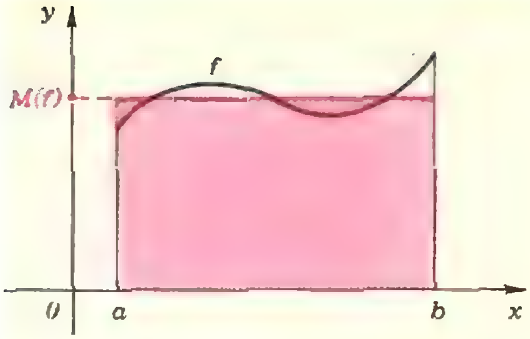


Рис. 3.

Упражнение 5. Докажите, что если a, b, c, d — действительные числа, сумма которых равна 0, то

$$|a|+|b|+|c|+|d|\geqslant|a+d|+|b+d|+|c+d|. \tag{4}$$

Решение. Если в (3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ заменить их проекциями на какую-нибудь ось («Геометрия 9»), получится (4). Возникает идея: доказать (3), рассматривая проекции данных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ на всевозможные оси. Попробуем ее реализовать.

Пусть $\vec{p}$ — вектор. Введем вспомогательную функцию p следующим образом: фиксируем некоторую ось l_0; обозначим через $p(\alpha)$ проекцию вектора $\vec{p}$ на ось l, образующую с осью l_0 угол α (рис. 4). Если φ — угол между вектором $\vec{p}$ и осью l_0, то $p(\alpha)=|\vec{p}|\cos(\varphi-\alpha)$.

Рассмотрим среднее значение $M(|p|)$ функции $\alpha\to|p(\alpha)|$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Из определения (2)

$$M(|p|)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(\alpha)|\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\vec{p}|\,|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha=$$

$$=\frac{|\vec{p}|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha. \tag{5}$$

Покажем существование такого $k\neq 0$, что для любого вектора $\vec{p}$ справедливо равенство

$$M(|\vec{p}|)=k\,|\vec{p}|. \tag{6}$$

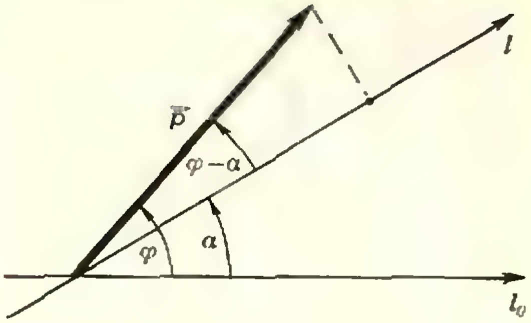


Рис. 4.

В силу (5) достаточно доказать, что интеграл $\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha$ не зависит от вектора $\vec{p}$, то есть не зависит от угла φ.

$$\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha=\int_0^{2\pi}|\cos(\alpha-\varphi)|\,d\alpha=$$

$$=\int_{0-\varphi}^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=$$

$$=\int_{-\varphi}^{0}|\cos\alpha|\,d\alpha+\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=$$

$$=\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi}|\cos(\alpha-2\pi)|\,d\alpha+$$

$$+\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi}|\cos\alpha|\,d\alpha+$$

$$+\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha+$$

$$+\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_0^{2\pi}|\cos\alpha|\,d\alpha. \tag{7}$$

В этой выкладке использованы два свойства интегралов:

$$\int_a^b f(x+p)\,dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

(«Алгебра и начала анализа 10», п. 106 и задача № 512). Центральным местом выкладки является использование того факта, что 2π — период функции $\alpha \to \cos\alpha$.

Интеграл $\int\limits_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha$ легко вычислить (он равен 4), но нам важно лишь то, что он не зависит от φ и отличен от 0.

Если $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, то для любого α имеем $a(\alpha)+b(\alpha)+c(\alpha)+d(\alpha)=0$. В силу (4)

$$|a(\alpha)|+|b(\alpha)|+|c(\alpha)|+|d(\alpha)|\geqslant \geqslant |a(\alpha)+d(\alpha)|+|b(\alpha)+d(\alpha)|+ +|c(\alpha)+d(\alpha)|. \qquad (8)$$

Поскольку (8) выполнено для любого $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, из свойств IV′ и I′ вытекает

$$M(|a|)+M(|b|)+M(|c|)+ + M(|d|)\geqslant M(|a+d|)+ + M(|b+d|)+M(|c+d|).$$

Из (6)

$$k|\vec{a}|+k|\vec{b}|+k|\vec{c}|+k|\vec{d}|\geqslant \geqslant k|\vec{a}+\vec{d}|+k|\vec{b}+\vec{d}|+k|\vec{c}+\vec{d}|.$$

Сократив на k, получаем (3).

3. На окружности и сфере

Задача 3. *В пространстве даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите для них неравенство* (3).

Хотелось бы доказать (3) перенесением «плоского рассуждения» (из задачи 2) в пространство. Для этого надо как-то определить среднее значение модулей проекций вектора на всевозможные оси в пространстве. Чтобы пояснить, как это делается, рассмотрим сначала функции, определенные на окружности единичного радиуса.

Пусть f — такая функция. Для произвольного α положим $\overline{f}(\alpha)=f(A)$, где A — конец дуги нашей окружности с радианной мерой α (рис. 5). Таким образом, произвольной функции f, заданной на единичной окружности, мы поставили в соответствие некоторую функцию $\overline{f}$,

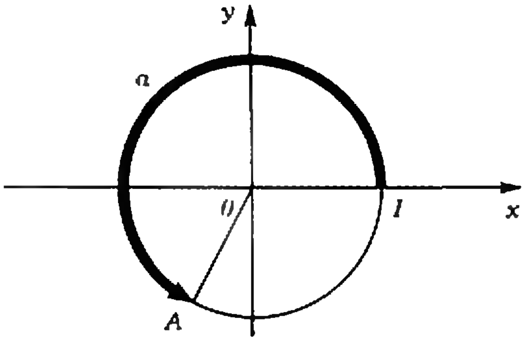


Рис. 5.

определенную на всей прямой. Очевидно, $\overline{f}$ — периодическая функция с периодом 2π. Определим теперь *среднее значение $M(f)$ функции f на окружности* как среднее значение функции $\overline{f}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

В приведенном решении задачи 2 ключевую роль играла независимость среднего $M(|p|)$ от направления вектора $\vec{p}$. Эта независимость есть частный случай следующего общего свойства средних значений функции на окружности:

V′. *Пусть f и g — функции, определенные на окружности, причем существует такой угол α, что для любой точки A окружности $g(A)=f(R^{\alpha}(A))$* (здесь R^{α} — поворот вокруг центра данной окружности на угол α). *Тогда $M(g)=M(f)$.*

Упражнение 6. Докажите свойство V′

Переходя к задаче 3, рассмотрим в пространстве сферу единичного радиуса с центром в начале координат O. Для функций, заданных на этой сфере, можно так определить среднее значение, чтобы свойства I — V′ выполнялись. Мы не можем здесь объяснить, как это делается, так как для этого пришлось бы ввести интегрирование по сфере. (Это можно сделать с помощью интегральных сумм примерно так же, как определяется интеграл на прямой в п. 104 учебника «Алгебра и начала анализа 10».)

Допустим, что *среднее значение $M(f)$ функции f на сфере* как-то определено, причем свойства I′—V′ выполняются. (Таким образом, мы как бы рассматриваем аксиоматическое задание среднего значения функции на сфере. Интересно отметить, что «аксиомами» I′—V′ оно определяется однозначно.)

Пусть $\vec{p}$ — вектор. Введем вспомогательную функцию p следующим образом: для любой точки A нашей сферы обозначим через $p(A)$ проекцию вектора $\vec{p}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{OA}$.

Рассмотрим среднее значение $M(|p|)$ функции $A \to |p(A)|$ на сфере. Покажем существование такого $k \neq 0$, что для любого вектора $\vec{p}$ выполняется (6). Для этого, ввиду свойства II′, достаточно доказать, что $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ влечет $M(|p|) = M(|q|)$.

Упражнение 7. Покажите, что этого достаточно.

Пусть $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Обозначим через R какой-нибудь поворот пространства вокруг оси, проходящей через точку O, который переводит луч с направляющим вектором $\vec{q}$ в луч с направляющим вектором $\vec{p}$. Тогда для любой точки A сферы $q(A) = p(R(A))$. Из V′ вытекает $M(|q|) = M(|p|)$.

Дальнейшее решение задачи 3 дословно повторяет решение задачи 2. (Упражнение 5 и задачи 2, 3 исчерпывают задачу М394.)

4. Длина через ширину

Идею, на которой основано решение задач 2 и 3, можно использовать для вычисления длины плоской замкнутой выпуклой ломаной.

Пусть *Л* — такая ломаная, a_1, a_2, ..., a_n — ее звенья. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть l_α — ось, образующая с осью l_0 угол α. Обозначим через $Ш(\alpha)$ «ширину» нашей ломаной в направлении оси l_α, т. е. длину ее проекции на ось l_α. Оказывается, если знать «ширину» ломаной *Л* в произвольном направлении, т. е. уметь вычислять функцию $\alpha \to Ш(\alpha)$, то можно найти ее длину L. Покажем, как это сделать.

Обозначим через $a_i(\alpha)$ длину проекции звена a_i на ось l_α.

Упражнение 8. Докажите, что $Ш(\alpha) = \frac{1}{2}[a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \dots + a_n(\alpha)]$.

В решении задачи 2 было показано, что среднее значение функции $\alpha \to a_i(\alpha)$ пропорционально $|a_i|$. Из (5) и (7) коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\cos\alpha|\,d\alpha = \frac{2}{\pi}$.

Из упражнения 8 и свойств I′, II′ среднее значение $M(Ш)$ функции $Ш$ равно полусумме средних значений функций $\alpha \to a_i(\alpha)$. Следовательно,

$$M(Ш) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}|a_1| + \frac{2}{\pi}|a_2| + \dots + \frac{2}{\pi}|a_n|\right) = \frac{1}{\pi}(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|) = \frac{1}{\pi}L.$$

Отсюда и из (2)

$$L = \pi \cdot M(Ш) = \pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Ш(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} Ш(\alpha)\,d\alpha \quad (9)$$

Таким образом, зная функцию $Ш$, мы можем найти длину L ломаной *Л*.

Упражнение 9. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

Формула (9) справедлива для любой плоской замкнутой выпуклой кривой. Изложенный метод определения длины «через ширину» предложил в 1930 году известный польский математик Г. Штейнгауз.

5. Длина суммы

Задача 4. *На плоскости даны векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, сумма длин которых равна 1. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $\frac{1}{\pi}$.*

Решите эту задачу, следуя предлагаемому ниже плану. Пусть *З* — подмножество множества $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$

..., $\vec{a}_n\}$ с наибольшей длиной суммы.

Упражнение 10. Докажите, что все векторы из B «смотрят в одну сторону», т. е. образуют с некоторой осью острые углы.

Назовем *псевдопроекцией* вектора $\vec{p}$ на ось l обычную проекцию, если угол между $\vec{p}$ и l — острый, и число 0 — в противном случае. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть l_α — ось, образующая с осью l_0 угол α. Положим

$$g(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } \cos x>0,\\ 0, & \text{если } \cos x\leqslant 0.\end{cases}$$

Упражнение 11. Проверьте, что $\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi-\alpha)\,d\alpha=2$ при любом φ.

Если φ — угол между вектором $\vec{p}$ и осью l_0, то псевдопроекция этого вектора на ось l_α равна $|\vec{p}|g(\varphi-\alpha)$.

Обозначим сумму псевдопроекций векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ на ось l_α через $f(\alpha)$.

Упражнение 12. Докажите, что среднее значение функции f на отрезке $[0; 2\pi]$ равно $\frac{1}{\pi}$.

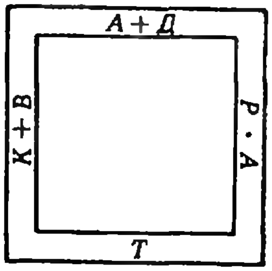
Упражнение 13. Докажите, что ось l_α можно выбрать так, что сумма псевдопроекций данных векторов на эту ось будет не меньше $\frac{1}{\pi}$.

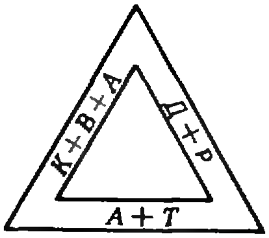
Упражнение 14. Докажите утверждение задачи 4.

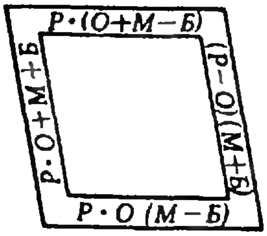
Константу $\frac{1}{\pi}$ в задаче 4 нельзя заменить никакой большей константой. В этом можно убедиться, взяв достаточно большое n и векторы, идущие по сторонам правильного n-угольника.

Если в задаче 4 заменить $\frac{1}{\pi}$ на $\frac{1}{4}$, соответствующее утверждение будет верно и для векторов в пространстве.

Арифметика с геометрией







а) Найдите длины сторон квадрата и равностороннего треугольника, изображенных на рисунке, если в формулах, выражающих длины сторон, каждой буквой зашифрована некоторая цифра.

б) Решите ту же задачу для одного ромба, изображенного на следующем рисунке.

В. Радунский

задачник Кванта

Задачи

М451—М455; Ф463—Ф467

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно прислать не позднее 1 октября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М451, М454» или «Ф467». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М451. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

Ф. Вайнштейн

М452. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

Н. Нецветаев

М453. Дано множество положительных чисел $\{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ..., n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

М454. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

В. Гутенмахер

М455. Мы будем рассматривать многочлены P, Q, R, ... от одного переменного со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (то есть после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа a найдите все многочлены степени не выше 3, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - a$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены Q и R коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов P_2, P_3, P_4, ..., P_k, ..., где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют, и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x) = x^2 - 2$.

И. Бернштейн, Э. Туркевич

Ф463. Две льдины движутся поступательно с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, одна — на север, другая — на запад. Оказалось, что в любой момент времени на обеих льдинах можно так расположить часы, что скорости концов секундных стрелок относительно Земли будут равными, причем, для каждого момента времени такое расположение единственно. Определить, на какое расстояние перемещаются льдины за сутки, если длина каждой секундной стрелки равна 1 *см*. Циферблаты часов расположены горизонтально. (8 кл.)

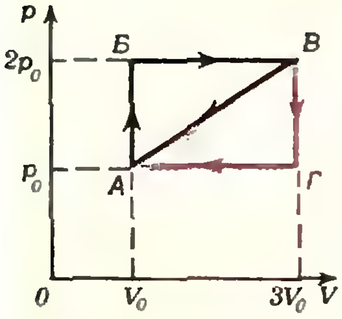


Рис. 1.

Ф464. На рисунке 1 изображены два замкнутых цикла: АБВА и АВГА. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом.

1) Указать, на каких участках циклов газ получает и на каких участках отдает тепло.

2) У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз? (9 кл.)

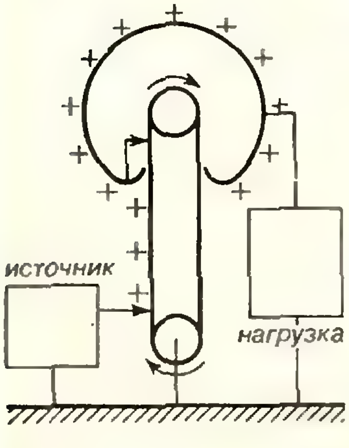


Рис. 2.

Ф465. В высоковольтном электростатическом генераторе заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод радиуса $R = 1{,}5$ *м* (рис. 2). Оценить максимальные значения напряжения и тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты $v = 20$ *м/сек*, а ее ширина $l = 1$ *м*. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля $E_0 \approx 30$ *кв/см*. (9 кл.)

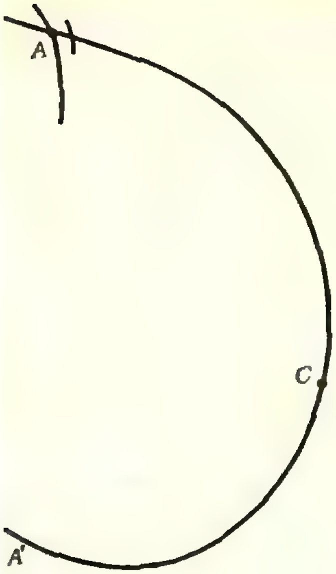


Рис. 3.

Ф466. Рисунок 3 сделан с фотографии треков частиц в камере Вильсона. Распады ядер газа, наполняющего камеру Вильсона, вызваны в данном случае действием на них быстрых нейтронов. Камера Вильсона была заполнена смесью водорода (H_2), паров спирта (C_2H_5OH) и воды (H_2O) и помещена в магнитное поле с индукцией 1,3 *тл*. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рисунка.

1) Определить энергию протона, появившегося в точке A. Траектория этого протона — кривая AA'. Почему меняется кривизна траектории протона? Определить энергию протона в точке C его траектории.

Масса протона равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

2) Определить, ядро какого элемента распалось в точке A, если треки частиц, начинающиеся в этой точке, идентифицированы как следы двух протонов и двух α-частиц. (10 кл.)

Ф467. Луна одновременно фотографируется с одной и той же стороны с Земли и со спутника Луны. Орбита спутника круговая. Диаметр изображения Луны на фотографии, полученной на Земле, равен 4 *мм*, а на спутнике Луны — 250 *мм*. Найти период обращения спутника Луны по его орбите, если оба снимка сделаны с помощью одинаковых объективов с фокусным расстоянием 500 *мм*. Принять, что ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше чем на Земле и расстояние от Земли до Луны равно 380 000 *км*. (10 кл.)

Решения задач

М411, М412*), М414, М415; Ф423—Ф427

М411. *Три отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельные его сторонам, проходят через одну точку и имеют одинаковую длину x. Найдите x, если длины сторон треугольника равны a, b, c.*

На рисунке 1 заштрихованы три треугольника, подобные ABC, у каждого из которых одна сторона имеет длину x.

Рассмотрим стороны трех заштрихованных треугольников, параллельные стороне AC длины b; обозначим длины этих сторон через b_1, b_2 и b_3. Заметим, что сумма их длин равна $2b$ ($b = |AC|$): $b_1 + b_2 + b_3 = 2b$, так что $\frac{b_1}{b} + \frac{b_2}{b} + \frac{b_3}{b} = 2$ — сумма коэффициентов подобия этих трех треугольников равна двум. Поэтому и $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 2$, откуда

$$x = \frac{2abc}{ab + ac + bc}.$$

А. Ягубьянц

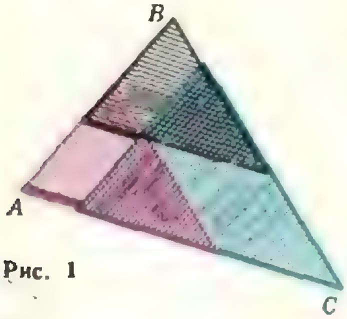


Рис. 1

---

*) Задача М413 решена в статье И. Яглома «О хордах непрерывных кривых», «Квант», 1977, № 4.

М412. *В городе на каждую площадь выходит не менее трех улиц. На всех улицах введено одностороннее движение так, что с любой площади можно проехать на любую другую. Докажите, что можно запретить движение по одной из улиц (на участке между двумя площадями) так, что по-прежнему с любой площади можно будет проехать на любую другую.*

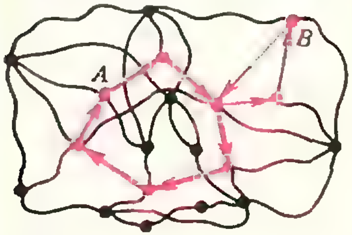


Рис. 2.

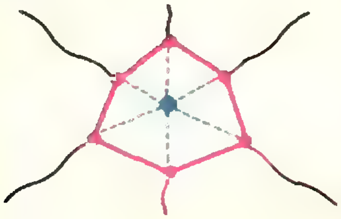


Рис. 3.

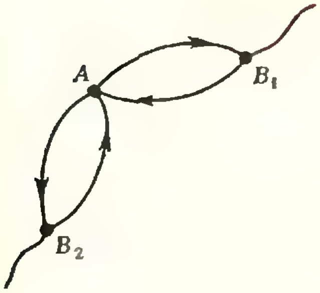


Рис. 4.

Докажем наше утверждение индукцией по числу площадей. Если площадей две, то оставим две улицы, соединяющие первую площадь со второй и вторую с первой, а остальные закроем.

Пусть площадей больше двух. Предположим, что нам удалось указать замкнутый маршрут по улицам города, начинающийся и кончающийся на площади A и проходящий не менее чем по трем площадям. (Как строятся кольцевые маршруты, показано на рисунке 2: мы берем маршрут, соединяющий площадь A с некоторой площадью B, затем маршрут, соединяющий B с A, и выделяем нужный нам маршрут — красное «кольцо» на рисунке.) Изменим план города: объявим весь этот кольцевой маршрут новой площадью, а улицами объявим все улицы, не входящие в наш кольцевой маршрут, сохранив на них направление движения. При этом у нас, возможно, появятся улицы, начинающиеся и кончающиеся на новой площади. Проверим, что полученный «город» удовлетворяет всем условиям задачи. Для этого нужно убедиться, что на новую площадь выходит не меньше трех улиц. Это обеспечивается нашим предположением, что в кольцевом маршруте не меньше трех площадей (см. рис. 3). Не менее ясно, что по-прежнему с любой площади можно проехать на любую другую, — наша «перепланировка» могла только сократить соответствующие маршруты. Таким образом, мы получили город, удовлетворяющий условиям задачи и имеющий меньшее число площадей. По предположению индукции в нем есть «лишняя» улица. Ей соответствует некоторая улица старого города. Запретим по ней движение. Легко убедиться, что проезд по-прежнему возможен. Действительно, рассмотрим площади $П_1$ и $П_2$ и маршрут, соединяющий $П_1$ с $П_2$ в новом городе и не проходящий через закрытую улицу. Перенесем этот маршрут в старый город. Если этот маршрут не проходил через новую площадь, то он соединяет $П_1$ с $П_2$. В противном случае он разобьется на две части: до «кольца» и после «кольца». Добавив к нему соответствующую часть кольца, мы получим нужный маршрут, соединяющий $П_1$ с $П_2$ в старом городе и не проходящий через закрытую улицу.

Осталось рассмотреть города, в которых нет длинных кольцевых маршрутов. Возьмем некоторую площадь A такого города. Если с нее можно проехать на площадь B по одной улице, то и с площади B на нее можно проехать по одной улице — иначе удалось бы указать большое кольцо. Поступим теперь следующим образом: рассмотрим площадь A и соседнюю с ней площадь B_1. Площадь B_1 соединена с площадью A (см. рис. 4). Кроме этого, есть еще одна улица, выходящая на A. Пусть она другим концом выходит на площадь B_2. Но тогда есть еще одна улица, соединяющая A и B_2 — с противоположным направлением движения. Поэтому если мы объявим кольцо AB_1A новой площадью, условия задачи будут выполнены: на новую площадь будет выходить не меньше трех улиц.

Л. Лиманов

◆

М414. а) *Из пяти треугольников, отсекаемых от данного выпуклого пятиугольника (рис. 5), площади четырех равны S, площадь пятого — $3S/2$. Найдите площадь x пятиугольника.*

б) *Докажите, что если S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади пяти этих треугольников, а x — площадь пятиугольника, то*

$$x^2 - (S_1+S_2+S_3+S_4+S_5)x + (S_1S_2+S_2S_3+S_3S_4+S_4S_5+S_5S_1)=0.$$

Начнем сразу с задачи б). Пусть S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_1$, $A_5A_1A_2$ соответственно. Обозначим через a площадь треугольника $A_1A_2A_4$, через b — площадь треугольника $A_1A_3A_4$ и через c — площадь треугольника $A_1A_3A_5$. Тогда (см. рис. 6—8):

$$x = S_2 + a + S_4;$$
$$x = S_1 + b + S_4; \qquad (1)$$
$$x = S_1 + c + S_3.$$

Пусть величины углов $A_2A_1A_3$, $A_2A_1A_4$, $A_2A_1A_5$ равны α, β и γ соответсвенно. Тогда (рис. 9):

$$2S_1 = |A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\sin\alpha,$$
$$2S_4 = |A_1A_4|\cdot|A_1A_5|\sin(\gamma-\beta),$$
$$2S_5 = |A_1A_2|\cdot|A_1A_5|\sin\gamma,$$

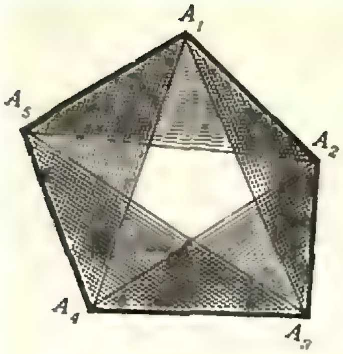


Рис. 5.

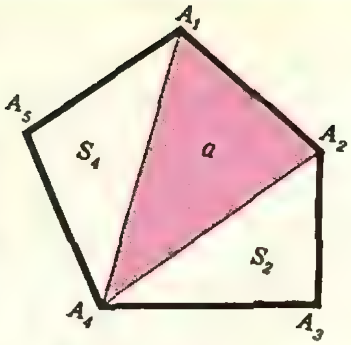


Рис. 6.

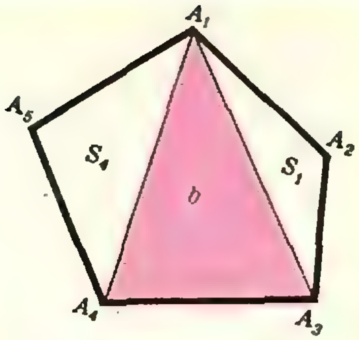


Рис. 7.

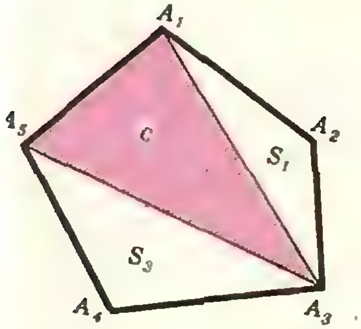


Рис. 8.

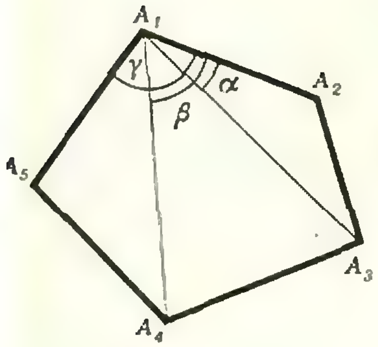


Рис. 9.

$$2b = |A_1A_3|\cdot|A_1A_4|\sin(\beta-\alpha),$$
$$2a = |A_1A_2|\cdot|A_1A_4|\sin\beta,$$
$$2c = |A_1A_3|\cdot|A_1A_5|\sin(\gamma-\alpha),$$

откуда

$$S_1S_4 + bS_5 = k\,[\sin\alpha\sin(\gamma-\beta) + \sin\gamma\sin(\beta-\alpha)],$$
$$ac = k\sin\beta\sin(\gamma-\alpha), \qquad (2)$$

где $k = \frac{1}{4}|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot|A_1A_4|\cdot|A_1A_5|$. Легко проверить тождество

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

Поэтому, в силу (2),

$$S_1S_4 + bS_5 - ac = 0. \qquad (3)$$

Подставляя в соотношение (3) вместо a, b и c их выражения через x, S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5, получаем:

$$S_1S_4 + (x - S_1 - S_4)S_5 -$$
$$- (x - S_2 - S_4)(x - S_1 - S_3) = 0,$$

и, следовательно,

$$x^2 - x(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + (S_1S_2 + S_2S_3 +$$
$$+ S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1) = 0.$$

Подставляя в это уравнение $S_1 = S_2 - S_3 = S_4 = S$, $S_5 = 3S/2$, получим ответ задачи а): $x = 4S$ (см. рис. 10).

Приведенное нами решение задачи б) предложил в 1824 году однофамилец знаменнтого Гаусса — «придворный советник» Гаусс (Herr Hofrath Gauss). Оно опубликовано в журнале «Astronomische Berichte», 1824, т. 2, с. 343. В этом решении существенно используется выпуклость исходного пятиугольника. Однако доказанный результат справедлив для произвольного пятиугольника — и не только невыпуклого, но и такого, стороны которого самопересекаются (например, как на рисунке 11). Подробно об этом рассказано в статье А. Лопшица «Задача Мёбиуса и ее продолжение», «Квант», 1977, № 3.

А. Лопшиц

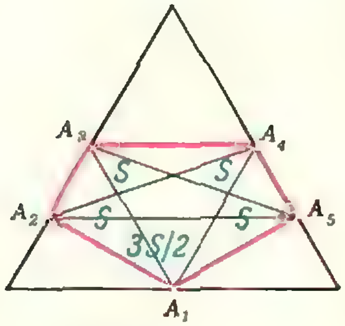


Рис. 10.

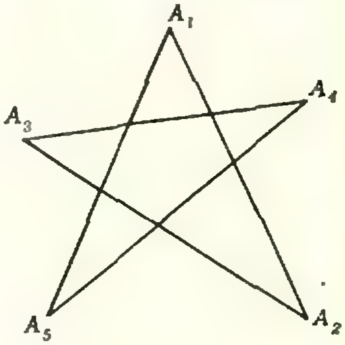


Рис. 11.

М415. *Какое наибольшее число королей можно расставить на торической шахматной доске n×n, чтобы они не били друг друга? Торическая шахматная доска получается из обычной размером n×n, у которой верхняя и нижняя горизонтали, а также левая и правая вертикали считаются склеенными. На торической доске с каждого поля король может пойти на восемь соседних полей (рис. 12).*

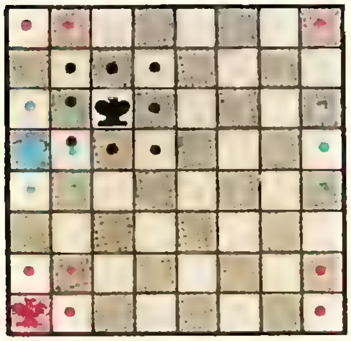


Рис. 12.

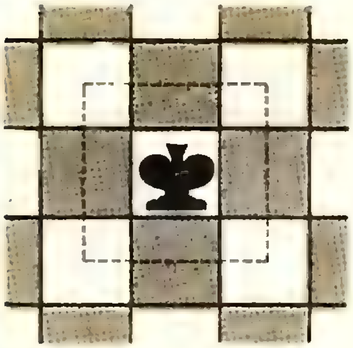


Рис. 13.

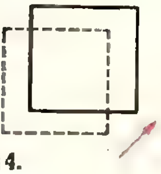


Рис. 14.

Отметим на доске центры всех полей и образуем вокруг каждого короля квадрат со стороной 2 (рис. 13). Поскольку торическая доска не имеет края, квадраты эти всегда определены, и для того, чтобы короли не били друг друга, необходимо и достаточно, чтобы такие квадраты не пересекались (соприкасаться им разрешается). Для удобства сдвинем эти квадраты на полклетки вверх и вправо, чтобы их края шли по краям клетки (рис. 14). Тогда наша задача заменяется эквивалентной: *какое наибольшее число N квадратов 2×2 можно расположить на торической доске $n \times n$ так, чтобы они не пересекались?*

Если $n = 2m$, то ответ очевиден: m^2 квадратов 2×2 полностью закроют всю доску и $N = m^2 = \frac{n^2}{4}$. Пусть теперь $n = 2m+1$; тогда ясно, что в каждом ряду останется не меньше одной пустой клетки, т. е. в каждом ряду квадраты покроют не больше $2m$ клеток, а всего будет покрыто не больше $2m(2m+1)$ клеток, т. е. $N \leqslant \frac{2m(2m+1)}{4}$. Поскольку N — число целое, можно написать также, что

$$N \leqslant \left[\frac{m(2m+1)}{2}\right] = \left[\frac{n^2-n}{4}\right].$$

Оказывается, что эта оценка точна: на торической доске $n \times n$ всегда можно разместить $\left[\frac{n^2-n}{4}\right]$ квадратов 2×2.

Укажем простейший способ такого размещения. Пусть сначала m четное, тогда $n = 4k+1$, $N = \frac{m}{2}\cdot(2m+1)$. Оставим пустыми клетки, получающиеся друг из друга ходом коня в одном и том же направлении (см. рис. 15). Тогда оставшиеся клетки нетрудно закрыть квадратами, как на рисунке 16. Поставив короля в левый нижний угол каждого из квадратов, мы получим решение задачи.

Пусть теперь m нечетно, то есть $n = 4k+3$. Тогда $N = \left[\frac{n^2-n}{4}\right] = (k+1)(4k+1)$. Разместить это количество квадратов можно следующим способом: вписать в исходный квадрат со стороной $4k+3$ квадрат со стороной $4k+1$, оставив по краям рамочку, и заполнить его точно так, как выше, а затем плотно заполнить и рамочку, как показано на рисунке 17.

А. Толпыго

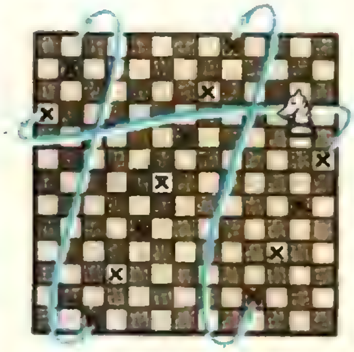


Рис. 15.

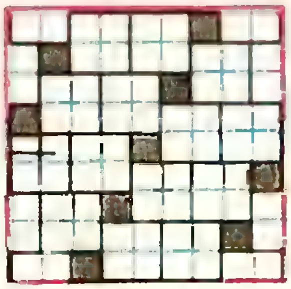


Рис. 16.

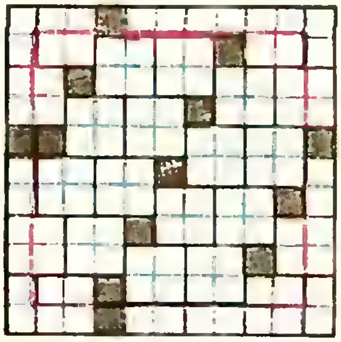


Рис. 17.

Ф423. *Масса воздушного шара вместе с волочащимся за ним канатом равна M (рис. 18). Действующая на шар выталкивающая сила равна $\vec{F}$, коэффициент трения каната о Землю μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара относительно воздуха: $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$. Найти скорость шара относительно Земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью $\vec{u}$.*

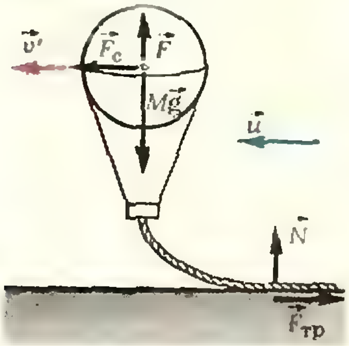
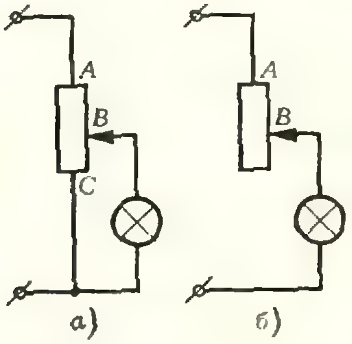


Рис. 18.

Ф424. *Для того чтобы лампочку, рассчитанную на напряжение сети 110 в, включить в сеть с напряжением 220 в, можно воспользоваться реостатом, который может быть включен по схемам а) и б) (рис. 19). Найти к. п. д. каждой из схем. Сопротивление лампочки 1000 ом, а реостата 2000 ом.*



а) б)

Рис. 19.

На шар действуют пять сил (см. рис. 18): сила тяжести $\vec{F}_т = M\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}$, сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$, сила реакции Земли $\vec{N}$ и сила трения со стороны Земли $\vec{F}_{тр}$.

Обозначим через $\vec{v}'$ скорость шара относительно Земли. Тогда

$$\vec{F}_c = -\alpha(\vec{v}' - \vec{u}).$$

Из условия, что воздушный шар движется равномерно в горизонтальном направлении, следует

$$|\vec{F}_c| - |\vec{F}_{тр}| = 0$$

и

$$|\vec{F}| + |\vec{N}| - M|\vec{g}| = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec{F}_{тр}| = \mu|\vec{N}|.$$

С учетом того, что

$$|\vec{F}_c| = -\alpha(|\vec{v}'| - |\vec{u}|),$$

из последних трех уравнений получим

$$|\vec{v}'| = |\vec{u}| - \frac{\mu}{\alpha}(M|\vec{g}| - |\vec{F}|).$$

А. Трубачев

◆

Прежде всего оценим, в каком из двух случаев к. п. д. выше. В обоих случаях напряжение на лампочке одно и то же, следовательно, одинаковы напряжения и на участке AB (см. рис. 19). Ток, текущий через лампу, тоже один и тот же в схемах а) и б), значит, ток на участке AB в схеме а) больше, чем в схеме б). Поэтому и потери мощности на участке AB в первом случае больше, чем во втором. Вдобавок в схеме а) бесполезно расходуется мощность на участке реостата BC.

Итак, потери мощности в схеме а) больше, а к. п. д., соответственно, меньше.

Теперь найдем конкретные значения к. п. д. в схемах а) и б). В первом случае мощность, выделяемая в лампочке, равна $\frac{U_л^2}{R_л}$, и мощность, потребляемая от источника, равна $\frac{U^2}{R_1 + \frac{R_2R_л}{R_2+R_л}}$ (здесь R_1 — сопротивление участка реостата AB, а R_2 — участка BC). Тогда

$$\eta_1 = \frac{U_л^2}{U^2}\,\frac{R_1 + \frac{R_2R_л}{R_2+R_л}}{R_л}.$$

Для того чтобы подсчитать η_1, необходимо определить R_1 и R_2.

При последовательном соединении напряжения на отдельных участках цепи пропорциональны сопротивлениям этих участков:

$$\frac{U - U_л}{U_л} = \frac{R_1}{\frac{R_2R_л}{R_2+R_л}}.$$

Кроме того,

$$R_1 + R_2 = R_р = 2R_л.$$

С учетом того, что $U = 2U_л$, из последних двух равенств получаем

$$R_1 = (2-\sqrt{2})\,10^3\ ом \text{ и } R_2 = \sqrt{2}\cdot 10^3\ ом.$$

Поэтому

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} \approx 0{,}3.$$

Во втором случае (в схеме *б*)) напряжение на верхнем участке реостата равно 220 *в* — 110 *в* = 110 *в*, то есть равно напряжению на лампочке. Это означает, что на этом участке выделяется такая же мощность, как и на лампочке. Следовательно,

$$\eta_2 = 0{,}5.$$

И. Соловейчик

Ф425. *В пространство между пластинами незаряженного плоского конденсатора вносится металлическая пластина, имеющая заряд Q. Между пластиной и обкладками конденсатора при этом остаются зазоры l_1 и l_2. Площади всех пластин одинаковы и равны S. Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.*

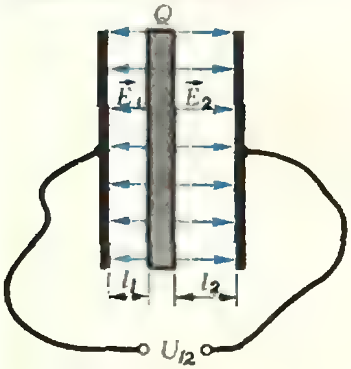


Рис. 20.

◆

Так как конденсатор не заряжен, его обкладки не участвуют в создании электрического поля. Поэтому поле внутри конденсатора создается только внесенной заряженной пластиной.

Будем считать, что линейные размеры пластины много больше ее толщины и толщин зазоров l_1 и l_2. Это означает, что электрическое поле — однородно. Его напряженность направлена от пластины, если $Q > 0$ (рис. 20), и к ней при $Q < 0$. По абсолютной величине напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в зазорах l_1 и l_2 одинаковы:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна работе, совершаемой электрическим полем, по перемещению единичного положительного заряда с одной обкладки на другую:

$$U_{12} = -|\vec{E}_1|\,l_1 + |\vec{E}_2|\,l_2 = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 S}(l_2 - l_1).$$

И. Слободецкий

Ф426. *В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 5$ мкм при содержании массы вещества $m_1 = 0{,}04$ г в кубометре воздуха дальность видимости составляет $l_1 = 50$ м. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса $r_2 = 10$ мкм, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ м?*

◆

Рассмотрим слой воздуха с дымом на пути светового пучка (рис. 21). Выберем Δl настолько малым, чтобы в пределах этого слоя практически не было затенения одних частиц другими. Такой слой поглотит долю света, определяемую поперечным сечением ΔS всех частиц, находящихся в этом слое. В расчете на единицу поперечного сечения пучка получим

$$\Delta S = N\Delta l\pi r^2 = \frac{m}{{}^4/_3\pi r^3\rho}\,\Delta l\pi r^2 = \frac{m\Delta l}{{}^4/_3 r\rho}, \qquad (*)$$

где N — число частиц в единице объема, ρ — плотность распыленного вещества.

Запишем соотношение (*) для двух рассматриваемых случаев и найдем отношение толщин слоев, в которых поглощается одинаковая доля света:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{r_1}{r_2}.$$

Аналогичные соотношения можно записать для 2-х, 3-х,..., n-х слоев, в пределах которых вновь можно пренебречь взаимным затенением частиц. Если в первом случае дальность видимости связана с выбранным Δl соотношением

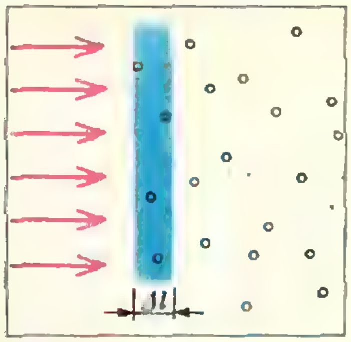


Рис. 21.

$l_1 = n\Delta l_1$, то и во втором случае, очевидно, $l_2 = n\Delta l_2$. Тогда можно записать

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n\Delta l_1}{n\Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$m_2 = m_1 \frac{r_2}{r_1}\,\frac{l_1}{l_2} = 0{,}2\ г/м^3.$$

В. Белончукин

◆

Ф427. *Две катушки с числами витков $n_1 = 125$ и $n_2 = 1000$ намотаны на тороидальный ферромагнитный сердечник диаметром $d = 5$ см и площадью поперечного сечения $S = 1$ см²(рис. 22). По первой катушке течет постоянный ток $I_1 = 1$ а, вторая катушка подключена к гальванометру. При размыкании цепи первой катушки через гальванометр проходит заряд $q = 10^{-3}$ к. Полное сопротивление цепи второй катушки $R = 100$ ом. Определить магнитную проницаемость материала, из которого сделан сердечник.*

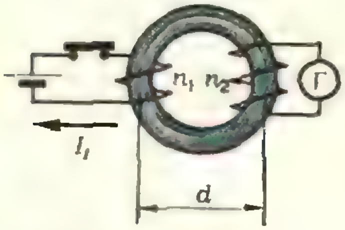


Рис. 22.

При протекании по первой катушке электрического тока в сердечнике возникает магнитное поле. Индукция магнитного поля, созданного проводником с током, всегда пропорциональна силе тока в проводнике. Она зависит также от конфигурации проводника и от магнитной проницаемости среды.

Из соображений симметрии очевидно, что в тороиде индукция магнитного поля одинакова по абсолютной величине во всех точках окружности, центр которой совпадает с центром тороида (см. рис. 22). Кроме того, поперечное сечение тороида мало. Таким образом, поле внутри тороида можно считать однородным. Строгий расчет, проведенный для данного случая, дает

$$\left|\vec{B}\right| = \mu_0\mu\frac{n_1 I_1}{\pi d},$$

где $\mu_0 = 4\cdot 10^{-7}$ *гн/м* — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость материала сердечника.

Поток магнитной индукции через поперечное сечение тороида площадью S равен

$$\Phi = \left|\vec{B}\right| S = \mu_0\mu\frac{n_1 I_1}{\pi d}\,S.$$

При размыкании цепи первой катушки магнитный поток будет уменьшаться. Пусть за малый промежуток времени Δt поток уменьшится на $\Delta\Phi$. Во второй катушке возникнет электродвижущая сила индукции

$$|\mathscr{E}_2| = n_2\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

и пойдет ток

$$I_2 = \frac{|\mathscr{E}_2|}{R} = \frac{n_2}{R}\,\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}.$$

За время Δt через гальванометр пройдет заряд

$$\Delta q = I_2\Delta t = \frac{n_2}{R}|\Delta\Phi|.$$

Весь заряд, прошедший по цепи второй катушки, определяется полным изменением потока магнитной индукции:

$$q = \Sigma\Delta q = \frac{n_2}{R}\,\Sigma\,|\Delta\Phi| = \frac{n_2}{R}\Phi =$$

$$= \frac{n_1 n_2 \mu_0 \mu I_1 S}{\pi d R}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{q\pi d R}{n_1 n_2 \mu_0 I_1 S} = 1000.$$

В. Светозаров

Н. Виленкин

Как возникло и развивалось понятие функции

У истоков

В те далекие времена, когда люди еще не умели считать, они уже знали, что чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода, чем дольше горит костер, тем теплее будет в пещере. Постепенно, с развитием скотоводства и земледелия, количество известных людям зависимостей увеличилось: например, люди узнали, что урожай увеличивается при увеличении площади поля, настриг шерсти — при увеличении стада овец, а чем больше людей занято в сооружении плотины, тем меньшая часть работы приходится на долю каждого из них.

Взвешивание, измерение длин и объемов и другие аналогичные операции поставили каждой величине в соответствие число — *меру* этой величины при данной единице измерения. Купцам надо было знать *зависимость* меры от выбранной единицы измерения. Они должны были твердо помнить, например, что в одном таланте содержится 60 мин, а потому 3 таланта — это все равно, что 180 мин — хоть меры разные, а величина одна и та же.

В обыденной жизни редко приходилось иметь дело с более сложными соотношениями. Но число разнообразных зависимостей, с которыми приходилось сталкиваться писцам, все время увеличивалось (писцы учитывали поступавшие налоги, определяли запас пищи, потребной войску для похода, количество кирпичей, необходимых для возведения дворца и т. д.). Чтобы обучать писцов, были написаны книги, содержащие решения типичных задач.

Высокого уровня математические знания достигли в Древнем Вавилоне. Для облегчения вычислений вавилоняне составили таблицы обратных значений чисел, квадратов и кубов и даже таблицы для сумм квадратов и кубов числа. Говоря современным языком, это были таблицы функций

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = x^2, \; y = x^3, \; y = x^2 + x^3.$$

С помощью таких таблиц можно было решать и обратные задачи: извлекать квадратные и кубические корни, решать квадратные уравнения и т. д. Комбинируя несколько таблиц, вавилоняне находили длину гипотенузы по заданным длинам катетов, то есть вычисляли значения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. И хотя путь от появления таблиц до создания общего понятия функции был еще очень велик, первые шаги по этому пути вавилоняне сделали.

Математики Древней Греции старались не выражать величин числами — они знали, что существуют несоизмеримые отрезки, а понятия иррационального числа у них не было. Но все же многие их исследования оказались весьма полезными, когда через два тысячелетия стало формироваться общее понятие функции: они изучили много кривых (эллипс, гиперболу, параболу, различные спирали и улитки и т. д.), исследовали некоторые задачи на наибольшее и наименьшее значения, открыли взаимоотношения между длинами отрезков хорд и диаметров. Особенно важным были результаты греческих астрономов, заложивших основы новой области математики — тригонометрии. Они составили таблицы зависимости между величиной дуги и длиной стягивающей ее хорды. По сути дела то были таблицы функции $y = \sin x$ — ведь длина хорды, стягивающей дугу в $2x$ (градусов), равна $2R \sin x$, где R — радиус круга (см. рис. 1). При их вычислении использовалась зави-

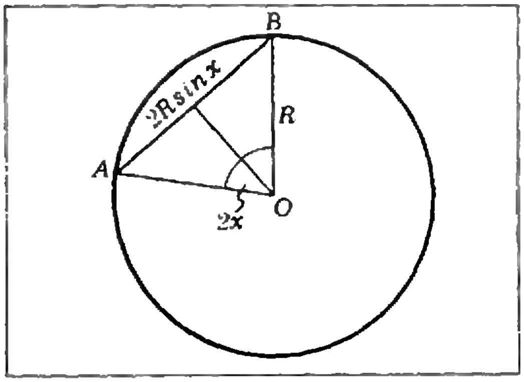


Рис. 1.

симость между длинами диагоналей вписанного четырехугольника и длинами его сторон (теорема Птолемея *)).

После падения Римской империи (последняя четверть V в. н. э.) и распространения христианства, отрицавшего языческую науку и философию, центр научных исследований постепенно переместился в арабоязычные страны. Ученые этих стран ввели новые тригонометрические функции и усовершенствовали таблицы хорд.

Исследование же общих зависимостей между величинами начал в XIV веке французский ученый Николай Оресм. В его рукописях есть рисунки, напоминающие современные графики функций. Он даже пытался классифицировать эти графики. Однако продвинуться дальше ему помешало отсутствие общей алгебраической символики. Лишь после того, как в течение XVI века были развиты начала буквенной алгебры (Франсуа Виет), удалось сделать дальнейшие шаги.

Математика переменных величин

В XVI—XVII веках техника, промышленность, мореходство поставили задачи, недоступные для математики древности, имевшей дело лишь с неподвижными объектами, с постоянными величинами.

В то же время стало распространяться убеждение, что мир управляется законами природы, которые можно познать. Для формулирования этих законов и решения поставленных задач нужны были новые математические методы.

Одним из первых над созданием новых методов познания мира задумался основатель динамики Галилео Галилей. Он размышлял о том, как меняется скорость падающего тела, по какому закону происходит колебание маятника, как движется точка, расположенная на ободе катящегося колеса.

Чтобы описать физические законы движения математически, нужно было ввести понятие *переменной* величины. Это сделал французский философ и математик Рене Декарт, живший в конце XVI и первой половине XVII века.

«Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика». (Ф. Энгельс).

Для записи зависимостей между величинами Декарт применял буквы, а отношения между неизвестными и известными величинами выражал в виде уравнений.

Выбрав определенные единицы измерения, можно выразить все изучаемые величины числами. Следовательно, зависимость между величинами переходит в зависимость между числами. Например, если выбрать в качестве единиц для измерения расстояний и промежутков времени метр и секунду, то зависимость пути, пройденного телом при свободном падении, от времени выразится формулой $s = {}^1/_2\, gt^2$, где $g = 9{,}81$. При изменении числа t меняется число s, а потому эта формула связывает друг с другом *числовые переменные* t и s.

Однако в течение долгого времени избегали говорить о числовых переменных, а вместо них говорили о переменных величинах. Чтобы отличить переменные величины, рассматриваемые в математике, от тех, которые изучает физика (расстояний, промежутков времени, скоростей и т. д.), делали оговорку, что речь идет об «абстрактных переменных величинах», принимающих числовые значения. Физические же переменные величины с этой точки зрения принимают не числовые, а «именованные» значения. Например, отдельными значениями конкретной величины, имеющей размерность длины, являются не числа 1, 2, 3, а 1 *м*, 2 *м*, 3 *см* и т. д.; причем, хотя 3 *см* и 0,03 *м* выражаются различными числами 3 и 0,03, все же 3 *см*=0,03 *м*.

Открытия Декарта дали математикам общий метод для изучения кривых. Теперь место геометрических рассмотрений, столь популярных у греческих математиков, заняло алгебраическое исследование уравнений кривых, — геометрические свойства устанавливались алгебраическими методами. Это был важный шаг на пути формирования общей идеи зависимости одних переменных величин от других. Многие кривые, которые изучали ученые XVII века, возникли из практических задач — они были нужны для описания качения зубчатых колес, движения маятника и т. д. Изучались и графики элементарных функций — синусоида, тангенсоида и т. д.

---

*) «Квант», 1976, № 7, с. 26.

Рождение термина

В науке часто бывает, что длительное время применяется то или иное понятие, но оно фигурирует лишь неявно, не имея определенного названия — каждый ученый называет его по-своему. Из-за этого одни и те же рассуждения повторяются каждый раз заново. Введение нового термина приводит к уточнению соответствующего понятия, освобождению его от всего случайного и несущественного, к выявлению общих черт в рассуждениях, проводившихся независимо друг от друга в различных областях науки.

С 1673 года знаменитый немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц начал использовать в своих рукописях слово *«функция»*. Однако он употреблял этот термин в очень узком смысле, у него речь шла лишь об отрезках касательных к кривым, об их проекциях на оси координат и о «другого рода линиях, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию» (от латинского *«функтус»* — выполнять).

Иоганн Бернулли, один из первых учеников Лейбница, дал определение функции, свободное от геометрических терминов: *«функцией переменной называется количество, образованное каким угодно способом из этой величины и постоянных»*. Это определение привело в восхищение престарелого Лейбница: он угадал, что отход от геометрической терминологии знаменует новую эпоху математики — эпоху изучения функций как самостоятельных объектов, притом основанного на числах, а не на геометрии.

Под «каким угодно способом» во времена Бернулли понимали арифметические операции, операции извлечения корней, тригонометрические и обратные тригонометрические, показательные и логарифмические «операции», а также их различные комбинации. Такие функции теперь называют *элементарными* (их сейчас изучают в школе).

В XVII и, особенно, в XVIII веке математики стали рассматривать функции, получаемые суммированием бесконечного множества элементарных функций. Это привело к расширению класса изучаемых функций. Один из самых замечательных математиков XVIII века член Петербургской академии наук Леонард Эйлер определял функцию так: «когда некоторые величины зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». В одной из работ он говорит даже о графике функции, как о кривой, начерченной «свободным движением руки».

Спор о понятии функции

Вопрос, что же такое функция и как связаны между собой понятия функции и ее аналитического выражения, привлек к себе внимание математиков в связи со спором, в котором приняли участие виднейшие ученые XVIII века — Эйлер, Даламбер, Д. Бернулли и многие другие.

Решая задачу о колебаниях струны, Эйлер и Даламбер получили ответ, в который входила некоторая функция. Эта функция была связана с первоначальной формой колеблющейся струны. Эйлер считал, что первоначальное отклонение струны от положения равновесия может задаваться на разных участках струны разными формулами, например так:

$$y=\begin{cases} ax, \text{ если } 0 \leqslant x < \frac{l}{2}, \\ a(l-x), \text{ если } \frac{l}{2} \leqslant x < l \end{cases}$$

(l — длина струны). Даламбер же считал, что такие функции недопустимы, что следует рассматривать лишь функции, имеющие одно аналитическое выражение для всех значений аргумента x.

Положение осложнилось после того, как Даниил Бернулли предложил формулу, выражавшую решение в виде суммы бесконечного ряда, составленного из тригонометрических функций, причем оказалось, что эта формула годится и в случае, указанном Эйлером. Получилось, что одна и та же функция может быть задана и одним выражением (суммой ряда), и разными выражениями. Это никак не укладывалось в сознании ученых XVIII века.

Возникший спор привел к тому, что в конце XVIII века математики, определяя функцию, избегали говорить о том, как она задана. Например, французский математик Лакруа писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применять, чтобы перейти от них к первому».

Современный этап

Окончательный разрыв между понятиями функции и ее аналитического выражения произошел в начале XIX века, после того как французский математик Фурье показал, что функции, заданные на разных участках поразному, можно, вообще говоря, представить во всей области задания в виде суммы одного и того же бесконечного ряда. Таким образом, несущественно, одним или многими выражениями задана функция; суть лишь в том, какие значения принимает одна величина при заданных значениях другой величины.

После длительного уточнения этой идеи, в котором приняли участие немецкий математик Лежен Дирихле, русский математик Николай Иванович Лобачевский и другие ученые, пришли к следующему определению функции: *«Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y».*

По этому определению получилось, что функций гораздо больше, чем этого хотелось бы его авторам. Например, еще Дирихле заметил, что под это определение подпадает такая «странная» функция, как

$$D(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число,}\\ 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число.}\end{cases}$$

Действительно, каждому значению x соответствует определенное значение $D(x)$; например, $D\left(\frac{5}{6}\right)=1$, а $D(\pi)=0$. С точки же зрения математика XVIII века $D(x)$ совсем не функция, поскольку не указана формула, по которой ее можно вычислить.

После введения этого определения под одним и тем же словом «функция» стали пониматься совсем разные вещи. Глядя на формулу $s=\frac{1}{2}gt^2$, одни говорили, что s — функция аргумента t (путь — функция времени). Другие считали функцией выражение $\frac{1}{2}gt^2$, то есть придавали основное значение выражению, по которому можно находить значения функции. Но все большее распространение получала третья точка зрения, согласно которой функцией здесь является не s и не выражение $\frac{1}{2}gt^2$, а закон, позволяющий по заданному значению t находить значение s (тот же закон можно ведь записать и так: $s=\frac{1}{2}g\sqrt{t^4}$). Иными словами, функцию стали трактовать как закон, позволяющий по каждому значению x найти единственное значение y.

Когда была создана общая теория множеств, стало ясно, что в понятии функции значениями как x, так и y совсем не обязаны быть числа. Теперь под функцией f понимают зависимость или соответствие («Алгебра 6», пп. 16—17) между любыми множествами X и Y, при которых каждому элементу x из X соответствует единственный элемент y из Y, $y=f(x)$. X называют *областью определения* функции, а множество $\{f(x) \mid x \in X\}$ — *множеством ее значений*. Обычно для произвольных множеств вместо слова *«функция»* предпочитают равносильный ему термин *«отображение»*. Например, геометрические преобразования задают отображения множества точек плоскости (или пространства) на себя. Сопоставляя каждому треугольнику вписанную в него окружность, получаем отображение множества треугольников на множество окружностей, а сопоставляя треугольнику его площадь — отображение множества треугольников на множество положительных чисел. Функции, которые рассматривали Лейбниц и Бернулли, Эйлер, Лобачевский и Дирихле, являются отображениями одного числового множества на другое (например, функция $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, отображает отрезок $[-R;\ R]$ на отрезок $[0;\ R]$). Их называют *числовыми* функциями.

Мы проследили развитие понятия функции от его истоков до современных обобщений. При столь общем подходе к понятию функции, который принят сейчас, уже трудно уловить его происхождение из задач физики, астрономии и геометрии. Но все же в основе остается тот факт, что при заданном значении некоторой физической величины зависящие от нее величины принимают совершенно определенные значения. Именно это и дает возможность использовать функциональные зависимости и при расчете полета межпланетного космического корабля, и при изучении сил, действующих в атомном ядре, и при выборе наиболее выгодного плана производства.

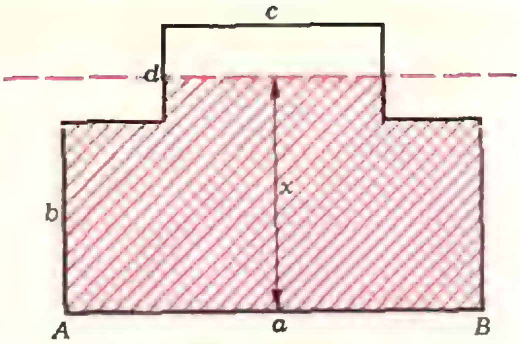


Рис 2.

Упражнения

1. Каждому параллелограмму сопоставляют его площадь. Является ли это соответствие функцией? Каковы ее область определения и множество значений?

2. Каждой окружности сопоставляют касательную к ней прямую. Является ли это соответствие функцией; если является, то каковы ее область определения и множество значений?

3. Каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат. Является ли это соответствие функцией? Является ли функцией соответствие, при котором каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат?

4. Является ли функцией соответствие, при котором каждому треугольнику сопоставляется центр описанной вокруг него окружности? Каковы здесь область определения и множество значений? Является ли функцией соответствие, при котором каждой тройке точек на плоскости сопоставляется центр проходящей через них окружности?

5. Является ли функцией соответствие, при котором каждой паре $(a,\ b)$ чисел сопоставляется точка с абсциссой a и ординатой b? Каковы здесь область определения и множество значений?

6. Выразите через x площадь фигуры, отсеченной от фигуры, изображенной на рисунке 2, прямой, параллельной основанию AB и отстоящей от него на расстояние x (размеры даны на рисунке).

Задачи наших читателей

Последовательность (a_n) определена следующим образом: $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{3}$, a_{n+1} равно последней дроби в разложении $a_{n-1}+a_n$ в цепную дробь. Например,

$$a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}},$$

поэтому $a_3=\frac{1}{5}$ и т. д.

а) Чему равно a_{1000}?

б) Всегда ли a_k будет обратно простому числу?

П. Кирей (г. Николаев)

Циссоиды

Циссоида Диоклесса *) — едва ли не самая древняя из замечательных кривых. Она может быть определена так. Рассмотрим произвольную окружность (O, r) и точку P на ней. Пусть PQ — диаметр окружности, а l — касательная к ней, проходящая через точку Q (рис. 1). Выберем произвольно точку $L \in l$. Пусть $[PL] \cap (O, r) = N$. Построим на отрезке PL точку M, для которой $|PM| = |LN|$. Множество точек M, построенное для всевозможных точек $L \in l$, и есть циссоида Диоклесса.

Положение точки M может быть описано парой чисел $\langle \varphi, \rho \rangle$, где $\varphi = \widehat{LPQ}$, $\rho = |PM|$. Пара $\langle \varphi, \rho \rangle$ называется *полярными координатами* ** (точки M, φ — ее *полярным углом*, ρ — *полярным радиусом*. Точка P при этом называется *полюсом* (аналог начала координат), вектор $\overrightarrow{PM}$ — *радиусом-вектором* циссоиды. В циссоиде Диоклесса $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Можно написать уравнение, связывающее полярные координаты произвольной точки циссоиды Диоклесса:

$$\rho = \frac{2r}{\cos\varphi} - 2r\cos\varphi$$

— полярное уравнение циссоиды (выведите его).

Прямая PQ является осью симметрии циссоиды Диоклесса. При стремлении φ к $\frac{\pi}{2}$ (или к $-\frac{\pi}{2}$) точка M стремится к L; таким образом, прямая l является асимптотой циссоиды.

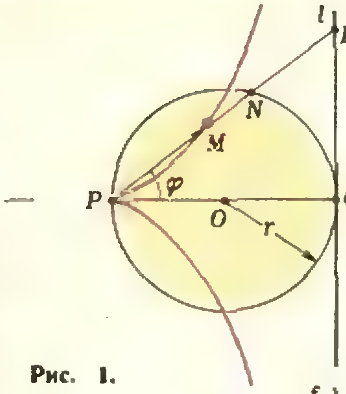


Рис. 1.

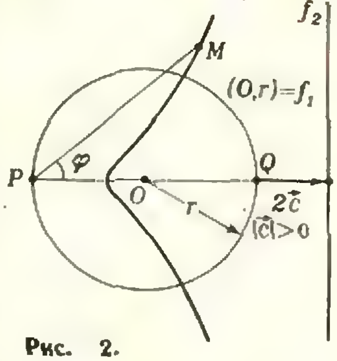


Рис. 2.

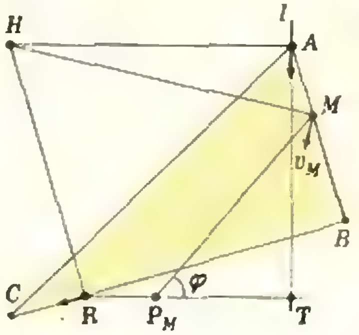


Рис. 3.

В конце XVII века понятие циссоиды было обобщено: пусть f_1, f_2 — две произвольные (плоские) кривые, P — произвольная точка. В остальном построение производится по-старому: берем произвольную точку $L \in f_2$ и откладываем на PL отрезок PM, для которого $|PM| = |LN|$ (здесь $N = f_1 \cap [PL]$). Полученное множество точек M называют *циссоидой*.

Сообразите, например, какая циссоида получится, если $f_1 = (O, q)$, $f_2 = (O, s)$ и $P = O$.

На второй странице обложки изображено семейство циссоид, получающееся при фиксированных кривой $f_1 = (O, r)$ и полюсе $P \in (O, r)$, если f_2 меняется: каждая f_2 получается параллельным переносом $2\vec{c}$ касательной l («красная прямая» на обложке). (Напишите полярное уравнение этих циссоид — см. рис. 2. Оно будет, конечно, зависеть от параметра $|\vec{c}|$).

Циссоида Диоклесса («красная циссоида» на обложке) имеет в полюсе острие. Если прямая f_2 расположена вне окружности f_1, то в наиболее удаленной от f_2 точке циссоида имеет закругление. Если же $f_2 \cap f_1 \neq \varnothing$, то циссоида имеет в полюсе петлю. В частности, если f_2 проходит через центр окружности f_1, то циссоида превращается в строфоиду («Квант», 1977, № 2).

Приведем способ построения дуги циссоиды (из семейства циссоид, изображенного на обложке), принадлежащий Ньютону. Зададим в плоскости точку R и прямую l. Возьмем прозрачный угольник ABC ($\hat{B} = 90°$), у которого $|AB| = |RT|$ (T — основание перпендикуляра, опущенного из R на l). Будем перемещать угольник (рис. 3) так, чтобы вершина A скользила по l, а катет BC «проходил» через R. Тогда фиксированная точка M катета AB опишет дугу циссоиды (в частности, точка B — дугу строфоиды).

Как это показать? Проведем через M прямую, параллельную AR. Пусть эта прямая пересекается с RT в точке P_M. Из конгруэнтности треугольников ABR и ATR вытекает, что точка P_M занимает на отрезке RT положение, не зависящее от положения угольника ABC. Подсчитав $|MP_M|$, можно убедиться, что точка M описывает циссоиду. Предоставляем это читателю (рекомендуем использовать полярное уравнение).

Используя построение Ньютона, легко определить положение касательной к циссоиде в точке M. Проведем через точку R перпендикуляр к BC и через A — перпендикуляр к l. Пусть эти перпендикуляры пересекаются в точке H (рис. 3). Тогда перпендикуляр к HM, проведенный в точке M, будет искомой касательной.

В. Березин

---

*) Диоклесс жил где-то между 250 и 100 гг. до н. э.

** Полярную систему координат (для описания различных спиралей) первым ввел, по-видимому, в 70-е годы XVII века И. Ньютон.

«Квант» для младших школьников

Задачи

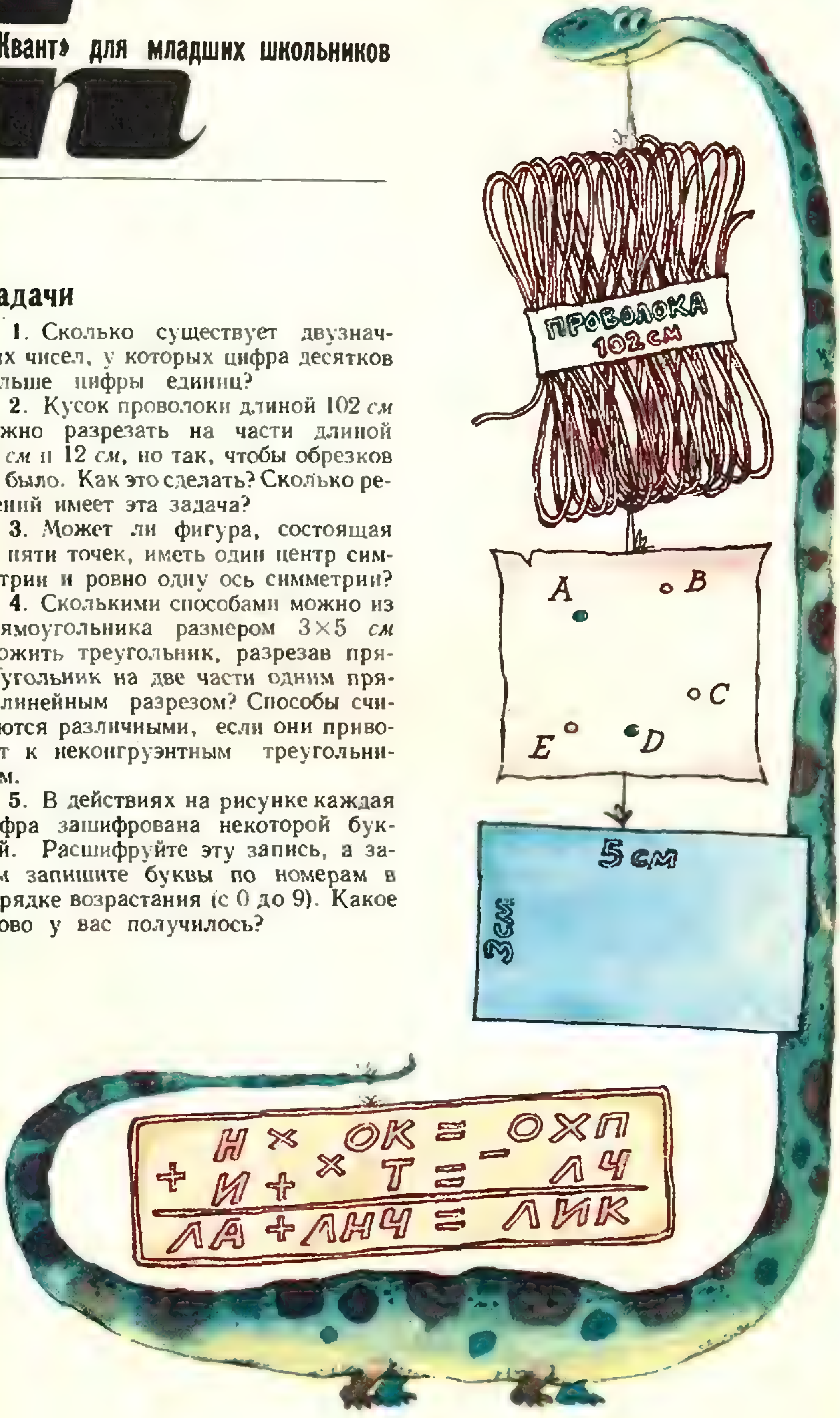
1. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц?

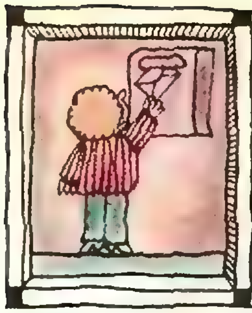
2. Кусок проволоки длиной 102 *см* нужно разрезать на части длиной 15 *см* и 12 *см*, но так, чтобы обрезков не было. Как это сделать? Сколько решений имеет эта задача?

3. Может ли фигура, состоящая из пяти точек, иметь один центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

4. Сколькими способами можно из прямоугольника размером 3×5 *см* сложить треугольник, разрезав прямоугольник на две части одним прямолинейным разрезом? Способы считаются различными, если они приводят к неконгруэнтным треугольникам.

5. В действиях на рисунке каждая цифра зашифрована некоторой буквой. Расшифруйте эту запись, а затем запишите буквы по номерам в порядке возрастания (с 0 до 9). Какое слово у вас получилось?





Г. Розова

СЛУЧАЙ С ПЯТИКЛАССНИКОМ

Все началось с писем.

Письмо первое. «Здравствуй, Андрей! У нас в школе недавно была олимпиада по математике. Я решил все задачи, только в последней я не уверен. Некогда было проверить, все ли числа я нашел; да если бы и было время — все равно не стал бы перебирать все двузначные числа, потому что скучно это! Порешай и напиши, какие у тебя будут ответы, а то я сомневаюсь. Вот эта задача.

В некотором двузначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 31 раз. Какую цифру и в каком числе зачеркнули?

У меня получилось три ответа: 31, 62, и 93, причем зачеркивать надо первую цифру. Сергей».

Письмо второе. «Здравствуй, Сережа. Ты дал правильный ответ и, если ты так догадлив, то реши нашу олимпиадную задачу.

Трехзначное число больше двузначного, записанного его последними цифрами, в 26 раз. Найти это число. Сколько всего существует таких чисел? Андрей».

Получив это письмо, Сережа обрадовался, а потом попробовал решить задачу Андрея. Но на этот раз догадка не приходила, хотя Сережа испытал много чисел, пробовал составлять их сам. Тогда он подумал, что, может быть, задачу можно решить уравнением. Но что принять за x? Трехзначное число? А как тогда записать условие задачи?

Вдруг его «осенило», что все числа записываются с помощью лишь десяти цифр. В задаче неизвестно трехзначное число. Вот и три неизвестных:

число сотен — x,
число десятков — y,
число единиц — z.

А условие задачи запишется так:

$$100x + 10y + z = 26(10y + z),$$

или, после упрощений,

$$4x = 10y + z.$$

Тут Сережа снова призадумался — уравнение одно, а неизвестных три. Но как только он вспомнил, что x, y, z — цифры, дело опять пошло. В последнем равенстве справа стоит $10y + z$ — двузначное число, значит и слева $4x$ — тоже двузначное число. Так будет лишь при $x = 3, 4, \ldots, 9$. И сразу получается ответ:

x	$10y+z$	y	z	Ответ
3	12	1	2	312
4	16	1	6	416
5	20	2	0	520
6	24	2	4	624
7	28	2	8	728
8	32	3	2	832
9	36	3	6	936

Теперь уже Сережа не сомневался, что нашел все числа. Потом он и свою задачу проверил, а Андрея попросил прислать еще задачи. Вот они.

Задачи

1. Найти все двузначные числа, которые делятся нацело на а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6; е) 7; ж) 8; з) 9, и при этом дают частные, равные сумме цифр делимого.

2. В записи трехзначного числа все цифры различны и нуля среди них нет. Цифры этого числа начали менять местами, и все получающиеся при этом (различные) трехзначные числа сложили. Доказать, что эта сумма делится на 222.

Верно ли это утверждение, если в записи исходного трехзначного числа встречаются одинаковые цифры или есть нуль?

3. При делении некоторого двузначного числа на 6 в остатке получилось число, равное первой цифре делимого, а при делении того же числа на 10 остаток был равен второй цифре числа, а частное — 3. Найти все такие числа.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 году

Куйбышевский государственный университет

Куйбышевский государственный университет был открыт в 1969 году. В настоящее время недалеко от берега Волги ведется строительство университетского городка. Уже возведены корпуса механико-математического и физического факультетов, построено здание студенческого общежития.

Основная цель университета — подготовка специалистов высшей квалификации для работы в научно-исследовательских учреждениях, на промышленных предприятиях, в высших и средних специальных учебных заведениях и средних школах.

Подготовка специалистов в области математики, механики и физики осуществляется на механико-математическом и физическом факультетах.

Студенты-математики специализируются по прикладной математике, функциональному анализу и теории функций, по дифференциальным и интегральным уравнениям

Студенты-механики специализируются по аэро- и гидромеханике, а также по механике деформируемого твердого тела.

Студенты-физики специализируются по теоретической физике, оптике и спектроскопии, радиофизике и электронике, физике полупроводников и диэлектриков, физике твердого тела.

Ниже приведены варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике на механико-математическом и физическом факультетах Куйбышевского университета в 1976 году.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Один из двух соосных конусов опирается вершиной на основание другого конуса, длина его образующей равна l, величина угла при вершине в осевом сечении 2α. Величина угла при вершине осевого сечения второго конуса равна 2β. Найти объем общей части конусов, если отношение длин их высот равно k.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$$

3. Решить неравенство ($a>0$)

$$\log_2\left(\sqrt{x^2-2ax+1}-1\right)\leqslant 1.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

Вариант 2

1. В конус, величина угла при вершине осевого сечения которого равна 2α, вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом β. Через гипотенузу основания проведена секущая плоскость так, что отношение площади сечения к площади основания пирамиды равно k. Определить угол наклона секущей плоскости основания и допустимые значения k.

2. Решить уравнение

$$2x+3-\sqrt{x^2-2x-3}=0.$$

3. Решить неравенство

$$4-\lg x\leqslant 3\sqrt{\lg x}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x\operatorname{tg} z=3,\\ \operatorname{tg} y\operatorname{tg} z=6,\\ x+y+z=\pi.\end{cases}$$

Физический факультет

Вариант 3

1. Отношение длин двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а величины углов, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, относятся как 2:3. Найти величины этих углов и допустимые значения k.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=2.$$

3. Решить уравнение

$$\cos^2x-\cos^2 3x+3\cos^2 2x=0.$$

4. Решить неравенство

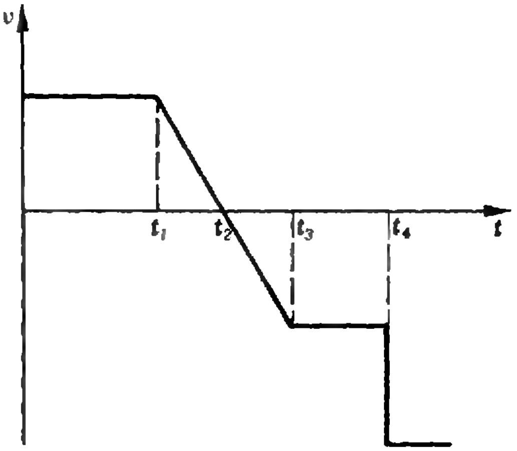
$$x^{-[\lg^2x+\lg x^3+3]\log_x\sqrt{2}}\leqslant\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Вариант 4

1. В правильной четырехугольной пирамиде через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, проведена плоскость. Отношение площади сечения к площади боковой поверхности пирамиды равно k. Найти величину угла между двумя смежными боковыми гранями и допустимые значения k.

2. Решить уравнение

$$2x+1-\sqrt{x^2-3x+1}=0.$$



3. Решить уравнение
$\sin 3x - \sin 2x = b \sin x$.
4. Решить неравенство
$\log_x(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 2$.

Физика

Механико-математический факультет

1. С горы высотой $h = 2$ *м* и основанием $a = 5$ *м* съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтальный путь $l = 35$ *м* от основания горы. Найти коэффициент трения.

2. В центр металлической полости помещен заряд $+q$. Радиус полости r. Как изменится напряженность поля в точке A, находящейся на расстоянии $r/2$ от центра полости, если металлическую полость заземлить?

3. Имеются две пластинки: одна из стекла толщиной $l_1 = 16{,}1$ *мм*, другая из кварца толщиной $l_2 = 10$ *мм*. Известно, что время распространения света в них одинаково. Чему равен показатель преломления кварца, если для стекла $n_{ст} = 1{,}5$?

Физический факультет

1. График проекции скорости тела на некоторую ось в зависимости от времени имеет вид, приведенный на рисунке. Нарисовать графики проекций перемещения и ускорения на ту же ось в зависимости от времени.

2. Два металлических шара радиусов $r_1 = 5$ *см* и $r_2 = 3$ *см* заряжены электричеством. Заряд первого шара $q_1 = 5$ ед. заряда СГСЭ, второго — $q_2 = 8$ ед. заряда СГСЭ. Как изменится величина зарядов, если шары соединить между собой металлическим проводником?

3. Найти фокусное расстояние стеклянной линзы, погруженной в воду, если известно, что ее фокусное расстояние в воздухе равно $F = 20$ *см*. Показатели преломления стекла и воды равны $n_{ст} = 1{,}6$ и $n_в = 1{,}33$.

Л. Беркович, А. Тетерев, С. Фоминых

Московский институт управления им. С. Орджоникидзе

Научно-техническая революция, наиболее отчетливое выражение которой наступило во второй половине двадцатого века, характеризуется значительным ускорением темпов роста общественного производства на базе огромных достижений в области науки и техники. Одним из наиболее ярких проявлений научно-технической революции, оказывающих серьезное влияние на развитие экономики, является резкое увеличение сложности управления народным хозяйством. В этой связи постоянно возрастает значение и роль научной организации управления.

Организация управления есть не только сложная многоплановая наука, но и искусство, овладеть которым возможно, лишь вооружившись фундаментальными знаниями теории и практики.

Московский институт управления (МИУ) — единственный в нашей стране институт, готовящий специалистов по организации управления.

Наука серьезно обогатила арсенал методов и средств управления. Экономико-математические методы, электронно-вычислительная техника, системный анализ, исследование операций — все это только малая часть того, чем необходимо владеть специалисту в области организации управления. Поэтому в нашем институте будущим специалистам в области управления читается целый ряд специальных дисциплин, таких как теория управления общественным производством, организация управления производством, социально-психологические основы управления, моделирование процессов управления, теория автоматизированных систем, экономическая кибернетика, зарубежный опыт управления и др.

В институте принят отраслевой принцип обучения, в соответствии с которым осуществляется подготовка специалистов для ряда отраслей: машиностроительная промышленность, энергетика, металлургическая промышленность, химическая промышленность, строительство, городское хозяйство, автомобильный транспорт.

Кроме специалистов по организации управления, в институте готовят специалистов по автоматизированным системам управления (по тем же отраслям промышленности и транспорта) и экономистов-кибернетиков для различных отраслей народного хозяйства.

Характерной особенностью обучения в институте является совмещение учебного процесса с элементами научных исследований. При институте работают научно-исследовательская лаборатория управления народным хозяйством и научно-вычислительный центр, которые осуществляют сотрудничество со многими предприятиями нашей страны.

В распоряжении студентов имеется свой вычислительный центр, где установлены современные вычислительные машины, включая ЭВМ единой серии. Многие исследования, проводимые студентами, отмечены медалями и дипломами ВДНХ, Министерства высшего и среднего специального образования СССР, ЦК ВЛКСМ.

Общественная жизнь студентов МИУ широка и многогранна. Славные трудовые дела студентов, участников строительства БАМа, животноводческих комплексов Смоленщины и ряда строек Болгарии и Чехословакии, отмечены многими правительственными наградами. С 1974 года в институте работает факультет общественных профессий (ФОП), который включает в себя следующие отделения: лекционно-пропагандистское, художественных профессий, а также спортивной и туристско-экскурсионной работы.

Неограниченные возможности предоставлены любителям спорта, которые в скором будущем получат свой собственный спортивный комплекс.

Ниже приводятся образцы вариантов вступительного письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике в МИУ в 1976 году.

Математика

Вариант 1

1. В треугольник вписан круг радиуса 4 *см*. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки длины 6 *см* и 8 *см*. Найти длины двух других сторон.

2. Решить неравенство

$$|x-6| > |x^2+5x+9|.$$

3. Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0.$$

5. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z-\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Вариант 2

1. Длина высоты правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H, боковое ребро и диагональ пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углами α и β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2. При каких значениях p система неравенств

$$-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2+x+1}<6$$

удовлетворяется при всех действительных значениях x?

3. Решить уравнение

$$x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4.$$

4. Решить уравнение

$$\sin 9x=2\sin 3x.$$

5. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{tg} 63^\circ+\operatorname{tg} 81^\circ.$$

Вариант 3

1. Длины двух сторон треугольника равны a и b. Найти длину третьей стороны треугольника, если величина угла, лежащего против этой стороны, в два раза больше величины угла, лежащего против стороны b.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^3+3}=\sqrt{6x^2+10}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5).$$

4. Решить уравнение

$$1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t=0.$$

5. Доказать, что если $a+b\geqslant 1$, то имеет место неравенство $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

Физика

1. Грузик массой $m=30$ *г* прикреплен к концу невесомого стержня, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца, делая $n=5$ *об/сек*. Длина стержня $l=30$ *см*. Каково натяжение стержня, когда грузик проходит верхнюю и нижнюю точки своей траектории?

2. Два баллона, содержащие один и тот же газ, соединили трубкой с краном. В первом баллоне давление газа $p_1=8\cdot 10^5$ *н/м*², во втором $p_2=6\cdot 10^5$ *н/м*². Емкость первого баллона $V_1=3$ *л*, второго $V_2=5$ *л*. Какое давление (в *мм рт. ст.*) установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна. Объемом трубки можно пренебречь.

3. Конденсатор емкостью $C_1=2$ *мкф* заряжен до напряжения $U_1=100$ *в*, а конденсатор емкостью $C_2=0.5$ *мкф* — до $U_2=50$ *в*. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Какое количество теплоты выделится в результате такого соединения?

4. Однослойная катушка, содержащая $N=1000$ витков провода, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция магнитного поля равномерно изменяется со скоростью $|\Delta\vec{B}|/\Delta t=10^{-2}$ *тл/сек*. Радиус катушки $r=2$ *см*. К концам катушки подключен конденсатор емкостью $C=10$ *мкф*. Определить заряд на конденсаторе.

5. Светящаяся точка S находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Оптическая сила линзы $D=-2,5$ *дптр*, а расстояние от линзы до мнимого изображения точки равно 30 *см*. Где находится точка S? Построить ход лучей.

О. Михненков

Московский институт инженеров землеустройства

Московский институт инженеров землеустройства является единственным в стране специализированным высшим учебным заведением, которое готовит инженеров-землеустроителей, архитекторов по сельскому строительству и инженеров-геодезистов для сельского хозяйства. Институт является одним из старейших вузов страны, крупным научно-методическим центром по вопросам землеустройства, сельской архитектуры и геодезии в области сельского хозяйства.

В институте имеются три факультета: землеустроительный, архитектуры сельских населенных мест и инженерной геодезии.

Землеустроительный факультет является ведущим в институте. Он готовит инженеров-землеустроителей. Чем же привлекательна эта профессия?

Прежде всего надо сказать, что человек, посвятивший себя землеустройству, имеет дело с замечательной природой нашей страны, с ее большим и очень важным богатством — землей. Инженер-землеустроитель занимается отводами участков под строительство промышленных предприятий, крупных гидротехнических сооружений, шоссейных дорог и т. д., составляет проекты межхозяйственного и внутрихозяйственного землеустройства, разрабатывает мероприятия по мелиорации земель, борьбе с эрозией почв и другие.

Один из главных помощников землеустроителя — план или карта. Землеустроитель должен хорошо уметь составлять их, поэтому на первом курсе изучается геодезия. А чтобы знать, какова земля по качеству, что на ней лучше выращивать, можно ли посадить сад на том или ином участке, где надо посадить лесополосы, а где — проложить дороги, студенты изучают почвоведение, земледелие и растениеводство, основы животноводства, механизацию сельскохозяйственного производства, сельскохозяйственную мелиорацию и водоснабжение.

Факультет архитектуры сельских населенных мест был создан в 1965 году и готовит архитекторов по сельскому строительству.

В Программе КПСС намечены пути постепенного превращения колхозных деревень и сел в укрупненные населенные пункты городского типа с благоустроенными жилыми домами, коммунальным обслуживанием, бытовыми предприятиями, культурными и медицинскими учреждениями.

Архитектурным проектированием поселков, жилых и культурно-бытовых зданий, механизированных животноводческих и птицеводческих ферм и других производственных комплексов и занимаются выпускники факультета. На этом факультете изучают следующие специальные дисциплины: архитектурное проектирование, рисунок, историю искусств и архитектуры, строительную механику, конструкцию зданий и сооружений, технологию и организацию строительного производства, а также цикл инженерных и сельскохозяйственных дисциплин.

В процессе учебы студенты выполняют курсовые проекты и работы, а для прохождения производственной практики зачисляются на временную работу в проектные организации, где они выполняют реальные проекты для колхозов и совхозов.

Окончившие факультет распределяются в проектные институты по сельскому строительству, расположенные в столичных, краевых и областных центрах, а также работают районными архитекторами, осуществляя архитектурное руководство и контроль за строительством на селе.

Факультет инженерной геодезии готовит инженеров-геодезистов для сельского хозяйства. Специальность геодезиста — одна из наиболее древних и романтических. Геологи, гидротехники и другие специалисты, ведущие разведку необжитых земель, идут, как правило, с топографической картой в руках. Это значит, что на этих необжитых землях уже поработали геодезисты.

Инженер-геодезист отличается широтой познаний как в области наземных методов съемки, так и в области обработки снимков, полученных с летательных аппаратов.

Методы наземных топографических съемок изучаются в курсах геодезии, инженерной геодезии, высшей геодезии, полевой астрономии. При изучении основ фотографии и аэрофотосъемки, дешифрирования аэроснимков, фотограмметрии и инженерной фотограмметрии студенты осваивают наиболее прогрессивные и высокопроизводительные методы создания карт и планов.

В геодезии и фотограмметрии в последнее время широко используются новейшие достижения в области радиоэлектроники и вычислительной техники. Учебным планом предусматривается изучение специальных курсов радиоэлектроники и вычислительной техники.

Выпускники факультета направляются на работу в аэрофотогеодезические предприятия, в проектные институты по землеустройству и другие организации.

Некоторые из выпускников факультета участвуют в оказании помощи развивающимся странам, выполняя геодезические работы для сельскохозяйственных целей.

Поступающие в институт держат следующие экзамены:

на землеустроительный факультет и факультет инженерной геодезии — по математике (письменно и устно), физике (устно), русскому языку и литературе (письменно);

на факультет архитектуры сельских населенных мест — по рисунку (гипсовая голова и гипсовая архитектурная деталь), черчению (контурная ваза с заданными параметрами), математике (устно), физике (устно), русскому языку и литературе (письменно).

Ниже приводятся варианты письменных работ по математике в МИИЗ 1976 года.

Вариант 1

1. Упростить выражение ($x \neq 0$, $x \neq 2y$, $x \neq -2y$)

$$\frac{5x^2-10xy}{x^2+4y^2} : \frac{15x(x-2y)^2}{x^4-16y^4}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2} < 0.$$

3. Доказать тождество

$$1+\cos(\pi+3\alpha)\cos 2\alpha -$$

$$-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)\sin 2\alpha = 2\sin^2\frac{5}{2}\alpha.$$

4. В правильной треугольной призме высота равна H, а диагональ боковой грани составляет с основанием угол α. Найти объем призмы.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{(0,5x+1)x}{x^3-1}+\frac{1}{2-2x}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)\times$$

$$\times\frac{x^3+x^2+x}{x-1}.$$

2. Вычислить $\sin(\pi/3-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

3. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их произведение равно 64, а среднее арифметическое $\frac{14}{3}$.

4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро длины a наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды.

Вариант 3

1. Упростить выражение ($z \neq 0$)

$$\left[\frac{\left(z^{\frac{2}{p}}+z^{\frac{2}{q}}\right)^2-4z^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}}}{\left(z^{\frac{1}{p}}-z^{\frac{1}{q}}\right)^2+4z^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

2. Доказать тождество

$$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Решить неравенство

$$\log_2(x^2+2x) < 3.$$

4. В равнобедренной трапеции острый угол при основании равен α, диагональ образует с основанием угол β и большее основание равно a. Найти высоту и боковую сторону трапеции.

Вариант 4

1. Упростить выражение

$$[(\sqrt{p}-\sqrt{q})^{-2}+$$

$$+(\sqrt{p}+\sqrt{q})^{-2}]:\frac{p+q}{p^2-q^2}.$$

2. Решить уравнение

$$25^{\sqrt{x-2}}-5\cdot 5^{\sqrt{x-2}}-500=0.$$

3. Преобразовать в произведение

$$1+\cos(2\pi-2\alpha)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right).$$

4. Основание прямой призмы — ромб с высотой h и острым углом α. Меньшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом β. Найти объем призмы.

А. Беликов, Г. Гинзбург

Курский политехнический институт

Курский политехнический институт расположен в центре перспективного промышленного района, развитие которого связано, прежде всего, с разработкой богатейшего месторождения железных руд — Курской магнитной аномалии. Освоение этого месторождения стало возможным сравнительно недавно в связи с появлением комплексов машин и оборудования, позволяющих вести добычу открытым способом после удаления слоя, покрывающего рудное тело.

Своим возникновением институт обязан также и развитию химической промышленности, в частности, производству синтетических материалов для изготовления тканей и трикотажных изделий.

В настоящее время институт ежегодно принимает на первый курс 1400 студентов и готовит инженеров по 14 специальностям.

Факультет автоматики и вычислительной техники готовит инженеров по проектированию и эксплуатации современных электронно-вычислительных машин и систем автоматического управления.

Машиностроительный факультет готовит инженеров по специальностям: технология машиностроения, технология и оборудование сварочного производства, обогащение полезных ископаемых, комплексная механизация открытой разработки месторождений полезных ископаемых. Выпускники этого факультета направляются на работу на машиностроительные заводы, крупные стройки магистральных трубопроводов, обогатительные фабрики, проектные и конструкторские институты.

Строительный факультет готовит инженеров-строителей по основным строительным специальностям: промышленное и гражданское строительство, сельскохозяйственное строительство, водоснабжение и канализация, газотеплоснабжение и вентиляция. Выпускники этого факультета работают на стройках и в проектных институтах.

Механико-технологический факультет готовит инженеров-технологов для легкой промышленности, перерабатывающей натуральное шерстяное и синтетическое волокна, по специальностям: прядение натуральных и химических волокон, технология химической отделки тканей, трикотажное производство, машины и аппараты текстильной промышленности. Выпускники этого факультета работают на предприятиях текстильной и трикотажной промышленности, в конструкторских и технологических бюро научно-исследовательских институтов.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1976 года.

Математика

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде одно из ребер основания имеет длину a и образует угол α с диагональю параллелепипеда и β с диагональю основания параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

2. Решить неравенство

$$\log_8(x^2-2x)\geqslant 1.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 2x=1+\cos 4x.$$

4. Решить уравнение

$$x=\sqrt{3x+7}-1.$$

Вариант 2

1. Около шара радиуса R описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Определить полную поверхность конуса.

2. Решить уравнение

$$\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18.$$

3. Доказать тождество

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha.$$

4. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{(7x-x^2-10)\lg^2(11-x)}.$$

Вариант 3

1. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида, боковые ребра которой составляют с высотой пирамиды угол α. Определить объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольник с углом β между диагоналями.

2. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$$

3 Доказать тождество

$$\sin^2(\alpha-\beta)-\cos^2\beta+$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\alpha.$$

4. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{(x^2-12x+32)\lg^2(6-x)}.$$

Физика

1. Пуля, летящая со скоростью 400 *м/сек*, попадает в земляной вал и проникает в него на глубину 20 *см*. Сколько времени двигалась пуля внутри вала? С каким ускорением? Какова была ее скорость на глубине 10 *см*? Движение считать равнопеременным.

2. Вагон идет по закруглению радиуса 800 *м* со скоростью 72 *км/час*. Расстояние между рельсами равно 1,68 *м*. Определить, на сколько должен быть выше внешний рельс по сравнению с внутренним, чтобы вагон не перевернулся?

3. Шар массой 1 *кг* подвешен на нити. В шар произведен выстрел в горизонтальном направлении, и пуля застряла в шаре. Определить высоту, на которую поднимается откачнувшийся шар, если масса пули 10 *г*, а скорость пули 400 *м/сек*.

4. Перед тактом сжатия давление в цилиндре двигателя внутреннего сгорания равно 0,8 *атм*, а температура 50°С. Определить температуру смеси в конце такта сжатия, если при этом объем ее уменьшился в 5 раз, а давление увеличилось до 7 *атм*.

5. Кусок железа массой 2 *кг*, нагретый до 750°С, погружен в 1,8 *кг* воды при температуре 25°С, при этом вся вода нагрелась до 100°С, и часть ее испарилась. Определить массу испарившейся воды.

6. Для нагревания 2 *л* воды, находившейся в алюминиевой кастрюле массой 400 *г*, от 15°С до 75°С было израсходовано в примусе 30 *г* керосина. Определить коэффициент полезного действия примуса, полагая, что теплота, пошедшая на нагревание сосуда с водой, является полезной. Как изменится результат, если полезной считать теплоту, пошедшую на нагревание воды?

7. Электрон движется в электрическом поле из точки, в которой потенциал равен 600 *в*. Найти потенциал той точки поля, в которой электрон остановится, если начальная скорость электрона равна $10\cdot 10^6$ *м/сек* и направлена вдоль силовой линии поля.

8. Найти внутреннее сопротивление и э. д. с. батареи аккумуляторов, если при сопротивлении внешней цепи 2 *ом* ток равен 0,8 *а*, и при сопротивлении 3 *ом* — 0,6 *а*.

9. Какой должна быть длина активной части проводника, движущегося в магнитном поле с индукцией 0,8 *тл* перпендикулярно направлению магнитных линий со скоростью 10 *м/сек*, чтобы в проводнике индуцировалась э. д. с., равная 8 *в*?

10. На каком расстоянии надо поставить свечу перед вогнутым зеркалом, фокусное расстояние которого равно 10 *см*, чтобы получить действительное изображение пламени, увеличенное в 4 раза? На каком расстоянии от зеркала надо поместить свечу, чтобы изображение получилось мнимым при том же увеличении?

А. Боцу, В. Зрайченко,
Е. Коваленок

Немного об экзаменах

Эти «советы» экзаменующемуся основаны на опыте студентов Московского физико-технического института. Они были напечатаны в газете «За науку». Редакция решила перепечатать заметку, полагая, что советы заинтересуют будущих абитуриентов.

Классификация

Экзамены различаются в зависимости от предмета, по которому их сдают (например, по физике, математике, английскому языку и др.) и от вида этих экзаменов (вступительные, выпускные, жизненные и др.).

Чтобы экзамены производили возможно большее впечатление, их объединяют в так называемые сессии.

Кроме того, экзамены могут протекать в двух формах: письменной и устной. О них по порядку.

Письменный

Вопрос о сдаче экзамена распадается на три подвопроса.

1. Как написать работу, чтобы ее оценили как можно выше.
2. Как извести дежурного преподавателя.
3. Как и чем лучше пользоваться на экзамене.

Первый вопрос изучен достаточно хорошо почти всеми, поэтому писать о нем нет необходимости, третий не печатается по особым соображениям.

Остается рассмотреть второй вопрос. Он требует творческого подхода и предоставляет фантазии любого человека неограниченные возможности. Наиболее интересны, конечно, новые способы, поскольку старые уже изучены экзаменаторами.

Вот одно из оригинальных решений. Выберите себе в аудитории место, доступ к которому наиболее труден (далеко от прохода, малое расстояние между рядами, толстый сосед и т. п.). Минут через двадцать после начала экзамена, когда преподаватель развернет свежий номер газеты, поднимите руку (только не делайте этого первым, а то он вас запомнит). Когда он, наконец, доберется до вашего места, извинитесь и скажите, что вопрос выяснился сам собой. Последующие действия требуют определенной тактики. Задавайте дежурному преподавателю любые вопросы, начиная с неясно напечатанной буквы или нечетко сформулированного условия задачи и кончая тем, когда и сколько раз можно выходить и куда нужно идти. Будьте уверены, что через некоторое время он будет стараться вас не замечать. Теперь спокойно списывайте работу.

Устный

Устные экзамены заслуживают внимания не менее письменных. После того как были опубликованы «Советы экзаменатору» (см. «Физики продолжают шутить», изд-во «Мир», 1968, с. 103), сдавать их стало еще труднее. Поэтому мы предлагаем несколько правил, которые могут облегчить абитуриентам сдачу устных экзаменов.

Советы экзаменующемуся

1. Прежде всего дайте экзаменатору понять, что ваша будущая карьера, а также личная жизнь мало зависят от его оценки ваших знаний. Поставьте его на место с самого начала.

2. С вашим экзаменатором будьте приветливы, но сдержанны. Других экзаменаторов просто не замечайте. Не старайтесь услышать вопросы, задаваемые другим абитуриентам: если вы можете ответить на них, у вас возникнет излишняя уверенность в себе, если нет — неуверенность, а между тем, к вам они не имеют ни малейшего отношения.

3. Заставьте экзаменатора понять (или хотя бы принять) ваш метод, особенно, если этот метод необычен. Это отвлечет экзаменатора от посторонних размышлений и заставит смотреть не только на ответ, но и на решение.

4. Если у вас хорошая память, не показывайте этого экзаменатору. Выводите все, что можно вывести. Особенно хорошее впечатление производит получение формулы

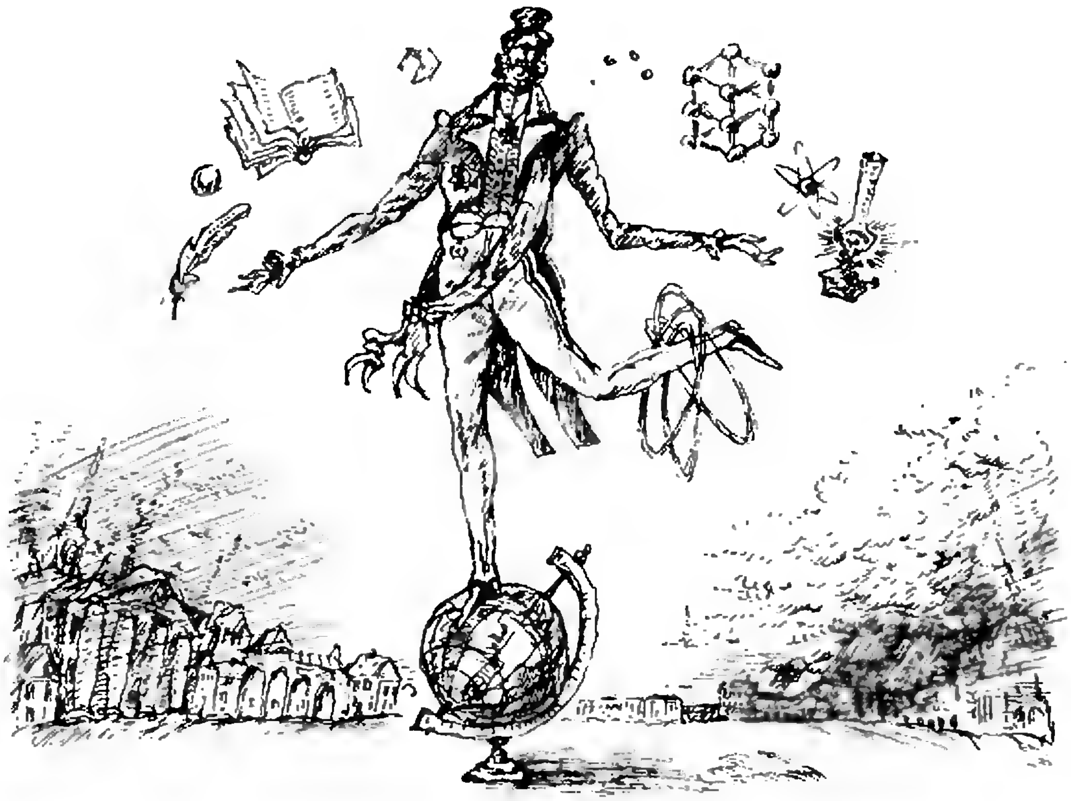
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

из разложения второй степени бинома с доказательством последнего по индукции и вычислением первых десяти коэффициентов.

5. Избегайте слов: «из школьного курса известно...» или «в институте это изучают более подробно...». Школьный курс экзаменатор давно забыл, а в институте, как может оказаться, преподает недавно, может быть, даже по совместительству, поэтому программу изучить еще не успел. Вообще избегайте ссылок. Даже если задача проста, а ее решение есть во всех учебниках, подумайте полминуты и отвечайте так, будто вас только что осенило.

6. Не спрашивайте экзаменатора, что он вам поставил. С улыбкой попрощайтесь и покиньте аудиторию. Если вам сказано ждать результатов за дверью, не стойте около нее. Сходите в буфет. Это упрочит всеобщее мнение, что экзамен для вас — не самое важное в жизни, и увеличит уважение к вам.

И. Калашникова,
А. Веденеев



Из творческого наследия Козьмы Пруткова

Внимательное ознакомление с произведениями Козьмы Пруткова позволило автору настоящей публикации выдвинуть смелую гипотезу о том, что известный сатирик был еще и талантливым ученым, во многом предвосхитившим развитие физики и математики. По ряду причин он возвестил миру о предугаданных им идеях и тенденциях не в явной, а в замаскированной форме. Мы ограничимся приведением материалов, относящихся к физике и подтверждающих нашу гипотезу. Публикация этих материалов приурочена нами к приближающемуся 175-летию со дня рождения К. Пруткова (1803—1863). Эпиграф к публикации навеян стихами Фаддея Кузьмича Пруткова — талантливого сына гениального отца.

Исполняется 175 лет со дня рождения Пруткова.
Это, можно сказать, праздник науки и культуры.
Однако даже многим ученым невдомек,
Сколь велик его вклад в развитие разных наук.

Пространство. Время. Относительность

Часами измеряется время, а временем жизнь человеческая; но чем, скажи, измеришь ты глубину Восточного океана? *)

---

*) Курсивом здесь и далее набраны выдержки из произведений, действительно принадлежащих Козьме Пруткову. (*Прим. автора публикации.*)

Комментарий. Постановка вопроса едва ли не важнее его решения, и данный афоризм подтверждает это наблюдение. Наука ответила на риторический вопрос Пруткова: глубины океанов следует измерять в метрах, в соответствии с принятой ныне Международной системой единиц (СИ).

●

Самый отдаленный пункт земного шара к чему-нибудь да близок, а самый близкий от чего-нибудь да отдален.

Комментарий. В данном афоризме четко высказана идея относительности пространства. Не останавливаясь на очевидном развитии этой идеи в рамках релятивистской теории, укажем, что этот афоризм, видимо, породил следующее заключение, вложенное знаменитым французским писателем Анатолем Франсом в уста Рике, собачки г-на Бержере — героя «Современной истории»: «Люди, животные и камни растут, приближаясь, и становятся огромными, когда они около меня. Я же не меняюсь. Где бы я ни был, я всегда одинаково велик».

●

Ничего не доводи до крайности: человек, желающий трапезовать слишком поздно, рискует трапезовать на другой день поутру.

Комментарий. В данном афоризме четко высказана идея относительности времени (см. комментарий к предыдущему афоризму). Стоит подчеркнуть также, на примере комментируемого афоризма, влияние К. Пруткова на последующие поколения сатириков. В «Двенадцати стульях» Ильфа и Петрова находим сходное наблюдение, высказанное Остапом Бендером: «В Берлине есть очень странный обычай: там едят так поздно, что нельзя понять, что это — ранний ужин или поздний обед».

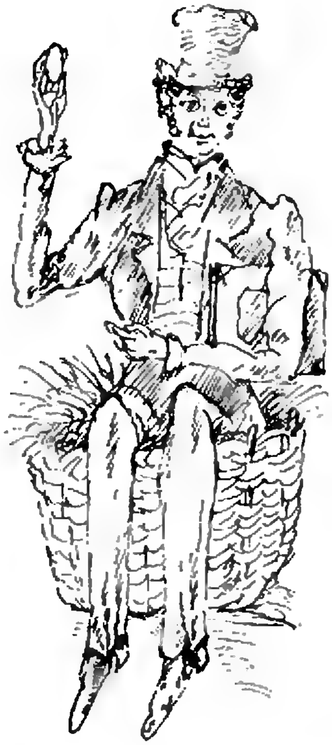
●

«Зачем, — говорит эгоист, — стану я работать для потомства, когда оно ровно ничего для меня не сделало?» — Несправедлив ты, безумец! Потомство сделало для тебя уже то, что ты, сближая прошедшее с настоящим и будущим, можешь по произволу считать себя: младенцем, юношей и старцем.

Комментарий. Здесь вновь идет речь об относительности времени. Нам кажется уместным привести новонайденный рассказ К. Пруткова, обнаруженный в его бумагах:

«На приеме у генерал-губернатора N оказался я рядом со своим товарищем по пансиону и, оглядев его пристально, не преминул поинтересоваться, почему он столь грустен.

— Как же мне не печалиться, — возразил последний на мой вопрос. — Не далее как неделю назад похоронил я своего бедного батюшку, и горькая мысль о том, как плохо устроена жизнь, бле-



снула в моем воспаленном мозгу: сначала умирают наши деды, потом — родители, а потом и мы сами!

— Несправедлив ты, о друг мой, — энергично возразил я свидетелю и участнику моих юношеских игр и утех. — Жизнь, напротив, отменно прекрасна: сначала молоды мы сами, потом — наши дети, а затем и внуки!

Магическое действие, оказанное на старого товарища этой осенившей меня идеей, немедленно отразилось на его невыразительном, но повеселевшем лице».

●

«Чиновник! окажи мне дружбу;
Скажи, куда несешься ты?» — «На службу!»
«Зачем не следуешь примеру моему,
Сидеть в спокойствии? признайся напоследок!»
Чиновник, курицу узревши этак
Сидящую в лукошке, как в дому,
Ей отвечал: «Тебя увидя,
Завидовать тебе не стану я никак;
Несусь я, точно так,
Но двигаюсь вперед; а ты несешься сидя!»

Комментарий. В басне с очевидностью вводится представление об относительности скорости. Достойна специального внимания идея рассмотрения событий в движущихся друг относительно друга системах координат, далеко выходящая за пределы принципа относительности Галилея.

●

Известно, что с пространственно-временными соотношениями тесно связаны причинно-следственные. Последние бегло затрагивались Прутковым в афоризме:

Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

Проблемы причинно-следственных связей живо обсуждаются физиками в связи с гипотезой о существовании тахионов — частиц, движущихся в пустоте со сверхсветовой скоростью. Оказывается, возможность таких движений не отвергается специальной теорией относительности (и ее творцом). Трудности здесь лежат как раз в проблеме причины и следствия.

Можно думать, что именно тахионы стояли перед мысленным взором Козьмы Пруткова, когда он формулировал глубокий афоризм, найденный нами недавно в его тетради и высказанный емкой и звучной латынью:

«Cogitatu, ergo sunt»,

то есть

«Мыслимы — значит, существуют».

Уместно напомнить, что Прутков высоко ценил Декарта, наиболее, пожалуй, известного широким кругам читателей созвучным афоризмом:

«Cogito, ergo sum»,

то есть

«Мыслю — значит, существую».

Новонайденный афоризм Пруткова блестяще разрешает не только проблему тахионов, но и подводит прочный научный фундамент под вопросы финансирования столь дорогостоящих поисков единичного магнитного заряда — монополя Дирака, кварков и других объектов.

Астрономия

Человек! возведи взор свой от земли к небу,— какой, удивления достойный, является там порядок!

Комментарий. Объективности ради надо отметить, что плоды раздумий К. Пруткова не всегда приводили к правильным заключениям, а иногда порождали ложные следствия. Так, приведенное наблюдение о расположении звезд в «удивления достойном порядке» (вполне справедливое и тонкое) послужило, видимо, поводом для такого утверждения (принадлежащего неизвестному теологу): «Божественное происхождение всего сущего вытекает из того, что любые три звезды, не расположенные на одной прямой, занимают вершины треугольника».

Квантовая механика

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые: иначе такое бросание будет пустою забавою.

Комментарий. Хорошо известно, что в 1924 году французский физик Луи де Бройль высказал предположение, что движению тела массы m со скоростью v может быть сопоставлен волновой процесс, характеризующийся длиной волны λ. Связь между этими дополняющими друг друга характеристиками физического объекта (корпускулярными и волновыми) выражается знаменитой формулой де Бройля: $\lambda = \frac{h}{mv}$ (h — постоянная Планка). Представляется несомненным, что именно эти соображения занимали К. Пруткова в его экспериментальном исследовании, нашедшем отражение в комментируемом афоризме. Непредвзятый ум, вооруженный знанием современной квантовой механики, не может не усмотреть в этом афоризме прямого предвосхищения независимо высказанных позднее взглядов де Бройля. В афоризме Козьмы Пруткова содержится также призыв к дальнейшим размышлениям о каменно-круговом (читай — корпускулярно-волновом) параллелизме, быть может, как раз и услышанный французским ученым.

Публикацию подготовил В. Френкель

Список читателей, правильно решивших задачи из «Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М391—М405, Ф403—Ф422. Жирные цифры после фамилий — две последние цифры номеров решенных задач.

Математика

Мы не включали в список фамилии читателей, правильно решивших задачу **М393**. Остальные задачи правильно решили: *С. Абаджян* (с. Дараков ГрССР) **92, 97, 00в), 01, 02, 04**; *З. Аббасов* (Ордубад) **01**; *Г. Аветисян* (пос. Анаран АрмССР) **97**; *В. Акопян* (Ленинакан) **01, 02, 04**; *С. Акопян* (Ереван) **01, 02, 04**; *Д. Алиев* (Ташкент) **96, 99**; *Б. Амосов* (Мытищи) **91, 92, 94*а*), б), 95*а*), б), 96, 97, 00*а*), г), 01—04**; *В. Ансоткин* (Ленинград) **01, 03, 04**; *С. Антонов* (Киев) **94а), б), 95*а*), 96, 97, 01, 02**; *Б. Аронов* (Саратов) **96, 01—04, 05а)**; *В. Асенова* (НРБ) **01—03**; *В. Атамась* (с. Худяки Черкасской обл.) **91**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **91, 01**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **97, 00в), 01—03**; *П. Баньковский* (Уральск) **92, 01, 04**; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) **97, 01, 02**; *А. Бер* (Ташкент) **92, 96, 97, 02, 03**; *М. Бествина* (СФРЮ) **01—03**; *П. Билер* (ПНР) **91, 92, 94а), б), в), 95а), б), 97, 99, 00в), г), 01—03**; *И. Биргер* (Киев) **96, 97, 00г), 01, 02**; *И. Бирюков* (Покров) **97**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **94б), 96, 97, 00*в*), г), 01, 02, 04**; *Б. Блок* (Москва) **92, 95а), б), в), г), 96, 97, 98б), 99, 00в), г), 01—04, 05б), в)**; *А. Бобылев* (Днепропетровск) **91**; *В. Бондиренко* (Тростянец) **97, 02, 03**; *Н. Бондаренко* (Ленинград) **94б), 01, 02, 04**; *В. Бугаенко* (Киев) **92, 01—04**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **97**; *И. Вайсбурд* (Томск) **97, 01—03**; *Н. Великороссов* (Конаково) **01, 05а), б)**; *В. Виниченко* (пос. Октябрьское Крымской обл.) **97**; *Ю. Волков* (Саратов) **02**; *А. Ворович* (Москва) **92, 02, 03**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **95а), 96, 97, 00в), г), 01—03, 05а), б)**; *Л. Гаджиев* (Тбилиси) **01**; *Я. Гиек* (ЧССР) **97**; *Я. Гангл* (ЧССР) **92, 94б)**; *Л. Гандельсман* (Ленинград) **92, 95а), б)**; *А. Гарнаев* (Таллин) **97, 99, 01—03**; *А. Гатилов* (Воронеж) **01—03**; *П. Гержой* (Москва) **01—04, 05а), б)**; *И. Гершенгорин* (Харьков) **01—03, 05а), б)**; *Б. Гисин* (Ленинград) **91, 92, 94а), б), 96, 97, 98б), 00в), г), 01—04, 05а), б)**; *Е. Глезин* (Ленинград) **91, 92, 94а), 96, 97, 98б) 00в), 01—04, 05а), б)**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **01, 02**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **01**; *Т. Гольдштейн* (Харьков) **01**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **92, 02**; *К. Горнин* (Кременчуг) **97**; *С. Гришечкин* (Москва) **91, 92, 96, 97, 00в), г.), 01—04, 05а), б), в)**; *Н. Грищук* (Москва) **92**; *В. Гроссман* (Одесса) **91, 92, 94б), в), 02**; *М. Грунтович* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **97, 01—04**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **92, 04б), 00в), г), 01—03**; *С. Гузовский* (Рига) **01**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **01, 05а), б)**; *А. Демидов* (Москва) **01, 03**; *А. Дзагоев* (Тбилиси) **01**; *А. Диденко* (Краснодар) **43**; *В. Дмитренко* (Киев) **94а), б), 96, 97, 99**; *В. Дмитриенко* (Киёв) **02**; *С. Досмаганбетов* (Алма-Ата) **97, 01**; *До Тхе Лынг* (Вьетнам) **97**; *В. Дроздов* (Рязань) **92**; *О. Евдокимов* (Ленинград) **97, 01, 02**; *Е. Евстратов* (Ангарск) **97, 01—03**; *А. Егоян* (Тбилиси) **97, 01—03**; *А. Елизаров* (Москва) **01—04, 05а), б), в)**; *А. Ефишкин* (Оренбург) **01—04**; *Заложенков* (Семипалатинск) **01**; *И. Замаховская* (Ташкент) **02**; *И. Захаревич* (Ленинград) **96, 97, 01, 03, 04**; *А. Зейфман* (Рязань) **02**; *В. Зелик* (Симферополь) **97**; *Л. Зильберман* (Москва) **02**; *И. Зорин* (Кривой Рог) **02, 03**; *Р. Измайлов* (Баку) **97, 01—03, 05а), б), в)**; *С. Исаков* (Пермь) **01, 04, 05б)**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **01**; *И. Калика* (Киев) **01, 02, 05а), б)**; *Б. Киплан* (Киев) **91, 92, 94а), б), 96, 97, 00в), 01—03**; *А. Карпов* (Ленинград) **92, 02**; *В. Карташев* (Елец) **01, 02, 04**; *В. Каскевич* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **97, 01—04**; *А. Касянчук* (Николаев) **91, 92, 94а), в), 96, 97, 98б), 99, 00г), д), 01—03, 05а), б)**; *А. Кириллов* (Ленинград) **91, 92, 95а), б)**; *В. Книжник* (Москва) **96, 97, 01—04, 05а), б), в)**; *А. Князюк* (Киев) **01—04, 05а), в)**; *В. Кобельков* (Мстёра) **03**; *Л. Кобесашвили* (Вале) **01**; *С. Козявкин* (Киев) **92, 96, 97**; *О. Конников* (Симферополь) **97, 01—03**; *Л. Корельштейн* (Москва) **91, 92, 95а), б), в), г), 96, 97, 00в), 01—04, 05а), б), в)**; *С. Корчанов* (Ангарск) **97, 02**; *В. Костусяк* (Запорожье) **02, 03**; *А. Кулеско* (Донецк) **91, 97, 00в), г), 01, 02, 04, 05а)**; *М. Кутернин* (Алма-Ата) **01—04**; *С. Лавренченко* (Москва) **92, 96, 97, 02—04, 05а), б)**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **92, 96, 97, 00в), 01, 02, 04**; *Г. Левко* (с. Верхняя Стинава Львовской обл.) **01**; *Р. Леманн* (ГДР) **91, 92**; *А. Липчанский* (Саратов) **02, 05а)**; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) **97, 01, 02**; *Л. Любенов* (НРБ) **01**; *С. Майский* (Москва) **97, 01, 02**; *М. Манелис* (Киев) **95а), б), в), 97, 05а)**; *А. Манченко* (Фрунзе) **01**; *В. Медведь* (Молодечно) **01, 02**; *Б. Мерсон* (Рига) **01—03**; *Л. Миндлин* (Ташкент) **96, 97, 02, 05а), в)**; *А. Мирлин* (Ленинград) **01—04**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **01—04, 05а), в)**; *Г. Мойсевич* (Одинцово) **97**; *А. Молев* (Горький) **01, 02**; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) **96, 97, 00в), г), д), 01—03, 05а), б)**; *И. Муллагулов* (Уфа) **01—03**; *М. Мымрикова* (Мукачево) **02**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **92, 02**; *Н. Наймак* (Николаев) **96, 97, 01, 02, 05а)**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **91, 92, 94а), б), в), 00в), г), 02—04, 05а), б)**; *Б. Наткович* (Тбилиси) **97, 01**; *Е. Негашев* (Каменск-Уральский) **97**; *В. Нейман* (Ленинград) **92, 96, 97, 99, 00в)**; *А. Неугодников* (Каменск-Уральский) **97**; *Я. Николешвили* (с. Варкетили ГрССР) **97**; *Г. Николов* (НРБ) **97, 03**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **92, 93, 97, 98б), 99, 00в), г), 01—03**; *О. Огилько* (с. Михайловка Целиноградской обл.) **94б)**; *А. Осьманов* (с. Каролаш МССР) **01**; *Д. Папуш* (Харьков) **96, 97, 00в), г), д), 01, 02, 05а), б)**; *Д. Патарая* (Тбилиси) **01, 03**; *И. Пашин* (Темиртау)

02; *А. Петухов* (Новосибирск) 91, 92, 01—04, 05а), в); *П. Побылица* (Ленинград) 91, 92; *С. Полыгалов* (Пермь) 97, 99; *А. Попов* (Чусовой) 97; *Л. Попов* (Астрахань) 97, 01; *С. Путинцев* (Краснодар) 91, 92; *А. Рабинович* (Харьков) 01, 02; *А. Разборов* (Москва) 91, 92; *В. Решетов* (Троицк) 91, 94б); *В. Рогава* (Тбилиси) 02; *А. Родников* (Москва) 95а), б), в), г); *С. Ронкин* (Симферополь) 01, 02; *К. Садыкова* (Ташкент) 02, 04; *Г. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) 01—03; *М. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) 01, 03; *Д. Самощенко* (Свердловск) 97; *В. Сафонов* (Грозный) 97, 01; *В. Свиридов* (Воронеж) 92, 03; *Р. Севдималыев* (Шанфлин Аз. ССР) 97, 01; *М. Селектор* (Ленинград) 91, 92, 95а), б), в), 97, 98б), 99, 00в), г), 01, 02, 04; *А. Сердюк* (Херсон) 97, 01; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 02, 03; *В. Смолко* (Кишинев) 92; *М. Соколовский* (Москва) 92, 94а), б), 96, 01—03; *А. Соловьев* (Ульяновск) 97; *В. Спинеев* (Ворошиловград) 97; *В. Стовба* (Москва) 92, 94б), 95а), б), в), г), 96, 97, 98б), 99, 00в), г), 01—03; *И. Стойменович* (СФРЮ) 01—03; *О. Тен* (Краснодар) 01—04; *Н. Тренев* (Москва) 92, 97, 01, 02, 05б); *Н. Трифонов* (Канск) 05б); *В. Трофимов* (Москва) 91, 94а), б), 96, 97, 01—04; *В. Угриновский* (Хмельник) 92, 97, 01—03; *В. Фалько* (Харьков) 97, 01, 02; *С. Фомин* (Новоград-Волынский) 01—03; *Л. Хаит* (Могилев-Подольский) 97; *С. Харенко* (Ангарск) 97, 01—03; *И. Хаучл* (ЧССР) 96, 97; *И. Царьков* (Москва) 97, 00в), 01; *А. Чичинин* (Новосибирск) 01, 02, 04; *А. Шафир* (Челябинск) 02; *К. Шахназарян* (Баку) 92, 97; *О. Шейдвассер* (Оренбург) 01, 02; *А. Шкуропатов* (с. Яншабад Ташкентской обл.) 02; *Е. Шмуклер* (Москва) 01, 02, 04; *В. Шпильрайн* (Москва) 04; *Ю. Штейнирайбер* (Баку) 96, 97, 00в), 01, 02; *В. Штепин* (Челябинск) 91, 94б), 95а), б); *С. Штернин* (Ленинград) 02, 03; *В. Шумилов* (Череповец) 92; *В. Щукин* (Ленинград) 96, 97, 98б), 99, 00г), 01—04, 05а), б); *Л. Энтин* (Москва) 91, 92, 94а), 96, 97, 98б), 00в), г), 01—03; *А. Юрков* (с. Романовка Красноярского края) 01—04; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 97, 01, 02.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф405**, **Ф407** и **Ф417**. Остальные задачи правильно решили: *Е. Абель* (Москва) 18—22; *А. Абрамян* (Ереван) 4, 13, 14, 21, 22; *У. Аллаяров* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 19; *Б. Амосов* (Мытищи) 14, 18—21; *В. Андреев* (д. Автухты Витебской обл.) 19; *О. Анышкова* (Винница) 5, 10, 19; *А. Атамуратов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 18, 21; *М. Багаутдинов* (Магнитогорск) 4, 10, 18, 20, 22; *Ф. Багдасарян* (Баку) 8, 10, 11, 14, 16, 19, 20; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) 19; *В. Бакаев* (Орск) 20; *К. Балашев* (д. Клишева Московской обл.) 8—11; *Ю. Балашов* (Москва) 4; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) 19; *А. Барташ* (Симферополь) 8; *О. Батищев* (Череповец) 4, 8, 11—15, 18, 19; *А. Беликов* (Москва) 4, 10, 18, 19—22; *О. Березюк* (Челябинск) 18, 20; *Г. Бетин* (с. Счастливцево Херсонской обл.) 3, 4; *П. Билер* (Вроцлав ПНР) 4, 8, 16, 19; *А. Бобров* (Пермь) 3, 4, 8, 10, 13—15, 18—20; *А. Бобылев* (Днепропетровск) 6; *В. Боднарюк* (с. Стрелецкий Кут Череповецкой обл.) 4; *Т. Болтуруков* (с. Тюп КиргССР) 11; *В. Бондаренко* (Тростянец *Сумской обл.*) 19; *И. Вайсбурд* (Томск) 8, 14, 19—21; *В. Варлыгин* (Москва) 8; *П. Вахрушев* (Навои) 8; *В. Ващенко* (Туапсе) 3, 8, 10, 14; *Н. Великороссов* (Конаково) 19; *Я. Виннишин* (Туапсе) 14, 18—20, 22; *В. Вирясов* (Павлоград) 4, 8, 19; *А. Вишневский* (Бердичев) 18; *Л. Водоватов* (Москва) 19, 21; *Д. Воробьев* (Киев) 13, 14, 16; *П. Воронин* (Рига) 19; *В. Гаврилов* (Орск) 18—21; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) 8, 9, 11, 18—20; *И. Газизов* (Москва) 3, 4; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) 18—22; *В. Гаркавый* (Лида) 4, 6, 8—11, 18—22; *В. Гармаш* (Запорожье) 8, 10, 11, 13—15, 18—22; *А. Гербин* (Ленинград) 21; *М. Глазунов* (Старый Оскол) 8; *О. Глушко* (Москва) 6, 8—10, 13, 14, 18—20; *И. Головин* (Тула) 19; *Э. Гологорский* (Кишинев) 14, 19, 21; *О. Голощапов* (с. Архангельское Тульской обл.) 8, 9, 11, 21; *Е. Гордиенко* (Кишинев) 8, 14, 18, 20—22; *Е. Горюнова* (Петропавловск-*Камчатский*) 8; *А. Готовиков* (с. Кубенское Вологодской обл.) 18—20; *А. Грайфер* (Запорожье) 6, 8, 10, 14; *Б. Грибов* (Воронеж) 13, 18, 19, 21, 22; *И. Гузов* (Москва) 4; *В. Демидович* (Гадяч) 20; *П. Демкин* (Донецк) 4, 14, *О. Денисов* (Баку) 4, 10, 11; *В. Дроздов* (Рязань) 19; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) 18; *В. Ерофеев* (Новосибирск) 8, 9, 11, 18, 19, 21, 22; *К. Жангозин* (Караганда) 8, 19, 20; *И. Жарекешев* (Алма-Ата) 18, 21; *В. Житарь* (Кишинев) 4, 9; *В. Жуков* (Абаза) 19; *М. Жуков* (Москва) 14; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 4, 6, 8, 10, 11, 13—16, 18—22; *А. Захаров* (Брест) 4, 10, 19; *Е. Зильберберг* (Винница) 10; *В. Зильберг* (Новгород) 4, 8, 10, 19; *Н. Землянигин* (Борский р-н Горьковской обл.) 4; *А. Измайлов* (Зеленодольск ТАССР) 15, 18—22; *Г. Измайлов* (Баку) 4; *А. Ильин* (Грозный) 4; *А. Иоаннисян* (Ереван) 8; *А. Исавердиев* (Баку) 4; *С. Исаков* (Пермь) 19, 20; *В. Казак* (Ровно) 8—10, 12; *Е. Казарова* (Ереван) 18, 19; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 14, 18—21; *А. Каланович* (Пермь) 3, 4, 6; *А. Калинин* (Пермь) 19, 20; *А. Катасонов* (Дрезна) 13, 14; *В. Катин* (Дуагавпилс) 4; *А. Квиташвили* (Тбилиси) 18, 19, 21; *М. Кирсанов* (Тула) 4, 6, 10, 13, 14, 16, 18—21; *И. Кисель* (Кролевец) 4; *С. Клейман* (п. г. т. Луков Волынской обл.) 19; *Ю. Кобылинский* (Севастополь) 14; *В. Кокоц* (Липецк) 20; *В. Комов* (Александров) 14, 19—21; *И. Кондрашкин* (Ленинград) 6; *А. Кононов* (Саратов) 19—21; *Г. Корионов* (Москва) 14—16, 19, 21; *К. Корнев* (п. Билибино Магаданской обл.) 14, 18; *В. Коробов* (Саратов) 18; *В. Коротков* (Джамбул) 18; *В. Коток* (Харьков) 8, 10, 13, 14; *И. Костенко* (Сумы) 8, 11, 14, 18—20, 22; *В. Костур* (Киев) 18, 19; *А. Краджян* (Ереван) 19, 21; *А. Кречетников* (Сумы) 19; *В. Кузьменко* (Чернигов) 8, 14, 20, 21; *Г. Куликова* (Егорьевск) 10; *А. Куприн* (Москва) 14, 18, 20, 21; *Л. Куравский* (Калуга) 8, 10, 18, 19; *М. Курбатов* (Москва) 4, 6, 8—12, 18—22; *Е. Курмангалиев* (Уральск) 4, 6; *С. Лавренченко* (Москва) 4, 14, 18, 19, 21; *В. Лашкин* (Киев) 15, 19; *А. Листовничий* (Киев) 8, 18—20, 22; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) 8, 18, 19, 21, 22; *О. Лищенко* (Киев) 3, 4, 6, 8—11, 13—16, 18—22; *В. Лобзин* (Свердловск) 3, 6, 8, 10—15, 18—21; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 4, 9, 10, 18, 19; *Л. Лознер* (Минск) 3, 13, 14, 18—21; *В. Лубневский* (Москва) 4; *С. Ляхимец* (Киев) 14; *А. Магадеев* (д. Карачаево БашкАССР) 19; *С. Майский* (Москва) 4, 8, 19, 21; *В. Малинин* (Нижний Тагил) 4, 8, 10, 19—22; *М. Малкиель* (Кишинев) 3, 4, 6; *А. Манашкин* (Днепропетровск) 18—21; *А. Масягин* (Смоленск) 4, 6, 10, 11, 18—20; *М. Матвеев* (Канаш) 6, 10, 18—22; *Ю. Матрухович* (Минск) 4, 10, 12, 14, 19, 20; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 19, 20; *Ю. Маянц* (Чернигов) 19—21; *А. Мень* (Симферополь) 3; *Г. Метревели* (Цхинвали) 14, 18; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 8, 10, 11, 13, 14, 18, 19; *Ю. Минаев* (Киев) 6, 8, 10—14, 16, 18—22; *А. Могильнер* (Свердловск) 11; *М. Молдовский* (Тбилиси) 19; *К. Морозов* (Пермь) 3, 4, 6, 8, 10—12, 14—16; *Е. Морозова* (Ленинград) 18, 19; *М. Муллаяров* (с. Малый Ашап Пермской обл.) 4, 8, 10, 11; *О. Мусаев* (Баку) 3, 4, 6, 8, 10, 12—14, 18, 20, 21; *Ю. Мухарский* (Киев) 3—22; *Б. Налибоцкий* (Минск) 3, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 18—20, 22; *Б. Наткович* (Тбилиси) 19; *В. Нескоромный* (Рубежное) 10, 19; *И. Нескоромный* (Симферополь) 8, 10, 11, 14, 18—21; *С. Нестер* (Днепропетровск) 8, 19—21; *А. Никитенков* (Великие Луки) 6, 8—10, 12—16, 18—22; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 9, 18; *О. Николаев* (с. Верхневилюйск ЯАССР) 20; *В. Носик* (с. Бабинищи Ивано-Франковской обл.) 4, 6, 18—22; *И. Овсянников* (Саратов) 8, 11, 18; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) 10, 13—15, 18, 19, 22; *А. Окоприенко* (Кривой Рог) 8, 9, 12; *М. Османов* (ст. Акстафа АзССР) 18; *К. Оспанов* (Байрам-Али) 19; *В. Палей* (Харьков) 3, 4, 6, 8, 9, 11, 18—21; *С. Панин* (Тула) 3, 4, 8; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 14, 18, 22; *А. Петухов* (Цимлянск) 19, 20; *М. Петушков* (Магнитогорск) 18, 19; *В. Писецкий* (Запорожье) 8, 12, 18—20, 22; *П. Побылица* (Ленинград) 3, 8, 10, 13—15, 19—21; *А. Полванов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 21; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 4, 6, 8, 11, 14—16, 18—22; *С. Попов* (Москва) 6, 13—16, 18—22, *В. Потемкин* (Великие Луки) 18—21; *А. Родин* (Великие Луки) 8; *С. Розуван* (Киев) 18—20; *А. Романов* (Киев) 18—22; *В. Романов* (с. Камышино Курской обл.) 8, 9; *И. Романов* (Москва) 19; *Ю. Ростовцев* (Горький) 3, 19, 21; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 4; *А. Рудницкий* (Киев) 8, 9; *О. Рябухин* (Свердловск) 8, 9; *И. Савченко* (Киев) 10, 18, 19, 21, 22; *П. Саипов* (Ташкент) 4; *Г. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) 4, 6; *М. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) 4; *Г. Санадзе* (Тбилиси) 19; *А. Сахарук* (Брест) 6, 10, 18, 19; *С. Секацкий* (п. Кант КиргССР) 20, 21; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 19—21; *Л. Скатков* (Харьков) 6, 18—22; *С. Скоморощенко* (Красноводск) 19; *Н. Слесарев* (п. Широкий Ворошиловградской обл.) 18; *В. Смирнов* (Ленинград) 19; *В. Смирнов* (Уфа) 8, 18—22; *А. Смышляев* (Ленинград) 14; *А. Соловьев* (Ульяновск) 8; *Н. Сорокин* (Днепропетровск) 4, 9—11, 14, 15; *С. Соскин* (Киев) 3, 4, 6; *П. Стаднюк* (п. Уч-Кузук Бухарской обл.) 18, 19; *В. Стовба* (Москва) 4, 8, 13, 14, 18, 19, 22; *Х. Сулейманов* (Араванский р-н Ошской обл.) 21; *Р. Султанов* (Ташкент) 18, 19; *В. Суслов* (Александров) 20, 21; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 20; *М. Сухарь* (Москва) 8; *Б. Тажиков* (Новосибирск) 14, 21; *Р. Тененбаум* (Киев) 18, 19, 21; *И. Толох* (Жидачов) 4, 18—22; *Г. Торонова* (Усмань) 19; *К. Третьяченко* (Киев) 3, 4, 6, 8, 9, 11—16, 18—22; *К. Трутнев* (Казань) 3, 4, 6, 8—12, 14—16; *Ю. Туллер* (Новороссийск) 19; *Е. Усина* (Великие Луки) 19—21; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 19, 21; *А. Фарбер* (Тамбов) 4, 18, 19, 21, 22; *Н. Федин* (Омск) 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 18, 19—22; *В. Федотов* (Балхаш) 8; *В. Филатов* (Мурманск) 19—21; *А. Фомин* (Новосибирск) 18—21; *А. Хачатуров* (Баку) 18—20; *А. Худошин* (Харьков) 4, 9, 14, 16, 20, 22; *Е. Хусаинов* (Артем) 19, 20; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 18—22; *И. Цуркис* (Калининград) 3, 4, 8, 12, 14, 18, 19—22; *В. Чеканов* (Быхов) 8, 10, 14, 19, 21; *Л. Черных* (Лида) 4, 6, 8, 9, 14, 22; *Ю. Черняев* (Белгород) 4; *А. Чурилов* (Харьков) 6, 11, 19; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 14, 19—22; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 3, 8, 9; *А. Шафаренко* (Караганда) 4, 8, 14, 18—22; *К. Шахназарян* (Баку) 8, 19—21; *А. Швейдель* (Великие Луки) 8; *А. Шептовецкий* (Москва) 3, 4, 6, 8, 11, 12, 14, 18—22; *И. Шибут* (Барановичи) 9; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 3, 11, 13, 18—22; *И. Шиян* (Киев) 8, 9, 11—16, 18—22; *О. Шлыгин* (Новосибирск) 4; *С. Штейнер* (Гомель) 21, 22; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) 4, 10—12, 18—22; *Р. Шувар* (п. Рогатин Ивано-Франковской обл.) 4, 6, 10, 11, 14, 16, 18—22; *М. Шупов* (Москва) 19, 20, 22; *В. Щукин* (Ленинград) 3, 4, 6, 8, 10, 13—16, 18—22; *М. Яблоков* (Москва) 19; *Р. Яламетдинов* (Уфа) 19—21; *А. Яременко* (Кадиевка) 18, 19.

К статье «Куйбышевский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. $V=\dfrac{\pi l^3 k^3\cos^3\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$

при k $]0,1]$;

$$V=\frac{\pi l^3 k^3\cos^3\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}-\frac{\pi l^3(k-1)^3\cos^3\alpha\sin^2\beta}{3\cos^2\beta}$$

при $k\in]1;1+\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta]$;

$$V=\frac{\pi l^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3}$$

при $k\in]1+\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta;\infty[$. 2 $x\in[1;2]$. Указание. $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2$.
3. $x\in[a-\sqrt{a^2+8};0[\cup]2a;a+\sqrt{a^2+8}]$.
4. $(x,y)\in\{(1/2;-1/2),(-1/2;1/2),(1;0),(-1;0),(0;1),(0;-1)\}$.

Вариант 2

1. Пусть $\gamma=\arcsin(1/\sqrt{1+A^2})$, где $A=\sin 2\beta\operatorname{tg}\alpha$. Тогда $k\in[\sin\gamma;\max\{1;1/A\}]$; при этом $\varphi_1=-\gamma+\arcsin\left(\dfrac{\sin\gamma}{k}\right)$ при $k\in[\sin\gamma;1]$ и $\varphi_2=-\arcsin\left(\dfrac{\sin\gamma}{k}\right)+\pi-\gamma$ при $k\in[\sin\gamma;1/A]$ (в пересечении областей два решения).
2. $x=(-7+\sqrt{13})/3$. 3. $x\geqslant 10$. 4. $x=\pi/4+k\pi/2$, $y=\pm\operatorname{arctg}2+n\pi$, $z=\pi-x-y$ $(n,k\in Z)$.

Вариант 3

1. $k\in[2\sqrt{3}/3;3/2[$, $\alpha_1=2\arccos({}^1/_4\times(k+\sqrt{k^2+4}))$, $\alpha_2=3\arccos[(k+\sqrt{k^2+4})/4]$. 2. $x\geqslant 5$.
3. $x_1=\pi/4+k\pi/2$, $x_2=\pm\pi/3+k\pi$ $(k\in Z)$.
4. $x\in]0;10^{(-\lg 20\sqrt{2}-\sqrt{\lg^2\sqrt{2}+\lg 80})/\lg 2}]\cup[10^{(-\lg 20\sqrt{2}+\sqrt{\lg^2\sqrt{2}+\lg 80})/\lg 2};1[\cup]1;\infty[$.

Вариант 4

1. $2\arccos 2k$; $k\in]0;\sqrt{2}/4[$. 2. $x=0$. 3. $x_1=k\pi$, $x_{2,3}=\pm\arccos[(1+\sqrt{5+4b})/4]+2k\pi$, $x_{4,5}=\pm\arccos(1/4\times(1-\sqrt{5+4b}))+2k\pi$ $(k\in Z)$ при $b\in]-5/4;1[$; $x=x_1$, $x=\pm 2\pi/3+2k\pi$ при $b=1$; $x=x_1$, $x=x_{4,5}$ при $b\in]1;5[$; $x=x_1$ при $b=5$; решений нет при $b\in]-\infty;-5/4[\cup]5;\infty[$. 4. $x\in]0;(3-\sqrt{5})/2]\cup]1;(3+\sqrt{5})/2]$.

Физика

Механико-математический факультет

1. $\mu=\dfrac{h}{a+l}=0{,}05$.
2. Напряженность поля не изменится.
3. $n_{\text{к}}=n_{\text{ст}}\dfrac{l_1}{l_2}\approx 2{,}4$.

Физический факультет

1. См. рис. 1.
2. $|\Delta q|=\left|\dfrac{q_2r_1-q_1r_2}{r_1+r_2}\right|\approx 7$ ед. заряда СГСЭ.
3. $F'=F\dfrac{n_{\text{ст}}-1}{n_{\text{ст}}/n_{\text{в}}-1}\approx 60$ *см*.

К статье «Московский институт управления им. С. Орджоникидзе»

Математика

Вариант 1

1. 13 *см*, 15 *см*. Указание. Найти тангенсы половин углов треугольника. 2. $x\in]1;3[$. 3. $x\in\{0,1/2\}$. 4. $x_1=\pi/2+k\pi$, $x_2=2k\pi/11$ $(k\in Z)$. 5. $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$.

Вариант 2

1. $2H^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 2. $p\in]-3;6[$ 3. $x=2$. 4. $x_1=k\pi/3$, $x_2=\pm\pi/18+k\pi/3$ $(k\in Z)$. 5. 4.

Вариант 3

1. $\sqrt{b(a+b)}$. 2. $x\in[-1,1]$. 3. $x\in]5/2;\infty[$. 4. $t_1=\pi/2+k\pi$, $t_2=\pi/3+2k\pi/3$ $(k\in Z)$.

Физика

1. $T_1=m\left(4\pi^2n^2l-|\vec{g}|\right)\approx 8{,}58$ *н*; $T_2=m\left(4\pi^2n^2l+|\vec{g}|\right)\approx 9{,}17$ *н*.
2. $p=\dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}\approx 5{,}1\cdot 10^3$ *мм рт. ст.*
3. $Q=\dfrac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}=5\cdot 10^{-4}$ *дж*.

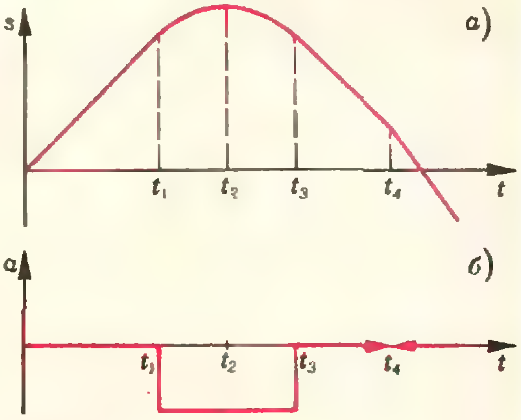


Рис. 1.

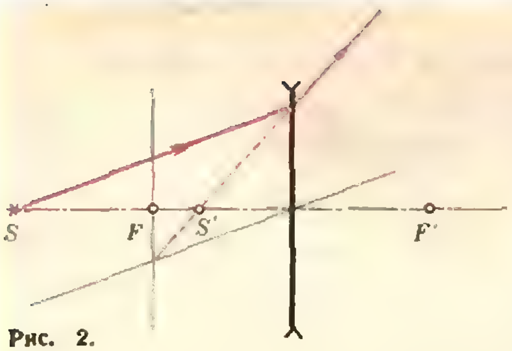


Рис. 2.

4. $q = \pi r^2 NC \dfrac{|\Delta\vec{B}|}{\Delta t} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-7}$ *к*.

5. $d = 1{,}2$ *м* (см. рис. 2).

К статье «Московский институт инженеров землеустройства»

Вариант 1

1. $\dfrac{x+2y}{3}$. 2. $x \in \,]4;\ 6[$. 4. $H^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha/4$.

Вариант 2

1. $\dfrac{3}{2(1-x)}$. 2. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$. 3. 2, 4, 8; 8, 4, 2. 4. $\sqrt{3}\, a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha/4$.

Вариант 3

1. $|z^{1/p} - z^{1/q}|$. 3. $-4 < x < -2$; $0 < x < 2$. 4. $\dfrac{a \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Вариант 4

1. $\dfrac{2(p+q)}{p-q}$. 2. $x = 6$. 3. $4 \cos 2\alpha \times \cos(\alpha+\pi/6) \cos(\alpha-\pi/6)$. 4. $\dfrac{h^3 \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}$.

К статье «Курский политехнический институт»

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{a^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\cos \alpha \cos \beta}$.

2. $x \in \,]-\infty;\ -1] \cup [3;\ \infty[$. 3. $x_1 = \pi/4 + k\pi/2$, $x_2 = \pm\pi/6 + k\pi$ $(k \in Z)$. 4. $x = 3$.

Вариант 2

1. $2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}/\cos \alpha$. 2. $x = 8$. 4. $[2;\ 5] \cup \{10\}$.

Вариант 3

1. $2R^3 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha \sin^3 2\alpha/3$. 2. $x = 3/2$. 4. $]-\infty;\ 4] \cup \{5\}$.

Физика

1. $|\vec{a}| = |\vec{v}_0|^2/2s = 4 \cdot 10^5$ *м/сек*^{2}; $t = 10^{-3}$ *сек*; $|\vec{v}| \approx 280$ *м/сек*.

2. $h = \dfrac{|\vec{v}|^2 l}{R|\vec{g}|} \approx 8{,}4$ *см*.

3. $h = \dfrac{m^2 |\vec{v}_0|^2}{2|\vec{g}|(m+M)^2} \approx 0{,}8$ *м*.

4. $T_2 = T_1 \dfrac{p_2}{p_1} \dfrac{V_2}{V_1} \approx 563°\text{K} = 290°\text{C}$.

5. $m_л = \dfrac{c_ж m_ж (t_ж - t) - c_в m_в (t - t_в)}{\lambda_в} = 0{,}12$ *кг*.

6. $\eta_1 = \dfrac{(c_в m_в + c_а m_а)(t_2 - t_1)}{q_к m_к} \approx 44\%$;

$$\eta_2 = \frac{c_в m_в (t_2 - t_1)}{q_к m_к} \approx 38\%.$$

7. $\varphi_2 = \varphi_1 - m|\vec{v}_0|^2/2e = 315$ *в*.

8. $r = \dfrac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = 1$ *ом*;

$$\mathscr{E} = I_1(R_1 + r) = 2{,}4 \text{ в}.$$

9. $l = \dfrac{\mathscr{E}}{|\vec{B}||\vec{v}|} = 1$ *м*.

10. $d_1 = {}^5/_4 F = 12{,}5$ *см*;

$$d_2 = {}^3/_4 F = 7{,}5 \text{ см}.$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 6)

1. Струбцинка.
2. Если лист бумаги — четырехугольник, то согнуть его по диагонали, а затем (расправив) согнуть так, чтобы совпали две противоположные стороны.
3. 36 учеников.
4. 180 ударов.
5. 98.

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили художники:
М. Дубах, М. Златковский, Г. Красиков,
Э. Назаров, И. Смирнова, П. Чернуский

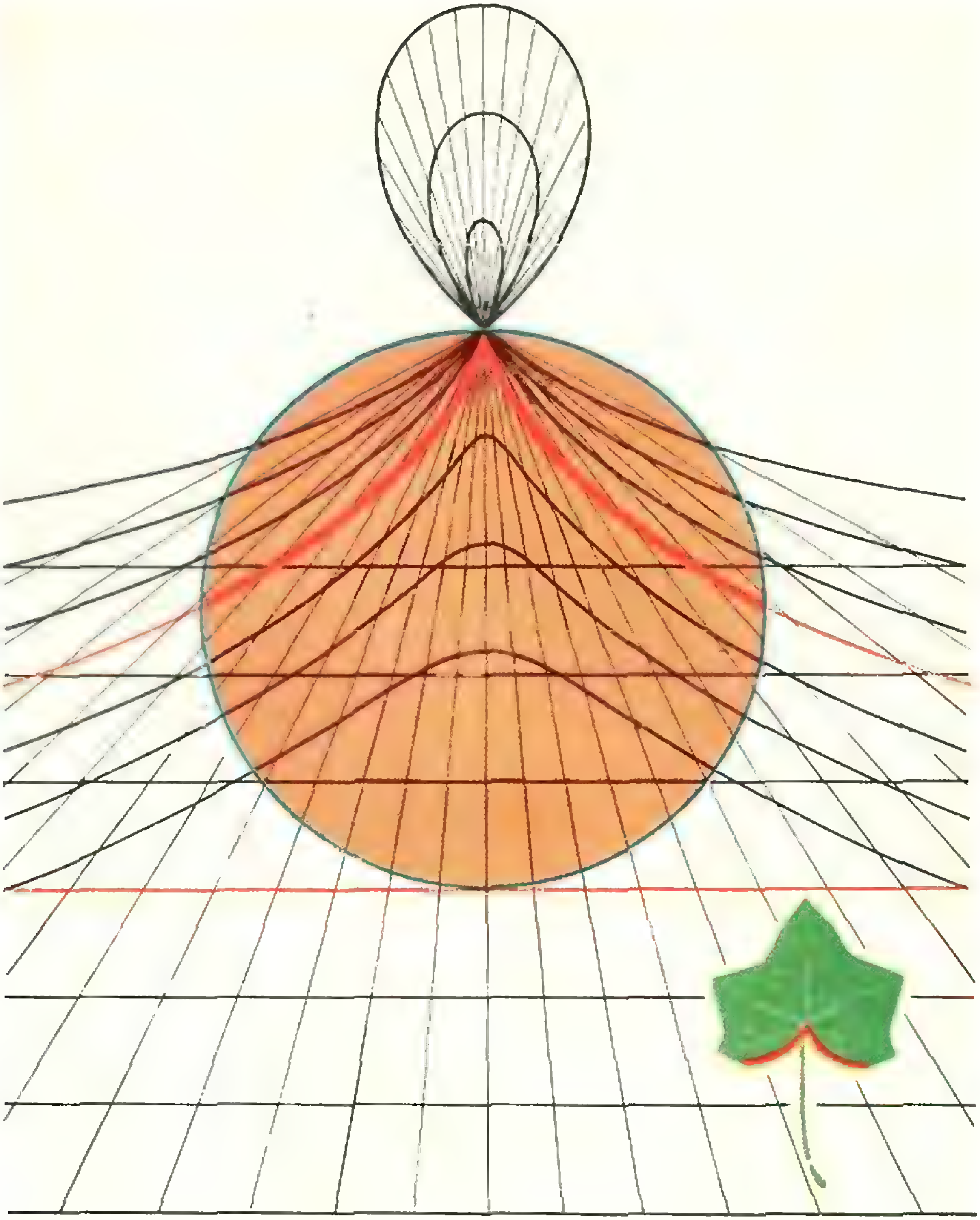
Зав. редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

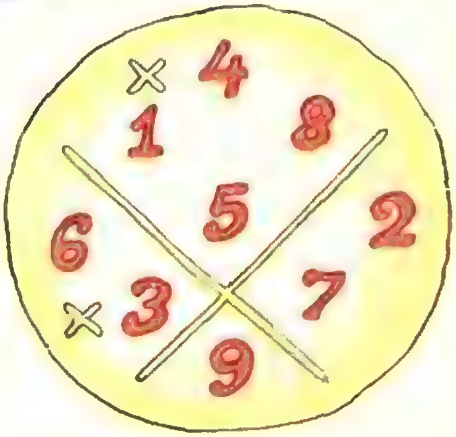
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/IV-77
Подписано в печать 3/VI-77
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,63 Т-0,8478
Цена 30 коп. Заказ 845. Тираж 288 800 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



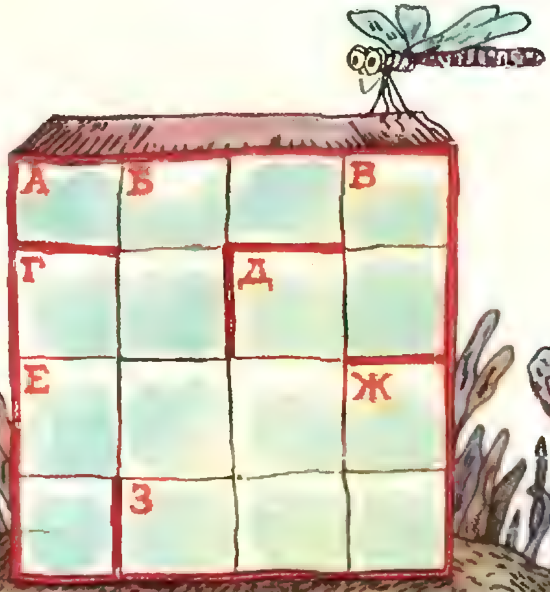
Здесь изображено семейство замечательных кривых — циссоид. Название «циссоида» происходит от греческого κιττοειδ-ής (плющеподобная). Жирной красной линией показан тот участок циссоиды, который рассматривался Диоклессом. Похожий на нее участок контура листа плюща также обведен красной линией. (см. с. 46).



Удивительные цифры

Приведенная здесь запись обладает удивительным свойством. Посмотрите на нее из левого нижнего угла журнала. Вы увидите правильно выполненный пример на сложение. Теперь посмотрите из правого нижнего угла. Что вы видите? Опять правильно выполненный пример на сложение! К тому же в нем использованы все цифры от 1 до 9.

Попробуйте *найти еще одну такую запись цифр от 1 до 9.*



Кросснамбер

В каждую клетку надо вписать одну цифру (красные *линии — границы чисел*).

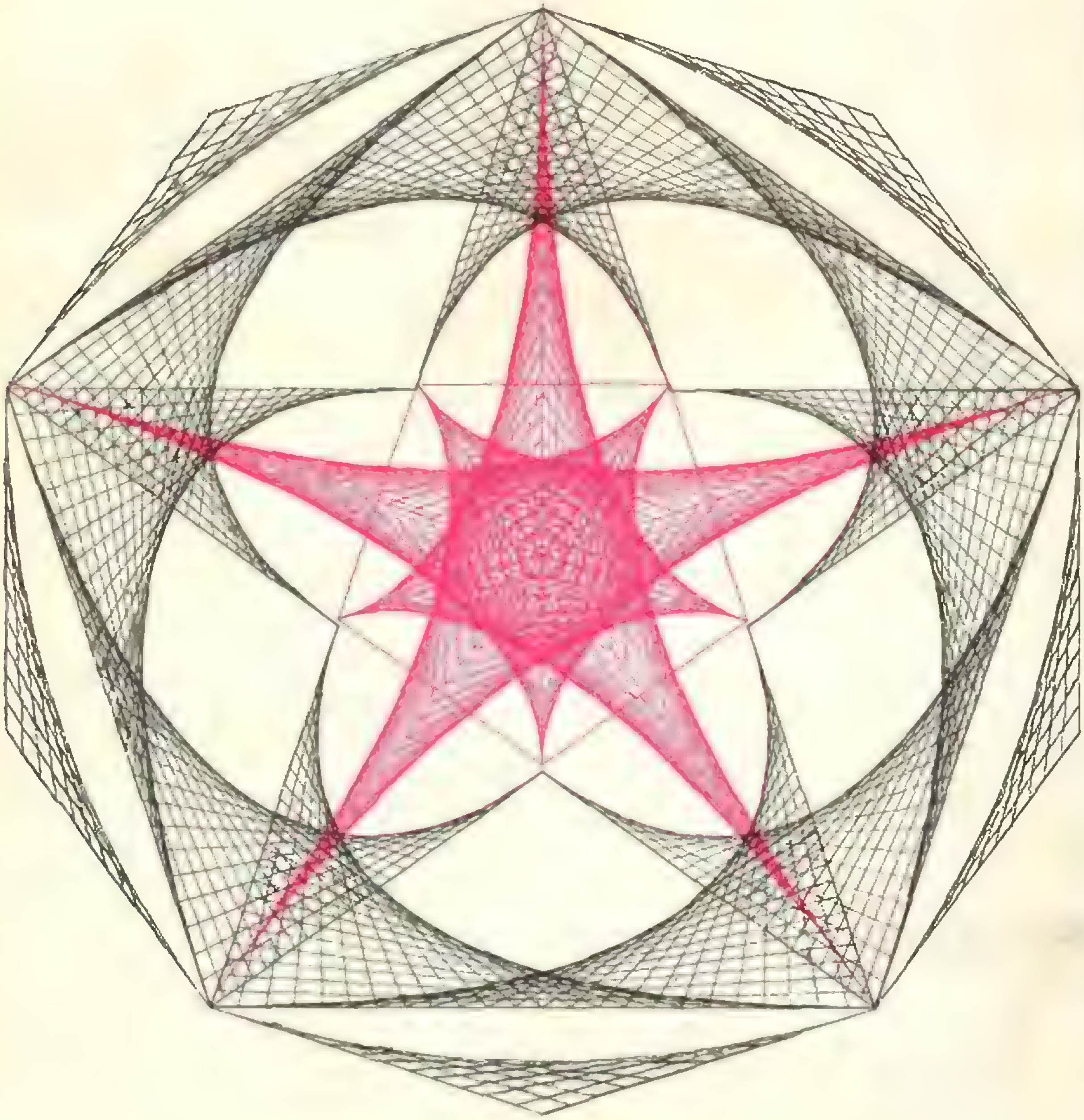
По горизонтали: **А.** Число с последовательно убывающими цифрами. **Г.** Степень некоторого числа. **Д.** Квадрат некоторого числа. **Е.** Число с последовательно возрастающими цифрами. **З.** Произведение трех последовательных целых чисел.

По вертикали: **Б.** Число кратное 11. **В.** Нечетное число. **Г.** Куб некоторого числа. **Д.** Квадрат простого числа. **Ж.** Сумма пяти последовательных целых чисел.

Л. Мочалов

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этом рисунке вы видите несколько правильных выпуклых и звездчатых пятиугольников и десятиугольников. О вопросах, связанных с построением правильных n-угольников с помощью циркуля и линейки, рассказывается в статье А. Кириллова на с. 2. Рисунок на обложке выполнен электронной вычислительной машиной по программе, составленной Ю. Котовым.



НОМЕР
8

Основан в 1970 году

Квант

8
1977

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *С. Гиндикин.* Карл Фридрих Гаусс
15 *Л. Алексеева.* Вихри, которые «делают погоду»
22 *О. Жаутыков.* Кривые второго порядка
27 *З. Тьмеладзе.* Теория игр

Лаборатория «Кванта»

34 *Н. Ростовцев.* Как с помощью проволоки измерить длину световой волны

Математический кружок

38 *В. Рабинович.* Аффинные задачи и теоремы

Задачник «Кванта»

42 Задачи М456—М460; Ф468—Ф472
44 Решения задач М416—М419; Ф428—Ф431

«Квант» для младших школьников

51 Задачи
52 *Н. Виленкин.* Математика и шифры

Рецензии, библиография

58 *Н. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

Физики шутят

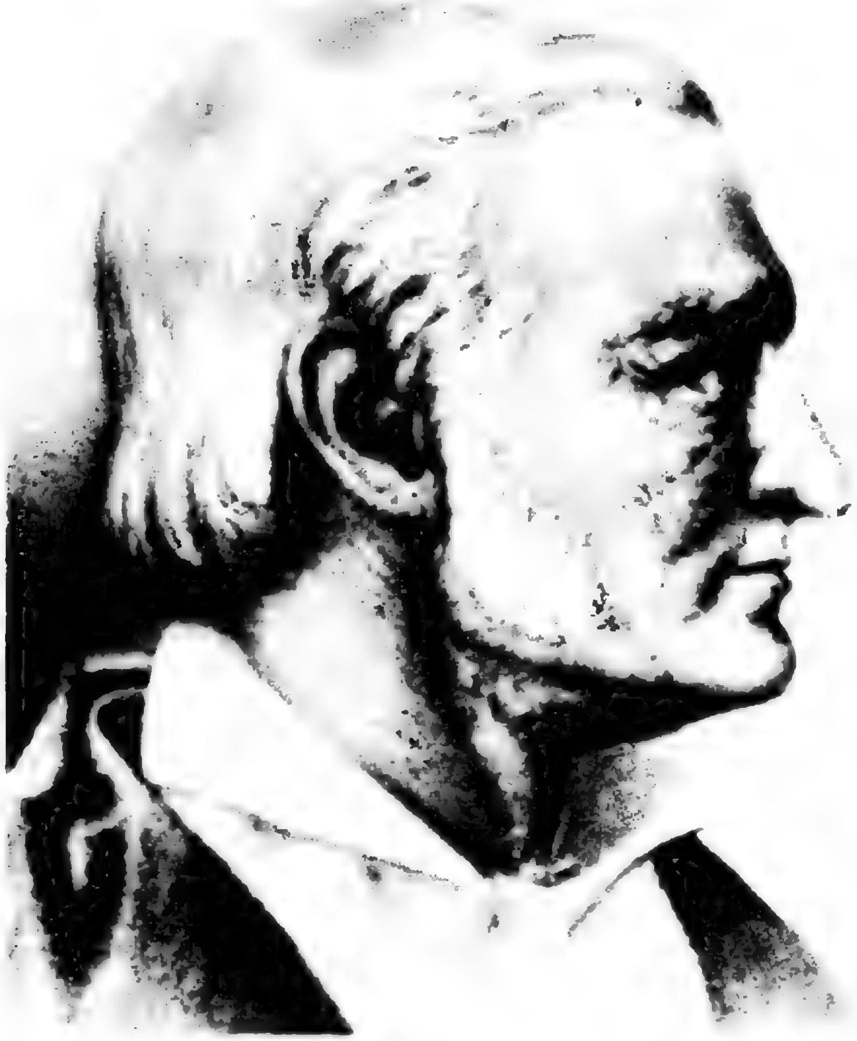
60 Об аутентичности научных анекдотов

Информация

62 Заочная физическая школа
63 Вечерняя физическая школа
63 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 26, 37, 56, 57)*

15 июля 1960 года ураган Абби приближался к Гондурасу. На экране радиолокатора он выглядел как и полагается «зрелому» урагану *(см. первую страницу обложки)* — имел четковыраженный «глаз» (на него указывает стрелка), окруженный белым кольцом — стеной дождевых облаков, вращающихся с ураганной скоростью. Об ураганах, циклонах и антициклонах, смерчах вы прочитаете в статье «Вихри, которые делают погоду» (см. с. 15).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977



С. Гиндикин

Карл Фридрих Гаусс

(К 200-летию со дня рождения)

> *Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать.*
>
> Гаусс.

В 1854 г. здоровье тайного советника Гаусса, как его именовали коллеги по Геттингенскому университету, решительно ухудшилось. Не могло быть и речи о продолжавшихся в течение двадцати лет ежедневных прогулках от Обсерватории до Литературного музея. Профессора, приближавшегося к восьмидесятилетнему рубежу, удалось уговорить обратиться к врачу! Летом ему стало лучше и он даже присутствовал на открытии железной дороги Ганновер — Геттинген. В январе 1855 г. Гаусс соглашается позировать художнику Геземану для медальона. По заказу Ганноверского двора уже после смерти ученого в феврале 1855 г. по этому медальону была изготовлена медаль. На медали под барельефом Гаусса было написано: Mathematicorum princeps (Король математиков). История всякого настоящего короля должна начинаться с детства, овеянного легендами. Гаусс в этом смысле не был исключением.

Брауншвейг, 1777—1795 гг.

Гаусс не получил свой титул по наследству, хотя его отец Гергард Дидерих не был вовсе чужд математике. Мастер на все руки, прежде всего фонтанный мастер, но также и садовник, как его отец, Гергард Дидерих был известен своими успехами в счетном ремесле. Его услугами пользовались купцы во время ярмарок в Брауншвейге и даже Лейпциге, а еще он имел постоянный заработок в самой большой похоронной кассе Брауншвейга (место, которое он передал по наследству сыну от первого брака Георгу — отставному солдату).

Карл Фридрих родился 30 апреля 1777 года в доме № 1550, что стоял на канале Венденгребене в Брауншвейге. По мнению биографов он унаследовал от родных отца крепкое здоровье, а от родных матери яркий интеллект. Ближе других был к будущему ученому дядя Фридерихс — искусный ткач, в котором, по словам племянника, «погиб прирожденный гений». Гаусс говорил про себя, что он «*умел считать раньше, чем говорить*». Самая ранняя математическая легенда о нем утверждает, что в три года он следил за расчетами отца с каменщиками-поденщиками и неожиданно поправил отца, причем оказался прав.

В 7 лет Карл Фридрих поступил в Екатерининскую народную школу. Поскольку считать там начинали с третьего класса, первые два года на маленького Гаусса внимания не обращали.

В третий класс ученики обычно попадали в 10-летнем возрасте и учились там до конфирмации (15 лет). Учителю Бюттнеру приходилось заниматься одновременно с детьми разного возраста и разной подготовки. Поэтому он давал обычно части учеников длинные задания на вычисление, с тем чтобы иметь возможность беседовать с другими учениками. Однажды группе учеников, среди которых был Гаусс, было предложено просуммировать натуральные числа от 1 до 100. По мере выполнения задания ученики должны были класть на стол учителя свои грифельные доски. Порядок досок учитывался при выставлении оценок. 10-летний Гаусс положил свою доску, едва Бюттнер кончил диктовать задание. К всеобщему удивлению, лишь у него ответ был правилен. Секрет был прост: пока диктовалось задание, Гаусс успел переоткрыть формулу для суммы арифметической прогрессии! Слава о чуде-ребенке распространилась по маленькому Брауншвейгу.

В школе, где учился Гаусс, помощником учителя, основной обязанностью которого было чинить перья младшим ученикам, работал некто Бартельс, интересовавшийся математикой и имевший несколько математических книг. Гаусс и Бартельс начинают заниматься вместе; они знакомятся с биномом Ньютона, бесконечными рядами...

Как тесен мир! Через некоторое время Бартельс получит кафедру чистой математики в Казанском университете и будет учить математике Лобачевского.

В 1788 г. Гаусс переходит в гимназию. Впрочем, в ней не учат математике. Здесь изучают классические языки. Гаусс с удовольствием занимается языками и делает такие успехи, что даже не знает, кем он хочет стать — математиком или филологом.

О Гауссе узнают при дворе. В 1791 г. его представляют Карлу Вильгельму Фердинанду — герцогу Брауншвейгскому. Мальчик бывает во дворце и развлекает придворных искусством счета. Благодаря покровительству герцога Гаусс смог в октябре 1795 г. поступить в Геттингенский университет. Первое время он слушает лекции по филологии и почти не посещает лекций по математике. Но это не означает, что он не занимается математикой.

Любимейшая наука величайших математиков

Это один из многочисленных эпитетов, которыми Гаусс наделял арифметику (теорию чисел). К тому времени арифметика из набора изолированных наблюдений и утверждений уже превратилась в науку.

Позднее Гаусс напишет: «*Главным образом, более поздним исследователям, правда немногочисленным, но завоевавшим непреходящую славу, — таким, как Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр, мы обязаны тем, что они нашли доступ к сокровищнице этой божественной науки и показали, какими богатствами она наполнена*». Но всего этого еще не знает мальчик из Брауншвейга, который с поразительной скоростью переоткрывает то, на что у его великих предшественников ушли многие годы. Вот несколько тем, которые занимали его.

Гаусс рано подмечает, что остатки от деления квадратов целых чисел на простые числа p не могут быть любыми. Например, при делении на 3 остатки могут быть либо 0, либо 1; при делении на 5 — 0, 1 или 4. Но можно посмотреть на ситуацию и с другой стороны: для каких p существуют числа n^2, дающие при делении на p заданный остаток q? При $q = 1$ годятся любые p ($n = p + 1$), а вот остаток $p - 1$ для некоторых p получается, а для некоторых — нет: для $p = 3$ остатка 2 при делении квадрата не бывает, а при $p = 5$ остаток 4 бывает ($n = 3$), при $p = 7, 11, 19$ остатка $p - 1$ не бывает, а при $p = 13, 17$ бывает. Возникает гипотеза: если $p = 4k - 1$, то никакое n^2 при делении на p не дает остаток $p - 1$, а при $p = 4k + 1$ такое n^2 указать можно. Гаусс не знал, что эту гипотезу сформулировал до него еще Ферма и что справедливость ее была установлена Эйлером.

«*Я случайно натолкнулся на одну изумительную арифметическую истину, и, так как она не только показалась мне прекрасной сама по себе, но и навела на мысль, что она связана и с другими выдающимися фактами, я со всей энергией взялся за то, чтобы выяснить принципы, на которых она основывается, и получить строгое её доказательство. После того как это желание, наконец, осуществилось, прелесть этих исследований настолько увлекла меня, что я уже не мог их оставить*».

Гаусс интересуется, для каких p числа n^2 могут давать остатки $q = 2$, 3 и т. д. Для $q = 2$ он догадывается, что все дело в остатке от деления p на 8 (это не удалось доказать Эйлеру, но доказал Лагранж), для $q = 3$ все определяется остатком от деления p на 12. Общее утверждение состояло в том, что все простые p, имеющие одинаковый остаток при делении на $4q$, либо одновременно могут давать остаток q при делении некоторого n^2 на p, либо не могут. Это утверждение Гаусс назвал «золотой теоремой»; сейчас его принято называть *квадратичным законом взаимности* *). «Золотая теорема» не поддалась первой атаке юного Гаусса. «*Эта теорема мучила меня целый год и не поддавалась напряженнейшим усилиям*». Но это была та точка, в которой он «догнал» современную ему математику: усилия крупнейших математиков, пытавшихся доказать квадратичный закон взаимности, были безрезультатными.

Вот другая тема размышлений Гаусса. Маленького Гаусса радует, что если делить 1 на p, то через некоторое время десятичные знаки начинают повторяться — получается бесконечная десятичная периодическая дробь. Доказать периодичность не мудрено, а как сосчитать длину периода? Гаусс, не торопясь с выводами, перебирает простые числа подряд, не ленясь точно выписывать периоды. Это может показаться скучным занятием (например, для 97 период содержит 96 знаков), но Гаусс перебрал все $p < 1000$. Он установил, что длина периода всегда является делителем числа $p - 1$. (Это легко следует из Малой теоремы Ферма **), которую Гаусс передоказал.) Гаусса интересуют те p, для которых период в точности равен $p - 1$. Для этого достаточно, чтобы среди остатков от деления на p чисел $10, 10^2, \ldots, 10^{p-1}$ встречались все ненулевые остатки. Бесконечно или конечно число таких p, не известно по сей день.

---

*) См. статью «Золотая теорема» («Квант», 1973, № 1).

**) См. статью «Малая теорема Ферма» («Квант», 1972, № 10).

Гаусс подметил, что при делении чисел 3, 9, 27, ..., 3^{16} на 17 встречаются все возможные ненулевые остатки: 1, 2, ..., 16. Это наблюдение послужило толчком к первому великому открытию Гаусса — построению правильного 17-угольника *).

Гаусс знал, что циркулем и линейкой можно построить правильные n-угольнички (или, что то же, разделить окружность на n равных частей) при $n = 3, 4, 5$. Он, конечно, понимал, что такие построения возможны также при $n = 2^k, 2^k \cdot 3, 2^k \cdot 5, 15$ $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\right)$. По-видимому, Гаусс знал, что ни для каких других n древним построение выполнить не удалось.

Новое время принесло возможность перевести задачу построения правильного n-угольника на алгебраический язык. Возможность построения такого многоугольника циркулем и линейкой сводится к представлению корней **) уравнения $z^n - 1 = 0$ или (если отбросить корень $z = 1$) $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$ в виде квадратичных иррациональностей (т. е. выражению их через рациональные числа при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня).

Эта редукция позволила единообразно рассмотреть случаи, доступные древним, в то время как сами древние для каждого случая изыскивали особый способ.

Гаусс думал об *уравнении деления круга* (так называется вышеуказанное уравнение), одновременно размышляя о делимости чисел. 30 марта 1796 года он при пробуждении неожиданно увидел связь между этими задачами.

Пусть $n = 17$. Если ε — корень уравнения $z^{16} + z^{15} + \ldots + z + 1 = 0$, то ε^2, ε^3, ..., ε^{16} — его остальные корни. Гаусс перенумеровал корни так, что ε^l получило номер k, если 3^k при делении на 17 имеет остаток l. При этом оказались занумерованными все 16 корней (см. выше). Обозначим так занумерованные корни через $t_1, t_2, \ldots, t_{16}$. Положим $u_1 = t_1 + t_3 + \ldots + t_{15}$, $u_2 = t_2 + t_4 + \ldots + t_{16}$; $v_1 = t_1 + t_5 + t_9 + t_{13}$, $v_2 = t_2 + t_6 + t_{10} + t_{14}$, $v_3 = t_3 + t_7 + t_{11} + t_{15}$, $v_4 = t_4 + t_8 + t_{12} + t_{16}$; $w_1 = t_1 + t_9$, $w_2 = t_2 + t_{10}$, ..., $w_8 = t_8 + t_{16}$. Оказывается, u_1, u_2 являются корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого — целые числа; v_1, v_2, v_3, v_4 — корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого выражаются через u_1, u_2; w_1, w_2, ..., w_8 выражаются аналогично через v_1, v_2, v_3, v_4; наконец, корни t_1, t_2, ... t_{16} — выражаются через w_1, w_2, ..., w_8. В результате получается нужное представление корней.

Таким образом, Гаусс смог продвинуться в задаче, в которой со времени Евклида не было сделано ничего нового. Элементарность формулировки позволила сообщить об этом открытии в газете.

Позднее Гаусс решил проблему деления окружности полностью. Задача сводится к случаю простых n. Для простых n вида $2^{2^k} + 1$ (это так называемые *простые числа Ферма*) построение проходит по той же схеме, что и при $n = 17$. Следующее n такого вида равно 257. Есть сведения, что Гаусс не поленился провести подробные построения и для этого случая. Для простых n, не имеющих такого вида, построение, как доказал (но не опубликовал) Гаусс, невозможно (в частности, для $n = 7, 11$).

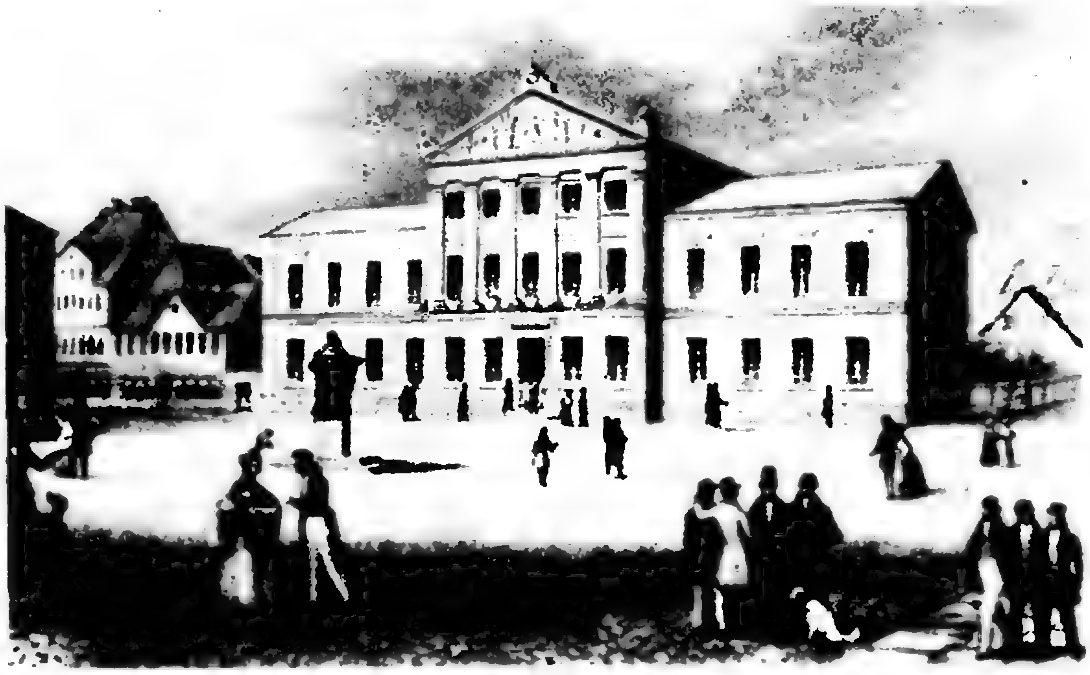
Теперь судьба Гаусса была решена: ни о какой филологии речь уже не шла. Он будет Математиком! На склоне лет Гаусс вспоминал, как бурлили в это время в его голове идеи. Он едва успевал делать отрывочные записи о том, чем занимается. Гаусс начинает вести дневник. Первая запись в нем датирована 30 марта 1796 г. Она посвящена построению правильного 17-угольника. Вторая (от 8 апреля) свидетельствует, что ему удалось доказать квадратичный закон взаимности. Из дневника мы узнаем, что великий математик продолжает учиться, аккуратно проделывая «студенческие» упражнения.

В 1798 г. Гаусс заканчивает университет и отправляется в родной Брауншвейг, чтобы записать свои

---

*) См. статью «Дебют Гаусса» («Квант», 1972, № 1).

**) Здесь и ниже речь идет о комплексных корнях. Комплексные числа — расширение множества действительных чисел, введенное для того, чтобы любое квадратное уравнение имело корни. О комплексных числах можно прочитать, например, в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М., изд-во «Просвещение», 1967).



Геттингенский университет (совр. гравюра).

результаты по теории чисел. На эту работу ушло четыре напряженных года. В 1801 г. вышли знаменитые «Арифметические исследования» Гаусса. Эта огромная книга (более 500 страниц крупного формата) содержит основные результаты Гаусса: квадратичный закон взаимности, задачу деления круга, вопрос о представимости целых чисел в виде $am^2 + bmn + cn^2$ (в частности, в виде суммы квадратов). Книга была издана на средства герцога и ему посвящена. В изданном виде книга состояла из семи частей. На восьмую часть денег не хватило. В этой части речь должна была идти об обобщении квадратичного закона взаимности на степени выше второй, в частности — о биквадратичном законе взаимности. Полное доказательство биквадратичного закона Гаусс нашел лишь 23 октября 1813 г., причем в дневнике он отметил, что это совпало с рождением сына.

За пределами «Арифметических исследований» Гаусс по существу теорией чисел больше не занимался. Он лишь продумывал и доделывал то, что было задумано в те годы. Например, он придумал еще шесть разных доказательств квадратичного закона взаимности. «Арифметические исследования» сильно опередили свое время. В процессе их создания Гаусс не имел серьезных математических контактов, а вышедшая книга долго не была доступна никому из немецких математиков. Во Франции, где можно было рассчитывать на интерес Лагранжа, Лежандра и др., книге не повезло: обанкротился книготорговец, который должен был распространять книгу, и большая часть тиража пропала. В результате ученикам Гаусса приходилось позднее переписывать отрывки из книги от руки. Положение в Германии стало меняться лишь в сороковых годах, когда Дирихле основательно изучил «Исследования» и читал по ним лекции. А в Казань — к Бартельсу и его ученикам — книга попала в 1807 г.

«Арифметические исследования» оказали огромное влияние на дальнейшее развитие теории чисел и алгебры. Отталкиваясь от работы Гаусса о делении круга, Галуа пришел к решению вопроса о разрешимости уравнений в радикалах *). Законы взаимности до сих пор занимают одно из центральных мест в алгебраической теории чисел.

---

*) См. статью Н. Виленкина и В. Лишевского «Эварист Галуа» («Квант», 1973, № 10).

Молодой Гаусс. (1803 г.).

Гельмштадтская диссертация

В Брауншвейге Гаусс не имел литературы, необходимой для работы над «Арифметическими исследованиями». Поэтому он часто ездил в соседний Гельмштадт, где была хорошая библиотека. Здесь в 1798 г. Гаусс подготовил диссертацию, посвященную доказательству *Основной теоремы алгебры* — утверждения о том, что всякий многочлен с комплексными (в частности — с действительными) коэффициентами имеет комплексный корень (если хотеть оставаться в области действительных чисел, то Основную теорему алгебры можно сформулировать так: всякий многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов первой и второй степени). Гаусс критически разбирает все предшествующие попытки доказательства и с большой тщательностью проводит идею Даламбера. Безупречного доказательства все же не получилось, так как не хватало строгой теории непрерывности. В дальнейшем Гаусс придумал еще три доказательства Основной теоремы (последний раз — в 1848 г.).

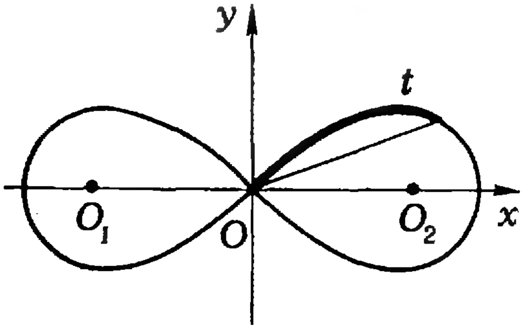


Рис. 1.

Лемниската и арифметико-геометрическое среднее

Расскажем еще об одной линии в работах Гаусса, начавшейся в детстве.

В 1791 г., когда Гауссу было 14 лет, его занимала следующая игра. Он брал два числа a_0, b_0 и строил для них среднее арифметическое $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ и среднее геометрическое $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$. Затем он вычислял средние от a_1, b_1: $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$ и т. д. Гаусс вычислял обе последовательности с большим числом знаков. Очень скоро он уже не мог различить a_n и b_n — все вычисленные знаки совпадали. Другими словами, обе последовательности быстро стремились к общему пределу $M(a_0, b_0)$ (называемому *арифметико-геометрическим средним*).

В те же годы Гаусс много возился с кривой, называемой *лемнискатой* (или *лемнискатой Бернулли*), — множеством точек, произведение расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек O_1, O_2 (*фокусов*) постоянно и равно $\left(\frac{1}{2}|O_1O_2|\right)^2$ (рис. 1). К систематическому изучению лемнискаты Гаусс перешел в 1797 г. Он долго пытается найти длину лемнискаты, пока не догадывается, что она равна $\frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 2)} |O_1 O_2|$. Мы не знаем, как Гаусс сообразил это, но знаем, что было это 30 мая 1799 года и что, не имея вначале доказательства, он сосчитал обе величины с одиннадцатью (!) десятичными знаками. Гаусс придумал для лемнискаты функции, аналогичные тригонометрическим функциям для окружности. Например, для лемнискаты, расстояние между фокусами которой равно $\sqrt{2}$, *лемнискатный синус* sl (t) — это просто длина хорды, соответствующей дуге длины t (рис. 1). Последние годы XVIII столетия у Гаусса уходят на построение теории лемнискатных функций. Для них были получены теоремы сложения и приведения, аналогичные теоремам для тригонометрических функций.

От лемнискатных функций Гаусс переходит к их обобщению — эллиптическим функциям. Он понимает, что речь идет *«о совершенно новой области анализа»*. После 1800 года Гаусс уже не смог уделять эллиптическим функциям столько времени, сколько было необходимо для доведения теории до состояния, удовлетворяющего его своей полнотой и строгостью. С самого начала он отказался от регулярных публикаций, надеясь опубликовать все разом, как это было с его арифметическими работами. Однако заботы так никогда и не доставили ему необходимого времени.

В 1808 г он пишет своему другу и ученику Шумахеру *«С круговыми и логарифмическими функциями мы умеем теперь обходиться как единожды один, но великолепный золотой родник, хранящий сокровенное высших функций, остается пока почти terra incognita* *) *Я очень много работил над этим прежде и со временем дам собственный большой труд об этом, на что я намекил еще в моих «Арифметических исследованиях» Приходишь в изумление от чрезвычайного богатства новых и в высшей степени интересных истин и соотношений, доставляемых этими функциями»*

Гаусс считал, что может не торопиться с публикацией своих результатов. Тридцать лет так и было Но в 1827 г. сразу два молодых математика — Абель и Якоби — опубликовали многое из того, что было им получено.

«Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать Она будет представлять исчерпывающий труд на эту тему, если только небесам будет угодно продлить мою жизнь и даровать мне силы и душевный покой» (письмо Шумахеру)

«Господин Абель предвосхитил многие мои мысли и примерно на треть облегчил мою задачу, изложив результаты с большой строгостью и изяществом Абель шел тем же путем, что и я в 1798 году, поэтому нет ничего невероятного в том, что мы получили столь похожие результаты К моему удивлению, это сходство распространяется даже на форму, и местами и на обозначения, поэтому многие его формулы кажутся списанными с моих Но чтобы никто не понял меня неправильно, я должен добавить, что не помню ни одного случая, когда я говорил об этих исследованиях с кем-нибудь из посторонних» (письмо Бесселю)

Наконец, в письме Креллю *«Поскольку Абель продемонстрировал такую проницательность и такое изящество в вопросах изложения, я чувствую, что могу совершенно отказаться от опубликования полученных мной результатов»* (май 1828 г)

Следует отметить, что замечание Гаусса в «Арифметических исследованиях» о том, что теорию деления круга можно перенести на лемнискату, оказало большое влияние на Абеля *«Я долго размышлял над всеми этими вопросами, и мне в конце концов удилось приподнять завесу таинственности, окружавшую до сих пор теорию деления круга, созданную Гауссом Теперь ход его рассуждений ясен мне как божий день»*

С наступлением нового века научные интересы Гаусса решительно сместились в сторону от чистой математики. Он много раз эпизодически будет обращаться к ней и каждый раз получать результаты, достойные гения. В 1812 г. он опубликовал работу о гипергеометрической функции. (Эта функция зависит от трех параметров. Придавая им конкретные значения, можно получить большинство функций, встречающихся в математической физике.) Широко известна заслуга Гаусса в геометрической интерпретации комплексных чисел. О его геометрических работах мы расскажем ниже. Однако никогда математика уже не будет главным делом его жизни. Характерный внешний штрих: в 1801 г. Гаусс прекращает регулярно вести дневник (хотя отдельные записи появляются до 1814 г.). Мы редко отдаем себе отчет, как короток был «математический век» Гаусса — менее 10 лет. При этом бо́льшую часть времени заняли работы, оставшиеся неизвестными современникам (эллиптические функции).

Малые планеты

Расскажем теперь о новом увлечении Гаусса. Биографы много спорили о причинах, по которым Гаусс начал заниматься астрономией.

---

*) Неизведанная область (лат)

Прежде всего надо иметь в виду, что, начиная с работ Кеплера, Галилея и Ньютона, астрономия была наиболее ярким местом приложения математики. Эта традиция была продолжена в трудах Эйлера, Даламбера, Клеро, Лагранжа, Лапласа. Предсказывая и объясняя небесные явления, математики чувствовали себя как бы допущенными к тайнам мироздания. Гаусс, с его ранним интересом к конкретным вычислениям, не мог, конечно, не попробовать своих сил на этом традиционном поприще.

Впрочем, были причины и прозаические. Гаусс занимал скромное положение приват-доцента в Брауншвейге, получая 6 талеров в месяц. Пенсия в 400 талеров от герцога-покровителя не настолько улучшила его положение, чтобы он мог содержать семью, а он подумывал о женитьбе. Получить где-нибудь кафедру по математике было не просто, да Гаусс и не очень стремился к активной преподавательской деятельности. Расширяющаяся сеть обсерваторий делала карьеру астронома более доступной.

Гаусс начал интересоваться астрономией еще в Геттингене. Кое-какие наблюдения он проводил в Брауншвейге, причем часть герцогской пенсии он израсходовал на покупку секстанта. Он ищет достойную вычислительную задачу, решая пока мелкие задачи. Так, он публикует простой способ вычисления времени Пасхи и других циклических праздников вместо чрезвычайно путанных рецептов, которыми пользовались раньше. Мысль о настоящей задаче появилась в 1801 г. при следующих обстоятельствах.

1 января 1801 г. астроном Пиацци, составлявший звездный каталог, обнаружил неизвестную звезду 8-й звездной величины. Пронаблюдав за ней 40 дней, Пиацци обратился к крупнейшим астрономам с просьбой продолжить наблюдения. По разным причинам его просьба не была выполнена. В июне эти сведения дошли до Цаха, издававшего единственный в то время астрономический журнал. Цах высказал гипотезу, что речь идет *«о давно подозреваемой между Марсом и Юпитером, а теперь, по-видимому, открытой, новой большой планете»*. Гипотеза Цаха показалась правдоподобной, и надо было срочно искать «потерянную» планету. А для этого надо было вычислить ее траекторию. Определить эллиптическую траекторию по дуге в 9°, которую знал Пиацци, было за пределами вычислительных возможностей астрономов. В сентябре 1801 г., оставив все свои дела, вычислением орбиты занялся Гаусс. В ноябре вычисления были закончены. В декабрьском номере журнала Цаха они были опубликованы, а в ночь с 31 декабря на 1 января — ровно через год после наблюдений Пиацци — известный немецкий астроном Ольберс, основываясь на траектории, вычисленной Гауссом, нашел планету (ее назвали Цирерой). Это была подлинная сенсация!

25 марта 1802 г. Ольберс открывает еще одну планету — Палладу. Гаусс быстро вычисляет ее орбиту, показав, что и она располагается между Марсом и Юпитером. Действенность вычислительных методов Гаусса стала для астрономов несомненной.

К Гауссу приходит признание. Одним из признаков этого было избрание его членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Вскоре его пригласили занять место директора Петербургской обсерватории. Гаусс пишет, что ему лестно получить приглашение в город, где работал Эйлер, и серьезно думает о переезде. В письмах Гаусс пишет, что в Петербурге часто плохая погода, а потому он не будет слишком занят наблюдениями, и будет оставаться время для занятий. Он пишет также, что 1000 рублей, которые он будет получать, больше 400 талеров, которые он имеет сейчас, но жизнь в Петербурге дороже.

В то же время Ольберс предпринимает усилия, чтобы сохранить Гаусса для Германии. Еще в 1802 г. он предлагает куратору Геттингенского университета пригласить Гаусса на пост директора вновь организованной обсерватории. Ольберс пишет при этом, что Гаусс *«к кафедре математики имеет положительное отвращение»*. Согласие было дано, но переезд состоялся лишь в конце 1807 г.

За это время Гаусс женился (*«жизнь представляется мне весной со всегда новыми яркими цветами»*). В 1806 г. умирает от ран герцог, к которому Гаусс, по-видимому, был искренне привязан. Теперь ничто не удерживает его в Брауншвейге.

Жизнь Гаусса в Геттингене складывалась не сладко. В 1809 г. после рождения сына умерла жена, а затем и сам ребенок. Вдобавок Наполеон обложил Геттинген тяжелой контрибуцией. Сам Гаусс должен был заплатить непосильный налог в 2000 франков. За него попытались внести деньги Ольберс и, прямо в Париже, Лаплас. Оба раза Гаусс гордо отказался. Однако нашелся еще один благодетель, на этот раз — аноним, и деньги возвращать было некому (много позднее узнали, что это был курфюрст Майнцский, друг Гетё). *«Смерть мне милее такой жизни»*, — пишет Гаусс между заметками по теории эллиптических функций. Окружающие не ценили его работ, считали его, по меньшей мере, чудаком. Ольберс успокаивает Гаусса, говоря, что не следует рассчитывать на понимание людей: *«их нужно жалеть и им служить»*.

В 1809 г. выходит законченная в 1807 г. знаменитая «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям». Задержка произошла отчасти из-за опасений издателя, что книга на немецком языке не найдет спроса, а Гаусс из патриотических соображений отказывался печатать книгу по-французски. Компромисс состоял в издании книги на латыни. Это единственная книга Гаусса по астрономии (сверх этого он напечатал несколько статей).

Гаусс излагает свои методы вычисления орбит. Чтобы убедиться в силе своего метода, он повторяет вычисление орбиты кометы 1769 г., которую в свое время за три дня напряженнейшего счета вычислил Эйлер, потерявший после этого зрение. Гауссу на это потребовался час. В книге был изложен метод наименьших квадратов, оставшийся по сей день одним из самых распространенных методов обработки результатов наблюдений. Гаусс указывает, что он знает этот метод с 1794 г., а с 1802 г. систематически им пользуется. (За два года до выхода «Теории движения» Гаусса метод наименьших квадратов был опубликован Лежандром.)

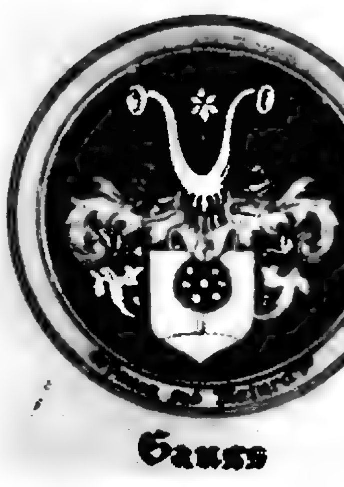
На 1810 г. пришлось большое число почестей: Гаусс получил премию Парижской академии наук и Золотую медаль Лондонского королевского общества, был избран в несколько академий.

В 1804 г. Парижская академия выбрала в качестве темы для большой премии (золотая медаль весом 1 кг) теорию возмущений Паллады. Срок дважды переносился (до 1816 г.) в надежде, что Гаусс представит работу. Гауссу помогал в вычислениях его ученик Николаи (*«юноша, неутомимый в вычислениях»*), и все же вычисления не были доведены до конца. Гаусс прервал их, находясь в тяжелой депрессии.

Регулярные занятия астрономией продолжались почти до самой смерти. Знаменитую комету 1812 г. (которая «предвещала» пожар Москвы!) всюду наблюдали, пользуясь вычислениями Гаусса. 28 августа 1851 года Гаусс наблюдал солнечное затмение. У Гаусса было много учеников-астрономов (Шумахер, Герлинг, Николаи, Струве). Крупнейшие немецкие геометры Мёбиус и Штаудт учились у него не геометрии, а астрономии. Он состоял в активной переписке со многими астрономами, регулярно читал статьи и книги по астрономии, печатал рецензии. Из писем астрономам мы многое узнаем и о занятиях математикой. Как не похож облик Гаусса-астронома на представление о недоступном отшельнике, существовавшее у математиков!

Геодезия

К 1820 г. центр практических интересов Гаусса переместился в геодезию. Еще в начале века он пытался воспользоваться результатами измерений дуги меридиана, предпринятых французскими геодезистами для установления эталона длины (метра), чтобы найти истинное сжатие Земли. Но дуга оказалась слишком мала. Гаусс



Надпись на гербе Гаусса гласит «Немного, но зрело».

мечтал провести измерение достаточно большой дуги меридиана. К этой работе он смог приступить только в 1820 г. Хотя измерения растянулись на два десятилетия, Гаусс не смог осуществить свой замысел в полном объеме. Большое значение имели полученные в связи с геодезией исследования по обработке результатов измерений (к этому времени относятся основные публикации о методе наименьших квадратов) и различные геометрические результаты, связанные с необходимостью проводить измерения на поверхности эллипсоида.

В 20-е годы обсуждался вопрос о переезде Гаусса в Берлин, где он должен был стать во главе института. Сюда должны были быть приглашены наиболее перспективные молодые математики, прежде всего Якоби и Абель. Переговоры затянулись на четыре года; разногласия были по поводу того, должен ли Гаусс читать лекции, и сколько ему должны платить в год — 1200 или 2000 талеров. Переговоры окончились безрезультатно. Впрочем, не совсем: в Геттингене Гауссу стали платить то жалование, на которое он претендовал в Берлине.

Внутренняя геометрия поверхностей

Геодезии мы обязаны тем, что на сравнительно короткое время математика вновь стала одним из главных дел Гаусса. В 1816 г. он думает об обобщении основной задачи картографии — задачи от отображении одной поверхности на другую *«так, чтобы отображение было подобно отображаемому в мельчайших деталях»*. Гаусс посоветовал Шумахеру выбрать этот вопрос при объявлении конкурса на премию Копенгагенского научного общества. Конкурс был объявлен в 1822 г. В том же году Гаусс представил свой мемуар, в котором вводятся характеристики, позволяющие полностью решить проблему, частные случаи которой изучались Эйлером и Лагранжем (отображение сферы или поверхности вращения на плоскость). Гаусс подробно описывает выводы из его теории для многочисленных конкретных случаев, часть из которых возникает из задач геодезии.

В 1828 г. вышел в свет основной геометрический мемуар Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях». Мемуар посвящен *внутренней геометрии поверхности*, т. е. тому, что связано со структурой самой этой поверхности, а не с ее положением в пространстве.

Образно говоря, внутренняя геометрия поверхности — это то, что можно узнать о геометрии поверхности «не покидая ее»[*]. На поверхности можно измерять длины, натягивая нить так, чтобы она целиком лежала на поверхности. Возникающая кривая называется *геодезической* (аналог прямой на плоскости). Можно измерять углы между геодезическими, изучать геодезические треугольники и многоугольники. Если мы будем изгибать поверхность (считая ее нерастяжимой и неразрываемой пленкой), то расстояния между точками будут сохраняться, геодезические будут оставаться геодезическими и т. д.

Оказывается, «не покидая поверхности», можно узнать, кривая она или нет. «Настоящую» кривую поверхность ни при каком изгибании нельзя развернуть на плоскость. Гаусс предложил числовую характеристику меры искривления поверхности.

Рассмотрим около точки A на поверхности окрестность площади ε. В каждой точке этой окрестности проведем *нормаль* (перпендикуляр к поверхности) единичной длины. Для плоскости все нормали будут параллельны, а для кривой поверхности будут расходиться. Перенесем нормали так, чтобы их начала оказались в одной точке. Тогда концы нормалей заполнят некоторую фигуру на единичной сфере. Пусть $\varphi(\varepsilon)$ — площадь этой фигуры. Тогда $k(A) =$

---

[*] См. статью В. Ефремовича «Пространство и внутренняя геометрия поверхностей» («Квант», 1977, № 1).

Гаусс в старости.

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}$ дает меру кривизны поверхности в точке A. Оказывается, ни при каком изгибании $k(A)$ не меняется. Для того чтобы кусок поверхности можно было развернуть на плоскость, необходимо, чтобы во всех точках A этого куска было $k(A)=0$. Мера кривизны связана с суммой углов геодезического треугольника.

Гаусс интересуется поверхностями постоянной кривизны. Сфера является поверхностью постоянной положительной кривизны (во всех ее точках $k(A)=\frac{1}{R}$, где R — радиус). В черновых записях Гаусса упоминается поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны. Потом ее назовут *псевдосферой*, и Бельтрами обнаружит, что ее внутренняя геометрия есть геометрия Лобачевского.

Неевклидова геометрия

По некоторым сведениям Гаусс интересовался постулатом о параллельных еще в Брауншвейге в 1792 г. В Геттингене он много обсуждал проблему параллельных со студентом из Венгрии Фаркашем Бойяи. Из письма 1799 г., адресованного Ф. Бойяи, мы узнаем, насколько ясно понимает Гаусс, что имеются многочисленные утверждения, приняв которые, можно доказать пятый постулат: «*Я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство*». И вместе с тем: «*Однако дорога, которую я выбрал, ведет скорее не к желательной цели, а к тому, чтобы сделать сомнительной истинность геометрии*». Отсюда до понимания возможности неевклидовой геометрии один шаг, но он все-таки еще не был сделан, хотя эта фраза часто ошибочно воспринимается как свидетельство того, что Гаусс пришел к неевклидовой геометрии уже в 1799 г.

Заслуживают внимания слова Гаусса, что он не имеет возможности уделить достаточно времени этим вопросам. Характерно, что о проблеме параллельных нет ничего в дневнике. По-видимому, она никогда не находилась в центре внимания Гаусса. В 1804 г. Гаусс опровергает попытки Ф. Бойяи доказать постулат о параллельных. Письмо заканчивается так: «*Однако я еще надеюсь на то, что некогда, и еще до моего конца, эти подводные камни позволят перебраться через них*». Похоже, что эти слова означают надежду, что доказательство будет найдено.

Вот еще несколько свидетельств: «*В теории параллельных мы до сих пор не опередили Евклида. Это позорная часть математики, которая, рано или поздно, должна принять совершенно другой вид*» (1813 г.). «*Мы не продвинулись дальше того места, где был Евклид 2000 лет назад*» (1816 г.). Однако в том же 1816 г. он говорит о «*пробеле, который нельзя заполнить*», а в 1817 г. в письме Ольберсу мы читаем: «*Я все больше прихожу к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом и для человеческого ума. Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию следует ставить в ряд не с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой*».

Примерно в то же время к мысли о невозможности доказать пятый постулат пришел юрист из Кенигсберга Швейкарт. Он предположил, что наряду с евклидовой геометрией существует «астральная геометрия», в которой постулат о параллельных не имеет места. Работавший в Кенигсберге ученик Гаусса Герлинг написал учителю о мыслях Швейкарта и приложил заметку последнего. В ответе Гаусс пишет: «*Почти все списано с моей души*». Деятельность Швейкарта продолжил его племянник Тауринус, с которым Гаусс обменялся несколькими письмами, начиная с 1824 г.

В письмах Гаусс подчеркивает, что его высказывания носят сугубо частный характер и их ни в коем случае не следует придавать гласности. Он не верит, что эти идеи могут быть восприняты, и боится заинтересованности толпы дилетантов. Гаусс пережил немало тяжелых лет и очень дорожит возможностью спокойно работать. Он предупреждает Герлинга, который собирался лишь упомянуть, что постулат о параллельных может оказаться неверен: *«Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, поднимутся над Вашей головой»*. Постепенно зреет решение записать результаты, но не публиковать их: *«Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев*), который поднимется, если я выскажу свои воззрения целиком»* (письмо Бесселю 1829 г.). В мае 1831 г. Гаусс начинает систематические записи. *«Вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собственных размышлений об этом предмете, частично имеющих уже 40-летнюю давность, но никогда мною не записанных, вследствие чего я должен был 3 или 4 раза возобновлять весь труд в моей голове. Мне не хотелось бы, однако, чтобы это погибло вместе со мной»* (письмо Шумахеру).

Однако в 1832 г. он получил от Фаркаша Бойяи небольшое сочинение его сына Яноша «Аппендикс» (название связано с тем, что оно было издано в виде приложения к большой книге отца). *«Мой сын ставит на твое суждение больше, чем на суждение всей Европы»*. Содержание книги поразило Гаусса: в ней полно и систематически строилась неевклидова геометрия. Это были не отрывочные замечания и догадки Швейкарта — Тауринуса. Такое изложение собирался получить сам Гаусс в ближайшее время. Он пишет Герлингу: *«...я нашел все мои собственные идеи и результаты, развитые с большим изяществом, хотя, вследствие сжатости изложения, в форме, трудно доступной тому, кому чужда эта область... Я считаю, что этот юный геометр Бойяи — гений первой величины»*. А вот, что написано отцу: *«...все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, — почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен. Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать... я имел намерение..., чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому чрезвычайно поражен случившимся — оно освобождает меня от этой необходимости; и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил»*. Никакой публичной оценки или поддержки Янош Бойяи от Гаусса не получил. По-видимому, одновременно Гаусс прервал систематические записи по неевклидовой геометрии, хотя сохранились эпизодические заметки, относящиеся к 40-м годам.

В 1841 г. Гаусс познакомился с немецким изданием работы Лобачевского (первые публикации Лобачевского относятся к 1829 г.). Верный себе, Гаусс интересуется другими публикациями автора, ограничиваясь высказываниями о нем в переписке с близкими корреспондентами. Впрочем, по предложению Гаусса, в 1842 г. Лобачевского, «как одного из превосходнейших математиков русского государства», избрали членом-корреспондентом Геттингенского ученого королевского общества. Гаусс лично известил Лобачевского об избрании. Однако ни в представлении Гаусса, ни в дипломе, выданном Лобачевскому, неевклидова геометрия не упоминалась.

О работах Гаусса по неевклидовой геометрии узнали лишь при публикации посмертного архива. Так Гаусс обеспечил себе возможность спокойно работать отказом обнародовать свое великое открытие, вызвав несмолкающие по сей день споры о допустимости занятой им позиции.

Следует отметить, что Гаусса интересует не только чисто логический вопрос о доказуемости постулата о параллельных. Его интересует место геометрии в естественных науках, вопрос об истинной геометрии нашего физического мира (см. выше высказывание 1817 г.). Он обсуждает возможность астрономической проверки, с интересом отзываясь о соображениях по этому поводу Лобачевского. При занятиях геодезией Гаусс не удержался от измерения суммы углов треугольника с вершинами Высокий Гаген, Брокен, Инсельберг. Отклонение от 2π не превысило 0,2′.

Электродинамика и земной магнетизм

К концу 20-х годов Гаусс, перешедший 50-летний рубеж, начинает поиски новых для себя областей научной деятельности. Об этом свидетельствуют две публикации 1829 и 1830 гг. Первая из них несет печать размышлений об общих принципах механики (здесь строится «принцип наименьшего принуждения» Гаусса); другая посвящена изучению капиллярных явлений. Гаусс решает заниматься физикой, но его узкие интересы еще не определились. В 1831 г. он пытается заниматься кристаллографией. Это очень трудный год в

---

*) По преданию жители Беотии славились в Древней Греции своей глупостью.

жизни Гаусса: умирает его вторая жена, у него начинается тяжелейшая бессонница. В этом же году в Геттинген приезжает приглашенный по инициативе Гаусса 27-летний физик Вильгельм Вебер. Гаусс познакомился с ним в 1828 г. в доме Гумбольдта. Гауссу было 54 года; о его замкнутости ходили легенды, и все же в Вебере он нашел сотоварища по занятиям наукой, какого он никогда не имел прежде.

«Внутреннее различие этих людей достаточно выражалось также и в их внешнем облике. Гаусс — приземистый, крепкого телосложения, настоящий представитель Нижней Саксонии, малоразговорчивый и замкнутый в себе. Своеобразной противоположностью ему является небольшой, изящный, подвижный Вебер, чрезвычайная любезность и разговорчивость которого сразу же обнаруживали коренного саксонца; он был действительно родом из Виттенберга, этой страны «саксонцев в квадрате». На геттингенском памятнике Гауссу и Веберу эта противоположность их художественных соображений смягчена и даже по возрасту они кажутся более близкими, чем это было в действительности». (Клейн)

Интересы Гаусса и Вебера лежали в области электродинамики и земного магнетизма. Их деятельность имела не только теоретические, но и практические результаты. В 1833 г. они изобретают электромагнитный телеграф (это событие запечатлено в их общем памятнике). Первый телеграф связывал обсерваторию и физический институт. По финансовым причинам внедрить телеграф в жизнь его создателям не удалось.

В процессе занятий магнетизмом Гаусс пришел к выводу, что системы физических единиц надо строить, вводя некоторые количество независимых величин и выражая остальные величины через них.

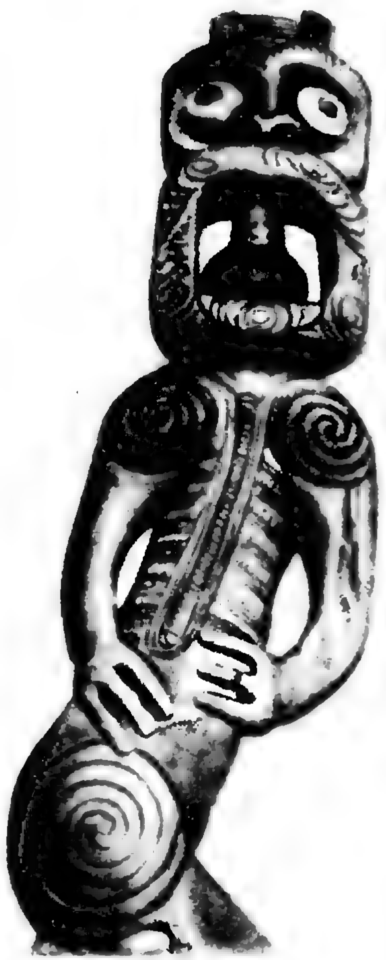
Изучение земного магнетизма опиралось как на наблюдения в магнитной обсерватории, созданной в Геттингене, так и на материалы, которые собирались в разных странах «Союзом для наблюдения над земным магнетизмом», созданным Гумбольдтом после возвращения из Южной Америки. В это же время Гаусс создает одну из важнейших глав математической физики — теорию потенциала.

Совместные занятия Гаусса и Вебера были прерваны в 1843 г., когда Вебера вместе с шестью другими видными профессорами изгнали из Геттингена за подписание письма королю, в котором указывались нарушения последним конституции (Гаусс не подписал письма). Возвратился в Геттинген Вебер лишь в 1849 г., когда Гауссу было уже 72 года.

* * *

Мы закончим наш рассказ о Гауссе словами Клейна: «*Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского горного хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, глядящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины подымаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь*».

Портрет Гаусса на с. 2 прислан профессором К. Р. Бирманом из ГДР.



Л. Алексеева

Вихри, которые «делают погоду»

> *«...символические спирали, как бы олицетворяющие грозный атмосферный вихрь, можно встретить на изображениях идолов и божеств, дошедших до нас со времени древних цивилизаций.*
> *...Идол с берегов Океании — бог бурь у племени маори в Новой Зеландии — тоже украшен многочисленными спиралями.»*
>
> Н. Ситников. «Бетси, Камилла и другие...»

Удивительное это образование — вихрь! От других потоков однородной жидкости или газа он отличается только характером движения, включающим вращение вокруг внутренней оси. Но, по сравнению с другими потоками, вихрь обладает замечательной целостностью, устойчивостью и долгоживучестью (см. «Квант» № 4, 1971 г.)

Высоко под потолок летят вихревые дымные кольца, выпущенные курильщиком, тогда как дым от его папиросы, едва поднявшись, разбивается на струйки, перемешивается с воздухом и расплывается. Классические опыты с большими вихревыми кольцами, которые со стуком ударялись о стену лаборатории, описаны в статье американского физика-экспериментатора Р. Вуда (см. «Квант» № 12, 1971 г.).

В природе вихри возникают во множестве. Они появляются в той части потока, где скорость быстро меняется в направлении, перпендикулярном потоку. Каждому случалось видеть вихри в быстрой реке на переходе от быстрины к замедленному течению у берега. Целая цепочка вихрей может тянуться за движущимся предметом, скажем, автомобилем. Их особенно удобно наблюдать на шоссе в метельные дни, когда машина обдувается крепким встречным ветром, а хлопья снега проявляют движение прозрачного воздуха. Такие же вихри появляются при обтекании препятствий.

Вихревой характер сильного ветра был замечен в 1821 г. У. Рэдфилдом, содержателем небольшого магазина в штате Коннектикут (США), который, объезжая после шторма районы штата, обратил внимание на поваленные ветром деревья. В одном месте деревья лежали макушками к северо-западу, тогда как на некотором расстоянии макушки указывали прямо противоположное направление. Отсюда У. Рэдфилд сделал вывод, что шторм представлял собой вращательную систему ветров. Беседуя с моряками и анализируя судовые журналы, он установил направление вращения крупных вихрей и нашел траектории их центров. В 1831 г. вышел труд У. Рэдфилда, излагающий результаты его исследований. Близкие взгляды высказывал немецкий ученый В. Дове. В эти же годы были построены первые ветровые карты.

Вообще, вихревые движения характерны для атмосферы Земли. Однако далеко не все вихри «делают погоду». Погода на земном шаре в сильной степени зависит от присутствия гигантских атмосферных вихрей-циклонов и антициклонов, задающих ветровой режим в данном районе Земли.

В вихревой системе, называемой циклоном (рис. 1), атмосферное давление понижается от периферии к центру. Поэтому вблизи поверхности Земли воздушные течения направлены к центру циклона. Все циклоны имеют вращательную составляющую скорости ветра. В Северном полушарии она направлена против часовой стрелки, в Южном — по часовой. В развивающихся циклонах (т. е. таких, у которых давление в центре продолжает падать) наблюдаются восходящие потоки. При этом образуется мощная облачность и выпадают осадки.

Последние два свойства циклона очевидно связаны между собой. В самом деле, выделим мысленно некоторый объем воздуха и посмотрим, что произойдет при его подъеме. Попадая в более разреженные слои атмосферы, этот объем расширяется, температура воздуха внутри него падает, и содержащийся в нем водяной пар конденсируется.

Направление вращения циклонов в различных полушариях можно объяснить закручивающим действием силы Кориолиса (подробнее см. «Квант» № 2, 1975 г.), связанной с суточным вращением Земли. Напомним известный факт, что отклоняющее действие этой силы заставляет реки подмывать свои правые берега. Воздушный поток не удерживается берегом, и поэтому при своем движении к центру он будет отклоняться вправо, если смотреть в сторону центра, т. е. против часовой стрелки при взгляде сверху.

Заметим, что возле самого экватора в полосе широт $\leq 5^\circ$ по обе стороны мощные вихри не образуются. Этот факт хорошо вяжется с приведенным объяснением, поскольку на экваторе горизонтальная составляющая силы Кориолиса равна нулю.

В вихревой системе антициклона все наоборот: давление возрастает, достигая максимума в центре вихря. В развивающемся антициклоне присутствуют нисходящие потоки. Опускаясь, газ нагревается и удаляется от состояния насыщения водяным паром. Поэтому для антициклона характерна ясная малооблачная погода. Антициклоны вращаются по часовой стрелке в Северном полушарии и против часовой стрелки в Южном. Направление вращения антициклона объясняется также закручивающим действием силы Кориолиса.

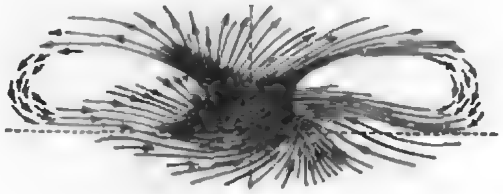


Рис. 1. Стрелками указаны направления ветров в циклоне.

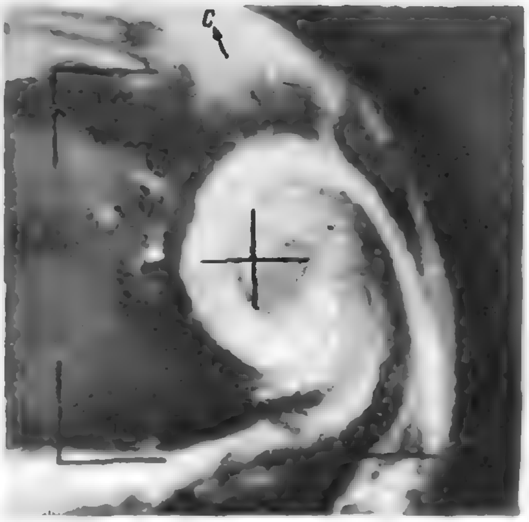


Рис. 2.

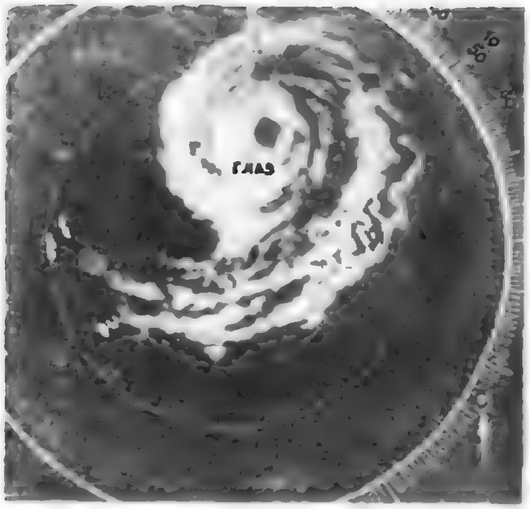


Рис. 3

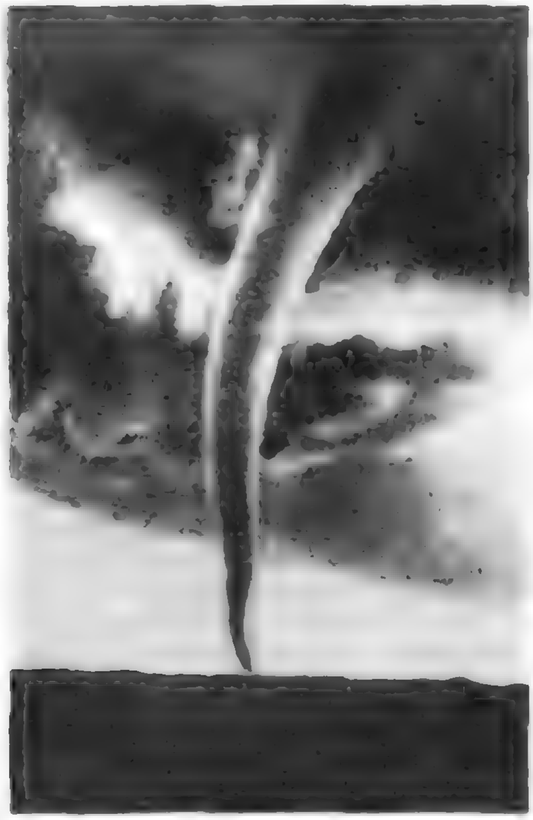


Рис. 4.

В зависимости от места зарождения циклоны делят на тропические и *внетропические*.

Рисунки 2 и 3 представляют вид сверху, соответственно, внетропического и тропического циклонов. Внетропический циклон (называемый иногда просто циклоном) — это самый крупный атмосферный вихрь, достигающий нескольких тысяч километров в поперечнике. Высота его колеблется между 2—4 и 15—20 *км*. Скорость ветра в нем в большинстве случаев не превосходит 40—70 *км/час*.

Поперечный размер тропического циклона (называемого также ураганом, тропическим ураганом, тайфуном и пр.) значительно меньше — всего несколько сот километров, высота его — до 12—15 *км*. Давление в ураганах падает намного ниже, чем во внетропическом циклоне. При этом скорость ветра достигает 400—600 *км/час*.

Самые большие скорости ветра в урагане наблюдаются вокруг так называемого «глаза бури» — зоны покоя в центральной части урагана. Черное пятно правильной формы на рисунке 3 — это и есть глаз бури. Выразительное описание глаза урагана дает очевидец, пролетевший через тайфун на самолете метеослужбы — французский журналист П. А. Молэн, автор книги «Охотники за тайфунами».

«Мы летим на высоте 3 *км* в колодце диаметром 22 *км*, в котором плавает несколько перистых облаков, мирных, как игрушки. Стены этого колодца представляет недвижимая буря, удерживаемая таинственной причиной. Она наполнена кипящими облаками, охваченными жесточайшими конвульсиями. Когда самолет кренится на виражах, глаза поднимаются к верхушке стены, выходу из этого колодца в 15 *км* над нами. И перед нашим удивленным взором развертываются эти кипящие стены, эта гигантская бездна, это крупное отверстие, которое и заставило назвать все явление «глазом тайфуна»».

Заметим, что внетропические циклоны «глазом» не обладают.

Еще четче зона покоя (полость) выражена у мелкомасштабных вихрей — смерчей (торнадо, тромбов) (рис. 4). Размеры их очень малы: ширина — от нескольких метров до 2—3 *км*, в среднем 200—400 *м*, высота от нескольких десятков до 1500—2000 *м*, в среднем несколько сот метров. Скорость ветра в смерче иногда превышает звуковую (1200 *км/час*!).

В сердцевине смерча давление падает очень низко, поэтому смерчи

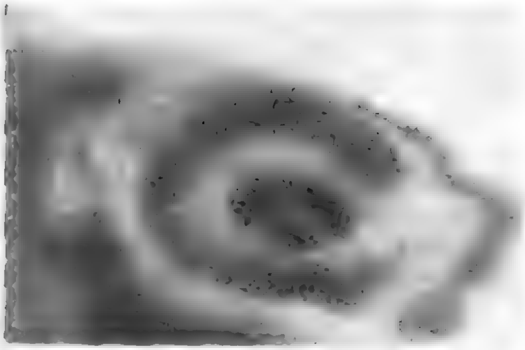


Рис. 5.

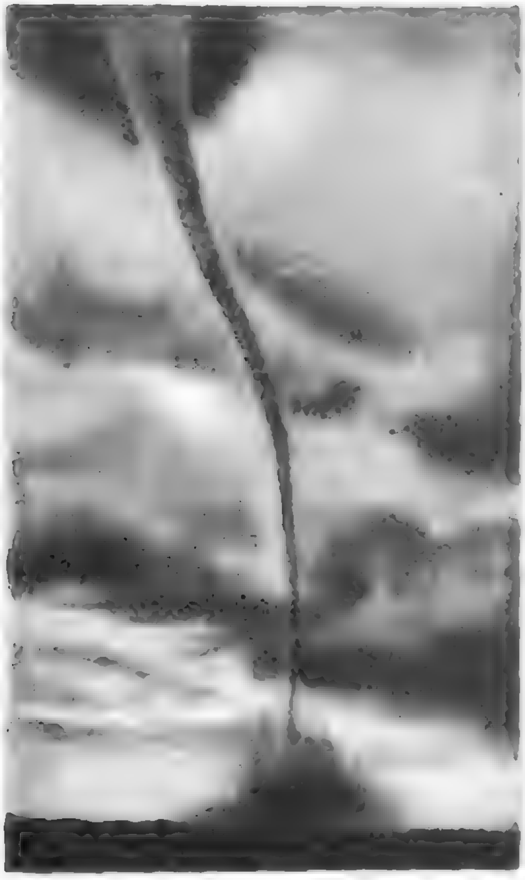


Рис. 6.

«всасывают» в себя различные, иногда очень тяжелые предметы, которые переносят затем на большие расстояния. Люди, оказавшиеся в центре смерча, погибали. Поэтому нет наблюдений его полости изнутри. Но ее видели снизу, когда смерч проходил над головой наблюдателя. Рисунок 5 представляет собой фотографию внутренней полости смерча, снятую снизу.

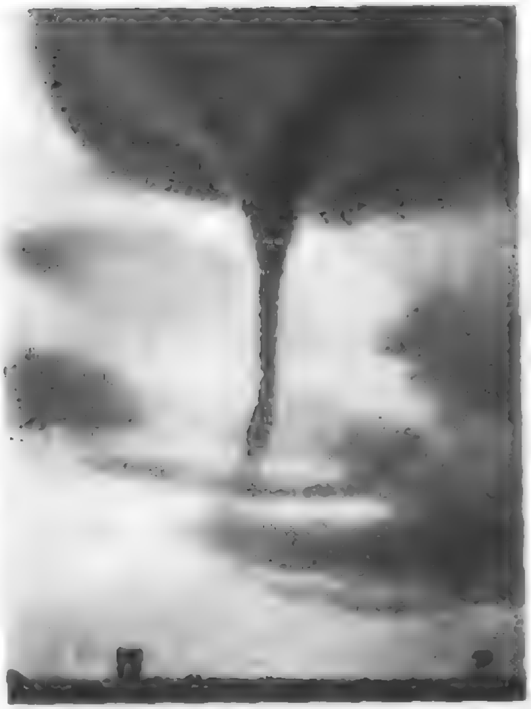


Рис. 7.

По рассказам очевидцев полость смерча похожа на внутренность черного пустого цилиндра, освещенного изнутри блеском молний, проскакивающих между стенами. В некоторых случаях наблюдатели молний не видели.

Однажды нижний край смерча прошел над головой наблюдателя на высоте 6 *м*. Ширина внутренней полости этого смерча была около 130 *м*, тогда как толщина стенки — всего 3 *м*. В середине полости находилось яркое, светящееся голубым светом прозрачное облако. Немного позже, когда смерч уже прошел над наблюдателем, конец его спустился к земле, коснулся соседнего дома и в одно мгновение унес его. Дом распался в воздухе.

Со стороны смерч напоминает столб (рис. 6), воронку (рис. 7) или хобот (рис. 4), свешивающийся из основания мощного грозового облака. Может образоваться сразу группа смерчей (рис. 8). Интересна зарисовка смерча с двумя воронками (рис. 9). В черной туче скрыта горизонтальная часть смерча — вихревое образование, вращающееся вокруг оси, вытянутой параллельно поверхности Земли. Эту часть смерча видел летчик, пролетавший на высоте около 300 *м*. По его словам, она напоминала огром-

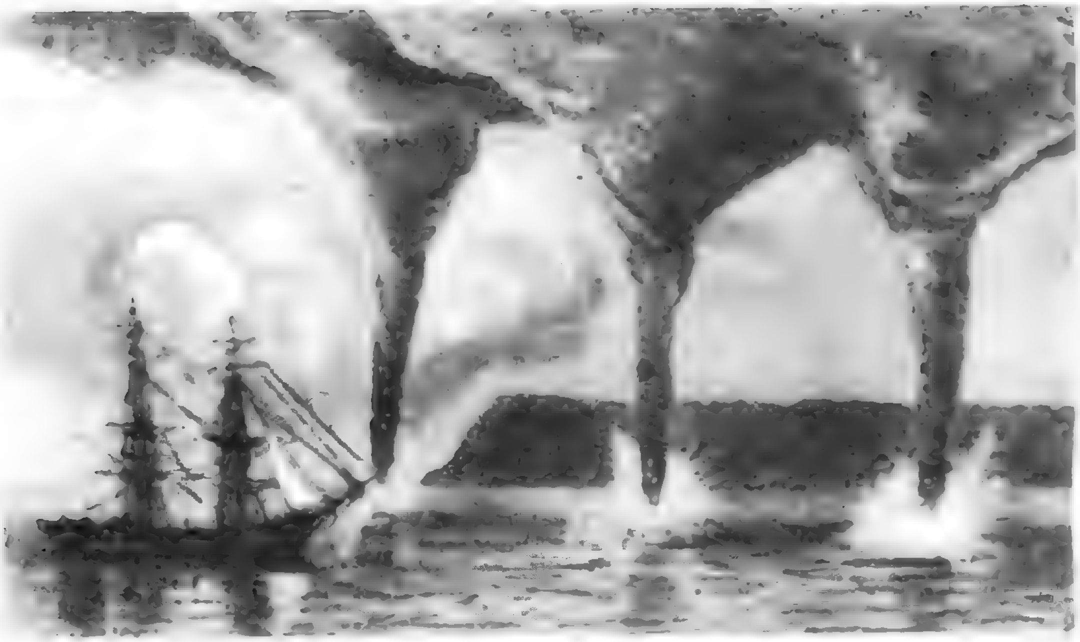


Рис. 8. Зарисовка водяных смерчей 1840 г. в Средиземном море у берегов Алжира.

ную извивающуюся змею. Подобную «змею», переходившую в смерч, наблюдали однажды с Земли. «Змея» была наполнена водой, которую смерч высасывал из озера. Похоже, что горизонтальная часть смерча связана с громадным вихревым кольцом, образующимся иногда в облаках. Появляется она раньше самого смерча.

Смерчи обыкновенно возникают в районах, где соприкасаются воздушные массы с резко отличными тепловыми свойствами, в области мощных вертикальных движений и сходящихся потоков.

Накоплен огромный фактический материал о физических свойствах смерчей (см. книгу Д. В. Наливкина «Ураганы, бури и смерчи»). Например, известно о фантастически больших перепадах скорости ветра в смерче.

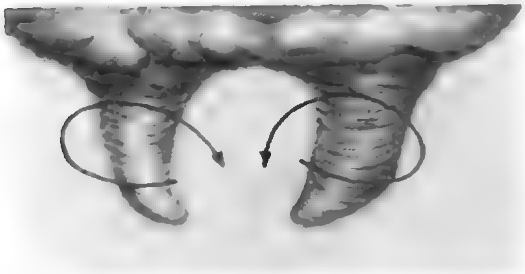


Рис. 9. Зарисовка смерча 1879 г. в Канзасе (США).

Казалось бы, действие сил вязкости (внутреннего трения) должно сглаживать резкость картины. Однако приведем такой пример.

Смерчи часто наблюдаются в равнинных штатах Северной Америки. Проходя через фермы, они разрушают строения, в частности, курятники, разбрасывая их обломки далеко по равнине. На большом расстоянии от фермы находят куски разорванных куриных тушек. Бывали случаи, когда стены и крыши курятника исчезали, а куры оставались на месте, живые или мертвые. Часть кур находят ощипанными: смерч всасывает в себя перья. Возможно, этому помогает следующее обстоятельство: в коже курицы у основания перьев находятся воздушные мешочки, которые могут взрываться, если давление окружающего воздуха упадет достаточно низко. Так или иначе, потерять перья курица может только в том случае, если она находилась в воронке смерча. Но однажды нашли курицу, у которой перья были ощипаны только на одной половине тела. Это значит, что скорость ветра менялась на расстоянии нескольких сантиметров от «ощипывающей» до близкой к нулю.

Удивительна способность смерчей втыкать продолговатые предметы (со-

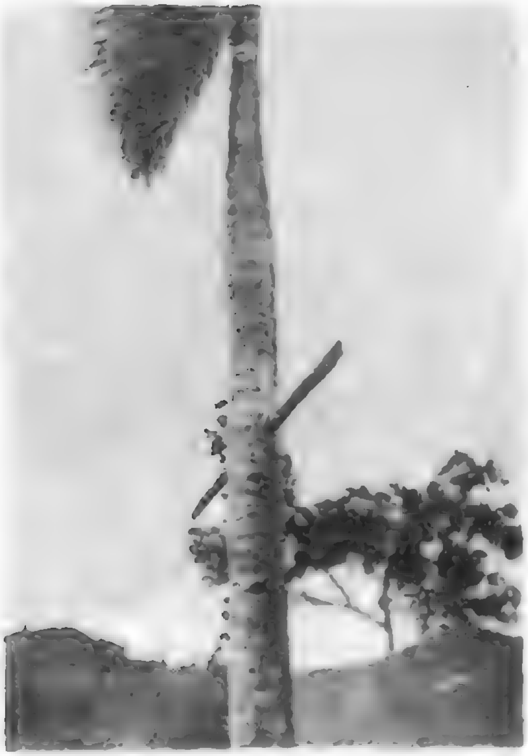


Рис. 10.

ломинки, палки и др.) в деревья, стены домов, землю и т. п. Мелкие камни пробивают стекло подобно пулям, выпущенным из револьвера.

Зарегистрирован случай, когда во время прохождения смерча сосновая палка пробила лист железа толщиной около сантиметра. Этим же качеством обладают ураганы. На рисунке 10 мы видим палку, проткнувшую ствол пальмы. По-видимому, эта способность также связана с резкими перепадами скорости в вихре.

В последние десятилетия крупные вихри исследовались со специальных самолетов метеослужбы. Радиолокаторы и метеоспутники позволили получить «изображения» глобальных ветровых систем. Особенно четкими получаются фотографии циклонов, поскольку они сопровождаются сильной облачностью и осадками. Как показывают фотографии, осадки в циклонах концентрируются в четко выделяющиеся спиральные полосы. Антициклон прозрачен, осадки в нем редки, а если они и выпадают, то обычно на периферии в виде мороси. Поэтому антициклоны значительно труднее различить на спутниковых фотографиях.

И все-таки, несмотря на обилие фактического материала, последовательной теории вихрей еще нет. Связано это, прежде всего, с тем, что в каждом конкретном случае зарождения вихря его развитие определяется огромным множеством внешних факторов. Неясно, какое именно сочетание известных условий вызовет первоначальное развитие вихря. В самом деле, до стадий урагана развиваются менее 10% образовавшихся в тропиках областей пониженного давления, остальные бесследно исчезают. Пока нельзя предсказать развитие урагана или смерча в данной конкретной ситуации.

Особенно плохо разработана теория смерчей. И дело здесь не только в том, что возникают они неожиданно и при более разнообразных условиях, чем ураганы (так, смерчи иногда образуются в глубине материка). Огромная скорость ветра в смерчах мешает их экспериментальному изучению. Это же обстоятельство не позволяет сколько-нибудь последовательно изучить это явление математически.

В самом деле, даже на самый «грубый» вопрос — в какую сторону будет вращаться смерч — нельзя ответить однозначно. При громадной скорости движения внутри мелкомасштабного вихря периодический процесс суточного вращения Земли может оказаться слишком медленным, чтобы активно взаимодействовать с процессом быстрого внутреннего движения, и развитие такого мелкомасштабного вихря будет определяться только конкретными внутренними условиями в газе. Они же будут определять направление вращения вихря. Поэтому, если большие вихри Северного полушария — внетропические циклоны и ураганы — вращаются против часовой стрелки, то для смерчей того же полушария не исключается вращение по часовой стрелке.

Возможны случаи одновременного появления двух или более вихрей в одном и том же районе. Оказавшись на достаточно близком расстоянии друг от друга, такие вихри начинают взаимодействовать между собой. Это явление называется эффектом Фудзивары.

Попробуем схематично описать «встречу» двух вихрей. У каждого одиночного вихря область интенсивного вращения отделена от неподвижной зоны так называемой периферической областью, в которой скорость постепенно спадает до нуля. Представим себе, что два урагана оказались на таком расстоянии, что центр каждого их них попал в периферическую область другого. Пусть, для определенности, ураганы вращаются против часовой стрелки. Каждый из них приведет в движение центр своего «собрата» таким образом, чтобы тот вращался относительно него против часовой стрелки. Как легко увидеть, это приведет к вращению центров обоих ураганов также против часовой стрелки относительно некоторой точки, расположенной на отрезке прямой, соединяющей центры ураганов, ближе к более мощному вихрю. В нижних слоях атмосферы воздух притекает к центру урагана, тогда как наверху оттекает от центра. В зависимости от интенсивности этих процессов у данной конкретной пары ураганов они могут сближаться, если преобладает «всасывание», или отступать друг от друга, если сильнее проявят себя оттекающие потоки в верхних слоях.

При этом ураганы все время продолжают влиять друг на друга. По выражению американского физика К. Орра, движение их напоминает поведение боксеров на ринге, выжидающих момент для нанесения решающего удара.

Аналогичная схема позволяет рассматривать встречу антициклонов и пары циклон—антициклон. Кроме того, ее можно распространить на случай, когда вихрь попадает в мощное воздушное течение и начинает взаимодействовать с ним.

Развитие вихря определяют многие факторы, и сделать заранее какие-либо предположения о результате «встречи» двух вихрей практически невозможно.

Путь уже развившегося урагана иногда оказывается очень длинным, и, проходя его, вихрь испытывает различные превращения. При выходе из тропиков ураган принимает форму сильного внетропического циклона. Штормовые циклоны Западной Европы часто оказываются бывшими тропическими ураганами, которые прошли вдоль берегов Северной Америки и пересекли Атлантику. Некоторые из них, пройдя по Европе, уходят затем в Азию.

Когда ураган выходит на сушу, то из-за «шероховатости» земной поверхности его нижние слои начинают разрушаться. Кроме того, проходя над сушей, ураган слабеет из-за недостатка «питания» — влаги. Но если ураган оказывается вновь над океаном, то сохранившаяся его верхняя часть может «раскрутить механизм» с прежней силой.

Обрушиваясь на густонаселенные районы суши, ураган уносит тысячи человеческих жизней и причиняет огромный материальный ущерб. Энергия его громадна: за один день большой ураган «расходует» энергию, равную энергии взрыва 13 000 мегатонных ядерных бомб; кинетическая энергия среднего урагана равна запасу энергии 1000 атомных бомб.

Деятельность ураганов меняет рельеф земной поверхности: исчезают коралловые острова, «передвигаются» берега океана, появляются новые проливы и т. п.

Прогнозы перемещений циклонов и антициклонов за последние два десятилетия стали намного надежнее благодаря использованию ЭВМ и информации, доставляемой спутниками, радиолокаторами и самолетами. На помощь службе погоды приходят новые совершенные аппараты и приборы. Служба эта ведется постоянно.

О. Жаутыков

Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называют график уравнения второй степени с двумя неизвестными

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$. Обозначим многочлен в левой части уравнения (1) через $f(x, y)$. Тогда точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику уравнения (1), если $f(x_0, y_0)=0$ (см. «Алгебра 6», п. 54).

Основная наша задача — научиться определять вид этого графика по коэффициентам A, B, C, D, E, F.

Будем считать, что A, B, C не обращаются одновременно в нуль (если $A=B=C=0$, то получается кривая первого порядка — график линейного уравнения $Dx+Ey+F=0$).

Мы изберем следующий план: сначала изучим несколько простых частных случаев — когда некоторые коэффициенты уравнения (1) обращаются в нуль, а потом научимся параллельными переносами и поворотами получать график уравнения (1) из этих частных случаев.

Частные случаи

Случаи эти таковы (все коэффициенты при выписываемых членах, кроме, быть может, F, отличны от нуля):

$$Ax^2 + Ey = 0, \qquad (2а)$$

$$Cy^2 + Dx = 0, \qquad (2б)$$

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \qquad (3)$$

$$Ax^2 + F = 0, \qquad (4а)$$

$$Cy^2 + F = 0. \qquad (4б)$$

Параболы. Перепишем уравнения (2а) и (2б) так:

$$y = \frac{-A}{E} x^2, \qquad (5а)$$

$$x = \frac{-C}{D} y^2. \qquad (5б)$$

Графиком уравнения (5а) является парабола (см. «Алгебра 6», п. 24 и статью И. Н. Бронштейна «Парабола» в «Кванте», 1975, № 4). Легко понять, что уравнение (5б) тоже определяет параболу — она получается при отражении параболы $y = -\frac{C}{D} x^2$ относительно биссектрисы первого координатного угла (см. рис. 1).

Окружность, эллипс, гипербола, начало координат, пара прямых или пустое множество. Все это может быть графиком уравнения (3).

Действительно, если $A=C$ $(\neq 0)$, то уравнение (3) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 = \frac{-F}{A}. \qquad (6а)$$

Если $-F/A>0$, то уравнение (6а) задает окружность радиуса $\sqrt{-F/A}$ (рис. 2). Если $-F/A=0$, то уравнению (6а) удовлетворяет лишь пара $x=0$, $y=0$, и графиком является начало координат. Если же $-F/A<0$, то уравнение (6а) решений не имеет, его график — пустое множество.

Пусть теперь $A\neq C$. Тогда если A и C одного знака (то есть если $C/A>0$), то графиком уравнения (3), которое можно переписать в виде

$$x^2 + \frac{C}{A} y^2 = \frac{-F}{A}, \qquad (6б)$$

является эллипс, если $-F/A>0$ (см. рис. 3 и статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» в «Кванте», 1975, № 1), начало координат, если $-F/A=0$, и пустое множество, если $-F/A<0$.

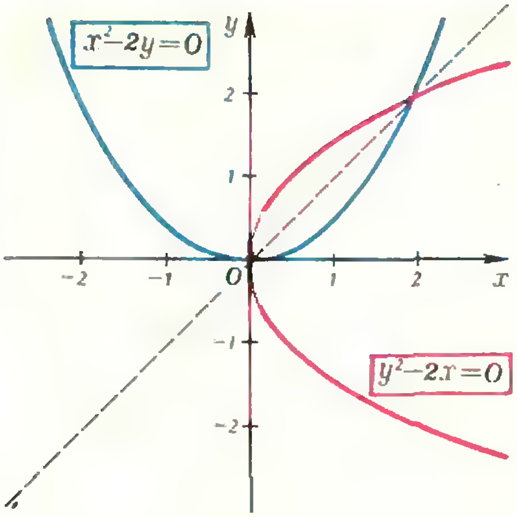

$x^2-2y=0$
$y^2-2x=0$
y
x
0
2
1
−1
−2

Рис. 1.

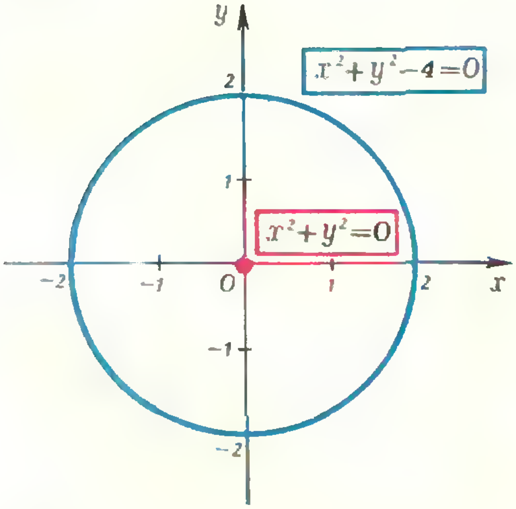

$x^2+y^2-4=0$
$x^2+y^2=0$
y
x
0
2
1
−1
−2

Рис. 2.

Если же A и C разных знаков (то есть если $C/A<0$), то уравнение (6б) при $F\neq0$ определяет гиперболу (см. статью И. Н. Бронштейна «Гипербола» в «Кванте», 1975, № 3), а при $F=0$ — пару прямых (рис. 4)

$$x+\sqrt{\frac{-C}{A}}\,y=0,$$

$$x-\sqrt{\frac{-C}{A}}\,y=0$$

(см. «Алгебра 6», п. 21; эти уравнения легко привести к виду $y=kx$).

Прямые или пустое множество. В уравнениях (4а) и (4б) надо рассмотреть три случая: $F=0$, $F/A>0$ (или $F/C>0$) и $F/A<0$ (или $F/C<0$).

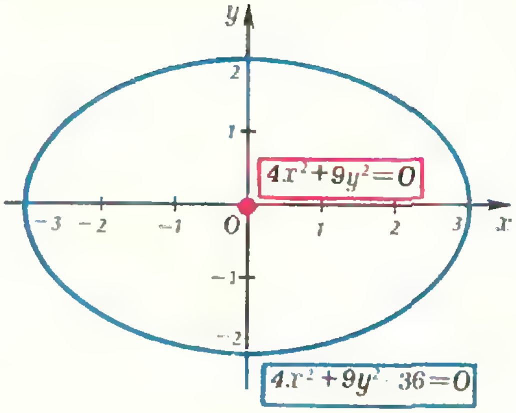

$4x^2+9y^2=0$
$4x^2+9y^2-36=0$
y
x
0
−3
−2
−1
1
2
3

Рис. 3.

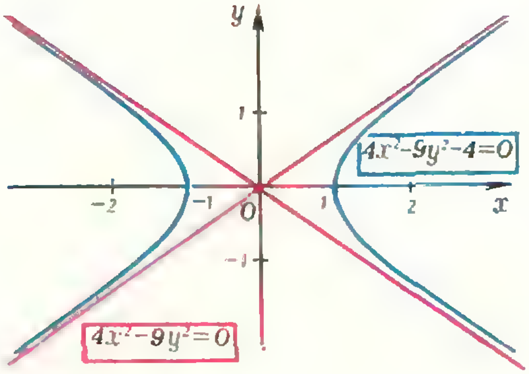

$4x^2-9y^2-4=0$
$4x^2-9y^2=0$
y
x
0
−2
−1
1
2

Рис. 4.

Если $F=0$, то (4а) превращается в уравнение $x=0$, график которого — ось Oy, а (4б) дает $y=0$ — это ось Ox.

Если числа F и A (или F и C) разных знаков, то уравнения (4) дают каждое пару прямых, параллельных оси Oy:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-F}{A}}$$

или оси Ox

$$y=\pm\sqrt{\frac{-F}{C}}.$$

Если же числа F и A (или F и C) одного знака, то график уравнения (4а) (и (4б)) — пустое множество.

Перемещения

Это — преобразования, которые переводят фигуру в конгруэнтную ей фигуру. Стало быть, прямая в результате перемещения останется прямой, парабола — параболой, гипербола — гиперболой. А вот уравнения этих линий изменятся (но по-прежнему будут уравнениями второй степени), и этим можно воспользоваться для упрощения уравнения — скажем, подобрать перенос, после которого в уравнении исчезнет член Dx, или поворот, аннулирующий Bxy. Переносами и поворотами мы и ограничимся.

Параллельный перенос. Пусть при параллельном переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ точка $M\,(x;\ y)$ переходит в точку $M'\,(u;\ v)$. Тогда $x+a=u$, $y+b=v$ (рис. 5), поэтому

$$\begin{aligned} x &= u - a, \\ y &= v - b. \end{aligned} \qquad (7)$$

Если координаты точки M удовлетворяют уравнению $f\,(x,\ y)=0$, то координаты точки $M'\,(u;\ v)$ удовлетворяют уравнению

$$g\,(u,\ v) = f\,(u - a,\ v - b) = 0,$$

то есть при переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ график уравнения $f\,(x,\ y)=0$ отображается в график уравнения (в переменных $x,\ y$)

$$g\,(x,\ y) = f\,(x - a,\ y - b) = 0.$$

Обратный перенос $\vec{r}'(-a;\ -b)$ отображает график уравнения $g\,(x,\ y)=0$ в график уравнения $f\,(x,\ y)=0$.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 10» (п. 9*) доказывается, что при переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ график функции $y=f\,(x)$ отображается в график функции $y=f\,(x-a)+b$. Этот факт легко получается из доказанного нами свойства переносов (при этом выясняется, почему a входит в последнюю формулу со знаком «минус», а b — со знаком «плюс»). График функции $y=f\,(x)$ совпадает с графиком уравнения $g\,(x,\ y)=y-f\,(x)=0$. При переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ из графика уравнения $g\,(x,\ y)=0$ получается график уравнения $g\,(x-a,\ \ y-b)=0$, то есть уравнения $(y-b)-f\,(x-a)=0$, или функции $y=f\,(x-a)+b$.

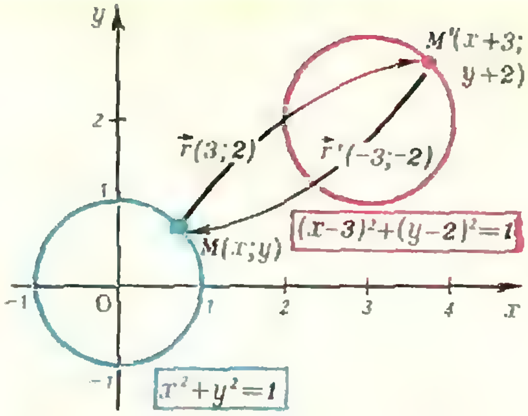


Рис. 5.

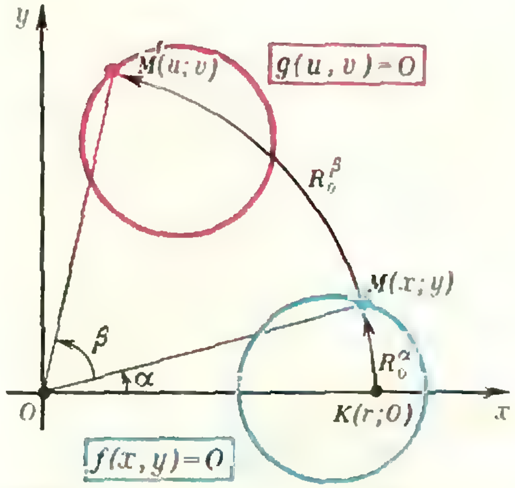


Рис. 6.

Повороты. Рассмотрим поворот с центром O (0; 0) на угол β в положительном направлении (против часовой стрелки). При таком повороте R_O^β точка $M\,(x;\ y)$ отобразится в точку $M'(u;\ v)$. Попробуем связать $u,\ v$ и $x,\ y$. Пусть $|OM|=r$ и точка $M\,(x;\ y)$ получается из точки $K\,(r;\ 0)$ на оси Ox поворотом на угол α (рис. 6). Тогда (см. «Алгебра и начала анализа 9», §.14, п. 70, 71) $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$. Но точка $M'(u;\ v)$ получается из точки $K\,(r;\ 0)$ поворотом на угол $\alpha+\beta$, поэтому $u=r\cos\,(\alpha+\beta)$, $v=r\sin\,(\alpha+\beta)$. Поскольку

$$\cos\,(\alpha+\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\,(\alpha+\beta) = \\ = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

мы получаем:

$$u = r\cos(\alpha+\beta) = x\cos\beta - y\sin\beta,$$

$$v = r\sin(\alpha+\beta) = x\sin\beta + y\cos\beta.$$

При обратном повороте $R_O^{-\beta}$ точка $M'(u;\ v)$ отображается в точку $M(x;\ y)$, поэтому

$$x = u\cos(-\beta) - v\sin(-\beta) = u\cos\beta + v\sin\beta,$$

$$y = u\sin(-\beta) + v\cos(-\beta) = -u\sin\beta + v\cos\beta. \quad (8)$$

Если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению $f(x,\ y)=0$, то координаты точки $M'(u;\ v)$ должны удовлетворять уравнению

$$g(u,\ v) = f(u\cos\beta + v\sin\beta,\ -u\sin\beta + v\cos\beta) = 0,$$

то есть при повороте R_O^{β} график уравнения $f(x, y)=0$ отображается в график уравнения (в переменных x, y)

$$g(x,\ y) = f(x\cos\beta + y\sin\beta,\ -x\sin\beta + y\cos\beta) = 0.$$

Упрощение уравнения f (x, y)=0

Вернемся к общему уравнению (1) кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Попробуем поворотом избавиться от члена Bxy. Подставляя в уравнение $f(x,\ y)=0$ выражения x, y через u, v (формулы (8)), мы получим некоторое уравнение $g(u,\ v)=0$ второй степени. Выписывая члены, содержащие лишь uv, найдем B' — новое значение коэффициента при произведении uv:

$$B' = (A-C)\,2\sin\beta\cos\beta + B(\cos^2\beta - \sin^2\beta).$$

Приравняем его к нулю:

$$(A-C)\sin 2\beta + B\cos 2\beta = 0$$

и найдем β:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{B}{C-A} \text{ при } A \neq C,$$

$$\cos 2\beta = 0\ (\beta = 45^\circ) \text{ при } A = C.$$

Итак, поворотом всегда можно избавиться от члена Bxy, то есть привести уравнение (1) к виду

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (9)$$

Пример. Пусть дано уравнение

$$7x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 + 4(\sqrt{3}-8)x - 4(8\sqrt{3}+1)y + 4 = 0. \quad (10)$$

Здесь $A = 7$, $B = 6\sqrt{3}$, $C = 13$, поэтому $\operatorname{tg} 2\beta = \sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$. Подставляя (по формулам (8)) в уравнение (10)

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v,$$

$$y = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v,$$

получаем (проверьте!) уравнение

$$4u^2 + 16v^2 + 8u - 64v + 4 = 0.$$

Значит, график уравнения (10) получается из графика уравнения

$$4x^2 + 16y^2 + 8x - 64y + 4 = 0 \quad (11)$$

поворотом $R_O^{-30^\circ}$.

Теперь воспользуемся переносами и попробуем свести уравнение (9) к еще более простому — без членов Dx и Ey. При переносе $\vec{r}(a;\ b)$ график уравнения $f(x,\ y)=0$ переходит в график уравнения $g(x,\ y)=0$, где $g(x,\ y)=f(x-a,\ y-b)$, то есть уравнение (9) переходит в такое:

$$A(x-a)^2 + C(y-b)^2 + D(x-a) + E(y-b) + F = 0.$$

Раскрывая скобки и упрощая, получаем:

$$Ax^2 + Cy^2 + (D-2aA)x + (E-2bC)y + Aa^2 + Cb^2 - aD - bE + F = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при x, y, приходим к уравнениям относительно a и b:

$$D - 2aA = 0,\quad E - 2bC = 0,$$

откуда $a = \dfrac{D}{2A}$ (при $A \neq 0$), $b = \dfrac{E}{2C}$ (при $C \neq 0$).

Пример (продолжение). В уравнении (11) $A = 4$, $C = 16$, $D = 8$, $E = -64$, $F = 4$, поэтому $a = 1$, $b = -2$, и перенос $\vec{r}(1;\ -2)$ переводит график уравнения (11) в график уравнения

$$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0,$$

или

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0.$$

А это — уравнение вида (3), оно задает эллипс

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Поэтому график уравнения (10) является эллипсом и получается из найденного нами эллипса переносом $\vec{r}\,(-1;\ 2)$ и затем поворотом $R_O^{-30^\circ}$.

Итак, если $A\neq 0$ и $B\neq 0$, то можно избавиться от членов Dx и Ey. Если же $A=0$ (или $C=0$), то член Dx (или Ey) останется, но тогда если $D\neq 0$ (или $E\neq 0$), то можно аннулировать F переносом $\vec{r}\left(\frac{F}{D};\ 0\right)$ $\left(\text{или } \vec{r}\left(0;\ \frac{F}{E}\right)\right)$.

Таким образом, мы научились сводить уравнение $f\,(x,\ y)=0$ второй степени к одному из следующих видов:

вид уравнения (9)	результат переноса
$A\neq 0,\ B\neq 0$	$Ax^2+By^2+F=0$
$A\neq 0,\ B=0,\ E\neq 0$	$Ax^2+Ey=0$
$A\neq 0,\ B=0,\ E=0$	$Ax^2+F=0$
$A=0,\ B\neq 0,\ D\neq 0$	$By^2+Dx=0$
$A=0,\ B\neq 0,\ D=0$	$By^2+F=0$

А все написанные справа уравнения нами разобраны — это и есть частные случаи уравнения (1) (формулы (2) — (4)). Таким образом, мы решили поставленную задачу.

Заметим еще, что уравнение (2б) можно привести к виду (2а), а уравнение (4б) — к виду (4а). Для этого надо произвести поворот $R_O^{90^\circ}$, при котором график уравнения $f\,(x,\ y)=0$ отображается в график уравнения $f\,(y,\ -x)=0$. Попробуйте это доказать, а также решить следующие задачи.

Упражнения

Построить графики следующих уравнений:

1. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$
2. $4x^2-4xy+y^2-16x+6y+22=0;$
3. $x^2-4xy+y^2+4\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}\,y+11=0.$

Задачи «Последние цифры»

1. Пусть число a не делится ни на 2, ни на 5.

Доказать, что при возведении числа $A=a^{5\cdot 10^{n-2}}$ в натуральную степень последние его n цифр не изменятся ($n\geqslant 4$, $n\in\mathbf{N}$).

2. Пусть число b не делится на 2, но делится на 5.

а) Доказать, что при возведении числа $B=b^{2^{n-1}}$ ($n\in\mathbf{N}$) в натуральную степень последние его n цифр не изменятся.

б) Пусть $r,\ q,\ n\in\mathbf{N}$, $r\geqslant n$. Доказать, что последние n цифр выражений $b^{2^{n-1}q+r}$ и b^r соответственно равны.

3. Пусть число c делится на 2, но не делится на 5.

а) Доказать, что при возведении числа $C=c^{4\cdot 5^{n-1}}$ в натуральную степень последние его n цифр не изменятся.

б) Пусть $r,\ q,\ n\in\mathbf{N}$, $r\geqslant n$. Доказать, что последние n цифр выражений $c^{4\cdot 5^{n-1}q+r}$ и b^r соответственно равны.

4. Пусть $m\in\mathbf{N}$. Доказать, что при возведении числа $M=m^{10^{n+1}}$ в натуральную степень последние его n цифр не изменятся.

5. Найдите три последние цифры выражения $3^{105}+4^{105}$.

6. Докажите, что разность $3^{999}-2^{999}$ оканчивается цифрами 1979.

7. Докажите, что если выражение

$$11^{10^{9^{8^{7}}}}-6^{5^{4^{3^{2}}}}$$

возвести в любую натуральную степень, то более 200 000 его последних цифр не изменятся.

8. Докажите, что при любом натуральном n разность

$$n^{n^{n^{n^{n}}}}-n^{n^{n^{n}}}$$

делится на сто.

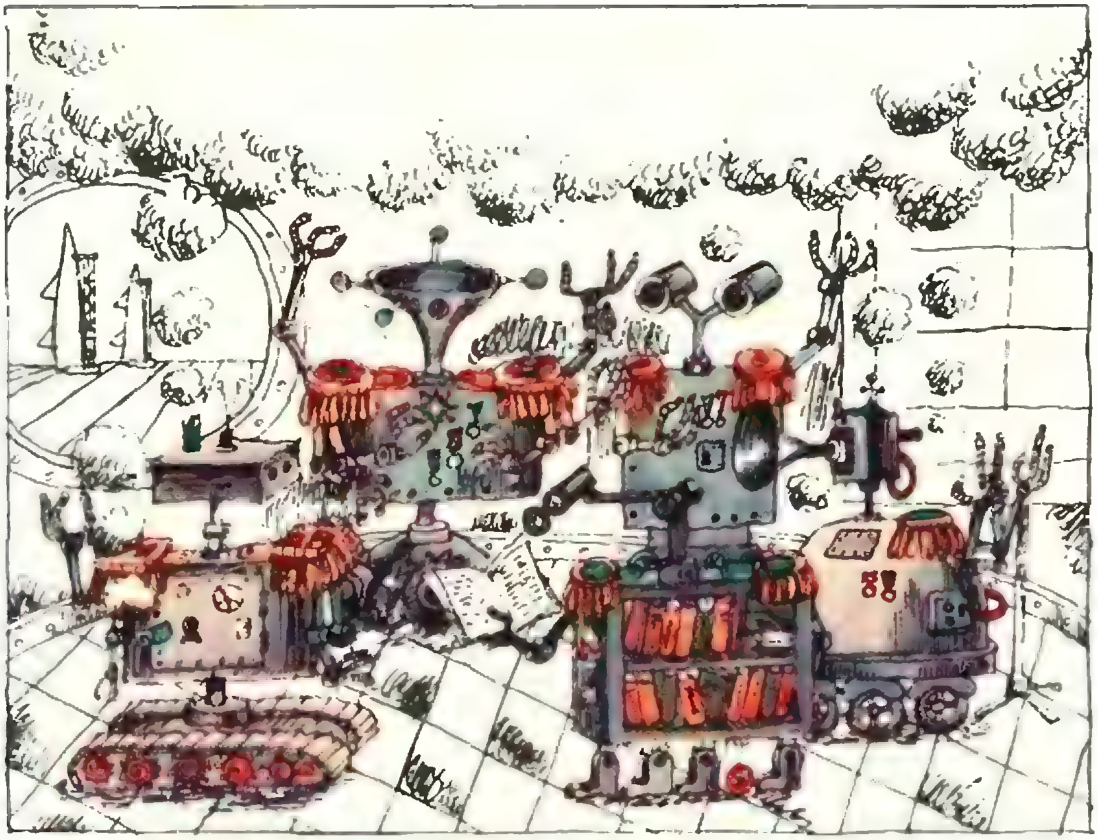
9. Найдите семь последних цифр числа

$$9999^{999^{99^{9}}}$$

10. В книге М. Гарднера «Математические новеллы» (М., «Мир», 1974) на странице 349 приведены 3376 цифр двадцать третьего числа Мерсенна $2^{11213}-1$, отпечатанного ЭВМ Университета штата Иллинойс. Последние его десять цифр таковы: 7696398191. «Математический факультет университета был так горд открытием 23-го числа Мерсенна, что ставил на конвертах специальный штемпель, извещающий об этом событии», — сказано в книге. Однако четвертая от конца цифра выдана неверно. Доказать, что это число должно кончаться цифрами 2191, а не 8191.

Примечание. Эти задачи связаны с автоморфными числами (см. «Квант», 1971, № 10, с. 39; 1973, № 1, с. 33 и 1973, № 7, с. 55).

М. Штеренберг



З. Тьмеладзе

Теория игр

Верда или Калимна?

Еще никогда за все сто гартов Великой Войны при штабе сиреневых не совещались так долго. Пары окиси молибдена клубились над группой генералов, ожесточенно споривших у доски со следующей таблицей:

ПОТЕРИ ДРОКЕРОВ		
Стратегия фиолетовых / Наша стратегия	Атака на Калимну	Обстрел Верды
Защита Верды	6	3
Защита Калимны	1	5

Генералиссимус Дор покосился на табличку «Здесь молибден не окисляют», но не стал взывать к ней, а лишь молча кивнул Мотсу, предоставляя ему слово.

— У фиолетовых может быть только два плана: или звездолетная атака на Калимну, или обстрел... — генерал Мотс закашлялся («угробит его в конце концов это пристрастие к молибдену», — подумал Дор, но Мотс уже продолжал) — ... или обстрел Верды. По моему мнению, мы должны все силы бросить на оборону Верды. Тогда, если противник атакует ее, мы потеряем лишь три боевых дрокера.

— А если фиолетовые сунутся на Калимну? — нетерпеливо вмешался Луд. — Тогда не сдобровать шести нашим дрокерам.

Он самодовольно забросил в себя очередную порцию молибдена и продолжал:

— Калимна — вот наша главная опора. Все силы на ее защиту! Тогда атака на Калимну принесет фиолетовым в добычу всего один дрокер.

— А Верда? — подавился возмущением Мотс. — Мы потеряем там пять дрокеров!

— Потише, генералы, — бесцеремонно прервал их Дор. — Попробуем разобраться. Наша задача — потерять как можно меньше дрокеров, — Дор еще раз посмотрел на таблицу с вариантами, — но все зависит от того, какой план изберет противник. А что говорит разведка?

Нахит неохотно ответил:

— У нас пока еще нет точных данных. Но, надо думать, противник тоже колеблется. Иначе говоря, мы можем считать, что вероятность принятия противником каждого плана равна $^1/_2$. Не беспокойтесь, господа, я так же, как и вы, не знаком с теорией вероятностей. Из всей этой мудреной науки я знаю лишь, что вероятность $^1/_2$ означает один шанс из двух, да еще правило для исчисления ожидаемых потерь. К примеру, если вероятность нападения на Калимну составляет $^1/_2$, а наши потери в результате такого нападения будут равны шести дрокерам, то ожидаемые потери в Калимне составят $6 \times \frac{1}{2} = 3$. А если бы, скажем, вероятность нападения составляла $^1/_3$, то это означало бы ожидаемые потери $6 \times \frac{1}{3} = 2$. Этого достаточно, чтобы подсчитать ожидаемые потери в каждом из двух наших возможных планов:

СТРА-ТЕГИЯ	ОЖИДАЕМЫЕ ПОТЕРИ ДРОКЕРОВ		
	в Калимне	в Верде	Итого
Защита Верды	$6 \times \frac{1}{2} = 3$	$3 \times \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
Защита Калимны	$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$5 \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$	3

Вы видите, что при защите Калимны мы потеряем на целых полтора дрокера меньше.

— Недурная осведомленность для начальника разведки, — съязвил Луд, снова закладывая в себя молибден. —А почему вы решили, что вероятности нападений на Верду и Калимну равны? Мне так не кажется. По-моему, фиолетовые скорее всего ринутся на Верду. Ведь они уже один раз ее брали. И если они атакуют Калимну в одном случае из четырех, то есть с вероятностью $^1/_4$, а Верду — с вероятностью $^3/_4$, то ваши расчеты приведут совсем к другому выводу:

СТРА-ТЕГИЯ	ОЖИДАЕМЫЕ ПОТЕРИ ДРОКЕРОВ		
	в Калимне	в Верде	Итого
Защита Верды	$6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$	$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
Защита Калимны	$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$	4

Разве не ясно, что нам выгоднее защищать Верду?

— Лично мне не ясно, — возразил Дор. — Эти расчеты были бы оправданы, если бы можно было както обосновать оценки шансов нападения на Верду и Калимну. Но пока это одни догадки. А строить рассуждения на догадках — это вредная привычка, вроде окисления молибдена. И нам пора от нее избавляться.

Генералы скучно переглянулись — Дор один среди них пренебрегал молибденом.

— Нельзя ли принять правильный план, не делая заранее предположений о шансах принятия противником того или иного плана? Что думаете вы, Рол, как ведущий военный теоретик?

— Я читал в «Межпланетном вестнике», что где-то на далекой планете построили теорию, позволяющую это сделать. Давайте предположим, что нам нужно использовать не один план, а оба, с неизвестными пока вероятностями p_1 и p_2. Если, скажем, $p_1 = 0{,}2$, а $p_2 = 0{,}8$, то в двух случаях из десяти нужно защищать Верду, а в восьми — Калимну. Иначе говоря, давайте ответим на неопределенность случайностью.

— Мы не можем ставить судьбы сиреневых в зависимость от случайности, — просипел Мотс. — Ведь речь идет … кхе-кхе… не о результате матча в брастул, а о судьбе государства, и…

— Продолжайте, Рол. Мне кажется, в ваших словах есть нечто интересное, — вмешался рассудительный Дор.

— Теперь нам нужно найти эти вероятности p_1 и p_2. Разумеется, сумма их должна быть равна единице — ведь какое-то решение нам так или иначе придется принять:

$$p_1 + p_2 = 1. \qquad (1)$$

— Интересно, как это вам удастся найти два неизвестных из одного уравнения, — не успокаивался Луд.

— Давайте теперь потребуем, чтобы в любом случае среднее число потерянных дрокеров не превысило величины v, пока еще неизвестной, — продолжал Рол.

— Третье неизвестное! — с возмущением заметил Луд, но Рол увлеченно продолжал, не обращая внимания ни на Луда, ни на других генералов.

— Допустим, что фиолетовые нападут на Калимну. Если бы мы приняли план защиты Верды, то потеряли бы 6 дрокеров, но поскольку мы защищаем Верду лишь с вероятностью p_1, то и потеряем на этом $6p_1$ дрокеров. С вероятностью p_2 мы защищаем Калимну, и это приведет к потере $1 \times p_2 = p_2$ дрокеров. Итого в результате нападения противника на Калимну мы потеряем $6p_1 + p_2$ дрокеров. Чтобы потери не превысили величины v, должно выполняться неравенство

$$6p_1 + p_2 \leqslant v. \qquad (2)$$

— Но противник может напасть и на Верду, — напомнил Нахит.

— Да, и это дает нам еще такое неравенство:

$$3p_1 + 5p_2 \leqslant v. \qquad (3)$$

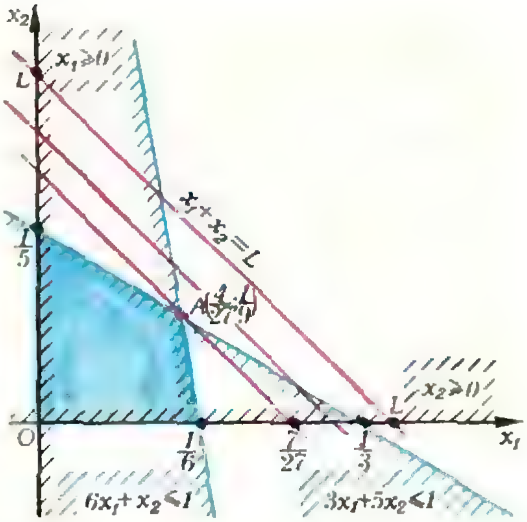


Рис. 1.

Мне, как, надеюсь, и вам всем, хотелось бы, чтобы величина v была поменьше. Однако она все же будет положительной: $v > 0$, — поскольку какое-то количество дрокеров нам придется потерять. Обозначим $x_1 = p_1/v$, $x_2 = p_2/v$, $L = 1/v$. Тогда неравенства (2) и (3), условия неотрицательности p_1 и p_2 и уравнение (1) запишутся так:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ L(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Нас интересует наименьшее значение v, поэтому L должно быть наибольшим. Задача отыскания из системы (4) x_1 и x_2, при которых функция $L(x_1, x_2)$ принимает наибольшее возможное значение, называется жителями той далекой планеты *задачей линейного программирования* *). При двух неизвестных x_1 и x_2 эту задачу можно решать графически. Каждое из неравенств системы (4) задает на координатной плоскости x_1Ox_2 полуплоскость, пересечение этих полуплоскостей образует четырехугольник (см. рис. 1), а уравнение $L = x_1 + x_2$ задает прямую, пересекающую оси координат в точках $x_1 = L$ и $x_2 = L$. При разных L получаются параллельные прямые. Наибольшее L, при котором прямая $x_1 + x_2 = L$ пересекает четырехугольник (то есть система (4) имеет решение), соответствует точке A (4/27; 1/9) и дает $L = 4/27 + 1/9 = 7/27$, поэтому $v = 27/7 = 3\frac{6}{7}$, $p_1 = 4/7$, $p_2 = 3/7$. Таким образом, в четырех

---

*) См., например, статьи З. Я. Тьмеладзе «Физика и линейные неравенства» («Квант», 1975, № 10), Б. Алейникова, П. Бузыцкого, М. Дубсона «Симплекс-метод» («Квант», 1976, № 7).

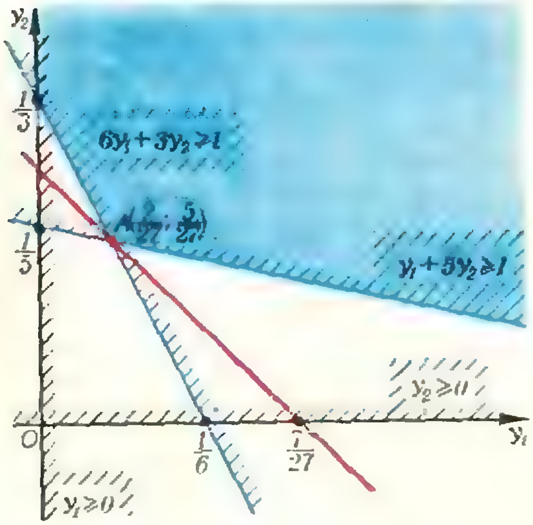


Рис. 2.

случаях из семи мы должны защищать Верду, а в трех — Калимну. И наши потери составят в среднем менее четырех дрокеров.

— Но заметьте, — вмешался Мотс из-за облачка паров молибдена, — раньше мы ожидали меньших потерь — только 3 или $3^3/_7$ дрокера.

— Неудивительно, — возразил Нахит. — Ведь нам пришлось что-то заплатить за недостающую информацию.

Но тут не выдержал Луд.

— По-моему, мы и так слишком много тратим на разведывательную службу, не получая взамен даже жалких крох информации о противнике.

Атмосфера снова начала накаляться, но вмешательство Дора не дало разрастись взаимным упрекам.

— Скажите, Рол, а как в этих условиях будет действовать противник? Есть ли у него оптимальная стратегия?

— Да, есть. Противник не знает наших планов, но ему известны последствия нападения на Верду и Калимну — его разведка обычно не подводит; поэтому он со своей стороны должен стараться нанести нам наибольший урон. Если обозначить наш урон через w, а вероятности нападения противника на Калимну и Верду через q_1 и q_2, то $q_1+q_2=1$, $6q_1+3q_2\geqslant w$, $q_1+5q_2\geqslant w$, $y_1=q_1/w$, $y_2=q_2/w$, $M=1/w$, и противник придет к следующей задаче линейного программирования:

$$\left|\begin{array}{l} 6y_1+3y_2\geqslant 1,\\ y_1+5y_2\geqslant 1,\\ y_1\geqslant 0\\ y_2\geqslant 0,\\ M(y_1,y_2)=y_1+y_2, \end{array}\right.$$

причем надо искать наименьшее значение M. Когда противнику удастся решить эту задачу линейного программирования, он получит: $y_1=2/27$, $y_2=5/27$, $M=7/27$, откуда $q_1=2/7$, $q_2=5/7$, $w=3^6/_7$ (рис. 2). То есть противник для достижения наибольшего урона нашим войскам в двух случаях из семи должен нападать на Верду, а в пяти — на Калимну. И его добыча будет равна тем же $3^6/_7$ дрокера. Разумеется, он должен нападать так, чтобы мы не знали определенно, какое нападение предстоит.

— Учитывая работу нашей разведки, — не удержался Луд, — это нетрудно.

— Скажите, Рол, — поинтересовался Дор, а что будет, если противник не станет следовать своей наилучшей стратегии?

— В «Межпланетном вестнике» пишут, что всякое уклонение от нее может привести лишь к уменьшению успехов.

Рол закончил свою речь жестом победителя, но у Дора она не имела успеха.

— Я вполне согласился бы с вами, Рол, если бы нам предстояло несколько столкновений с фиолетовыми. Но нас ждет лишь одна битва. Какое решение нам принять?

— Независимо от числа битв мы должны бросать своеобразный жребий. Если бы оптимальная стратегия имела вид $p_1=1/2$, $p_2=1/2$, то достаточно было бы бросить монетку, загадывая на куху и кору. Стратегию $p_1=4/7$, $p_2=3/7$ реализовать несколько труднее. Но можно. Например, так: 4/7 — это примерно 34/60, а 3/7 — это 26/60. Можно взглянуть на часы, и если секундная стрелка будет между 0 и 34 секундами, принять решение оборонять Верду, а если между 34 и 60 — Калимну. Я считаю, что так и нужно поступать, даже если битва всего одна.

— Я не согласен! — возразил Мотс, и по многим причинам. Так стоило бы действовать, если бы нам противостоял разумный противник, равный нам по интеллекту — например, бордовые. Но фиолетовые принадлежат к низшей категории... кхе-кхе... их можно рассматривать просто как силы природы. Подумать только! Вместо молибдена эти варвары употребляют висмут! Они никогда не додумаются...

Новый приступ кашля сломил Мотса, и он уже не мог продолжать. Срочно вызванный штабной врач занялся пациентом, и совещание пришлось на время прервать.

Первое возвращение на Землю

Участники военного конфликта на далекой планете использовали математическую теорию, хорошо известную у нас на Земле, — *теорию игр*. Ее применяют в тех случаях, когда нет информации о замыслах противника. Первоначально эта теория развивалась применительно к азартным играм, от чего и получила свое название. Но затем ее приложения стали весьма многообразными — от экономики до военного дела. Следует отметить, что исходные положения теории игр не бесспорны. И применима она, строго говоря, лишь тогда, когда игра повторяется достаточно много раз. Однако находятся сторонники ее применения и к однократным решениям (в их числе — генерал Рол).

В числе многих интересных проблем теории игр — проблема *смешанных стратегий*. Нередко информация, имеющаяся в распоряжении того, кто принимает решение, недостаточна. В этих условиях невозможно указать какую-то одну безусловно лучшую стратегию, и приходится прибегать к использованию смешанной стратегии — с некоторыми вероятностями применять несколько вариантов, как предложил впервые французский математик Эмиль Борель (1871—1956). Впоследствии для отыскания оптимальных смешанных стратегий стали применять линейное программирование.

Смешанные стратегии нуждаются в *датчике случайных чисел* (простейшие варианты таких датчиков — монета, часы с секундной стрелкой; разумеется, существуют и более совершенные датчики случайных чисел, реализуемые на ЭВМ). Если смешанная стратегия не будет доставляться датчиком случайных чисел, а будет назначаться, есть опасность, что противник отгадает, какой вариант его ждет, и получит возможность действовать более эффективно. Но против случайной смешанной стратегии у противника только одно средство — использование своей оптимальной смешанной стратегии, также определяемой случайным образом.

Сиреневые не употребляли еще нескольких важных терминов теории игр, с которыми полезно познакомиться читателю. Так, самая первая таблица, показывающая возможные потери сиреневых, называется *матрицей игры*. А величина v — средний урон, который понесут сиреневые в случае использования ими оптимальной смешанной стратегии, — называется *ценой игры*.

Способ рассуждений, который предложил генерал Нахит, — не зная, что сделает противник, считать все варианты равновероятными — принадлежит английскому математику XVIII века Т. Бейесу.

Как мы уже отмечали, в теории игр нет единого, обоснованного рецепта действий, что дает простор для творчества. Именно это обстоятельство и определило дальнейший ход совещания при штабе сиреневых после вынужденного перерыва, вызванного скверной привычкой генерала Мотса.

Калимна или Верда?

— Ну как, скоро? — торопил Дор врача.

Врач откинул спинной кожух Мотса и показал паяльником на пыльное хитросплетение тронутых ржавчиной транзисторов.

— Боюсь, что...

— Составьте дефектную ведомость, — коротко приказал Дор, — и дайте мне на утверждение.

Генералы понимающе мигнули — они знали закон сиреневых: после составления дефектной ведомости больного разбирали на запчасти, если стоимость ремонта превышала стоимость нового индивидуума. А здесь, по-видимому, дело шло к этому.

Дор невозмутимо продолжал.

— Я должен согласиться с генералом Мотсом. Рекомендуемая стратегия слишком рациональна. Между тем даже в нашем обществе, которое по своей морали и интеллекту куда выше общества фиолетовых, не все действуют разумно. Иначе откуда бы развилось это губительное пристрастие к молибдену, которое вдвое сокращает жизнь?

— Да будет позволено мне вставить слово, — снова вмешался Нахит. — К чему мы, собственно говоря, стремимся? Мы стремимся потерять как можно меньше дрокеров. Мы могли бы, разумеется, принять превосходное решение, если бы знали в точности, на что решится противник. Но узнать это мы не можем, несмотря на то, что наша разведка прикладывает героические усилия.

— Вот именно, — вырвалось у Луда.

— Давайте же действовать так, чтобы добиться наименьшего ущерба от возможных ошибок в выборе стратегии. Взглянем еще раз на таблицу. Если бы противник атаковал Калимну и мы защищали Калимну, то потеряли бы всего один дрокер. Это было бы верное решение. А если бы мы стали защищать Верду, то потеряли бы лишних 6—1=5 дрокеров. Аналогично при обстреле Верды, защищая Калимну, мы потеряем лишних 5—3=2 дрокера. Это позволяет составить следующую таблицу лишних потерь от неправильных решений:

Стратегия фиолетовых / Стратегия сиреневых	Атака на Калимну	Обстрел Верды
Защита Верды	5	0
Защита Калимны	0	2

А теперь остается составить задачу линейного программирования: $5p_1 \leqslant v$, $2p_2 \leqslant v$, $p_1+p_2=1$, $z_1=p_1/v$, $z_2=p_2/v$, $K=1/v$, откуда получаем систему

$$\begin{cases} 5z_1 \leqslant 1, \\ 2z_2 \leqslant 1, \\ z_1 \geqslant 0, \\ z_2 \geqslant 0, \\ K(z_1, z_2) = z_1 + z_2. \end{cases}$$

Наименьшее v, то есть наибольшее K, будет при $z_1=1/5$, $z_2=1/2$, откуда $K=7/10$, $v=10/7$, $p_1=2/7$, $p_2=5/7$. Смотрите-ка, было $p_1=4/7$, $p_2=3/7$, то есть $p_1>p_2$, а теперь наоборот: $p_2>p_1$. По этому критерию защита Верды куда менее привлекательна. Вы были правы, генерал Луд.

Тем временем Дор мельком взглянул на дефектную ведомость. Так и есть, больше половины узлов требует замены, в том числе дорогая система питания. Дешевле собрать на конвейере нового генерала. И он размашисто расписался.

— Так какой жребий вы предлагали, Рол? — спросил Дор, которому подход Нахита понравился больше, чем подход Рола, хотя Нахит решал совсем другую задачу: минимизировать не потери, а последствия ошибки. — Да, вспомнил: часы. Прикинем: 2/7 — это 17/60. Всего семнадцать секунд решают судьбу планеты! Дор поднял к фотореле шестое щупальце с часами. Секундная стрелка была вблизи 47 секунд.

— Подготовиться к защите Калимны! — приказал он. — Совещание объявляю закрытым! Позор фиолетовым!

— Позор фиолетовым! — эхом отозвалось совещание, и все стали быстро разъезжаться, унося с собой запах паров молибдена. Больше других торопился штабной врач: ему еще нужно было передать шифровку в штаб фиолетовых.

Второе возвращение на Землю

Да, такой исход трудно было предвидеть. Вся стратегия сиреневых строилась на отсутствии информации у обоих противников, в то время как фиолетовые теперь будут принимать решение при полной информации. В этом, конечно, нет вины американского математика Л. Сэвиджа, методом которого воспользовались сиреневые, он ничем не смог бы им помочь, если бы даже захотел: Сэвидж — специалист по статистике, а не по контрразведке. Но в любом случае выбор наилучшей стратегии — это очень тяжелая задача, допускающая неоднозначные решения.

Наилучшая стратегия не всегда существует. Например, ее нет в игре в «Спортлото»: вы можете как угодно назначать номера, и при этом вероятность угадывания какого-то количества номеров не изменится. Правда, нужно отметить, что существует возможность влиять на величину выигрыша: для этого нужно использовать такую стратегию, против которой большинство участвующих в игре почему-либо предубеждено — ведь выигрыш делится между угадавшими. Бывают явные предубеждения (например, некоторые уверены, что никогда не выиграют первые шесть номеров подряд), а бывают и неявные (числа кратные пяти, выбираются чаще других).

В развитой сейчас теории игр рассмотрено уже много задач. В некоторых из них выбор приходится делать не из конечного, а из бесконечного числа стратегий. Не все поставленные задачи решены — не решена, например, задача «Принцесса и Чудовище», сформулированная американским ученым Р. Айзексом.

В абсолютно темном помещении заключены Принцесса, которая может двигаться с любой скоростью и в любом направлении, и Чудовище, скорость которого ограничена. Чудовище захватывает Принцессу, если расстояние между ними становится меньше заданного. Какой должна быть стратегия Принцессы, чтобы она могла максимально оттянуть поимку (вероятно, до прихода принца)?

Ясно, что если Принцесса начнет метаться, сполна используя свою скорость, она сама наткнется на Чудовище, а если она будет стоять, то планомерный обход Чудовищем всего помещения принесет ему успех (в среднем за время, равное половине времени обхода). Айзекс полагает, что оптимальная стратегия Принцессы должна быть смешанной, но какой — никто не знает. По-видимому, Принцессе следует менять случайным образом скорость и направление.

Особенно трудно выбрать наилучшую стратегию, когда игра ведется не против разумного противника, который стремится нанести наибольший ущерб, а против природы. Стратегию природы нельзя предвидеть по принципу наибольшего ущерба — природа беззлобна. Чтобы проникнуть в ее стратегию, нужно знать физические законы, а этим занимается не теория игр, а совсем другие теории...

Упражнения

1. На этот раз первенство школы по футболу решили проводить без замен игроков. И перед $7^{\underline{а}}$ встала проблема: ставить или не ставить на матч с $7^{\underline{б}}$ рослого, но неповоротливого Сеню? Если противники догадаются поставить в защиту долговязого Колю, то Сеня будет нейтрализован и не забьет ни одного гола. Но если противники поставят не Колю, а Алика, то Сеня забьет верных три гола с навесов на штрафную площадку. Можно поставить вместо Сени юркого Васю — тот еще ни разу не уходил с поля без гола, а если его будет опекать не Алик, а Коля, то не миновать и двух голов. Кого же ставить — Сеню или Васю, если их возможности хорошо известны противникам?

2. Решить предыдущую задачу, если выбор приходится делать между Сеней и Петей, который всегда забивает ровно один гол.

3. Это ж надо! Остается час до начала занятий, а Петя из-за футбола еще не приготовил домашнего задания по алгебре, русскому и физике. Но ведь он обещал подтянуться по алгебре и физике на комсомольском собрании! Катастрофическая ситуация, если учесть, что сегодня наверняка будет контрольная или по алгебре, или по физике (ровно одна — как учителя договорятся, а учителя к нему придираются). За час можно подготовить только один предмет. Если выучить алгебру и по ней будет контрольная, то ее удастся написать на четверку, но если при этом контрольная будет по физике, то двойка обеспечена. А если выучить физику, то контрольная по ней принесет тройку, зато контрольная по алгебре принесет два балла. Наконец, если выучить русский, то двойки будут по любой из контрольных. За что же хвататься?

Н. Ростовцев

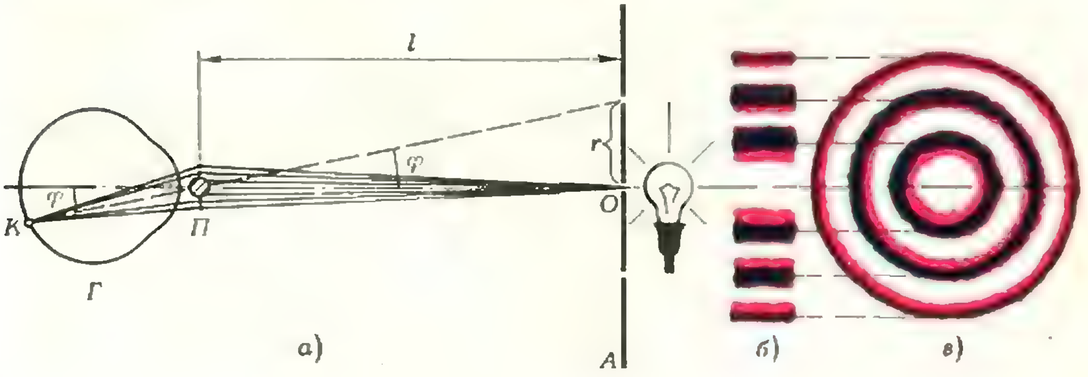
Как с помощью проволоки измерить длину световой волны

Совсем недавно в нашем журнале рассказывалось о том, как можно измерить длину волны видимого света с помощью... грампластинки (см. статью А. Бондаря «Грампластинка и дифракция света», «Квант», 1977, № 6). Теперь мы хотим познакомить наших читателей еще с одним способом определения длины световой волны — с помощью... мотка проволоки.

На пути света, идущего от точечного источника, непосредственно перед глазом *Г* (на расстоянии 2—3 *мм* от него) поместим тонкую проволоку *П* диаметром 0,05—0,12 *мм*, расположенную вертикально (рис. 1, *а*). Тогда слева и справа от источника мы увидим узкую светлую полоску. Она возникает вследствие дифракции света, поэтому будем называть ее дифракционной полоской. Роль точечного источника света при этих наблюдениях может играть малое отверстие *О* в ширме *А*, установленной перед лампочкой (см. рис. 1, *а*). Проволоку *П* можно заменить тонкой нитью или волосом.

При внимательном рассмотрении дифракционной полоски в ее середине виден белый участок с красноватыми краями — нулевой максимум (рис. 1, *б*), с обеих сторон он ограничен узкими темными промежутками — первыми минимумами. Затем идут цветные участки, в которых при удалении от центра полоски зеленовато-голубая окраска постепенно переходит в красную. За красным краем этих участков опять следуют темные промежутки — вторые минимумы. Далее картина повторяется с той лишь разницей, что минимумы просматриваются все хуже, и в конце концов светлые участки сливаются в сплошную полоску. Наблюдения, проведенные с проволокой разного диаметра, показывают, что расстояние между двумя соседними минимумами тем больше, чем меньше диаметр проволоки.

Теперь кусок проволоки, с которой проводились наблюдения дифракционной полоски, скомкаем в моток, имеющий форму диска диаметром с копеечную монету. Для этого достаточно взять проволоку длиной 2—3 *м*. Поместим получившийся моток перед глазом и посмотрим на точечный источник света. Теперь мы увидим венцы — центральный белый круг с красноватыми краями, окруженный цветными кольцами (рис. 1, *в*). Венцы отделяются друг от друга узкими темными кольцами — минимумами. Каждое темное кольцо следует за красным краем предыдущего венца. Причем, если расстояние до источника то же, что и при наблюдении



а) б) в)

дифракции от проволоки, диаметры темных колец оказываются равными расстояниям между соответствующими минимумами дифракционной полоски (см. рис. 1, *б* и *в*). Венцы видны тем лучше, чем меньше диаметр проволоки.

Почему же возникают венцы при помещении мотка проволоки на пути лучей, идущих от точечного источника света? Каждый малый участок проволоки, находящийся перед глазом, дает свою дифракционную полоску, расположенную симметрично относительно источника света. Вследствие различной ориентации участков проволоки в мотке различные направления имеют и возникающие от них дифракционные полоски, причем все они пересекаются в одной точке, совпадающей с источником света. Толщина всех участков проволоки одинакова, поэтому минимумы одного и того же порядка располагаются во всех дифракционных полосках на одинаковом расстоянии от источника света и сливаются в темные кольца. Цветные участки, заключенные между минимумами, сливаются при этом в цветные кольца.

Найдем теперь условия возникновения минимумов при дифракции от проволоки (прямоугольного препятствия) для монохроматического света длины волны λ. Будем считать, что источник света достаточно удален, так что лучи, идущие от него, являются параллельными. Рассмотрим нормальное падение лучей на преграду (рис. 2). Согласно принципу Гюйгенса каждая точка среды, до которой дошла волна, становится точечным источником (вторичным), от которого волны распространяются по всем направлениям. В отсутствие препятствия результат интерференции этих вторичных волн оказывается таким, что свет распространяется только по прямой, соединяющей источник света с наблюдателем. По всем другим направлениям происходит гашение света. Наличие препятствия нарушает условие интерференции вторичных волн, и гашение света наблюдается лишь по вполне определенным направлениям (минимумы дифракционной картины).

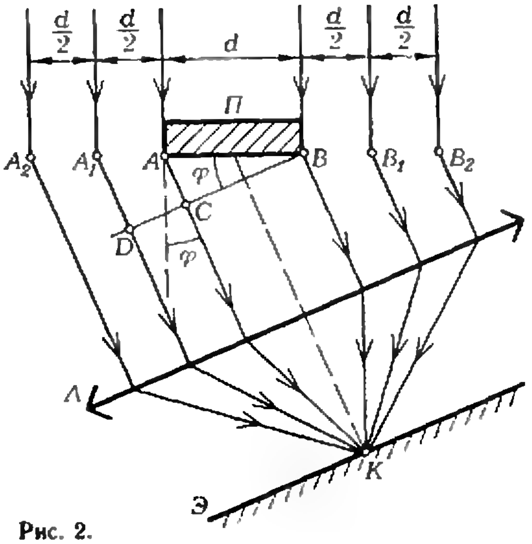


Рис. 2.

Рассмотрим волны, которые дифрагируют под углом φ к первоначальному направлению. Глаз сводит их на сетчатку в одну точку (точка *К* на рисунке 1, *а*), где при наложении они интерферируют. На рисунке 2 роль глаза играет линза *Л*, а роль сетчатки — экран *Э*, расположенный в фокальной плоскости линзы. (Для упрощения рассуждений линза *Л* расположена так, что ее главная оптическая ось параллельна дифрагирующим лучам.) Результат интерференции в точке *К* зависит от разности хода волн, идущих от крайних точек *А* и *В* преграды *П*. Непосредственно из рисунка 2 эта разность хода равна $|AC| = d \sin\varphi$, где d — ширина преграды. Строгий расчет дает, что при дифракции от прямоугольной преграды минимумы наблюдаются, когда разность хода волн от крайних точек преграды

$$d \sin\varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

где λ — длина световой волны, k — номер (порядок) минимума ($k = 1, 2, \ldots$).

Покажем справедливость формулы (1) для первого минимума, то есть для $k = 1$. Пусть вторичные волны от всех точек волнового фронта распространяются под углом φ таким, что выполняется условие

$$d \sin\varphi = \lambda. \qquad (2)$$

Мысленно разобьем волновой фронт на прямоугольные параллельные преграде зоны одинаковой ширины $d/2$. На рисунке 2 этим зонам соответствуют участки AA_1, A_1A_2, ... и BB_1, B_1B_2, ... Рассмотрим вначале волны от зон AA_1 и BB_1. Точки в этих зонах, отстоящие друг от друга на расстоянии $3/2\,d$, например, точки A_1 и B, будем называть соответственными. У всех волн, выходящих из соответственных точек, разность хода будет одинаковой. Из треугольника A_1BD эта разность хода равна

$$|A_1D| = 3/2\,d \sin \varphi. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что $|A_1D| = 3/2\,\lambda$, то есть разность хода равна нечетному числу полуволн. Такие волны гасят друг друга. Следовательно, все волны от зон AA_1 и BB_1 при выполнении условия (2) гасятся в точке K.

Аналогичные рассуждения можно провести для любой пары последующих симметрично расположенных зон и показать, что волны от всех зон гасят друг друга и в точке K действительно наблюдается минимум.

Таким же образом можно показать, что второй минимум наблюдается при выполнении условия $d \sin \varphi = 2\lambda$. В этом случае волновой фронт надо разбить на зоны шириной $d/4$ и провести соответствующие рассуждения.

Формула (1) позволяет определить длину световой волны:

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{k}.$$

Однако измерения значительно упрощаются, если использовать простейшее измерительное устройство, называемое *эриометром*. Для изготовления эриометра берут квадратный кусок картона со стороной 10—15 *см* и в его середине проводят окружность радиусом $r = 20$—30 *мм*. В центре окружности прокалывают отверстие диаметром 2—3 *мм*, а вдоль окружности прокалывают 6—8 отверстий меньшего диаметра.

При измерениях эриометр A (см. рис. 1, *а*) устанавливают непосредственно перед лампочкой накаливания. Отойдя от эриометра на расстояние 1—2 *м*, находят такое положение, при котором через отверстие O в глаз наблюдателя попадают лучи, идущие непосредственно от одного из участков раскаленной нити. Затем перед глазом помещают моток проволоки и добиваются хорошего видения венцов, перемещая моток в направлении, перпендикулярном лучам. Изменяя расстояние между эриометром и глазом, находят положение, при котором окружность эриометра с отверстиями совпадает с серединой темного кольца с номером k (на рисунке 1 изображен случай, когда $k=2$).

Как видно из рисунка 1, тангенс угла дифракции φ для темного кольца подсчитывается по формуле $\operatorname{tg} \varphi = r/l$, где r — радиус окружности эриометра, l — расстояние от эриометра до мотка проволоки. При малых углах дифракции, с которыми приходится иметь дело при таких измерениях, справедливо соотношение

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{l}.$$

Подставляя значение $\sin \varphi$ в выражение (1), получаем формулу для определения длины волны:

$$\lambda = \frac{dr}{kl}. \qquad (4)$$

Радиус окружности эриометра r нам заранее известен. Расстояние l легко измерить. Номер темного кольца k определяется при наблюдении венцов. Диаметр проволоки d, если он не известен, измеряют микрометром.

Если измерения производят в белом свете, то по формуле (4) находят эффективную длину световой волны, к которой наиболее чувствителен наш глаз. Она приблизительно равна 0,56 *мкм*. Световые волны такой длины соответствуют зеленой части спектра.

Венцы могут возникать и при дифракции света на круглых преградах. Наблюдать их можно следующим образом. Насыпьте на стеклянную пластинку небольшое количество ликоподия (ликоподий — порошок из спор плауна, его можно купить в аптеке). Легким постукиванием торца пластины о стол удалите излишек порошка. Если через такую пластинку посмотреть на точечный источник света, то вы увидите венцы. Роль круглых преград в этом опыте играют споры сферической формы. Особенно яркие венцы возникают при рассматривании капли крови, сжатой между двумя стеклянными пластинами. В этом случае венцы возникают при дифракции на эритроцитах — красных кровяных тельцах.

Венцы, возникающие от круглых и прямоугольных преград, несколько отличаются друг от друга. Условие минимумов для венцов от прямоугольных преград выражается соотношением (1). Для венцов от круглых препятствий оно имеет вид:

$$d \sin\varphi = 1{,}22\lambda;\ 2{,}23\lambda;\ \ldots \qquad (5)$$

Здесь d — диаметр круглого экрана. Применяя эриометр, по формуле (5) можно определить средний диаметр спор плауна и эритроцитов без микроскопа!

В природе венцы наблюдаются вокруг Солнца, Луны и даже планет. Они возникают при прохождении света через облако, состоящее из капелек воды (круглые преграды) или ледяных кристалликов — призмочек (прямоугольные преграды). Хорошо видимые венцы получаются лишь в том случае, когда в облаке преобладают капельки одинакового диаметра или кристаллики одинаковой толщины. Иногда венцы наблюдаются при прохождении света от удаленного фонаря через слой тумана или оконное стекло, покрытое морозными узорами.

Упражнения

1 По известной эффективной длине волны ($\lambda = 0.56$ *мкм*) найдите с помощью эриометра диаметр элементарных нитей, из которых изготавливают капроновые чулки и ленты.

2 Как по виду венцов определить, состоит ли облако из водяных капелек или кристалликов льда?

3. Угловой диаметр Луны равен 32′. Оцените диаметр капелек в облаке, если угловой радиус центрального круга в венцах в четыре раза больше углового диаметра Луны.

Задачи наших читателей

1. Дан треугольник ABC площади S, в котором $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, p — полупериметр, $p_a = p - a$, $p_b = p - b$, $p_c = p - c$; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB; R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности,

Доказать, что

$$\text{а)}\ \frac{p_a}{\cos\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}} = \frac{p_b}{\cos\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{p_c}{\cos\frac{\hat{C}}{2}\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}} = 4R;$$

$$\text{б)}\ \frac{r_a}{\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}} = \frac{r_b}{\sin\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{r_c}{\sin\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}} = 4R;$$

$$\text{в)}\ r_a \operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} = r_b \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = r_c \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\times\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = r;$$

$$\text{г)}\ S = r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{\hat{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\times\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} = r_b^2 \operatorname{ctg}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\times\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = r_c^2 \operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2};$$

$$\text{д)}\ S = p_a^2 \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\hat{B}}{2}\times\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2} = p_b^2 \operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2}\times\operatorname{ctg}\frac{\hat{A}}{2} = p_c^2 \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\hat{A}}{2}\times\operatorname{ctg}\frac{\hat{B}}{2};$$

$$\text{е)}\ \frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}}{r_a^2} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}}{r_b^2} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}}{r_c^2} = \frac{1}{S};$$

$$\text{ж)}\ \frac{1}{p_a p_b} + \frac{1}{p_b p_c} + \frac{1}{p_c p_a} = \frac{1}{r^2}.$$

У. Алла
(г. Выру)

2. В системе

$$\begin{cases} 2\cdot\overline{\text{он}} = \overline{\text{тук}}, \\ 7\cdot\overline{\text{трон}} = \overline{\text{туктук}} \end{cases}$$

разным буквам соответствуют разные, отличные от нуля цифры. Определить, какое четырехзначное число соответствует слову «трон».

М. Штеренберг
(г. Саратов)

3. Доказать, что при любом натуральном t значение многочлена $36t^4 + 48t^3 + 40t^2 + 16t + 5$ является составным числом.

Г. Шаехов
(дер. Н. Табын Тат. АССР)

В. Рабинович

Аффинные задачи и теоремы

Можно ли задачу о параллелограмме решать для квадрата? Достаточно ли теорему о треугольниках доказать для равносторонних треугольников? Оказывается, иногда можно, иногда достаточно. О таких задачах и теоремах рассказывается в данной статье.

1. Параллельное проектирование

Пусть имеются две плоскости α и β и прямая a, пересекающая каждую из этих плоскостей (рис. 1). Определим отображение Π_a плоскости α на плоскость β следующим образом: произвольной точке $A\in\alpha$ поставим в соответствие точку $A'\in\beta$, в которой прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой a, пересекается с плоскостью β. Применяя обычные функциональные обозначения, будем писать $\Pi_a(A)=A'$. Отображение Π_a естественно называется *параллельным проектированием*. Очевидно, если $A\neq B$ ($A\in\alpha$ и $B\in\alpha$), то $\Pi_a(A)\neq\Pi_a(B)$. Таким образом, параллельное проектирование является обратимым отображением («Алгебра 8», п. 20)*). Поэтому можно говорить об обратном отображении. Отображение Π_a^{-1}, обратное к параллельному проектированию Π_a, будет, очевидно, параллельным проектированием плоскости β на плоскость α: $\Pi_a^{-1}(A')=A$.

Параллельное проектирование Π_a любую фигуру Γ на плоскости α переводит в некоторую фигуру $\Pi_a(\Gamma)$ на плоскости β (рис. 1) — *образ фигуры* Γ *при отображении* Π_a.

Упражнение 1. Докажите, что образ прямой при параллельном проектировании есть прямая и при этом, если точка A лежит между B и C, то $\Pi_a(A)$ лежит между $\Pi_a(B)$ и $\Pi_a(C)$.

Отсюда, очевидно, вытекает, что образ отрезка есть отрезок, образ многоугольника есть многоугольник (с тем же числом сторон).

Упражнение 2. Докажите, что параллельное проектирование сохраняет параллельность: если $l\parallel m$, то $\Pi_a(l)\parallel\Pi_a(m)$.

Значит, образ параллелограмма — параллелограмм, образ трапеции — трапеция.

Упражнение 3. Докажите, что отношение длин параллельных отрезков есть инвариант параллельного проектирования: если отрезки AB, CD лежат на одной прямой (или на параллельных прямых) в плоскости α, то $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A'B'|}{|C'D'|}$ (здесь $A'=\Pi_a(A)$ и т. д.).

Следовательно, если AK — медиана треугольника ABC ($\triangle ABC\subset\alpha$), то $A'K'$ — медиана треугольника $A'B'C'$.

Упражнение 4. Докажите, что отношение площадей фигур есть инвариант параллельного проектирования: если $\Gamma\subset\alpha$ и $\Delta\subset\alpha$, то $\frac{S(\Gamma)}{S(\Delta)}=\frac{S(\Pi_a(\Gamma))}{S(\Pi_a(\Delta))}$. Указание. При доказательстве разрешается

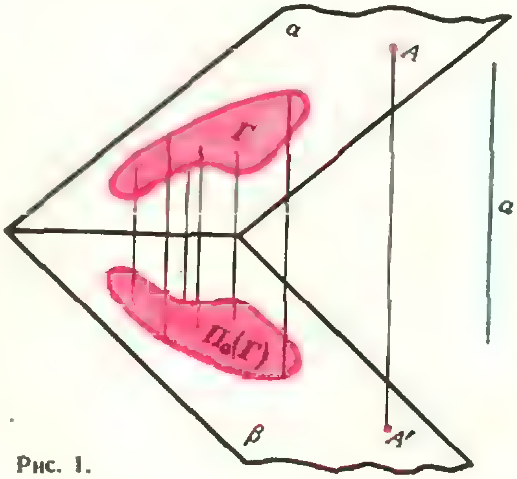


Рис. 1.

---

*) Параллельное проектирование, рассматриваемое в данной статье, есть отображение плоскости (на плоскость). Параллельное проектирование из §12 «Геометрии 9» есть отображение пространства (на плоскость). Обратимым оно не является.

воспользоваться тем, что для любой фигуры $\Gamma \subset \alpha$ при ортогональном проектировании Π на плоскость γ выполняется соотношение: $S(\Pi(\Gamma)) = S(\Gamma) \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями α и γ (см. § 50 «Геометрии 10» или «Квант», 1972, № 6, с. 13).

2. Аффинный образ

Назовем плоскую фигуру Δ *аффинным образом* плоской фигуры Γ, если при некотором параллельном проектировании Π_a имеем $\Delta = \Pi_a(\Gamma)$, то есть если можно подобрать такие плоскости α, β (подобрать плоскости — это, конечно, означает «подобрать угол между плоскостями») и прямую a и так разместить фигуры Γ, Δ в плоскостях, соответственно, α и β, что $\Pi_a(\Gamma) = \Delta$*).

Упражнение 5. Докажите, что, каковы бы ни были треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, среди треугольников, подобных треугольнику $A_1B_1C_1$, существует аффинный образ треугольника ABC.

Таким образом, среди аффинных образов произвольного треугольника есть равносторонний треугольник.

Упражнение 6. Докажите, что среди аффинных образов произвольного параллелограмма есть квадрат.

Упражнение 7. Докажите, что среди аффинных образов произвольной трапеции есть равнобедренная трапеция.

Упражнение 8. Докажите, что среди аффинных образов произвольного выпуклого четырехугольника есть четырехугольник с равными и взаимно перпендикулярными диагоналями.

Упражнение 9. Верно ли, что среди аффинных образов произвольного центрально симметричного шестиугольника есть правильный шестиугольник?

3. Аффинные свойства и теоремы

Свойство плоской фигуры называется *аффинным*, если оно сохраняется при параллельном проектировании. Например, в силу упражнения 2, параллельность прямых — аффинное свойство.

Упражнение 10. Докажите, что свойство «точка M есть середина отрезка AB» — аффинное.

Отсюда вытекает, что свойство «AD — медиана треугольника ABC» — аффинное.

Упражнение 11. Докажите, что свойство «KL — средняя линия трапеции $ABCD$» — аффинное.

Планиметрическая теорема называется *аффинной*, если ее условие и заключение являются аффинными свойствами.

Переформулируем, например, теорему *«Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам»* следующим образом: *если $ABCD$ — параллелограмм и $[AC] \cap [BD] = O$, то $|AO| = |OC|$ и $|BO| = |OD|$.* Из упражнений 2, 10 вытекает, что эта теорема — аффинная.

Упражнение 12. Докажите, что теорема *«Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1 (считая от вершины)»* — аффинная. Указание. Переформулируйте ее предварительно в виде *импликации*: если A, то B.

Упражнение 13. Докажите, что теорема *«Средняя линия трапеции параллельна основаниям и длина ее равна полусумме длин оснований»* — аффинная.

Аффинные теоремы и можно как раз доказывать тем «недопустимым» способом, о котором говорилось в начале статьи — переходом к аффинным образам.

Докажем таким способом, для примера, теорему: прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам. Переформулируем ее в виде импликации: если $ABCD$ — трапеция, $[AD] \parallel [BC]$, $[AC] \cap [BD] = O$, $(AB) \cap (CD) = K$, $(KO) \cap [BC] = P$ и $(KO) \cap [AD] = Q$, то $|BP| = |PC|$ и $|AQ| = |QD|$ (рис. 2).

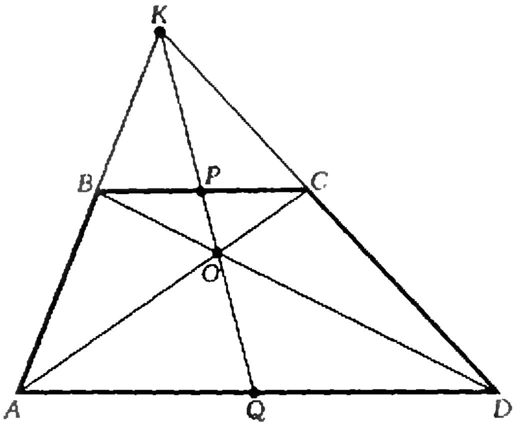


Рис. 2.

---

*) Слово «аффинный» происходит от латинского слова *affinis* («родственный», «соответственный»).

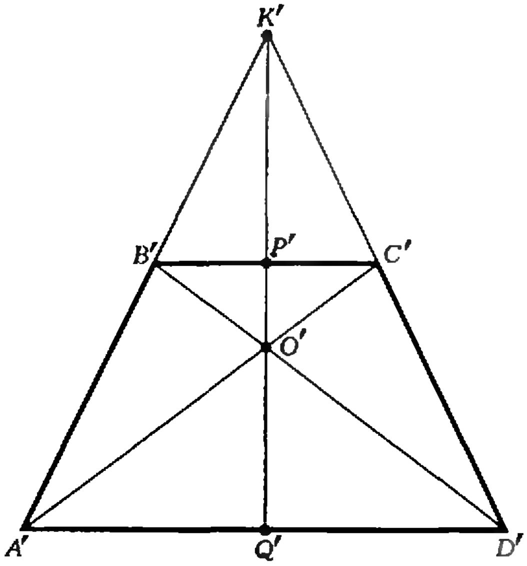


Рис. 3.

Из упражнений 2, 10 вытекает, что эта теорема — аффинная. Согласно упражнению 7 среди аффинных образов данной трапеции $ABCD$ есть равнобедренная трапеция. Проделав соответствующее параллельное проектирование П, перейдем от трапеции $ABCD$ к равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ перейдут при этом в диагонали $A'C'$ и $B'D'$ трапеции $A'B'C'D'$, точки O, K, P, Q в точки, соответственно, $O' = [A'C'] \cap [B'D']$, $K' = (A'B') \cap (C'D')$, $P' = (K'O') \cap [B'C']$ и $Q' = (K'O') \cap [A'D']$ (рис. 3).

В равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$, как известно, $|A'C'| = |B'D'|$ и $B'\widehat{A'}D' = C'\widehat{D'}A'$ (задача 2 к п. 50 «Геометрии 7»). Отсюда легко вывести, что $|A'K'| = |D'K'|$ и $A'\widehat{K'}Q' = D'\widehat{K'}Q'$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике $A'K'D'$ отрезок $K'Q'$ является биссектрисой, а значит — и медианой: $|A'Q'| = |Q'D'|$. Аналогично доказывается, что $|B'P'| = |P'C'|$.

Проделаем теперь обратное параллельное проектирование Π^{-1}. При Π^{-1} «всё» перейдет «обратно»: A' — в A, B' — в B и т. д. Из упражнения 10 вытекает, что $|BP| = |PC|$ и $|AQ| = |QD|$.

На самом деле, если мы заранее проверили, что доказываемая нами теорема — аффинная, и мы доказываем ее таким способом (переходом к аффинному образу), то обратное проектирование делать не нужно: верность заключения доказываемой теоремы вытекает просто из его аффинности.

Так можно доказывать — в принципе — любую аффинную теорему.

Упражнение 14. Докажите таким образом теоремы из упражнений 12, 13.

4. Взгляд с высоты

На самом деле, более естественным определением аффинного образа было бы следующее определение: плоская фигура Δ называется *аффинным образом* плоской фигуры Г, если ее можно получить из Г при помощи композиции конечного числа параллельных проектирований. Аналогично, свойство плоской фигуры естественно называть *аффинным*, если оно сохраняется при композиции конечного числа параллельных проектирований.

Так определенное понятие аффинного образа (в отличие от того, которое было определено в п. 2) является транзитивным: если Δ — аффинный образ (плоской) фигуры Г, а Σ — аффинный образ фигуры Δ, то Σ — аффинный образ фигуры Г. Поскольку это понятие также симметрично (если Δ — аффинный образ фигуры Г, то и Г — аффинный образ фигуры Δ) и рефлексивно (любая плоская фигура Г является аффинным образом самой себя), можно (=разумно) дать следующее определение: две плоские фигуры Г, Δ называются *аффинно эквивалентными*, если одна из них является аффинным образом другой.

Вместо теорем из упражнений 5—7 можно теперь сформулировать более изящные теоремы: все треугольники аффинно эквивалентны, все параллелограммы аффинно эквивалентны, все трапеции аффинно эквивалентны.

В школьной геометрии фигуры фактически рассматриваются с точностью до конгруэнтности, т. е. конгруэнтные фигуры как бы отождествляются, считаются эквивалентными. Поэтому эту геометрию можно рассматривать как науку о свойствах фигур, не меняющихся при перемещениях.

Геометрия на плоскости, в основу которой положены композиции конечного числа параллельных проектирований *) (такие композиции называются *аффинными преобразованиями плоскости*), т. е. геометрия, в которой аффинно эквивалентные фигуры отождествляются, называется *аффинной геометрией*. Аффинная геометрия — это наука о свойствах фигур, не меняющихся при аффинных преобразованиях. В этой статье вы познакомились с некоторыми понятиями этой геометрии.

Задачи

1. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые l, m, n, параллельные, соответственно, $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Пусть $l\cap[BC]=A_1$, $m\cap[AC]=B_1$, $n\cap[AB]=C_1$. Докажите, что $\frac{|PA_1|}{|AB|}+\frac{|PB_1|}{|BC|}+\frac{|PC_1|}{|CA|}=1$.

2. Докажите теорему Менелая: если прямая l пересекает сторону AB треугольника ABC в точке R, сторону BC — в точке P и продолжение стороны AC — в точке Q, то $\frac{|PB|\cdot|QC|\cdot|RA|}{|PC|\cdot|QA|\cdot|RB|}=1$.

3. В треугольнике ABC через точки $L\in[AC]$ и $K\in[AC]$ такие, что $|AL|=|CK|$, проведены, соответственно, прямые $l\parallel AB$ и $k\parallel BC$. Пусть $k\cap l=O$. Докажите, что прямая BO проходит через середину отрезка AC.

4. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты, соответственно, точки P, Q, R и S. Найти площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, образованного при пересечении прямых AR, BS, CP и DQ, если площадь исходного параллелограмма $ABCD$ равна t, $|AS|=|CQ|$, $|BP|=|DR|$ и $\frac{|AS|}{|AD|}=\frac{|DR|}{|CD|}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат, соответственно, на $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DA]$. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и D_1A_1 четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ взяты, соответственно, точки A_2, B_2, C_2 и D_2. Известно, что

$$\frac{|AA_1|}{|BA_1|}=\frac{|BB_1|}{|CB_1|}=\frac{|CC_1|}{|DC_1|}=\frac{|DD_1|}{|AD_1|}=\frac{|A_1D_2|}{|D_1D_2|}=\frac{|D_1C_2|}{|C_1C_2|}=\frac{|C_1B_2|}{|B_1B_2|}=\frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|}.$$

Докажите, что четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам исходного параллелограмма.

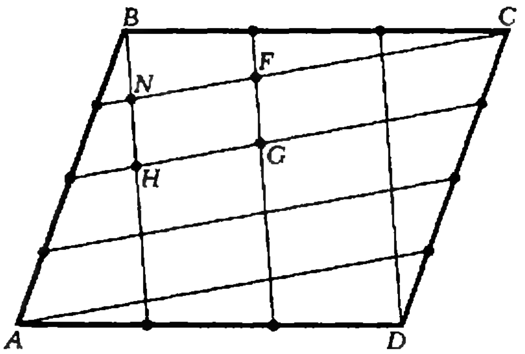


Рис. 4.

6. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и прямая l пересекает лучи $[AB)$, $[AC)$, $[AD)$ в точках, соответственно, P, Q и R. Докажите, что $\frac{|AB|}{|AP|}+\frac{|AD|}{|AR|}=\frac{|AC|}{|AQ|}$.

7. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB разделена на m, сторона BC — на n равных частей. Через точки деления проведены прямые так, как показано на рисунке 4. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $NFGH$?

8. В трапеции $ABCD$ ($[AD]\parallel[BC]$) через точку B проведена прямая, параллельная CD и пересекающаяся с $[AC]$ в точке P, а через C — прямая, параллельная AB и пересекающаяся с $[BD]$ в Q. Докажите, что $[PQ]\parallel[AD]$.

9. В трапеции $ABCD$ ($[AD]\parallel[BC]$) через точку C проведена прямая, параллельная AB и пересекающаяся с BD в точке P. Известно, что $|BO|=|PD|$, где $O=[AC]\cap[BD]$. Докажите, что $|AD|^2=|BC|^2+|AD|\cdot|BC|$.

---

*) В этой статье параллельное проектирование рассматривается как отображение одной плоскости, вообще говоря, на другую. Но в результате композиции таких отображений мы можем добиться расположения образа в первоначальной плоскости.

задачник Кванта

Задачи

М456—М460; Ф468—Ф472

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М456, М457» или «Ф468». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующем номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М456. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

В. Произволов

М457. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое (рис. 1). Докажите, что число особенных пар четно.

С. Фомин

М458. Написан многочлен $x^{10}+*x^9+*x^8+\ldots+*x^2+*x+1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

Д. и И. Бернштейны

М459. В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

А. Берзиньш

М460. Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A *особым*, если оно само является точным квадратом и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

А. Левин, И. Бернштейн

Ф468. Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимает реальный кран, изготовленный из тех же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели? (8 кл.)

Ф469. Рисунок 2 сделан со стробоскопической фотографии кубика, движущегося вдоль наклонной плоскости. Промежутки времени между последовательными вспышками лампы равны 0,1 *сек*. Определить коэффициент трения кубика о плоскость. (8 кл.)

Ф470. При подключении гальванического элемента напряжением 1,5 *в* к зажимам A и $Б$ амперметр показал ток 1 *а* (рис. 3). Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток упал в два раза. Какая электрическая цепь находится внутри коробки? (8 кл.)

Ф471. Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий (рис. 4). Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным p, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости. (10 кл.)

Ф472. Нарисовать примерный график зависимости от времени показания вольтметра после размыкания ключа K (рис. 5). Вольтметр и катушка индуктивности идеальные, $R = 100$ *ом*, $U = 300$ *в*. (10 кл.)

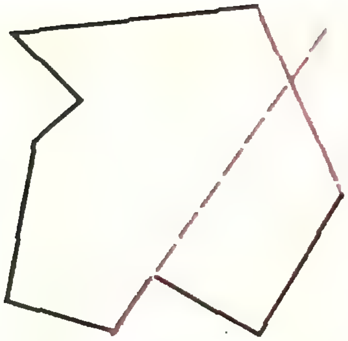


Рис. 1.

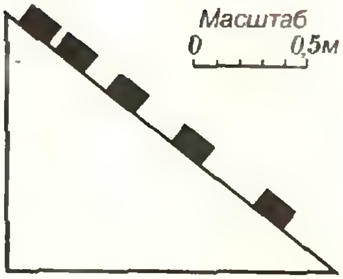


Рис. 2.

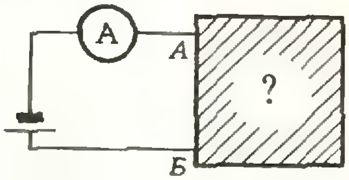


Рис. 3.

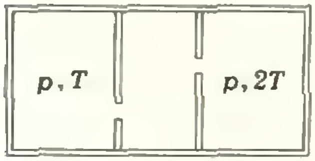


Рис. 4.

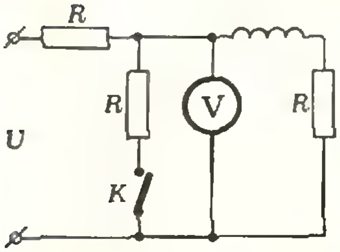


Рис. 5.

Решения задач

М416—М419; Ф428—Ф431

М416. *На плоскости даны n точек $A_1, \ldots, A_n$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках?*

Проведем максимальное число отрезков с концами в точках $A_1, \ldots, A_n$. Получим некоторый *граф* с вершинами в этих точках. Отрезки с концами в вершинах графа будем называть *ребрами* графа. Оценим число ребер в нашем графе.

Назовем *степенью вершины* в графе число выходящих из нее ребер. Пусть k — максимальная степень вершины в графе, и пусть некоторая вершина A_i соединена с k вершинами $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ графа (рис. 1). Тогда степень любой вершины из множества $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\}$ не превосходит $n-k$ (n — число вершин графа), поскольку любые вершины из этого множества уже не могут быть соединены ребром (в нашем графе никакие три ребра не образуют треугольника — с вершинами в вершинах графа). Так как k — максимальная степень вершины в графе, степень каждой из оставшихся $n-k$ вершин не превосходит k. Поэтому сумма степеней всех вершин графа не превосходит $k\cdot(n-k)+(n-k)\cdot k=2k(n-k)$. Но легко видеть, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству его ребер. Следовательно, количество ребер графа не больше $k(n-k)\leqslant\left(\frac{k+(n-k)}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$ (мы воспользовались теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Учитывая, что количество ребер графа — число целое, мы получаем, что ребер в нашем графе не больше чем $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ (здесь $[x]$ означает *целую часть* числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x).

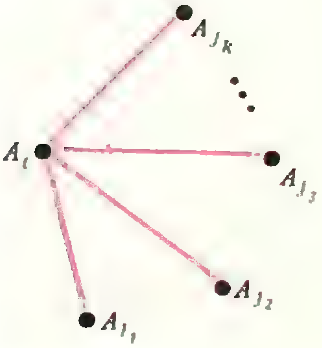


Рис. 1.

Укажем теперь способ построения графа без треугольников с n вершинами, число ребер которого в точности равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Разобьем множество точек $A_1, \ldots, A_n$ на два: $\left[\frac{n}{2}\right]$ точек в одном множестве и $n-\left[\frac{n}{2}\right]$ — в другом. Соединив все точки первого множества с точками второго (как на рисунке 2, где $n=5$), мы получим граф, у которого не будет ни одного треугольника с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_n$. Число ребер в этом графе, очевидно, равно $\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Если n — четное, то $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\frac{n^2}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$. Если n — нечетное, то $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\frac{n-1}{2}\left(n-\frac{n-1}{2}\right)=$ $=\frac{n^2-1}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$, что и требовалось доказать.

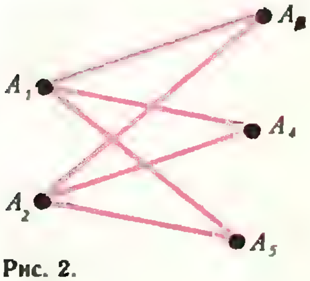


Рис. 2.

Итак, ответ в задаче: максимальное число отрезков равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ (этот результат в теории графов называют *теоремой Турана*).

Г. Фридман

◆

М417. *На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия. На каждой грани куба находится по крайней мере одно звено ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше $3\sqrt{2}$.*

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — звенья ломаной. Спроектируем каждое звено l_i ломаной на стороны грани, в которой оно лежит; пусть a_i и b_i — длины двух проекций звена l_i. Оценим сумму длин этих проекций.

Рассмотрим проекции ломаной на вертикальное направление (параллельное ребру куба). Поскольку ломаная замкнута и проходит как по верхней, так и по нижней граням куба, сумма длин этих проекций не меньше двух. То же самое верно

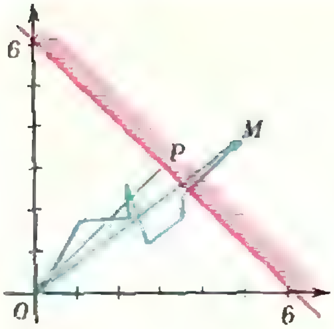


Рис. 3.

и для двух других направлений, параллельных ребру куба. Значит, сумма всех длин проекций не меньше шести. А эта сумма равна как раз сумме всех a_i и b_i ($i=1, \ldots, k$), так что

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_k \geqslant 6. \qquad (1)$$

Докажем, что из (1) вытекает нужное нам неравенство:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_k^2+b_k^2} \geqslant 3\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Это можно сделать алгебраически, но мы приведем простое геометрическое доказательство.

Построим на координатной плоскости ломаную из k звеньев, длины проекций i-го звена которой равны a_i и b_i ($i=1, 2, \ldots k$), с началом в точке O (0;0) (рис. 3). Из (1) следует, что конец M $(a_1+\ldots+a_k;\ b_1+\ldots+b_k)$ этой ломаной лежит выше прямой $a+b=6$ (или на этой прямой). Расстояние от точки O до этой прямой равно $3\sqrt{2}$. Ясно, что длина любой ломаной, соединяющей точки O и M, *не меньше* $3\sqrt{2}$ — это и есть неравенство (2). Заметим, что оценка $3\sqrt{2}$ точная. Она достигается для сечения куба, перпендикулярного его диагонали и имеющего форму шестиугольника.

Н. Васильев

◆

М418. *Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполняются неравенства:*

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

Для доказательства мы воспользуемся *теоремой Коши* о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Тогда

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

причем равенство достигается лишь в случае, когда все числа равны.

Запишем теорему Коши для чисел 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, …, $\frac{n-1}{n}$:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}}{n} > \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Перепишем это неравенство так:

$$1-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right) > \frac{n}{\sqrt[n]{n}}.$$

Отсюда получаем одно из нужных нам неравенств:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

Чтобы доказать второе неравенство, запишем теорему Коши для чисел 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, …, $\frac{n+1}{n}$:

$$\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n} < \sqrt[n]{n+1},$$

или

$$2+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right) > n\sqrt[n]{n+1},$$

откуда

$$n+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)>n\sqrt[n]{n+1},$$

то есть

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right).$$

Л. Курляндчик

◆

М419. *В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не меньше 10 из данных точек.*

Прежде чем решать эту задачу, докажем такое вспомогательное утверждение. Пусть фигура S площади s содержит фигуры $S_1, \ldots, S_l$ площади $s_1, \ldots, s_l$, такие, что каждая точка фигуры S покрыта не более чем k фигурами S_i. Тогда $\sum s_i = s_1+s_2+\ldots+s_l \leqslant ks$. В самом деле, рассмотрим фигурки T_j, получающиеся при пересечении фигур S_i (рис. 4); на каждой из фигурок T_j напишем число, показывающее, скольким S_i она принадлежит. Очевидно, что $\sum t_j \leqslant s$ (t_j — площадь фигурки T_j). С другой стороны, не менее очевидно, что $\sum s_i \leqslant k\sum t_j$ (k — максимально возможное число пересечений S_i). Отсюда получаем, что $\sum s_i \leqslant ks$.

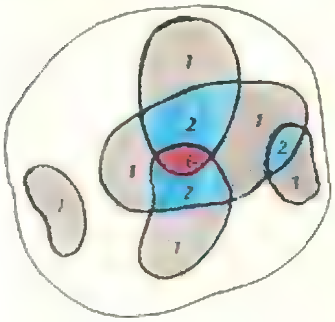


Рис. 4.

Вернемся к нашей задаче.

Опишем вокруг каждой данной точки кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним — 3; всего 650 колец. Докажем, что среди них обязательно найдется не менее десяти пересекающихся.

Возьмем объединение этих 650 колец; они как-то расположены в круге радиуса $16+3=19$. Допустим, что каждая точка этого круга покрывается не более чем девятью кольцами, и покажем, что это приводит к противоречию. Для этого посчитаем площади.

Площадь круга радиуса 19 равна $S=361\pi$. Площадь одного кольца $s=5\pi$, так что площадь всех 650 колец равна $650\cdot5\pi=3250\pi$. Если кольца пересекаются не более чем по 9, то согласно утверждению, доказанному выше,

$$\sum s=3250\pi\leqslant 9S=9\cdot361\pi=3249\pi$$

—противоречие.

Итак, мы доказали, что найдется не менее десяти пересекающихся колец.

Отсюда следует утверждение задачи. Действительно, если есть два пересекающихся кольца внутреннего радиуса 2 и внешнего 3 с центрами O_1 и O_2, то любая точка M, принадлежащая их пересечению, удалена от точек O_1 и O_2 на расстояние ρ: $2\leqslant\rho\leqslant3$; так что точки O_1 и O_2 попадают в нужное нам кольцо с центром M (рис. 5). В кольце же (радиусов 2 и 3) с центром в любой точке из непустого (!) пересечения не менее десяти колец будет лежать не менее десяти данных точек — центров этих пересекающихся колец.

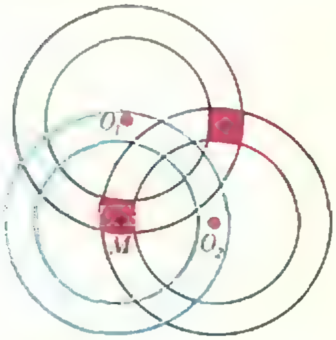


Рис. 5.

И. Климова

◆

Ф428. *Сфера радиуса $R=0{,}5$ м вращается вокруг ее вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью $\omega=5$ рад/сек (рис. 6). Вместе со сферой на ее внутренней поверхности вращается небольшое тело, находящееся на высоте, равной половине радиуса.*

1) Определить минимальное значение коэффициента трения, при котором это состояние возможно.

Рассмотрим силы, действующие на тело в положении равновесия (рис. 7). Со стороны сферы на тело действует сила $\vec{F}_1$ — равнодействующая силы нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, касательной к поверхности сферы. Направление силы трения (вверх или вниз по касательной) зависит от того, выше или ниже находится положение равновесия тела и отсутствие трения. Однако во всех случаях

$$|\vec{F}_{\text{тр}}|\leqslant\mu|\vec{N}|.$$

Это означает, что сила $\vec{F}_1$ направлена так, что тангенс угла β, *2) Определить минимальное значение коэффициента трения, если угловая скорость сферы равна 8 рад/сек.*

3) Исследовать устойчивость состояний в случае вышенайденных значений коэффициента трения при: а) малых изменениях положения тела; б) малых изменениях угловой скорости сферы.

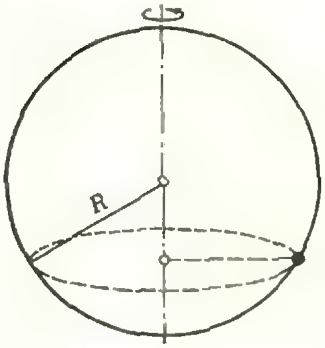


Рис. 6.

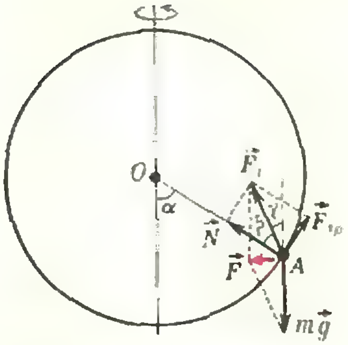


Рис. 7.

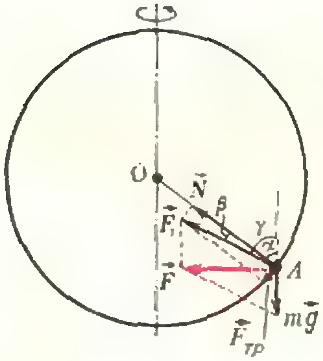


Рис. 8.

который образует эта сила с радиусом OA, не превышает μ:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{|\vec F_{\text{тр}}|}{|\vec N|}\leqslant\mu.$$

Следовательно, коэффициент трения можно найти, определив угол β.

Кроме силы $\vec F_1$ на тело действует еще сила тяжести $m\vec g$. Поскольку тело движется по окружности радиуса r, равнодействующая $\vec F$ сил $\vec F_1$ и $m\vec g$ направлена горизонтально и равна по абсолютной величине $m\omega^2 r$:

$$\vec F=\vec F_1+m\vec g,\quad |\vec F|=m\omega^2 r.$$

Обозначим через α угол между радиусом OA и вертикалью, а через γ — угол между направлением силы $\vec F_1$ и вертикалью (см. рис. 7). Тогда

$$\beta=\alpha-\gamma,$$

и

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}. \tag{1}$$

Но $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{m\omega^2 r}{m|\vec g|}$, где $r=R\sin\alpha$, а $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{R^2-R^2/4}}{R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\alpha=60^\circ$. Тогда из выражения (1)

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{\omega^2R\sin\alpha}{|\vec g|}}{1+\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\omega^2R\sin\alpha}{|\vec g|}}. \tag{2}$$

Подставляя сюда $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$, $\omega=5$ *рад/сек*, $R=0.5$ *м* и $|\vec g|=10$ *м/сек*^{2}, получим

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{3\sqrt{3}}{23},$$

и

$$\mu\geqslant\operatorname{tg}\beta=\frac{3\sqrt{3}}{23}\approx0{,}23.$$

При $\omega=8$ *рад/сек* получаем

$$\operatorname{tg}\beta=-\frac{3\sqrt{3}}{29}.$$

Знак «минус» означает, что $\gamma>\alpha$ и, следовательно, сила $\vec F_1$ проходит левее радиуса OA, а сила трения направлена вниз по касательной (рис. 8). При этом

$$\mu\geqslant|\operatorname{tg}\beta|=\frac{3\sqrt{3}}{29}\approx0{,}18.$$

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия тела. Мы показали, что тело находится в равновесии, если угол β не превышает значения $\operatorname{arctg}\mu$. Пусть угловая скорость возросла на небольшую величину. Это означает, что возрастает центростремительное ускорение, а сила $\vec F_1$ при этом поворачивается. Причем в первом случае (когда $\omega=5$ *рад/сек*) сила $\vec F_1$ поворачивается так, что угол β уменьшается. Следовательно, тело остается в равновесии. При небольшом уменьшении ω угол β должен возрасти. Но это невозможно. Следовательно, тело уже не сможет находиться в прежнем положении и соскользнет вниз. При этом уменьшится угол α, так что угол β сможет стать таким, чтобы $\operatorname{tg}\beta \leq \mu$. Таким образом, тело придет в новое положение равновесия. Во втором случае (при $\omega=8$ *рад/сек*) реакция тела на малые изменения ω противоположная (покажите это самостоятельно).

Несколько сложнее исследовать вопрос об устойчивости равновесия при изменении положения тела. Сначала проведем качественные рассуждения. В первом случае ($\omega=5$ *рад/сек*) равновесное положение тела находится выше положения равновесия в отсутствие трения (так как сила трения направлена вверх). Поэтому ясно, что при смещении тела вниз тело останется в новом положении, а при смещении вверх — вернется в прежнее положение. Во втором случае ($\omega=8$ *рад/сек*) будет все наоборот.

Вопрос об устойчивости равновесия при изменениях положения тела можно решить и более строго. Для этого надо выяснить, как меняется $\operatorname{tg}\beta$ при малых отклонениях тела от положения равновесия, например, при изменениях угла α. Это можно сделать, исследуя производную выражения для $\operatorname{tg}\beta$ (формула (1)) по α. Например, если производная положительна при увеличении α, значит, $\operatorname{tg}\beta$ возрастает. А это, как мы уже говорили, означает, что тело должно вернуться в прежнее состояние. И так далее. Тем, кто это умеет делать, мы советуем довести до конца все необходимые выкладки и подтвердить наши качественные рассуждения.

◆

Ф429. *Стенки цилиндра, поршень и внутренняя перегородка площадью 1 дм² изготовлены из теплоизоляционного материала (рис. 9). Клапан в перегородке открывается в том случае, если давление справа больше давления слева. В начальном состоянии в левой части цилиндра длиной* $l=11{,}2$ *дм находится* $m_1=12$ *г гелия, в правой части, имеющей ту же длину, —* $m_2=2$ *г гелия; с обеих сторон температура равна* $t_0=0°C$ ($T_0=273°K$). *Внешнее давление* $p_0=10^5$ *н/м². Удельная теплоемкость гелия при постоянном объеме* $c_V=3{,}15\cdot10^3$ *дж/(кг·град), а при постоянном давлении* $c_p=5{,}25\cdot10^3$ *дж/(кг·град). Поршень медленно передвигается по направлению к перегородке (с небольшой остановкой в момент открытия клапана) и осторожно доводится до перегородки. Чему равна произведенная при этом работа? Площадь поршня* $S=10^{-2}$ *м².*

Поскольку система теплоизолирована, полная работа A, совершенная над газом силой, действующей на поршень, и силой атмосферного давления, равна изменению внутренней энергии газа ΔU:

$$A=\Delta U.$$

Обозначим через T окончательную температуру газа. Тогда

$$\Delta U=c_V(m_1+m_2)(T-T_0).$$

Чтобы найти работу A_1 силы, приложенной к поршню, надо из полной работы A вычесть работу силы атмосферного давления $A_2=p_0Sl$. В результате получим

$$A_1=c_V(m_1+m_2)(T-T_0)-p_0Sl. \qquad (*)$$

Из всех входящих в это выражение величин нам не известна лишь температура T по окончании процесса. Найдем ее. Для этого нам придется последовательно рассмотреть все этапы процесса.

Ясно, что в самом начале давление в левой части цилиндра больше, чем в правой:

$$p_1=\frac{m_1}{\mu}\,\frac{RT_0}{lS}>p_2=\frac{m_2}{\mu}\,\frac{RT_0}{lS}.$$

Поэтому при движении поршня к перегородке газ в правой части цилиндра будет сжиматься до тех пор, пока его давление не станет равным p_1 и не откроется клапан в перегородке. Так как сжатие газа происходит адиабатно, его объем V_1 после сжатия станет таким, что

$$p_1V_1^{\gamma}=p_2V_0^{\gamma},$$

где $\gamma=\dfrac{c_p}{c_V}$ — показатель адиабаты, а $V_0=lS$ *). Отсюда

$$V_1=V_0\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=V_0\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Температуру T_1, которую будет иметь при этом газ в правой

---

*) Для адиабатного процесса справедливы такие соотношения между параметрами газа: $TV^{\gamma-1}=\text{const}$ (см., например, статью В. Кресина «Адиабатный процесс», «Квант», 1977, № 6); $pV^{\gamma}=\text{const}$; $pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=\text{const}$.

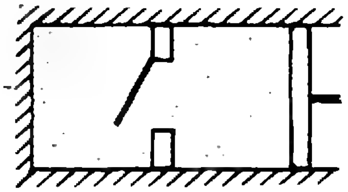


Рис. 9.

части цилиндра, найдем из уравнения газового состояния:

$$T_1=\frac{p_1V_1\mu}{Rm_2}=\frac{p_1V_1}{p_2V_0}\,T_0=T_0\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Теперь, когда давление справа стало таким же, как и слева, открывается клапан в перегородке, и газы перемешиваются (поршень в это время не перемещается). Температуру «смеси» T_2 можно определить из уравнения теплового баланса:

$$c_Vm_1(T_2-T_0)=c_Vm_2\,(T_1-T_2).$$

и

$$T_2=\frac{m_1T_0+m_2T_1}{m_1+m_2}=T_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

После перемешивания весь газ массы $m=m_1+m_2$ сжимается адиабатно от объема $V=V_1+V_0$ до объема V_0, и его температура изменяется от T_2 до T. При этом

$$TV_0^{\gamma-1}=T_2V^{\gamma-1},$$

откуда

$$T=T_2\left(\frac{V_1+V_0}{V_0}\right)^{\gamma-1}=T_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}.$$

Подставив это выражение для T в формулу (*), получим окончательно

$$A_1=c_V\,(m_1+m_2)\,T_0\left\{\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}-1\right\}-$$

$$-p_0Sl\approx 3674\ \text{дж}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф430. *На рисунке 10 показана простейшая схема выпрямителя. Диод считается идеальным: его сопротивление в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечно велико. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая на сопротивлении R, при подсоединении параллельно ему конденсатора C такой емкости, что за период колебаний напряжения сети (U=220 в, f=50 гц) заряд конденсатора практически не меняется?*

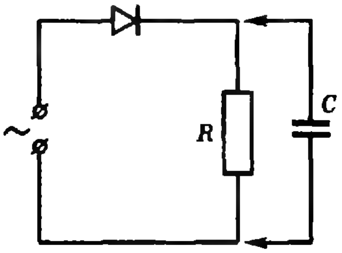


Рис. 10.

Если сопротивление R подключено непосредственно к сети переменного тока, то в нем выделяется мощность, равная $\frac{U^2}{R}$, где U — действующее значение напряжения.

В случае, если сопротивление подключено к сети через диод (см. рис. 10), в нем выделяется мощность в 2 раза меньшая (полпериода ток через сопротивление не течет):

$$P_1=\frac{1}{2}\,\frac{U^2}{R}.$$

Теперь найдем мощность P_2, выделяющуюся в сопротивлении при подсоединении параллельно ему конденсатора. В условии задачи сказано, что за период колебаний напряжения в сети заряд конденсатора практически не меняется. Это означает, что напряжение на конденсаторе можно считать постоянным и равным амплитудному значению U_0. Тогда $P_2=\frac{U_0^2}{R}=\frac{(\sqrt{2}\,U)^2}{R}=\frac{2U^2}{R}$, поскольку амплитудное значение напряжения больше действующего значения в $\sqrt{2}$ раз.

Отношение мощностей, выделяемых на сопротивлении с подключенным конденсатором и без конденсатора, равно

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2U^2}{R}\,\frac{2R}{U^2}=4.$$

Таким образом, при подсоединении конденсатора параллельно сопротивлению в нем выделяется мощность в 4 раза большая.

В. Скороваров

Ф431. *В дифференциальном вороте, схематически изображенном на рисунке 11, используется цепь, каждый метр которой содержит N звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего диаметра имеет n зубцов, а шкив меньшего диаметра $n-1$. Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза, отличаются в k раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найти эти силы.*

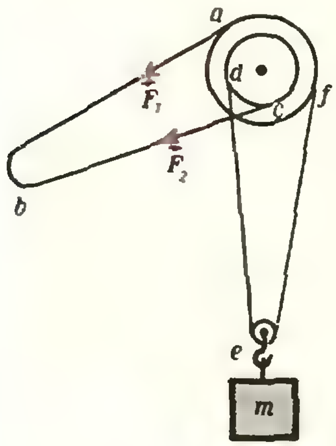


Рис. 11.

Для решения этой задачи воспользуемся законом сохранения энергии. Чтобы поднять или опустить груз, к участку abc цепи ворота надо приложить силу $\vec F_1$ или $\vec F_2$ соответственно. Эта сила совершает работу, равную сумме изменения потенциальной энергии груза и работы силы трения.

Рассмотрим сначала подъем груза. Под действием силы $\vec F_1$ верхний блок поворачивается против часовой стрелки. Предположим, что он совершил один полный оборот. При этом мы, очевидно, протянули n звеньев цепи, то есть точка приложения силы $\vec F_1$ совершила перемещение, равное по абсолютной величине длине участка цепи, содержащего n звеньев: $l_1 = \frac{n}{N}$ метров. Работа силы $\vec F_1$, следовательно, равна

$$A_1 = |\vec F_1|\, l_1 = |\vec F_1| \frac{n}{N}.$$

За время одного поворота верхнего блока правый участок цепи def, на которой висит груз, поднялся на n звеньев (на число звеньев шкива большего диаметра), а левый участок опустился на $n-1$ звено (на число звеньев меньшего шкива). Таким образом, груз поднялся на $\frac{n-(n-1)}{2}$ звеньев, то есть на высоту $h_1 = \frac{1}{2N}$ метров, а его потенциальная энергия увеличилась на

$$\Delta П_1 = m|\vec g|\, h_1 = m|\vec g|\, \frac{1}{2N}$$

(m — масса груза). Обозначим через $A_{\text{тр}}$ работу силы трения. Тогда согласно закону сохранения энергии

$$|\vec F_1|\, \frac{n}{N} = m|\vec g|\, \frac{1}{2N} + A_{\text{тр}}. \qquad (1)$$

Пусть теперь верхний блок под действием силы $\vec F_2$ сделает один полный оборот по часовой стрелке. При этом сила $\vec F_2$ совершит работу

$$A_2 = |\vec F_2|\, l_2 = |\vec F_2|\, \frac{n-1}{N},$$

потенциальная энергия груза изменится на величину

$$\Delta П_2 = -m|\vec g|\, h_2 = -m|\vec g|\, \frac{1}{2N},$$

а работа силы трения останется такой же, как и в первом случае (поскольку абсолютная величина перемещения та же самая, а от направления движения трение не зависит). Поэтому можно записать

$$|\vec F_2|\, \frac{n-1}{N} = -m|\vec g|\, \frac{1}{2N} + A_{\text{тр}}. \qquad (2)$$

Кроме того, по условию задачи

$$|\vec F_1| = k|\vec F_2| \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1)—(3), найдем

$$|\vec F_1| = m|\vec g|\, \frac{k}{n(k-1)+1},$$

$$|\vec F_2| = m|\vec g|\, \frac{1}{n(k-1)+1}.$$

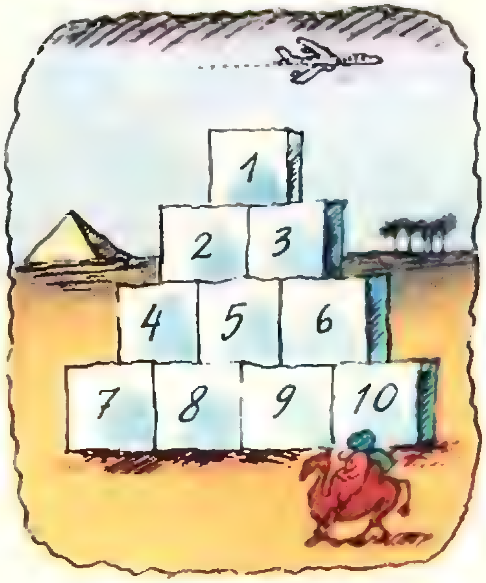
И. Слободецкий

Задачи

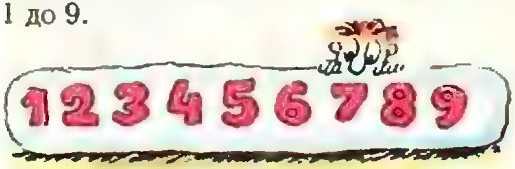
1. Однажды грибов я набрал! — еле дотащил. Но тащил-то почти одну воду — в свежих грибах ее 90%. А когда грибы высушили, они стали на 15 кг легче — теперь в них было 60% воды.

Сколько грибов я принес из леса?

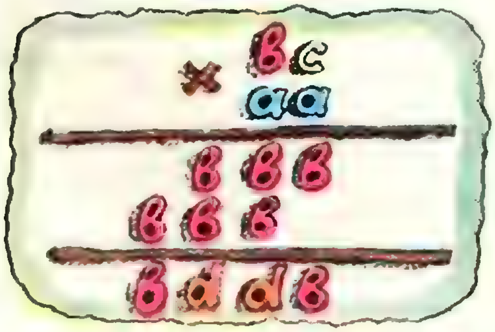
2. Переложите пирамиду из десяти кубиков (см. рисунок) так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.



3. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все цифры от 1 до 9.

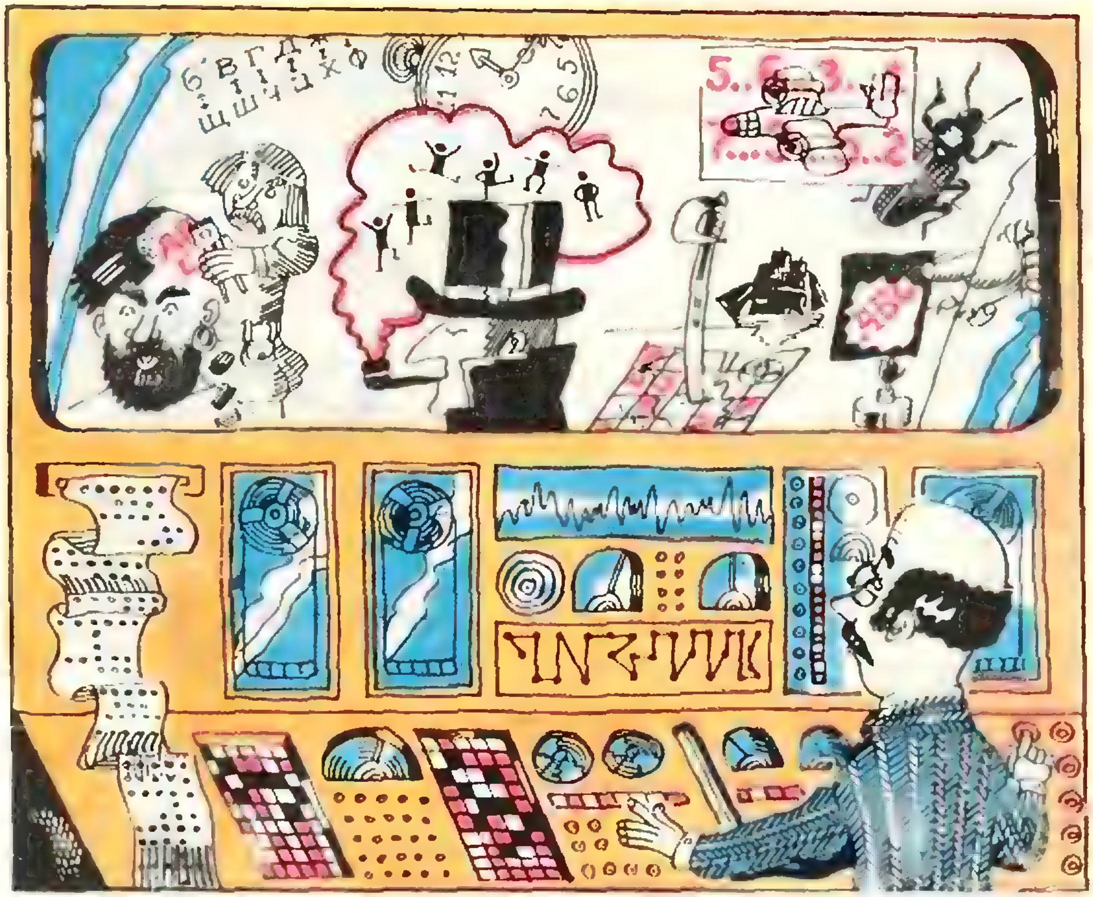


4. В примере на умножение одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные — разными. То, что получилось, изображено на рисунке. Восстановите первоначальный вид примера.



5. Деревни *A*, *B* и *C* расположены в вершинах правильного треугольника. В деревне *A* живет 30 школьников, в деревне *B* — 20, в деревне *C* — 10. Где нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, которое проходят школьники от дома до школы, было наименьшим?

ЕСЛИ РЕШИТЕ ЗАДАЧУ, ПОСТРОИМ ШКОЛУ К 1 СЕНТЯБРЯ!!!



Н. Виленкин

Математика и шифры

> — *То, что изобретено одним человеком, может быть понято другим,* — *сказал Холмс.*
>
> Артур Конан Дойль. «Пляшущие человечки».

Тарабарская грамота

Издавна люди изыскивали способы уберечь сообщения от посторонних глаз. Один древний царь, например, обрил голову гонца, написал на ней послание и отослал к своему союзнику гонца лишь тогда, когда волосы на его голове отросли. Развитие химии дало более удобное средство: симпатические чернила, записи которыми не видны до тех пор, пока бумагу не нагреют или обработают каким-нибудь химикатом. Но чаще всего для тайнописи применяют шифры. Ими пользуются дипломаты, стремящиеся сохранить тайны переговоров, военачальники, скрывающие от противника отданные распоряжения, разведчики и т. д. А в древности ими пользовались пираты, отмечая расположение кладов, алхимики, купцы, заговорщики и многие другие.

Сначала шифры были очень несложными. Например, русские дипломаты XV—XVI веков применяли так называемую «тарабарскую грамоту», в которой все гласные буквы оставались неизменными, а согласные заменялись друг на друга по следующей схеме:

б в г д ж з к л м н
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
щ ш ч ц х ф т с р п

(в первой строке согласные идут в обычном порядке, а во второй строке — в обратном). Например, вместо «Великий государь» получалось «Шеситий чолуцамь». Этот шифр очень несложен (можно научиться даже бегло разговаривать на «тарабарской грамоте»).

Постепенно тайнопись усложнялась, но даже шифр, которым пользовалась в конце XVII века царевна Софья в своей переписке с Василием Голицыным, был весьма прост — одно из ее писем было несколько лет тому назад опубликовано в журнале «Наука и жизнь», и многие читатели его расшифровали. Шифрами пользовался и изменник Мазепа. Как пишет в поэме «Полтава» А. С. Пушкин:

> *«Во тьме ночной они, как воры,*
> *Ведут свои переговоры,*
> *Измену ценят меж собой,*
> *Слагают цифр универсалов...»*

Каким должен быть шифр

При шифровании должны выполняться определенные условия. Во-первых, различные буквы должны обозначаться разными знаками — иначе получатель должен будет гадать, какую из нескольких букв обозначает тот или иной знак. Далее, шифр должен быть трудно разгадываем — легкие шифры можно применять лишь при условии, что у противника нет времени на разгадку. Наконец, секретность шифра должна сочетаться со сравнительной несложностью операций кодирования и раскодирования — иначе на них уйдет столько времени, что переданная информация устареет *). А если раскодирование потребует слишком много усилий, то можно оказаться в положении легендарного писца, который писал за плату письма на восточном базаре, но при этом взимал плату еще и как гонец, утверждая, что написанное им никто, кроме него самого, понять не сможет.

Тарабарская грамота относится к шифрам, в которых каждая буква заменяется определенным знаком — другой буквой, цифрой или изображением. Таким же образом шифровали свои послания чикагские бандиты в рассказе Конан Дойля «Пляшущие человечки» и пираты в повести Эдгара По «Золотой жук» (только пираты применили еще симпатические чернила). Иногда для того, чтобы затруднить чтение шифра, используют *избыточные коды* — одну и ту же букву обозначают разными знаками. Тогда, даже если противник отгадает значение какого-нибудь знака, он не сможет использовать это при расшифровке другого места текста, так как там та же буква обозначается иначе.

Впрочем, иногда избыточность возникает естественным путем. Когда специалисты по древним языкам стали расшифровывать надписи, сделанные много тысяч лет тому назад карийцами (народом, жившим в Малой Азии), они обнаружили, что число знаков слишком велико для буквенной азбуки. Поэтому они решили, что некоторые знаки означают отдельные буквы, а некоторые — слоги. Однако на этом пути возникли непреодолимые трудности. И только когда советский ученый В. В. Шеворошкин стал смотреть, в каких местностях встречаются те или иные знаки (а многие карийцы служили наемниками в Египте и других государствах и оставили там свои надписи), то выяснилось, что в каждой местности применялось не более трех десятков различных знаков, то есть письменность была все же буквенной. Только в разных местах некоторые буквы изображались по-разному, что и затруднило разгадку карийских надписей.

Шифры и комбинаторика

Поскольку множество различных знаков, применяемых в данном шифре, является конечным, его элементы можно перенумеровать и вместо самих знаков использовать их номера. Будем для простоты рассматривать шифры, в которых нет избыточности. Тогда число знаков равно числу букв в алфавите, а также таких знаков, как пробел между словами, точка, запятая. Для русского языка можно обойтись 35 знаками: 31 буква (*е*, *ё*, и *ь*, *ъ* не различаются), пробел, точка, запятая, тире. Если число знаков, используемых при шифровании, тоже равно 35, то каждый такой шифр задается взаимно-однозначным отображением одного множества из 35 элементов на другое такое же множество. В комбинаторике доказывается, что число таких отображений равно 35!, то есть произведению натуральных чисел от 1 до 35. Это настолько громадное число, что его трудно себе представить, — оно примерно равно 10^{40}.

---

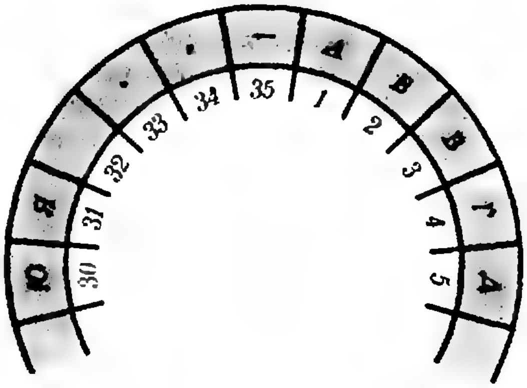
*) Впрочем, теперь эти операции можно поручить ЭВМ.

Иметь дело с произвольными отображениями f множества букв алфавита и знаков препинания $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{35}\}$ на множество знаков шифра $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{35}\}$ не слишком удобно: запомнить такое отображение трудно, а хранить при себе таблицу отображения — «ключ» шифра — нежелательно. Лучше иметь какое-нибудь простое правило, позволяющее по k найти $f(k)$. А такие правила дают методы математики — ведь нет ничего лучшего для распутывания всяких сложностей, чем использование математических методов.

Шифры и сравнения

Математика издавна применялась в теории шифров. Еще в конце XVI века расшифровкой переписки между противниками французского короля Генриха III занимался один из создателей современной алгебры Франсуа Виет. А английские монархистские заговорщики в XVII веке поражались быстроте, с которой Кромвель проникал в их замыслы. Они думали, что используемые ими шифры невозможно разгадать, и считали, что ключи к ним выдал кто-то из участников заговора. Лишь после падения республики и воцарения Карла II узнали, что все эти шифры разгадывал один из лучших математиков того времени профессор Оксфордского университета Валлис, который считал себя основателем новой науки — *криптографии*.

Один из методов кодирования заключается в следующем. Разделим кольцо на 35 конгруэнтных частей, занумеруем их и пометим каждую буквой или знаком препинания (см. рисунок). А теперь выберем какое-нибудь число a («ключевое число» шифра) и повернем кольцо вокруг центра по часовой стрелке так, чтобы каждая часть переместилась на a шагов. Это и задает шифр—отображение множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{35}\}$ на множество знаков шифра $B = \{01, 02, \ldots, 35\}$ (перед однозначными числами надо писать 0, иначе неясно, что такое 15 — «пятнадцать» или «один», «пять»).



Например, если $a = 11$, то часть, помеченная числом 01, перейдет в часть, помеченную числом 12, а это значит, что букве «*А*» при кодировании отвечает число 12. Точно так же букве «*В*» отвечает число 14 и так далее.

В результате получается послание, в котором каждая буква или знак записаны двузначным числом. Адресату для расшифровки надо разбить полученную последовательность цифр на двузначные числа, вычесть из каждого ключевое число и заменить полученное число k — номер знака a_k — на букву алфавита или знак препинания.

Впрочем, на самом деле правила кодирования и раскодирования не столь просты — ведь если k больше, чем 24, то сумма $k + 11$ больше, чем 35, а в множестве B самое большое число равно 35. Но здесь надо вспомнить, что мы писали числа не на прямой, а на кольце, а, как известно, у кольца начала нет и нет конца — за числом 35 идет 1. Иными словами, после числа 35 все повторяется снова. Это значит, что, получив сумму, превосходящую 35, надо вычесть из нее 35. Полученная разность и покажет, в какое число переходит a_k. Например, a_{27} (буква «ы») переходит не в число 38, а в 03, a_{32} («пробел») — в 08 и так далее. Таким образом,

$$f(a_k) = \begin{cases} k+11, & \text{если } k \leqslant 24, \\ k-24, & \text{если } 25 \leqslant k \leqslant 35. \end{cases}$$

А раскодирование делается по следующим формулам:

$$g(n) = \begin{cases} a_{n-11}, & \text{если } 12 \leqslant n \leqslant 35, \\ a_{n+24}, & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant 11. \end{cases}$$

Правило кодирования можно записать более компактно, если сложение понимать в особом смысле.

Разобьем все целые числа на классы, отнеся к одному классу числа, дающие одинаковые остатки при делении на 35. Например, в один и тот же класс попадут числа —32, 3, 38, 73, так как все они при делении на 35 дают в остатке 3. Общий вид чисел этого класса $3+35k$, где k — целое число. Обозначим через $\mathbf{Z}_{35}$ множество таких классов. Число различных классов равно 35 (при делении на 35 получаются остатки 0, 1, 2, ... , 34), и их можно обозначать теми же цифрами, что и соответствующие остатки, только писать сверху черточку. Например $\bar{5}$ означает не число 5, а класс, содержащий это число, то есть множество чисел $\{\ldots, -30, 5, 40, 75, \ldots\}$. В частности, $\bar{0}$ означает класс, содержащий число 35.

Теперь уже можно написать, что $\overline{27} + 11 = \bar{3}$, то есть, прибавляя 11 к числам класса $\overline{27}$, мы получаем числа из класса $\bar{3}$. Значит, если номерами кодируемых букв и знаками шифра считать классы из $\mathbf{Z}_{35}$, то формулы кодирования и раскодирования можно записать так:

$$f(a_{\bar{k}}) = \bar{k} + 11,$$

$$g(n) = a_{\bar{n}-11}.$$

Такая «арифметика остатков» полезна и во многих других вопросах. Пусть, например, сейчас минутная стрелка показывает 25 минут. Каким будет ее положение через 176 минут? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно заметить, что через каждые 60 минут стрелка возвращается в исходное положение. Поэтому надо найти остаток от деления суммы $25+176=201$ на 60. Получим, что этот остаток равен 21. Значит, стрелка будет показывать 21 минуту.

Для облегчения сложения и вычитания в арифметике остатков при делении на m надо составить таблицу сложения. С этой целью берут обычную таблицу сложения и заменяют каждое число его остатком при делении на m.

Такую арифметику обычно называют *арифметикой по модулю m*, а числа, имеющие одинаковые остатки при делении на m, называют *сравнимыми по модулю m*. Если a и b сравнимы по модулю m, то пишут

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Например,

$$215 \equiv 40 \pmod{7},$$

так как и 215, и 40 при делении на 7 дают остаток 5.

Если уже известно, что шифр получен прибавлением одного и того же числа к номерам букв, то его можно разгадать, угадав значение хотя бы одной буквы, а еще лучше — нескольких букв. Например, если известно, что в письме речь идет о Москве и в нем часто встречается сочетание «УХШСЙЗ», то легко догадаться, что при шифровании номер каждой буквы увеличивали на 7.

Более сложный шифр получается, если заменить сложение умножением. Будем, например, умножать номера всех букв на 2. Конечно, если произведение окажется больше 35, надо заменять его остатком от деления на 35. Например, буква «Ч» получит при шифровке номер 13, так как номер буквы «Ч» равен 24, а при делении $24 \cdot 2 = 48$ на 35 получается остаток 13. Это преобразование запутаннее, чем сложение, и можно опасаться, что разные буквы при кодировании перейдут в одну и ту же букву. Но, к счастью, в данном случае этого не происходит — код невырожден. Доказательство этого утверждения основано на том, что произведение двух чисел делится на 2 лишь в случае, когда один из множителей четен. А если бы мы попробовали умножать номера букв не на 2, а на 5 (делитель числа 35), то получился бы вырожденный код (проверьте это сами!). Интересные коды получаются при замене умножения возведением в степень. Вопрос о том, какой получится в этом случае код, связан с проблемами теории чисел.

Шифры и статистика

Мы рассмотрели различные шифры, связанные с арифметическими операциями над номерами букв. У всех этих шифров есть один существенный недостаток — каждая буква переходит в один и тот же знак, где бы эта буква ни стояла в письме. Для расшифровки таких кодов можно применить методы математической статистики. Каждой букве русского алфавита и знаку пробела соответствует определенная частота, с которой они (в среднем) встречаются в длинных текстах:

«пробел»	0,175	Р	0,040	Я	0,018	Х	0,009
О	0,090	В	0,038	Ы	0,016	Ж	0,007
Е, Ё	0,072	Л	0,035	З	0,016	Ю	0,006
А	0,062	К	0,028	Ь, Ъ	0,014	Ш	0,006
И	0,062	М	0,026	Б	0,014	Ц	0,004
Т	0,053	Д	0,025	Г	0,013	Щ	0,003
Н	0,053	П	0,023	Ч	0,012	Э	0,003
С	0,045	У	0,021	Й	0,010	Ф	0,002

Поэтому можно взять расшифровываемое послание, подсчитать для каждого знака частоту, с которой он встречается, и на этом основании судить, что этот знак означает. Например, знак, попадающийся чаще всего, имеет много шансов оказаться пробелом. Ну, а если не пробел, то, возможно, «О» (эта буква стоит на втором месте). Можно изучать и комбинации соседних знаков — чаще всего рядом с гласной буквой стоит согласная. Даже в не слишком длинном тексте можно без труда отделить знаки для согласных букв от знаков для гласных. Такие соображения облегчают разгадку кодов, основанных на простой замене букв знаками.

Сравнительно просто разгадываются и шифры, основанные на перестановке по тому или иному правилу букв послания.

Чтобы усложнить разгадку, применяют шифры «по книге» — числа кода означают номера строк и букв на определенной странице некоторой книги, причем номер страницы можно менять в зависимости от даты составления послания. В этом случае, не зная, какая книга легла в основу шифрования, раскрыть тайну кода очень трудно.

Сейчас для составления и разгадки шифров применяют электронные вычислительные машины. Во время второй мировой войны, когда ЭВМ еще не было, для кодирования и раскодирования применялись механические шифровальные машины. В разгадке кода, употреблявшегося тогда фашистскими шифровальщиками, большую роль сыграл выдающийся английский математик и логик Алан Тьюринг, один из создателей так называемой *теории алгоритмов*.

Задачи наших читателей

1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Про эту функцию известно, если $x_2 - x_1$ — число рациональное, то и $f(x_2) - f(x_1)$ — число рациональное. Доказать, что $f(x) = kx + b$, причем k рационально.

Примечание. Напомним два свойства непрерывных функций, которые могут пригодиться при решении этой задачи:

а) сумма и разность двух непрерывных функций — функции непрерывные;

б) если $a<c<b$ и непрерывная функция принимает значения a и b, то она принимает и значение c.

В. Произволов
(г. Москва)

2. Существуют ли четыре натуральных числа, сумма которых равна их произведению?

С. Сефибеков
(село Кашкент Даг АССР)

3. В кубе провели все диагонали (внутри куба и во всех гранях). Сколькими способами среди проведенных 16 отрезков можно выбрать пару взаимно перпендикулярных?

В. Федотов
(г. Петрозаводск)

Квадратриса и кохлеоида

Квадратрису Динострата можно определить как график функции

$$y=\begin{cases} x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2a}, & \text{если } x\neq 0,\\[2mm] \dfrac{2a}{\pi}, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Кривая симметрична относительно оси ординат и состоит из бесконечного множества ветвей. Прямые $x = 2ka$ ($k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$) являются ее вертикальными асимптотами (рис. 1).

В полярной системе координат, полюс которой совпадает с началом декартовой системы, а полярная ось направлена по положительному лучу оси ординат, квадратриса запишется уравнением

$$\rho=\begin{cases} \dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}, & \\ & \text{если } \varphi\neq 0,\\ \dfrac{2a}{\pi}, & \text{если } \varphi=0.\end{cases}$$

Древние, не владея координатным методом, определяли квадратрису Динострата кинематически и имели представление лишь о той ее части, которая соответствует отрезку $[-a;\ a]$.

Рассмотрим это «механическое» определение. Пусть одновременно отрезок OA равномерно вращается против часовой стрелки вокруг полюса O и отрезок AB равномерно перемещается влево, причем $|OA| = |AB| = a$ и скорости вращения и перемещения таковы, что оба отрезка одновременно достигают полярной оси OC. Тогда множество $\{M\}$ точек пересечения отрезков OA и AB, занимающих соответствующие положения, и образует «кусок» квадратрисы Динострата (рис. 2).

В самом деле, если отрезок OA повернулся так, что $\widehat{COA'} = \varphi$, и $|OM| = \rho$, то $|AM'| = a - \rho\sin\varphi$. По определению $\dfrac{|AM'|}{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ — постоянная величина. При $\varphi = 0$ $|AM'| = a$. Значит, $\dfrac{a-\rho\sin\varphi}{\frac{\pi}{2}-\varphi} = \dfrac{a}{\frac{\pi}{2}}$, откуда $\rho = \dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$.

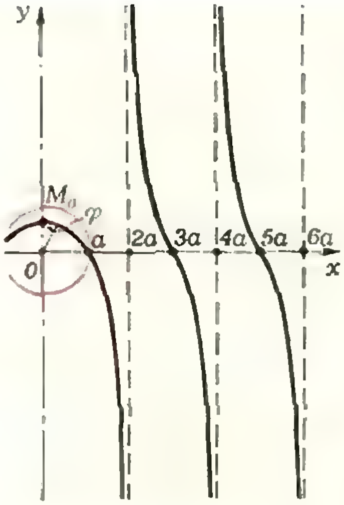


Рис. 1.

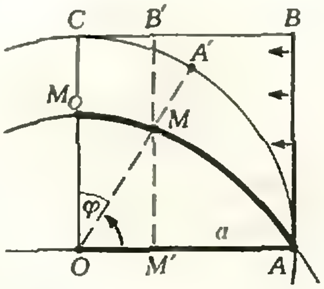


Рис. 2.

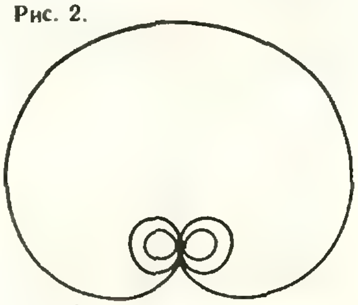


Рис. 3.

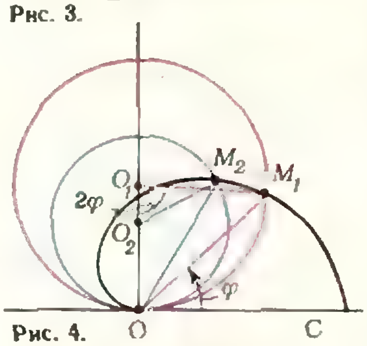


Рис. 4.

Проверьте, годится ли «механическое» определение квадратрисы для других значений φ.

Построив квадратрису, вы получите отрезок OM_0 длины $\frac{2a}{\pi}$. Из отрезков длин a и $\frac{2a}{\pi}$ легко построить циркулем и линейкой отрезок длины π, что решает задачу о квадратуре круга. С помощью квадратрисы Динострата можно решить и задачу о трисекции угла. Сделайте это!

Кохлеоида получается из квадратрисы Динострата в результате инверсии относительно окружности $(O,\ a)$. Значит, ее полярное уравнение $\rho = \dfrac{\pi a}{2}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Центральная ветвь квадратрисы дает наружный замкнутый участок кохлеоиды, похожий на яблоко. Боковые ветви дают внутренние «петельки» (рис. 3). Сообразите, во что переходят асимптоты квадратрисы.

Опишем еще один способ построения дуги кохлеоиды. Рассмотрим окружности радиуса $r \geqslant \frac{a}{4}$, касающиеся данной прямой в точке O. Отложим на каждой из них от точки O против часовой стрелки дугу длины $\frac{\pi a}{2}$. Множество $\{M\}$ концов этих дуг — дуга кохлеоиды. В самом деле, если $\widehat{COM_1} = \varphi$ и $|OM_1| = \rho$ (рис. 4), то $\widehat{OO_1M_1} = 2\varphi$ (O_1 — центр «красной» окружности), но $\widehat{OO_1M_1} = \dfrac{\overset{\smile}{OM}}{|OO_1|}$; поскольку по построению $\overset{\smile}{OM_1} = \dfrac{\pi a}{2}$ и

$$|OM_1| = 2\,|OO_1|\sin\varphi,$$

получаем

$$\rho = 2\,\frac{\frac{\pi a}{2}}{2\varphi}\sin\varphi = \frac{\pi a}{2}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

В. Березин

Новые книги

В этом номере мы помещаем краткие аннотации на книги по математике и физике, выходящие в III квартале 1977 года и представляющие интерес для наших читателей.

Математика

Издательство «Наука»

1. Игнатьев Е. И. *В царстве смекалки*, в 3-х книгах, книга 1. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 33 к.

Книги Игнатьева, впервые увидевшие свет в 1908 году, имели огромный успех и впоследствии неоднократно переиздавались. Они произвели настоящий переворот во всем преподавании школьной и внешкольной математики. Эти книги — не «методика», не «учебник» и не «задачник» в обыкновенном смысле слова: задачи, собранные в них,— занимательного характера, и их можно отнести к разряду «математических игр и развлечений».

Книга разбита на однородные разделы, содержащие задачи в порядке возрастания их трудности. Среди задач — арифметические, комбинаторные, головоломки, задачи, связанные с перекладыванием спичек и т. д., задачи геометрического характера, задачи на графы (в частности, известная задача Эйлера о кенигсбергских мостах и всевозможные задачи на переправы) и задачи-шутки.

Нет, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться в таких книгах «подряд». Каждый может для начала взять тот раздел, который его наиболее заинтересует, затем перейти к любому другому и т. д. Поскольку среди задач есть и такие, усвоение и разбор которых не требует почти никакой математической подготовки, эту книгу можно смело рекомендовать для самостоятельного чтения и изучения даже школьникам младших классов. Впрочем, «возраст не ограничен», так как каждый читатель найдет в книге кое-что и для себя.

2-я и 3-я книги будут выпущены в 1978—1979 годах. Предыдущее издание выходило в 1926 году.

2. Рейд К. *Гильберт*. Перевод с англ. Объем 20 л., тираж 30 000 экз., цена 1 р. 24 к.

Книга представляет собой перевод биографии выдающегося немецкого математика Давида Гильберта (1862—1943). Она написана на основе воспоминаний учеников и друзей Гильберта, а также на основе переписки его со своим другом — известным немецким математиком Г. Минковским. Книга живо воспроизводит картину математической жизни Европы конца XIX — первой трети XX века. Ее удачно дополняет перевод статьи Г. Вейля, в которой дается подробный анализ математических работ Гильберта.

Рассчитанная на широкий круг читателей, книга будет интересна любителям математики и людям, интересующимся историей науки.

Издательство «Просвещение»

3. Беляева Э. С., Монахов В. М. *Экстремальные задачи*. Пособие для учащихся. Объем 3 л., тираж 80 000 экз., цена 10 к.

Это пособие предназначено для учащихся старших классов. В нем содержится много задач из разных отраслей науки и техники, решение которых сводится к поиску оптимальных значений некоторой функции. Это — так называемые экстремальные задачи. Задачи такого рода и методы их решения нашли широкое практическое применение и составили новое направление прикладной математики. Настоящее пособие начинается с элементарных задач на отыскание максимума и минимума, с которыми школьники отчасти знакомы по школьному курсу математики, и кончается простейшими задачами линейного программирования.

4. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. *Пределы*. Пособие для учителей. Объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 15 к.

Понятие предела является одним из основных в новом школьном курсе математики. На его основе вводятся такие важные понятия, как непрерывность, производная, интеграл. У школьников усвоение понятия предела вызывает определенные трудности. Учитывая это, авторы раскрывают это понятие на базе наглядных представлений; последовательно уточняя эти представления, они затем получают строгое определение предела. На основе рассмотрения пределов последовательностей и функций вводятся числовые и степенные ряды и строится теория степенной функции.

Пособие предназначено для старшеклассников и окажет пользу учителям математики.

Издательство «Знание»

5. Пухначев Ю. В. *Учись применять математику* (справочник математических понятий). Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 24 к.

Автор в интересной и популярной форме знакомит читателя с методами применения математики в тех областях знания, которые еще недавно традиционно считались не поддающимися «математизации»: лингвистика, юриспруденция, планирование и др. В книге содержатся основные понятия математического анализа, теории вероятностей, геометрические модели. Ее с интересом прочтут школьники, а также специалисты, использующие математику в своей практической деятельности.

6. *Физико-математические олимпиады. Сборник.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 24 к.

В этой книге собраны материалы Всесоюзных физико-математических олимпиад. Почти все задачи даны с решениями, большинство решений иллюстрировано.

Книга предназначена для школьников 7—10 классов и может быть использована в работе физико-математических кружков.

Физика

Издательство «Наука»

1. Пинский А. А. *Задачи по физике*. Объем 20 л., тираж 200 000 экз., цена 80 к.

Этот сборник содержит как задачи, относящиеся к традиционным разделам физики, так и задачи по теории относительности, квантовой механике, статистике, волновой и квантовой оптике, атомной и ядерной физике.

Наиболее трудные задачи снабжены подробными решениями или указаниями.

Книга предназначена для учащихся средних школ, подготовительных отделений институтов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к вступительным экзаменам в вузы.

2. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике*. Издание 7-е, испр. Объем 46 л., тираж 150 000 экз., цена 2 р. 63 к.

В справочнике даны определения всех основных физических понятий, сформулированы основные физические законы и сущность описываемых ими явлений.

В справочнике отражены все разделы классической и современной физики.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей.

3. *Над чем думают физики*. Выпуск 11. Лазеры. Сборник научно-популярных статей. Перевод с англ. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 50 к.

В сборниках «Над чем думают физики» публикуются популярные статьи крупнейших зарубежных физиков, внесших непосредственный вклад в рассматриваемые вопросы.

Этот, одиннадцатый, выпуск посвящен лазерам — одному из наиболее впечатляющих открытий современной физики. Статьи, публикуемые в сборнике, знакомят читателей с принципами работы, применением и перспективами лазеров. Они написаны живо и увлекательно и в целом доступны школьникам старших классов.

4. Завельский Ф. С. *Время и его измерение*. Издание 4-е, перераб. Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 50 к.

В книге описаны некоторые процессы, происходящие в обыденном мире, а также в атомах, атомных ядрах, планетах, звездах и галактиках. Рассказано о длительности этих процессов, в одних случаях равной лишь миллионным долям миллиардной доли секунды, в других — миллиардам лет. Таким образом, сделан «разрез» мира по одной из основных его координат, а именно по времени. Такой подход позволил показать, как постепенно видоизменялось и совершенствовалось понятие о времени и к каким фундаментальным достижениям это привело.

Обо всем этом рассказано в форме, доступной читателям со средним образованием, а также стремящимся к науке школьникам старших классов.

Издательство «Просвещение»

5. Гуло Д. Д. *Н. А. Умов*. Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 25 к.

Эта книга, выходящая в серии «Люди науки», посвящена одному из крупнейших русских физиков — Н. А. Умову. Она рассказывает о жизни, научной и педагогической деятельности ученого. Особое внимание уделяется научным трудам Умова.

Книга предназначена для широкого круга читателей.

6. Макареня А. А., Рысев Ю. В. *Д. И. Менделеев*. Объем 10 л., тираж 80 000 экз., цена 70 к.

В этой книге из серии «Люди науки» рассказывается о жизни и выдающихся открытиях великого русского ученого Д. И. Менделеева. Показывается его путь в науку и значение его трудов (учение о периодичности, о газовых законах и т. д.).

Книга иллюстрирована материалами из музея-архива Д. И. Менделеева.

Книга предназначена школьникам старших классов.

7. Тарасов Л. В. *Оптика, рожденная лазером*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 35 к.

Автор этой книги, выходящей в серии «Мир знаний», интересно и доступно рассказывает о новых оптических явлениях, наблюдаемых при прохождении в среде лазерного луча и объединенных общим названием «нелинейная оптика».

Книга доступна широкому кругу читателей.

8. Куприн М. Я. *Физика в сельском хозяйстве*. Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 65 к.

В этой книге автор рассказывает о применении законов физики в сельском хозяйстве на материале сельскохозяйственного производства. Учащиеся получают сведения о сельскохозяйственных машинах и аппаратах, основанных на законах механики, теплоты и электричества. Они узнают: «сколько гектаров можно обработать за день», «как воздухом убирают хлопок», «при какой температуре прорастают семена», «как очистить семена от сорняков» и много других интересных и полезных вещей.

Книга поможет учащимся сельских школ в выборе профессии.

И. Клумова,
М. Смолянский

Об аутентичности научных анекдотов

В научно-популярной литературе часто приводятся анекдоты о различных ученых. Некоторые из них повторяются неоднократно, хотя трудно сказать, соответствуют ли они действительности. В этой связи представляет интерес небольшое историческое исследование, которое провел в 1946 году физик Бернард Коэн по поводу письма одного из читателей английского журнала «Nature» («Природа»). Перевод и подготовка публикации В. Березина.

Письмо в редакцию

«В «Мемуарах» барона де Гримма, в том месте, где описывается запуск первого воздушного шара, который проходил в обстановке общего энтузиазма в Париже на Марсовом поле 27 июня 1783 года, читаем: «Среди восторженных свидетелей события затерялось немало лиц, настроенных холодно и не упускавших случая повторять: «Какая от всего этого польза? Заслуживает ли это изобретение, чтобы из-за него подымали столько шума?» Но мудрый Франклин (бывший в это время в Париже) ответил этим скептикам со свойственной ему простотой и выразительностью: «А зачем нужен новорожденный?»

Как мне известно, это изречение обычно приписывается Фарадею, а не Франклину. Так, в одной научно-популярной книге рассказывается (без всяких ссылок на источник), что после эксперимента, выполненного Фарадеем во время лекции, некая дама задала ему вопрос: «Послушайте, профессор, даже если это явление действительно происходит, то какой от него толк?». Она получила достойный ответ: «Мадам, и вы ответьте, какая польза от новорожденного?»

Клемент Уэбб

Ответ редакции

«Известны два анекдота о Фарадее и пользе научных открытий. Эти анекдоты встречаются в той или иной форме у разных авторов девятнадцатого и двадцатого столетий в работах по истории науки. Обычно они рассказываются в связи с открытиями Фарадея в области электромагнитных явлений. Суть их в следующем. Некий важный чиновник (чаще всего — сам премьер-министр) наносит Фарадею визит и, застав его за демонстрацией индукционного тока, спрашивает: «Какая польза может быть извлечена из этого открытия?». Согласно одному анекдоту Фарадей отвечал: «А какая польза от новорожденного?». Согласно другому: «Недалеко то время, когда вы сможете ввести новый налог.»

Первый из двух ответов приписывается также одному из предшественников Фарадея в изучении природы электричества — Бенджамену Франклину. Этот ответ столь точно выражает чувства людей, занимающихся наукой, что представляется уместным пролить свет на подлинные обстоятельства, при которых его произносили и Франклин, и Фарадей.

В 1783 году Франклин в качестве полномочного посла представлял в Париже интересы Американских колоний и был свидетелем нескольких запусков воздушных шаров. Проявляя, естественно, к ним больший интерес, чем простой наблюдатель, Франклин написал несколько научных отчетов об этих экспериментах. В частности, он писал: «Общество разделилось на тех, кто глубоко удовлетворен экспериментами и приведен в восхищение достигнутым успехом, и на тех, кто толкует о различных возможных его применениях, часто экстравагантных.» Очевидно, отвечая на вопросы последних, Франклин и произнес свое знаменитое: «А какая польза от новорожденного?». (В библиотеке Пенсильванского университета в бумагах Франклина хранится посланное ему в то время письмо, автор которого «не понял, почему доктор Франклин называет воздушный шар новорожденным ребенком».)

Майкл Фарадей использовал изречение Франклина в 1816 году на лекции перед членами философского общества. Лекция была на тему «О кислороде, хлоре, йоде и фторе». По ходу лекции Фарадей, в частности, сказал: «Перед тем, как перейти к хлору, я коснусь истории его открытия с тем, чтобы предупредить вопросы некоторых слушателей, которые имеют привычку спрашивать о всяком новом явлении: «А какая от него польза?». Доктор Франклин им отвечал: «А какая польза от новорожденного?»

Второй анекдот, касающийся ответа Фарадея на тот же пресловутый вопрос о пользе научного открытия, не имеет ссылок на авторитетных биографов Фарадея. Анекдот неправдоподобен. Мы, однако, не можем доказать, что Фарадей и не говорил таких слов премьер-министру. Но второй анекдот, в отличие от анекдота о новорожденном,— сомнительный. Впрочем, случается, что исследования в истории науки раскрывают истинность эпизодов, которые считались сомнительными в течение столетий. Наиболее известный из таких анекдотов — о Ньютоне и упавшем яблоке. Долгое время эта история считалась нелепой выдумкой. Но в наши дни анекдот находит подтверждение. Так, он приводится в биографии Ньютона, написанной его другом и почитателем, известным собирателем древностей Уильямом Стакли. Книга эта была написана в 1752 году, а опубликована только в 1936. Ньютон и он, как пишет Стакли, пили чай в тени яблонь, и Ньютон сказал, что все окружающее напоминает ему тот момент, когда он разобрался в сути природы тяготения. Это случилось, когда падало яблоко, и Ньютон был настроен на размышления...

Если рассказ, который в течение многих лет считался плодом досужей фантазии, оказался правдивым, то, может быть, со временем окажется истинным рассказ о Фарадее и премьер-министре. Но пока еще этого не произошло».

И. Бернард Коэн

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся в 9-й класс на 1977/78 учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме программы средней школы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в вуз, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием учащихся в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 15 сентября* по адресу: *117234, Москва, Ленинские Горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* Вместе с решениями задач в конверт нужно вложить анкету, заполненную по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество . . . . *Петров Николай Иванович*
Номер и адрес школы . . . . *школа № 1, ул. Ленина, д. 2*
Профессия родителей и занимаемая должность
отец . . . . *токарь, мастер участка*
мать . . . . *бухгалтер*
Подробный домашний адрес . . . . *246045, г. Гомель, ул Садовая, д. 31, кв. 24*
Член ВЛКСМ, КПСС . . . . *член ВЛКСМ*

Зачисленные в ЗФШ получают в течение года задания Заочной физической школы по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Задания содержат: а) изложение основных разделов и методов решения наиболее характерных физических задач; б) задачи с подробными решениями, способствующие более глубокому пониманию основных разделов физики; в) условия контрольных задач, решения которых учащиеся должны выслать в ЗФШ. Выполненное задание рецензируется и высылается учащимся.

Учащиеся 9-х классов по окончании года переводятся в 10-й класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие ЗФШ получают справку об окончании Заочной физической школы при физическом факультете МГУ.

Вступительное задание

1. По гладкой плоскости, имеющей угол наклона к горизонту α, скатывается без трения тележка (рис. 1). На тележке находится тело массы m. Найти силу давления этого тела на тележку.

2. На горизонтальной шероховатой поверхности стоит однородный куб массы M. Какую минимальную силу надо приложить к середине верхнего ребра куба, чтобы он опрокинулся без проскальзывания? Коэффициент трения между кубом и поверхностью μ.

3. В горлышко сосуда, заполненного газом при температуре T_0 и давлении p_0, вставлен поршень, который может перемещаться внутри горлышка без трения (рис. 2). С наружной стороны поршень присоединен к пружине жесткостью k. В исходном состоянии равновесия газ занимает объем V_0. Сосуд медленно нагревают до температуры T_1. Найти результирующее изменение объема, если площадь поршня S.

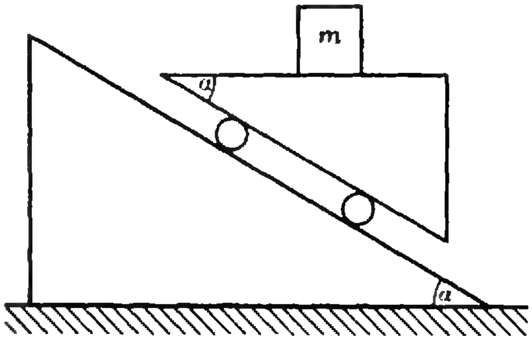


Рис. 1.

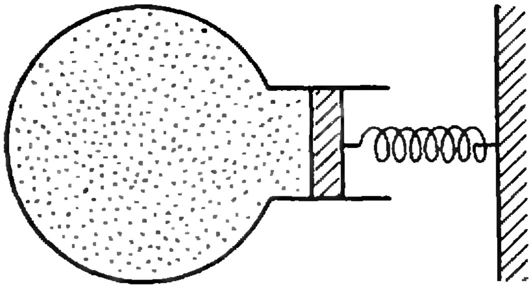


Рис. 2.

Вечерняя физическая школа

Уже два года на физическом факультете МГУ работает Вечерняя физическая школа (ВФШ) для школьников 8-10 классов Москвы и Подмосковья. Обучение в школе очное. В ВФШ принята система «лекции—семинары». На лекциях основное внимание уделяется разбору наиболее сложных вопросов школьной программы. Эти лекции читают преподаватели физического факультета. Семинары ведут аспиранты и студенты старших курсов, имеющие большой опыт руководства школьными физическими кружками. Для учащихся ВФШ организуются экскурсии в лаборатории физического факультета МГУ, в Научно-исследовательский институт ядерной физики и Государственный астрономический институт им. Штернберга. Дружеские связи установились у нашей школы с физико-математической школой при Объединенном институте ядерных исследований в г. Дубне. В этом году группа лучших учащихся ВФШ приняла участие в научной конференции школьников г. Дубны.

В сентябре этого года в третий раз состоится конкурсный набор в ВФШ. Принять участие в конкурсе могут школьники 8-10 классов (в 9 и 10 классы проводится дополнительный набор). Для участия в конкурсе нужно *до 20 сентября* подать заявление на имя директора ВФШ, заполнить анкету в Комитете ВЛКСМ физического факультета, а также сдать 2 фотографии размером 3×4 *см*.

Прием заявлений будет происходить со 2 по 20 сентября с 16.00 до 18.00 ежедневно (*кроме воскресенья*) в Комитете ВЛКСМ физического факультета МГУ (здание физического факультета, комната 2-47).

Зачисление в школу производится по результатам собеседования. Требования по собеседованию не выходят за рамки школьной программы.

Наш адрес: Москва, Ленинские Горы, МГУ, Физический факультет. Телефон для справок: 139-26-56.
Проезд: метро до станции «Университет», затем автобусами 103, 119, 130, троллейбусами 4, 34, 49 до остановки «ул. Лебедева».

К задачам «Последние цифры»
(см. с. 26)

1. Указание. a^4-1 делится на 80, поэтому число A кончается $n-1$ нулем и затем единицей.

2. Указание. а) Воспользоваться принципом математической индукции. б) $B^{2q}-B^q$ делится на 10^n, но B нечетно, поэтому B^q-1 делится на 2^n, а b^r делится на 5^n.

3. Указание. c^4 кончается цифрой 6. Далее решать аналогично задаче 2.

4. Следует из задач 1—3.

5. 267.

7. Поскольку $4^{32}=2^{18}>500^2>200\,000$, из задачи 3а) следует, что вычитаемое имеет на конце более 200 000 автоморфных цифр. Уменьшаемое согласно утверждению задачи 1 кончается на ...0001, а разность имеет на конце более 200 000 автоморфных цифр.

9. 9 989 999.

К ребусам
(см. «Квант» № 5, 3-ю с. обл.)

«Числовая яхта». См. рис. 1.

«Квантово-волновые ребусы». $15\,302\times4=61\,208$. $17\,634\times4=70\,536$. $13\,659\times6=81\,954$.

К статье «Качающаяся скала»
(см. «Квант» № 7)

1. Отклонение камня на опоре в положение, показанное на рисунке 2 в статье, можно представить как два последовательных перемещения: 1 — перенос камня в пространстве параллельно самому себе так, чтобы камень стал касаться опоры в точке A (при этом точка O будет находиться на продолжении радиуса опоры OA); 2 — поворот камня по часовой стрелке вокруг центра O на угол $\alpha+\beta$ $\left(\beta=\frac{R}{r}\alpha\right)$.

При первом движении все точки камня, в том числе и точки O и P, опустятся на

$$\Delta h_1=(R+r)-(R+r)\cos\alpha.$$

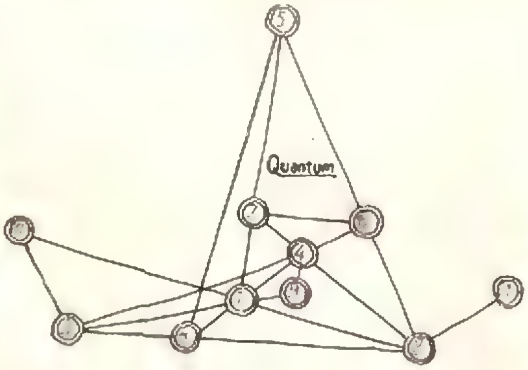


Рис. 1.

Воспользуемся без вывода приближенной формулой $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, справедливой для малых углов α. Тогда

$$\Delta h_1 = (R + r)\,\frac{\alpha^2}{2}.$$

При втором движении центр тяжести камня поднимается на

$$\Delta h_2 = (r - CP)\,\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}.$$

Равновесие устойчиво, когда потенциальная энергия камня минимальна. Значит, при отклонении камня его центр тяжести поднимается, т. е. $\Delta h_2 > \Delta h_1$. Подставляя в это неравенство выражения для Δh_1 и Δh_2, получаем условие устойчивого равновесия камня на опоре

$$CP < \frac{Rr}{R+r}.$$

2. При отклонении ваньки-встаньки на шаре на угол α без проскальзывания Δh_1 и Δh_2 равны соответственно (см. задачу 1): $\Delta h_1 = 2R\,(1-\cos\alpha)$, $\Delta h_2 = OP\,(1-\cos 2\alpha)$. Для максимального угла отклонения α_0 справедливо равенство

$$2R\,(1-\cos\alpha_0) = OP\,(1-\cos 2\alpha_0)$$

(смысл величины OP ясен из рисунков в статье). Используя соотношение $\cos 2\alpha_0 = 2\cos^2\alpha_0 - 1$, из последнего равенства получаем, что точка P находится на оси на расстоянии $\frac{R}{1+\cos\alpha_0}$ от центра O.

3. Из условия равновесия следует, что центр тяжести полушария находится на расстоянии $5/8r$ от его вершины. Те, кто знаком с элементами высшей математики, могут проверить, что именно там окажется центр тяжести однородного полушария.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 7)

1. 45. Указание. Среди чисел, начинающихся цифрой 1, такое число лишь одно (10), среди начинающихся цифрой 2 — два (20, 21) и т. д.

2. Два решения: $102 = 1\cdot 12 + 6\cdot 15 = 6\cdot 12 + 2\cdot 15$. Указание. Число кусков длины 15 *см* должно быть четно, а общая длина кусков по 12 *см* — кончаться цифрой 2.

3. Нет, не может. Указание. Ось симметрии должна проходить через центр симметрии, который должен совпадать с одной из точек фигуры, и этой оси должно принадлежать нечетное число точек фигуры.

4. 4 способа (резать прямоугольник надо либо по диагонали, либо от вершины до середины какой-либо стороны).

5. «Хлопчатник».

К статье «Случай с пятиклассником»

(см. «Квант» № 7)

1. а) Из уравнения $10a+b = 2\,(a+b)$ находим $8a=b$, подходит лишь $a=1$, $b=8$, ответ: а) 18; б) 27; в) 12, 24, 36, 48; г) 45; д) 54; е) 21, 42, 63, 84; ж) 72; з) 81.

2. Если исходное число равно $100a+10b+c$, то сумма равна $222\,(a+b+c)$. Если среди цифр исходного числа могут быть одинаковые, то сумма заведомо делится лишь на 111 (пример: $a=b=c=1$). Если есть нуль, то ничего сказать нельзя (пример: 201; $201+102+210+120=633$).

3. 33 и 39.

К заметке «Квадратное уравнение»

(см. «Квант» № 7, с. 9)

Если один корень квадратного уравнения равен 1, то сумма коэффициентов уравнения равна нулю, а второй корень по теореме Виета равен отношению свободного члена к коэффициенту при x^2.

К головоломкам

(см. «Квант» № 7, 3-ю с. обл.)

«Удивительные цифры»

5
1 8
7 4 3
2 6
9

Указание. Сумма цифр каждого слагаемого и результата кратна 9.

«Кросснамбер»

6543
1681
2345
5210

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
В. Тихомирова, Ю. Шихакович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красников, Э. Назаров,
А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

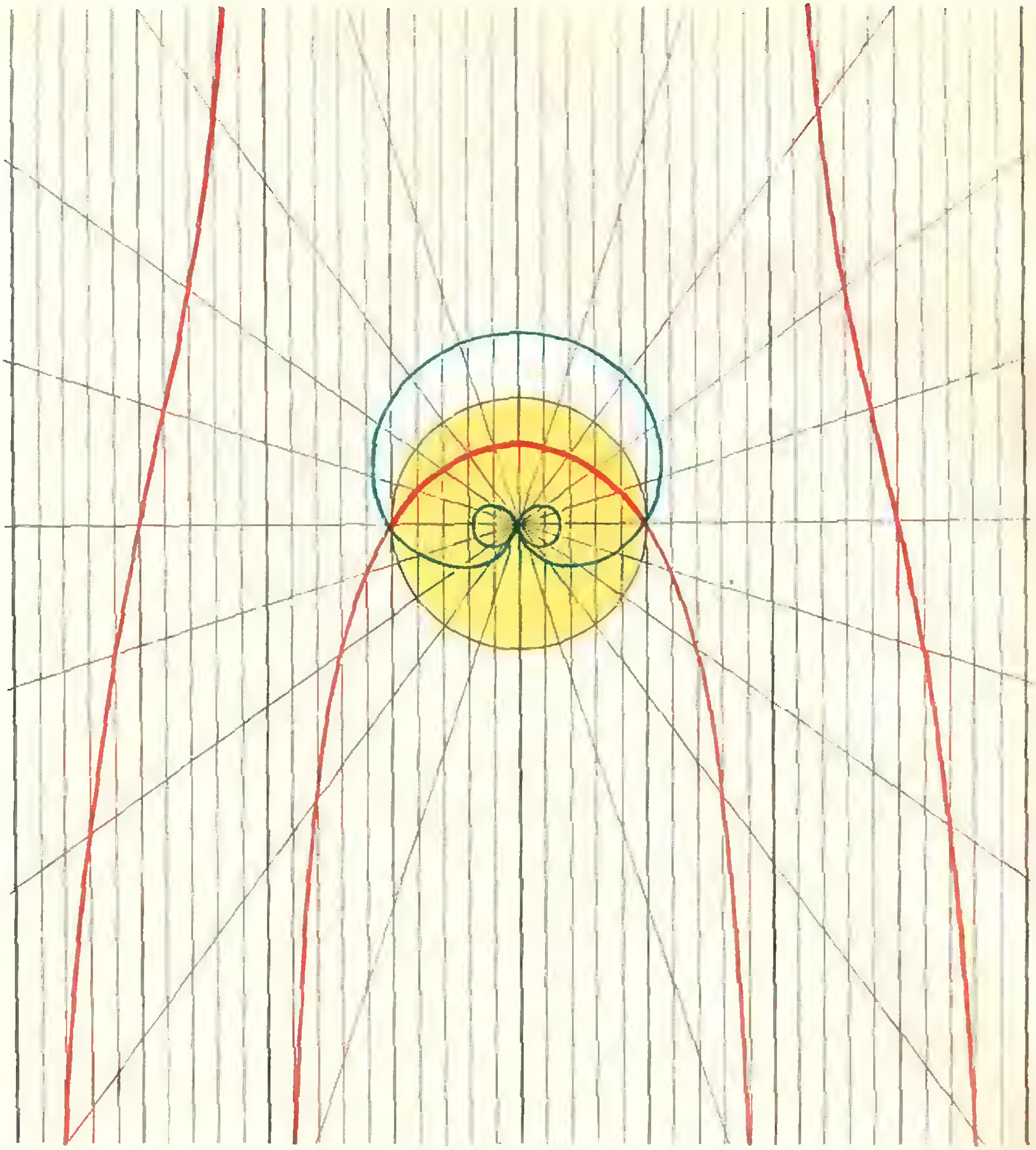
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/V 1977 г.
Подписано в печать 4/VII 1977 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,69. Т-13222
Цена 30 коп. Заказ 1106. Тираж 289 550 экз

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



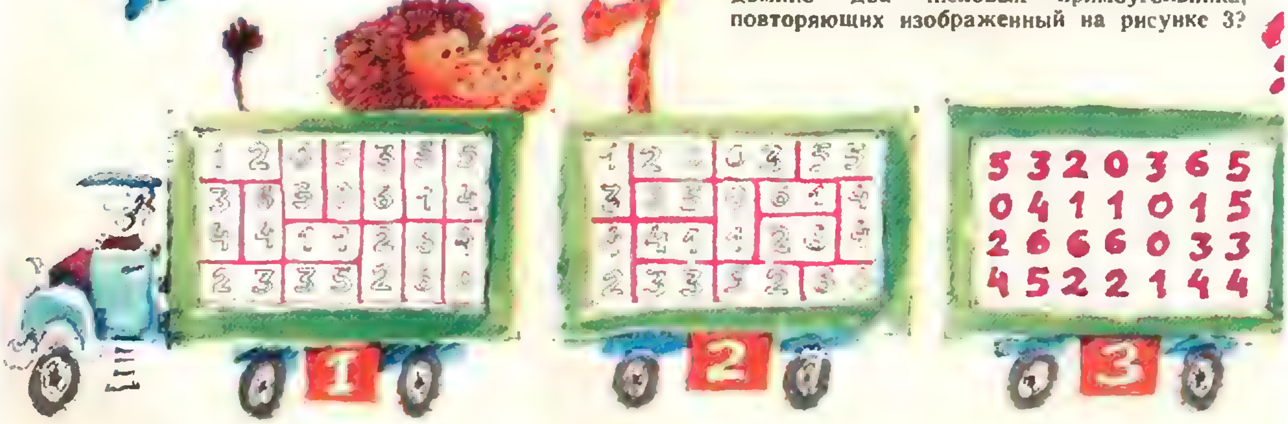
Здесь вы видите три кривые. Одна из них — окружность. Другая — «красная», — квадратриса Динострата. Изобретение ее приписывают знаменитому софисту Гиппию, жившему в пятом веке до н. э.,— одному из первых математиков, имена которых донесла до нас история. Гиппий использовал эту кривую для решения задачи о трисекции угла (поэтому ее называют также трисектрисой). Динострат (четвертый век до н. э.) использовал ее для решения задачи о квадратуре круга (отсюда — квадратриса). Оба они рассматривали только тот участок кривой, который выделен жирной линией.

Третья изображенная здесь кривая — кохлеоида — получается из квадратрисы Динострата в результате инверсии относительно нарисованной окружности. Ее название происходит от греческого κοχλος (улитка). Она напоминает линии, которые видны на ракушках некоторых двустворчатых моллюсков.

Подробнее об этих кривых читайте на с. 57.

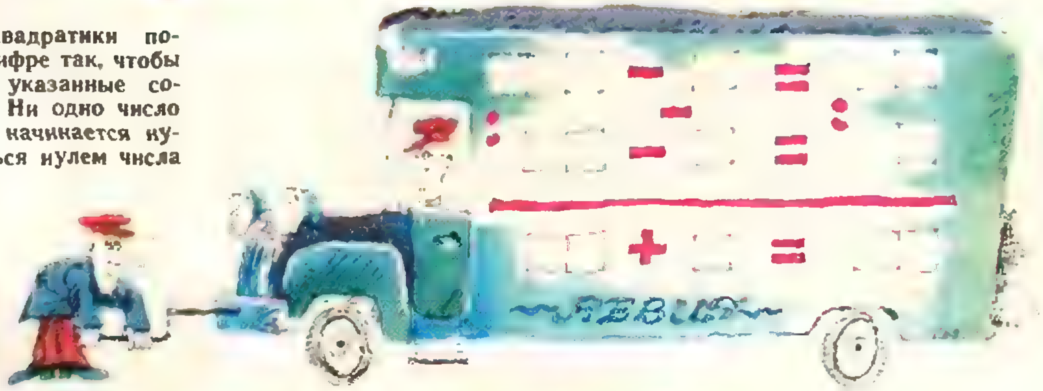
ПОЛНЫМ КОМПЛЕКТОМ

На рисунках 1 и 2 вы видите все 28 косточек домино (вместо точек на костях стоят цифры), из которых сложены два одинаковых числовых прямоугольника. А сможете ли вы сложить из всего комплекта костей домино два числовых прямоугольника, повторяющих изображенный на рисунке 3?



ЧИСЛОВОЙ РЕБУС

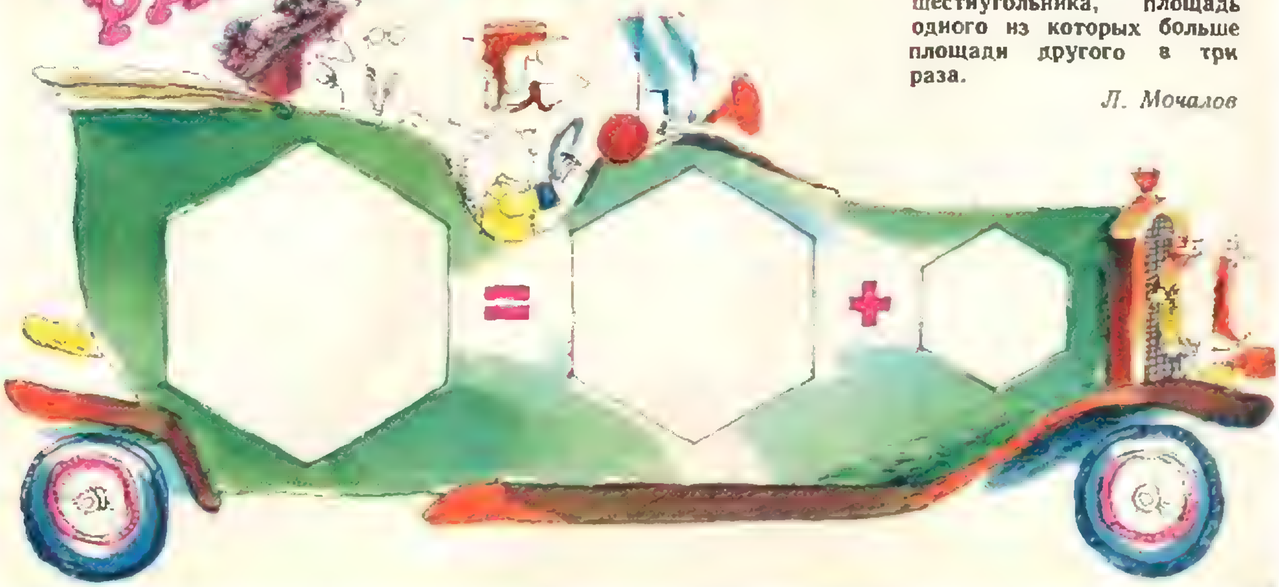
В пустые квадратики поставьте по цифре так, чтобы выполнялись указанные соотношения. Ни одно число в ребусе не начинается нулем (кончаться нулем числа могут).



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО

Разрежьте правильный шестиугольник на 7 частей так, чтобы из них можно было сложить два правильных шестиугольника, площадь одного из которых больше площади другого в три раза.

Л. Мочалов



НОМЕР
9

Основан в 1970 году

Квант

9
1977

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 Научное творчество учащихся

К 60-летию Великого Октября

4 *В. Глушков.* Теория вычислительных систем и программирование в СССР
11 *А. Михайлов.* Шестиметровый телескоп

◆

19 *М. Маневич, М. Слуцкин.* «Линейные построения» Грассмана

Лаборатория «Кванта»

23 *В. Майер.* Интерференционный опыт Брюстера

Математический кружок

27 *А. Тоом.* Решения задач ВЗМШ

Хроника НОУ

30 *В. Книжник.* Построение алгебраических кривых с помощью шарнирных механизмов
32 **Премии «Кванта»**

Задачник «Кванта»

33 Задачи М461—М465; Ф473—Ф477
35 Решения задач М421—М425; Ф432—Ф437

По страницам школьных учебников

44 *А. Земляков, Б. Ивлев.* Задачи на повторение

«Квант» для младших школьников

46 Задачи
47 *А. Перышкин.* Оригинальное доказательство закона Архимеда
48 Раскрой квадрата (итоги конкурса)
50 *А. Савин.* Координаты

Практикум абитуриента

53 *И. Габович.* Ответ в тригонометрическом уравнении

Рецензии, библиография

56 *М. Смолянский, А. Стасенко.* Олимпиады МФТИ
61 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 10, 18, 43, 45, 59)*
64 *Ю. Данилов.* Ребята с нашего двора

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

Научное творчество учащихся

Весной 1977 года Секретариат ЦК ВЛКСМ, Коллегия Министерства просвещения СССР, Президиум Всесоюзного совета научно-технических обществ и Президиум правления Всесоюзного общества «Знание» приняли совместное постановление «О научном обществе учащихся». В этом постановлении утверждено примерное Положение о научном обществе учащихся (НОУ) и поставлена задача «принять конкретные меры по созданию научных обществ учащихся повсеместно».

Цель НОУ — привлечь школьников к активной творческой деятельности. В нашей стране уже давно и успешно работают научные объединения учащихся Малая академия наук (МАН) «Искатель» (Крымская обл.), Челябинское научное общество учащихся, научное общество учащихся «Виниторул» (Кишинев), математическое общество «Поиск» (г. Малая Вишера), научно-техническое общество учащихся г. Норильска. Значительный вклад в развитие познавательной активности и творческих способностей учащихся вносят Дворцы и Дома пионеров и школьников. Многочисленные научные объединения, кружки и секции для учащихся созданы при научно-исследовательских и проектных организациях, при высших и средних специальных учебных заведениях. О большой и плодотворной работе членов НОУ красноречиво свидетельствуют итоги первого Всероссийского слета актива научных обществ учащихся (об этом слете рассказывалось в «Кванте», 1975, № 9).

Перед научными обществами учащихся стоят важные задачи. НОУ призваны активно содействовать школе в коммунистическом воспитании учащихся, в их всестороннем развитии, в выработке у них творческого отношения к труду, привить школьникам интерес к изучению основ общественно-политических, гуманитарных, естественных и математических наук, познакомить школьников с методами и приемами доступных им научных исследований и чтения научной литературы.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант», горячо поддерживая решение о создании сети научных обществ учащихся, намерены систематически помогать этим обществам в их деятельности, рассказывать читателям об опыте работы лучших обществ.

Материалом для работы членов НОУ могли бы послужить циклы помещаемых в журнале тематически близких статей по физике или математике, подготовка докладов и сообщений по этим статьям, коллективное обсуждение отдельных проблем, выяснение непонятного с учителем или научным руководителем, решение задач и обобщение этих решений и т. д. Богатые возможности для творческой работы членов НОУ открывают публикуемые в журнале описания экспериментов и разнообразные задачи. Подчеркнем, что многие из этих задач, по существу, являются темами для содержательных самостоятельных исследований.

Не нужно думать, что исследовательская работа школьников может носить лишь учебно-познавательный характер, что они в состоянии только выступать с рефератами статей или решать «известные» задачи. Опыт многих НОУ свидетельствует: школьникам доступны и серьезные содержательные проблемы, решения которых интересны для науки и техники. В качестве примера приведем сообщение, недавно опубликованное газетой «Известия»: «Устройство «Антисон», созданное горьковскими радиолюбителями — конструктором А. С. Щербаковым и школьниками И. Буровым и Э. Сеедневым, заинтересовало специалистов. Это устройство чутко реагирует на ослабление внимания автоводителей во время движения». Напомним также итоги первого Всероссийского слета актива научных обществ учащихся: из представленных на слете работ 79 нашли различное применение в народном хозяйстве, а 37 были опубликованы в журналах и сборниках.

В редакции «Кванта» всегда с особым вниманием относятся к материалам, которые присылают наши читатели-школьники. Консультанты журнала стараются подробно и всесторонне оценить каждую работу, дать полезные советы по ее продолжению и доработке, ответить на вопросы. Для ответов на вопросы, представляющие общий интерес, в журнале создан специальный раздел «Спрашивайте — отвечаем». Наиболее удачные и содержательные материалы школьников появились в виде статей на страницах журнала; за истекшие годы в «Кванте» было опубликовано около двадцати таких статей. И в настоящем номере журнала читатели найдут работу школьника Вадима Книжника из Москвы. Журнал намерен и впредь продолжать эту практику.

Большой популярностью пользуется проводимый журналом конкурс решения задач, помещаемых в «Задачнике «Кванта»». Редакция журнала приглашает всех членов НОУ, интересующихся физикой и математикой, к участию в этом конкурсе.

Членам и руководителям научных обществ учащихся, особенно вновь созданных, будет, несомненно, интересно и полезно познакомиться с опытом работы других НОУ. Вот, например, письмо, которое прислали в «Квант» от имени членов математического общества школьного отделения МАН «Искатель» Павел Корняков, Олег Конник и Александр Мебель.

«Сообщаем Вам, что у нас, по-прежнему, работает школьное отделение МАН «Искатель» Крыма. Отделение продолжает поиски новых, более интересных, полезных, увлекательных форм работы. Сейчас отделение включает четыре общества: математическое, физическое, химическое и биологическое. Математическое общество проводит олимпиады, конкурсы, вечера, общественные смотры знаний, математические «бои» и др. Все это дает положительные результаты. Члены и кандидаты в члены МАН нашей школы являются победителями районных, городских и областных олимпиад по математике.

Команда Крыма на республиканской олимпиаде, как правило, включает учащихся нашей школы № 40 г. Симферополя. И выступают наши юные математики довольно неплохо. На последней олимпиаде Украины наши учащиеся заняли два первых и два третьих места, а наш девятиклассник Александр Беспалов был включен в команду Украины.

Все команды нашей школы выписывают журнал «Квант», решают задачи, публикуемые в этом журнале. Выпускник нашей школы прошлого года Олег Годин за успешное решение задач был премирован годичной подпиской на журнал «Квант»...»

Редакция «Кванта» намерена информировать своих читателей о наиболее интересных начинаниях научных обществ учащихся и о работах членов НОУ. Приглашаем руководителей секций физики и математики НОУ писать в журнал о своих планах, тематике и формах занятий, о научных исследованиях учеников.

В. Глушков

Теория вычислительных систем и программирование в СССР

В этом году наша страна празднует 60-летие Великой Октябрьской социалистической революции. Как сказал Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев, отвечая на вопросы главного редактора газеты «Асахи» С. Хата, «за прошедшие 60 лет советский народ под руководством Коммунистической партии прошел путь, которым мы вправе гордиться. При жизни одного поколения было покончено с вековой отсталостью. Наша страна вышла на высокий уровень экономического и научно-технического развития. Если на долю дореволюционной России приходилось лишь немногим более 4 процентов мировой промышленной продукции, то сегодня Советский Союз производит пятую ее часть»*).

Новый огромный скачок, который предстоит совершить нашей стране в 10-й пятилетке, требует дальнейшего ускорения темпов научно-технического прогресса, быстрейшего использования достижений научно-технической революции для улучшения качества и эффективности работы во всех звеньях народного хозяйства. Современная электронная вычислительная техника является одним из определяющих факторов в научно-технической революции, в дальнейшем прогрессе науки, техники и производства.

«Основными направлениями развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы» предусмотрено увеличение выпуска средств вычислительной техники в 1.8 раза, дальнейшее развитие производства универсальных и управляющих вычислительных комплексов, поставлены большие задачи по дальнейшему развитию применений ЭВМ в научных исследованиях, на производстве и в экономике.

Сама вычислительная техника, начиная с появления первого электронного компьютера, также находится в процессе бурного развития. Если основная функция машин первого поколения состояла в реализации простой системы команд, то в современных машинах устройства должны выполнять целый ряд новых функций. В течение прошлой пятилетки наша промышленность перешла на выпуск единой системы (ЕС) ЭВМ третьего поколения. Переход к ЕС ЭВМ коренным образом меняет организацию использования вычислительной техники, включая такие элементы этой организации, как техника программирования, организация данных, организация вычислительного процесса, характер взаимодействия пользователя с ЭВМ и др. Необходимость подобной перемены обусловлена вполне определенным и неизбежным этапом в истории ЭВМ, а именно переходом их из разряда полуэкзотических научных инструментов для решения особо сложных задач в разряд инструментов, обслуживающих массовых (и весьма разнообразных) потребителей.

Совершенствование компьютеров и способов их применения требует решения многих специфических проблем как фундаментального, так и чисто прикладного характера. О решении некоторых проблем, связанных с созданием и использованием ЭВМ, рассказывается в публикуемой ниже статье Председателя научного совета по вычислительной технике и системам управления Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике и Президиума АН СССР академика В. М. Глушкова.

Проблема автоматизации сложных вычислений привлекла к себе внимание ученых уже давно. Однако лишь около 30 лет назад она впервые нашла себе достаточно полное решение в связи с созданием универсальных электронных вычислительных машин — *компьютеров.* Мы будем рассматривать развитие вычислительных систем именно этого класса, хотя и в более ранний период существовали специализированные вычислительные устройства, автоматизировавшие отдельные классы вычислительных процессов.

Первый советский компьютер (МЭСМ) был создан в Академии наук УССР в Киеве под руководством академика С. А. Лебедева в 1951 году. При создании МЭСМ были независимо переоткрыты основные принципы, на которых были построены первые американские и английские компьютеры, — так называемые *принципы фон Неймана.*

---

*) «Правда», 7/VI 1977 года.

Во-первых, это *наличие оперативной памяти*, разбитой на одинаковые ячейки. Каждая ячейка предназначена для запоминания одного *машинного слова*, представляющего собой упорядоченный набор двоичных цифр 0 и 1. Ячейки памяти снабжены *адресами*, в качестве которых выступают последовательные целые неотрицательные числа 0, 1, ..., $n-1$; число ячеек n — *объем памяти*.

Следующий принцип — *наличие специального арифметико-логического устройства* (АЛУ), предназначенного для выполнения простейших операций над словами, в частности, *операции сравнения* с целью установления совпадения или различия двух слов. Другой класс операций составляют *арифметические операции* (сложения, вычитания, умножения и деления) над словами, рассматриваемыми как числа в двоичной системе счисления. Кроме того, имеются *операции обмена информацией* (одно машинное слово за один такт обмена) между АЛУ и памятью, а также между АЛУ и специальными вводо-выводными устройствами. Важной чертой рассматриваемого принципа является простота и элементарность системы машинных операций.

Операции управления вычислительным процессом связаны с третьим принципом фон Неймана — *командно-адресным принципом организации управления*. Машинная команда состоит из условного кода операции, которую требуется выполнить, и адресов операндов (то есть слов, над которыми выполняется операция, и результата этой операции). Например, в операции сложения $a+b=c$ имеются 3 операнда: a, b, c. Если один или несколько операндов хранятся в заранее определенных ячейках памяти или в специальных запоминающих ячейках — так называемых *регистрах* АЛУ, то адреса соответствующих операндов в команде могут опускаться. Наиболее существенным моментом третьего принципа фон Неймана является *возможность запоминания в оперативной памяти* не только операндов, но и *программы вычислительного процесса*, представляемой в виде конечной последовательности машинных команд, записанных двоичными кодами.

Команды программы обычно располагаются в последовательных ячейках памяти и выбираются из нее специальным *устройством управления* (УУ) последовательно одна за другой и исполняются по одной за один раз. Однако такая последовательность исполнения команд может нарушаться специальными *командами перехода*, когда адрес следующей команды определяется управляющей командой.

Четвертый принцип состоит в *неизменности структуры связей между устройствами*.

Вместе с первыми компьютерами возникла и *задача программирования*, то есть представления в виде последовательности машинных команд тех или иных вычислительных процедур или других процессов преобразования дискретной информации (совокупностей машинных слов).

Рассмотрим задачу программирования для простейшей задачи нахождения факториала $n!$ заданного натурального числа n. Для хранения операндов нам потребуется четыре ячейки памяти, в качестве которых мы выберем ячейки с адресами 0, 1, 2, 3. Для упрощения опустим программу ввода исходных данных и предположим, что к моменту начала работы программы в нулевой ячейке хранится число n, а в первой, второй и третьей ячейках — единицы. Тогда программа вычисления факториала представится следующей программой (числа слева представляют собой адреса ячеек, в которых хранятся соответствующие команды; через (i) обозначено содержимое ячейки с адресом i):

4. *Сравнить* (2) *с* (0) *и, если «равно», то на* 8, *иначе на следующую команду.*
5. *Прибавить* (3) *к* (2), *результат заслать в* 2.
6. *Умножить* (2) *на* (1), *результат заслать в* 1.
7. *Перейти к* 4.
8. *Останов.*

Первая команда программы (с адресом 4) представляет собой так называемую *команду условного перехода*, а четвертая (с адресом 7) — *команду безусловного перехода*. Заметим, что одну команду перехода можно было бы сэкономить, но для дальнейшего нам удобна именно эта запись. Представляя каждую операцию двоичным кодом:

сравнение	001
сложение	010
умножение	011
переход	100
останов	101,

а адреса ячеек от 0 до 8 соответствующими четырехзначными двоичными кодами, запишем программу в закодированном виде (символом ~ обозначены неиспользуемые адреса):

```
001 0010 0000 1000
010 0011 0010 0010
011 0010 0001 0001
100 0100  ~    ~
101  ~    ~    ~
```

Заметим, что программа будет работать правильно только тогда, когда она помещена в заданные выше ячейки (от 4-й по 8-ю).

Легко понять, что описанный способ программирования (в машинных кодах) чрезвычайно громоздок и утомителен, в силу чего даже опытные программисты в сколько-нибудь сложных программах делают немало ошибок. Ошибки исправляются в процессе *отладки программы* — последовательной (команда за командой) прогонки программы для упрощенных наборов данных (в данном случае, скажем, при $n = 2$ или $n = 3$), и контроле работы машины.

Сложность задачи программирования усугубляется наличием в компьютерах запоминающих устройств (ЗУ) различных типов: *быстрых* ЗУ *относительно малого объема* (внутренних) и *более медленных* ЗУ *большого объема* (внешних).

В 1951—1955 годах программирование выполнялось в машинных кодах. Однако уже в этот период начались исследования путей упрощения программирования за счет автоматизации различных его этапов. Важным этапом явилось введение символических (буквенных) адресов в исходной записи программы с последующим выбором конкретных числовых значений для этих адресов специальной, составленной один раз программой. Возникли строгие математические постановки задач *минимизации используемого объема памяти*. Для их решения были выработаны специальные комбинаторные методы.

Введение символических адресов вместе с символическим обозначением машинных операций означало появление первых *языков программирования*, отличных от языка машинных кодов и более удобных для использования. Тем не менее языки этого класса, получившие впоследствии наименование *ассемблерных языков*, являются *машинноориентированными*, поскольку используют в качестве элементарных операторов лишь те машинные операции, которые имеются в той или иной конкретной машине.

Важной вехой в развитии программирования было введение понятия *подпрограммы* и введение в языки ассемблерного типа *оператора обращения к подпрограммам*. Само же включение подпрограммы в основную программу выполнялось в процессе трансляции исходной записи программы в окончательное (машинное) представление с помощью специальной программы, — так называемого *ассемблера*.

Новый шаг вперед на пути упрощения программирования был сделан в результате создания *процедурно-ориентированных универсальных языков программирования* и соответствующих *трансляторов*. Подобные языки не привязываются к особенностям выполнения программ в конкретных машинах, широко используют формальный язык алгебры. Первым отечественным процедурно-ориентированным языком был так называемый *адресный язык*, разработанный в 1955—1956 годах В. С. Королюком и Е. Л. Ющенко. Важную роль в развитии теории программирования сыграл *операторный язык*, предложенный А. А. Ляпуновым в 1954 году. Программа в этом языке представляется в виде конечной последовательности операторов P_i и логических условий α_j, принадлежащих заданным множествам операторов и условий. Переходы, возникающие в результате проверки логических условий, обозначаются стрелками или специальными символами. В записанной выше про-

Академик В. М. Глушков за дисплеем ЭВМ «МИР-2»

грамме вычисления $n!$ участвуют операторы сложения P_1, умножения P_2, останова P_3 и логическое условие α — условие равенства содержимого нулевой и второй ячеек. Программа в операторном языке запишется в следующем виде:

$$S = \rceil\alpha\lceil P_1P_2\lceil\ \rceil P_3.$$

Наличие относительно простой формы записи программы поставило вопрос о *формальных преобразованиях программ*. Разработкой теории таких преобразований много и успешно занимались Ю. И. Янов, А. П. Ершов и другие советские математики.

Важным шагом в теории вычислительных систем было становление в начале 50-х годов понятия *конечного автомата*. Это устройство, которое может находиться лишь в одном из состояний a_i, образующих конечное множество, может переходить из одного состояния в другое под действием приходящих в определенные моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ входных сигналов x_j, образующих также конечное множество, и может выдавать выходные сигналы y_k, являющиеся функциями пары (a, x) состояния и входного сигнала.

Наряду с аппаратом булевой алгебры теория автоматов составила формальный аппарат, с помощью которого стало возможным формализовать, а впоследствии и автоматизировать значительную часть труда по проектированию вычислительных систем. В виде конечного автомата оказалось возможным представить любую программу (как машинную, так и операторную).

В 60-е годы шло дальнейшее развитие вычислительных систем и программирования. Высказанная автором еще в 1958 году идея о повышении уровня машинного языка нашла свое воплощение в миникомпьютере «МИР-1» (1965 г.), а затем в еще более продвинутой форме в машине «МИР-2» (1969 г.). В машине «МИР-2» внутренний язык особенно богат. Он позволяет оперировать не только с целыми числами и десятичными дробями, но и с обыкновенными дробями, а также с формулами, использующими элементарные функции (логарифм, синус и др.) и операции дифференцирования и интегрирования.

Благодаря богатству внутреннего языка процесс трансляции программ со входного языка на машинный практически исчез. Специальное многоуровневое устройство управления обеспечивает быструю интерпретацию сложных операторов (например, операторов аналитического дифференцирования и интегрирования), благодаря этому «МИР-2» при выполнении формульных преобразований успешно состязается в скорости работы с гораздо более мощными компьютерами, построенными по традиционной неймановской схеме.

Повышение уровня машинного языка означает фактически отказ от второго принципа фон Неймана. После машин серии «МИР» по этому пути пошла американская фирма «Барроуз», а в 70-е годы это направление стало общепринятой линией развития вычислительных систем. Другое направление, получившее широкое развитие в 60-е годы, — *создание специальных систем программ* (так называемых *операционных систем*) для управления вычислительным процессом и упрощения программирования в части, касающейся использования сложных иерархических систем памяти.

Компьютеры в этот период превратились в сложные вычислительные системы, объединяющие многие десятки различных устройств, в том числе разнообразные вводо-выводные устройства и устройства внешней памяти. Организовывает эффективную согласованную работу всех этих устройств одна из важнейших программ операционной системы — *машинный диспетчер*. Каждое из устройств работает в своем темпе, диспетчер же согласует их работу, организовывая связи между устройствами и соответствующие информационные обмены. В результате появилась возможность *мультипрограммирования*, то есть одновременной загрузки в систему не одной, а многих программ и их параллельного исполнения по командам диспетчера: в то время, когда центральный процессор ведет счет по одной программе, другие программы могут осуществлять операции ввода и вывода, поиска информации во внешней памяти (занимающего особенно много времени) и т. п.

Таким образом, удалось в определенной мере отойти от четвертого принципа фон Неймана — неизменности структуры связей — за счет возможности оперативного отключения и подключения различного рода периферийных устройств (ввод, вывод и внешние ЗУ). Программист получил возможность не привязывать операции с периферийными устройствами к определенным единицам оборудования: их выбор и включение в соответствующий процесс осуществляет операционная система.

Специальная часть операционной системы осуществляет *управление данными*. Она не только размещает сложные системы данных по ЗУ различных видов, но и осуществляет их поиск и передачу в оперативную память. В ряде систем программы операционной системы организуют так называемую *виртуальную память*. При этом программист как бы получает в свое распоряжение кажущуюся оперативную память, равную суммарной мощности всех ЗУ системы. Фактические же пересылки необходимых данных и программных блоков в действительно оперативную память осуществляются автоматически.

Системы автоматизации программирования стали в этот период включать много входных языков, так что отдельные блоки одной и той же программы стало возможным записывать на разных языках. Увеличивающийся международный обмен программами привел к необходимости создания международных универсальных процедурно-ориентированных языков. Особо большое распространение получил язык «Алгол-60». В современных системах автоматизации программирования широко применяются и другие языки («Фортран», «PL-1» и др.).

Программисты, разрабатывающие операционные системы и системы автоматизации программирования, называются обычно *системными программистами*, в отличие от программистов, разрабатывающих прикладные программы в той или иной конкретной предметной области. Если во втором случае главное требование — хорошее знание программистом соответствующей предметной области, то в первом случае от программиста требуется хорошее владение всеми секретами программистского мастерства и понимание архитектуры современных вычислительных систем.

В 60-е годы в СССР сложились сильные школы системных программистов в Москве, Новосибирске, Киеве и в ряде других городов.

Хотя в принципе многие задачи оптимизации операционных систем могут быть облачены в точные математические формулировки, современная математика, как правило, не может еще их решать. Поэтому при оптимизации операционных систем и структур вычислительных систем широко используются методы *машинного моделирования*. Разработаны специальные языки, ориентированные на такое моделирование, например, язык «СЛЭНГ» (1968 г.). «Недис» (1974 г.) и др.

Важным направлением программирования со второй половины 60-х годов стало *создание пакетов прикладных программ* в различных областях применений компьютеров. Пакет — это не просто механическое объединение различных программ, но и набор специальных *сервисных программ*, облегчающих их использование, то есть небольшая специализированная операционная система с проблемно ориентированным входным языком. Пакет для формульных вычислений позволяет вводить в машину формулы в привычном для человека виде, например: $x=\sqrt{5{,}26+7{,}32\cdot 8{,}04}$, $y=\sin(\pi/16)$ и т. п.

В теории вычислительных систем автору в 1966 году удалось найти новый подход, позволивший записывать программы в виде формул в некоторой специальной алгебре, получившей наименование *алгебры алгоритмов*. В отличие от обычной школьной алгебры, в которой значения переменных принадлежат области всех вещественных чисел, в алгебре алгоритмов имеется две разные предметные области. Одни переменные (обозначаемые латинскими буквами) интерпретируются как *операторы*, отображающие некоторое заданное множество M в себя. Другие переменные (обозначаемые греческими буквами) интерпретируются как *логические условия*, принимающие на множестве M два значения: 0 и 1. Как операторы, так и условия могут быть определены не на всем множестве M, а на некоторой его части. Алгебра условий (булева алгебра) и алгебра операторов (полугруппа) изучалась уже давно. Суть идеи автора состоит во введение *смешанных операций*, в которых участвуют как условия, так и операторы. Это следующие операции:

α-дизъюнкция $\underset{\alpha}{(}P\vee Q)$,

α-итерация $\underset{\alpha}{\{}P\}$,

умножение условия на оператор $P\cdot\alpha$.

Не вдаваясь в подробное определение этих операторов, заметим лишь, что рассмотренная выше программа S может быть записана в виде α-итерации: $S=\underset{\alpha}{\{}P_1P_2\}$. Доказано, что любая программа, составленная из операторов $P_1, \ldots, P_m$ и условий $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ может быть записана в виде формулы алгебры алгоритмов с переменными $P_1, \ldots, P_m$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В алгебре алгоритмов, как и в обычной школьной алгебре, существуют соотношения, позволяющие осуществлять эквивалентные преобразования формул, то есть преобразовывать программы, не меняя определяемого или сложного оператора (преобразования на множестве данных). Использование подобного аппарата позволило в 1969—1973 годах построить автоматизированную систему проектирования компьютеров вместе с любыми реализуемыми на них системами программ, повышающую производительность труда при проектировании в 20—30 раз.

В 70-е годы теория программирования и вычислительных систем продолжает развиваться весьма быстрыми темпами. Особенно большое внимание в этот период уделялось технологии составления и методов проверки правильности больших программ. Развились идеи так называемого *структурного программирования*. Одной из вариаций этих новых технологий программирования является развиваемый у нас в стране метод *формализованных технических заданий*. Суть его состоит в том, что для написания сложной программы создается язык крупноблочных операторов и условий, с помощью которых удается записать требуемую программу достаточно кратко. Например, при построении шахматных программ в качестве операторов могут выступать процедуры проведения пешки в ферзи против одинокого короля, мата ладьей и королем, а в качестве условий—наличие проходной пешки или открытой линии.

Затем создается новый язык с более мелкими операторами и условиями, и программа переписывается на этом языке. Строя серию таких языков и представлений, на каком-то этапе встречают полностью формализованный язык, для которого существует автоматическая система транслирования.

Важным направлением развития теории вычислительных систем в 70-е годы стала *теория многопроцессорных систем*, позволяющая распараллеливать вычислительные процессы и тем самым увеличивать суммарное быстродействие системы. Теоретический задел в области методов распараллеливания был выполнен в предыдущие годы. Особенно интенсивно эти работы развивались в Новосибирске.

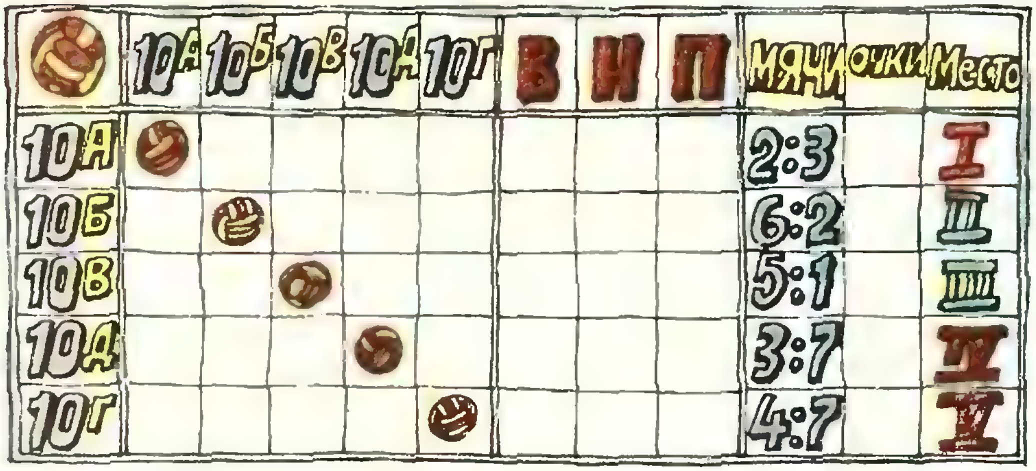
В настоящее время разработаны основные принципы построения многопроцессорных систем со многими сотнями и тысячами процессоров. При этом приходится отступать уже не от одного-двух принципов фон Неймана, а от всех четырех сразу. Подобные ненеймановские машины составят, по-видимому, основу развития вычислительной техники в ближайшем будущем.

Большой интерес представляет реализация на основе достижений современной микроэлектроники принципов обработки информации, заложенных в человеческом мозгу. Существенно, что здесь фактически стирается разница между памятью и процессорами (АЛУ), а обработка информации идет сразу по всей памяти. Тем самым обеспечивается наиболее высокий уровень распараллеливания и максимальное быстродействие системы.

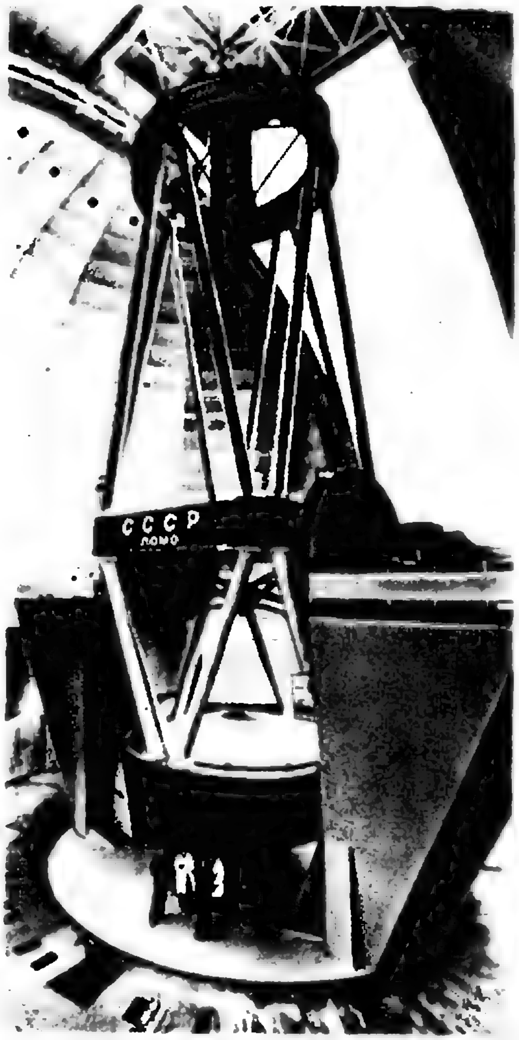
Турнирная таблица

По окончании школьного футбольного турнира (в один круг) ребята вручили Степе Мошкину все записи и поручили оформить итоговую таблицу. Степа заготовил таблицу, поставил в нее команды согласно занятым ими местам и общее число забитых и пропущенных мячей, а потом пошел сам играть в футбол. Придя домой, он увидел, что младшая сестра порвала все записи, осталась только таблица. Помогите Степе ее заполнить, учитывая, что за победу Степа ставил команде 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0; при равенстве очков, набранных двумя командами, Степа ставил выше ту команду, у которой была больше разность забитых и пропущенных мячей, а если и эти разности были равны, то команду - победительницу личной встречи.

Э. Туркевич



●	10А	10Б	10В	10Д	10Г	В	Н	П	мячи	очки	место
10А	●								2:3		I
10Б		●							6:2		II
10В			●						5:1		III
10Д				●					3:7		IV
10Г					●				4:7		V



А. Михайлов

Шестиметровый телескоп

В 1609 году Галилей впервые направил на ночное небо самодельную зрительную трубу (телескоп), составленную из двух очковых стекол, и получил увеличенное изображение небесных объектов. Эта зрительная труба давала лишь трехкратное увеличение. Уже в следующем году Галилей сделал еще два телескопа, затем еще несколько. Лучший из телескопов увеличивал в 30 раз. С этим инструментом Галилей сделал ряд замечательных открытий: он увидел четыре спутника Юпитера, обнаружил фазы у Венеры (напоминающие фазы Луны), заметил горы на Луне, и «разложил» Млечный Путь на множество слабых, невидимых простым глазом, звезд.

Что такое увеличение телескопа и от чего оно зависит? Телескоп Галилея состоял из двух основных частей: объектива (обращенного к объекту) и окуляра (обращенного к глазу). Объективом служила собирающая линза, а окуляром — рассеивающая, причем эти линзы были расположены так, что их задние фокусы совпадали. Ход лучей в таком телескопе (сейчас его обычно называют трубой Галилея) показан на рисунке 1. Параллельный пучок лучей от удаленного источника после преломления в объективе становится сходящимся, а по выходе из окуляра снова оказывается параллельным. Попадая затем в глаз наблюдателя, лучи сходятся на сетчатке глаза и дают действительное изображение источника. Угол α', под которым лучи выходят из зрительной трубы, больше угла α, который составляют с осью лучи, падающие на объектив (или непосредственно в глаз наблюдателя). Другими словами, зрительная труба увеличивает угол, под которым виден источник. Это увеличение равно (см. рис. 1).

$$K = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 — фокусное расстояние объектива, а F_2 — окуляра.

Современник Галилея Кеплер заменил рассеивающий окуляр короткофокусной собирающей линзой, играющей роль лупы при рассматривании созданного объективом изображения удаленного источника. Ход лучей в трубе Кеплера приведен на рисунке 2. Преимуществом этой трубы по сравнению с трубой Галилея является то, что она дает *действительное* промежуточное изображение в фокальной плоскости объектива, куда можно поместить измерительную шкалу или фотопластинку. Увеличение трубы Кеплера, как и трубы Галилея, равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра.

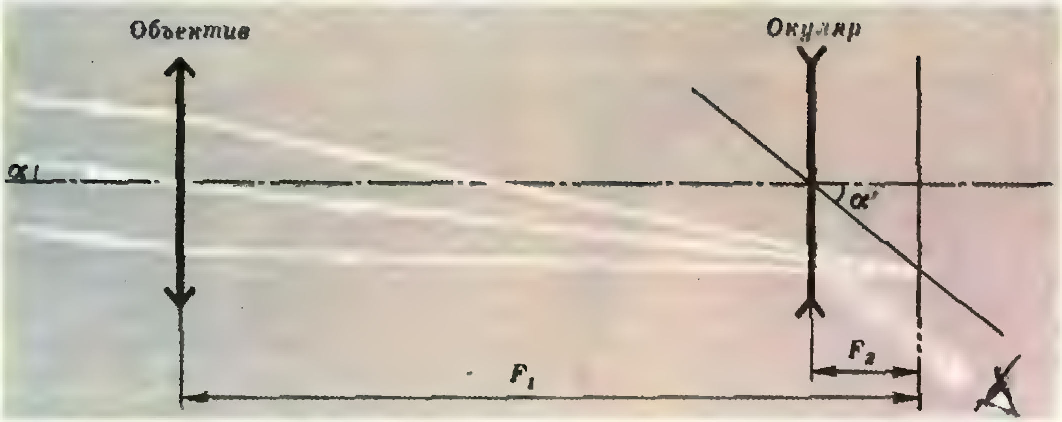


Рис. 1. Ход лучей в зрительной трубе Галилея.

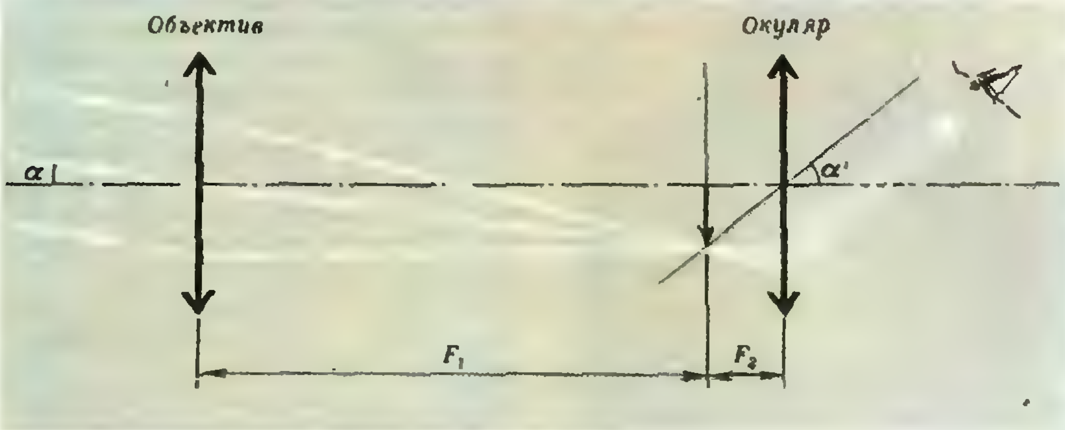


Рис. 2. Ход лучей в зрительной трубе Кеплера.

И телескоп Галилея, и телескоп Кеплера впоследствии были названы *рефракторами* (от латинского слова frango — ломаю). Стремление получить как можно большее увеличение привело к постройке очень длинных зрительных труб, что повлияло на качество изображения: его яркость уменьшилась. Этого можно было избежать, увеличив диаметр объектива, то есть увеличив количество света, проходящего через телескоп *). Однако увеличение размеров объектива приводит к резкому ухудшению четкости изображений — они становятся расплывчатыми и с цветными каемками. Это связано с недостатками линз — прежде всего, со *сферической* и *хроматической аберрациями*.

Причина возникновения первого недостатка довольно наглядно проиллюстрирована рисунком 3. Лучи, проходящие через различные участки линзы, расположенные на разных расстояниях от оси линзы, дают изображения точечного источника, лежащие на разных расстояниях от линзы. В результате изображение светящейся точки получается в виде светлого расплывчатого пятна. Эту погрешность линзы и называют *сферической аберрацией*.

Явление *хроматической аберрации* состоит в том, что изображение, даваемое линзой, оказывается окрашенным, окаймленным цветными каемками. Эта погрешность возникает из-за того, что лучи разного цвета одной и той же линзой преломляются по-разному — фиолетовые лучи сильнее, а красные слабее (рис. 4).

Во времена Галилея и Кеплера считалось принципиально невозможным сделать объектив свободным от сферической и хроматической аберраций. Лишь во второй половине XVIII века был найден способ избавиться от этих недостатков, сделав объектив составным из двух различных линз *). Однако трудности получения однородных и оптически совершенных стекол остались.

---

*) Кстати сказать, собрать как можно больше света, идущего от небесного объекта,— одно из основных назначений телескопа.

Для устранения хроматической аберрации англичанин Грегори в 1663 году предложил использовать в качестве объектива не линзу, а вогнутое зеркало, которое совершенно свободно от хроматизма, так как, по выражению Ньютона, «угол падения равен углу отражения для всех цветов». Причем, чтобы избавиться и от сферической аберрации, отражающая поверхность зеркала должна иметь форму параболоида вращения, который собирает в одну точку пучок лучей, параллельных оси параболоида. Довольно скоро научились шлифованием придавать зеркалу нужную форму. Однако еще долго не умели покрывать поверхность стекла отражающим свет слоем серебра, и зеркала делались из специального сплава меди с оловом, который хорошо полируется и имеет достаточную отражательную способность. В качестве окуляра предлагалось использовать собирающую линзу.

Грегори не удалось сделать предложенного им зеркального телескопа — *рефлектора*, получившего название от латинского reflecto — загибаю назад. Его сделал в 1668 году Ньютон, но лишь в 1722 году Джон Хадлей в Англии, а затем Шорт в Эдинбурге начали изготовление параболических рефлекторов, которые не уступали самым большим рефракторам того времени.

С тех пор началось соревнование между двумя принципиально различными конструкциями телескопов — между рефракторами и рефлекторами. Рефракторы было делать труднее: во-первых, приходилось шлифовать у двух линз четыре поверхности и, во-вторых, предъявлялись более высокие требования к материалу — оптически однородному стеклу. Лишь в 1824 году знаменитый оптик Фраунгофер в Мюнхене сделал для обсерватории в Дерпте (ныне Тарту в Эстонии) рефрактор с диаметром объектива 9 дюймов (24 см), а его преемник Мерц в 1839 году изготовил для Пулковской обсерватории 15-дюймовый объектив. Самый большой объектив в 40 дюймов (104 см) был сделан в 1896 году А. Кларком в США, и с тех пор еще никому не удалось увеличить размеры рефракторов.

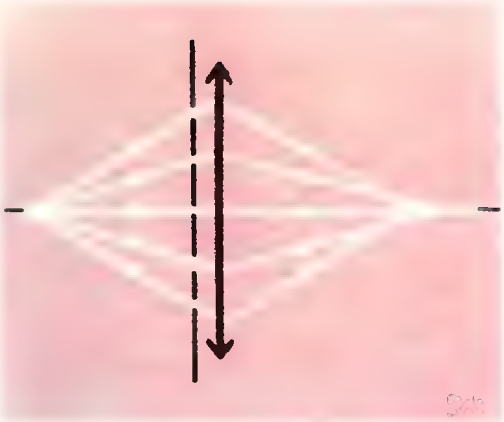


Рис. 3. Возникновение сферической аберрации.

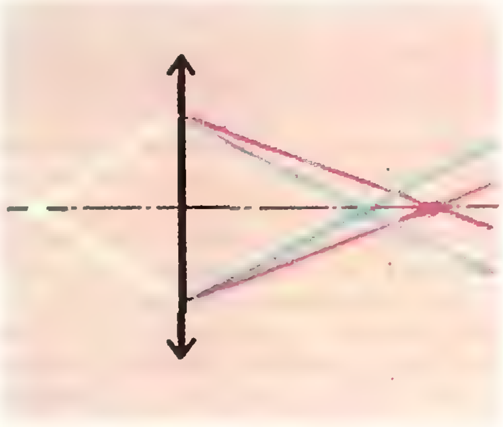


Рис. 4. Хроматическая аберрация.

Меньшие трудности встречались при постройке больших рефлекторов. Особые заслуги в этом принадлежат англичанину Вильяму Гершелю, который в 1774—1789 годах сделал несколько рефлекторов: наибольший из них имел объектив с диаметром 120 см при фокусном расстоянии 12,5 м (рис. 5). С помощью собственноручно изготовляемых телескопов он открыл планету Уран, ряд туманностей и звездных скоплений и исследовал строение галактической системы. Еще больший рефлектор построил в середине прошлого века лорд Росс в Англии. Зеркало этого телескопа имело диаметр 185 см и фокусное расстояние 16 м.

---

*) Более подробно об исправлении недостатков линз можно прочитать, например, в «Элементарном учебнике физики» под редакцией академика Г. С. Ландсберга.

Если по оптическим параметрам рефлекторы намного превосходили рефракторы, то по удобству наблюдений и разносторонности применений они им сильно уступали. Более легкие и менее громоздкие рефракторы уже давно стали снабжаться специальной монтировкой, в которой одна из двух взаимно перпендикулярных осей устанавливалась параллельно оси мира. Равномерное вращение вокруг этой оси со скоростью один оборот в сутки позволяет следить за видимым движением звездного неба и все время удерживать в поле зрения наблюдаемый объект. Другая ось служит для того, чтобы направлять телескоп в любую точку небосвода.

Что касается рефлекторов, то из-за огромных размеров и веса они монтировались гораздо проще и могли применяться для наблюдений лишь вблизи меридиана, поворачиваясь самым примитивным образом с помощью блоков и канатов; наблюдателям же приходилось громоздиться на крайне неудобных помостах. Кроме того, недостатком рефлекторов было потемнение металлических зеркал от атмосферных воздействий, что требовало повторной трудной полировки.

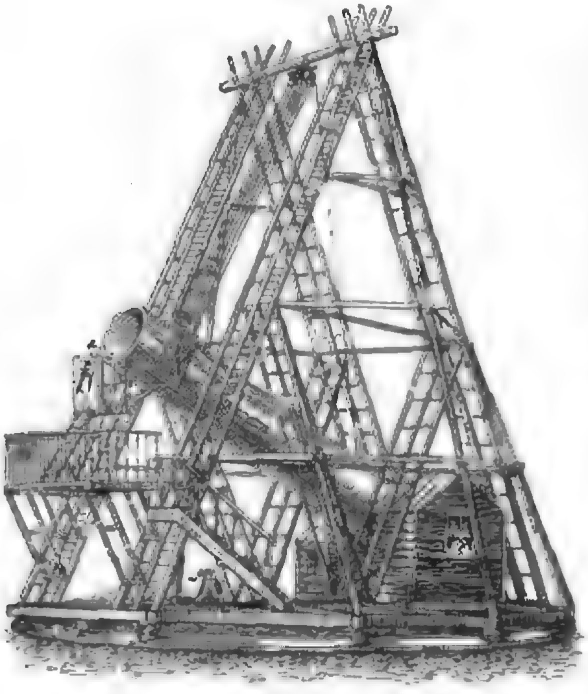


Рис. 5. Большой рефлектор Гершеля.

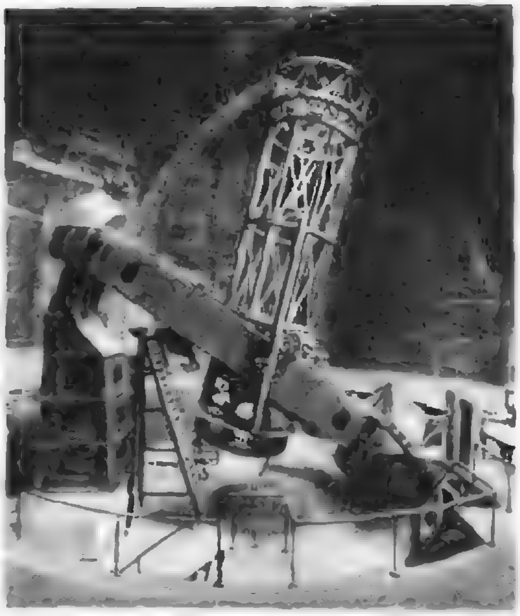


Рис. 6. 2,5-метровый рефлектор на обсерватории Маунт Вильсон.

Таким образом, рефракторы не сдавали своих позиций и применялись там, где требовалось производить точные угловые измерения — в меридианных инструментах для определения сферических координат звезд, при микрометрических измерениях, например, двойных звезд, а позже — для фотографирования звездного неба.

Новое возрождение получили рефлекторы в шестидесятых годах прошлого века, когда германский химик Либих нашел способ покрывать стекло тончайшим слоем блестящего серебра. Тогда же французский физик Фуко начал делать зеркала рефлекторов из стекла с последующим серебрением отражающей поверхности. Такие зеркала были гораздо легче металлических, что позволило и для них применять специальную монтировку. В случае потускнения серебряный слой легко смывался азотной кислотой, и зеркало вновь серебрилось химическим способом без дополнительной полировки.

В результате с конца прошлого века началось быстрое освоение рефлекторов. Одним из первых был установленный в 1895 году 36-дюймовый (92 см) Кросслеевский рефлектор Ликской обсерватории в США, с которым был получен ряд замечательных фотографий множества туманностей, звезд-

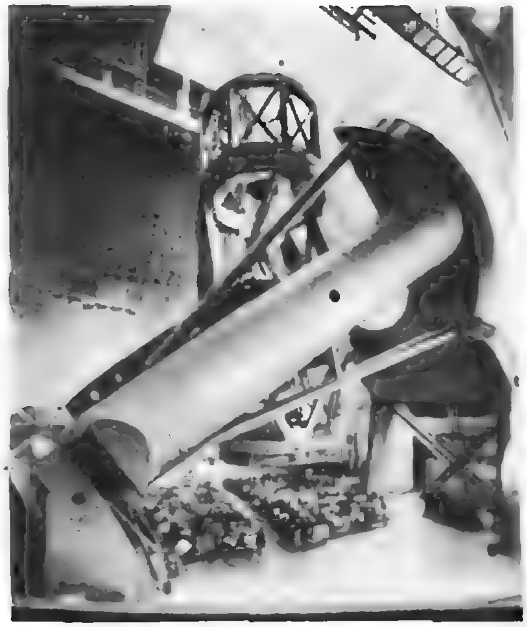


Рис. 7. 5-метровый рефлектор, установленный на горе Паломар.

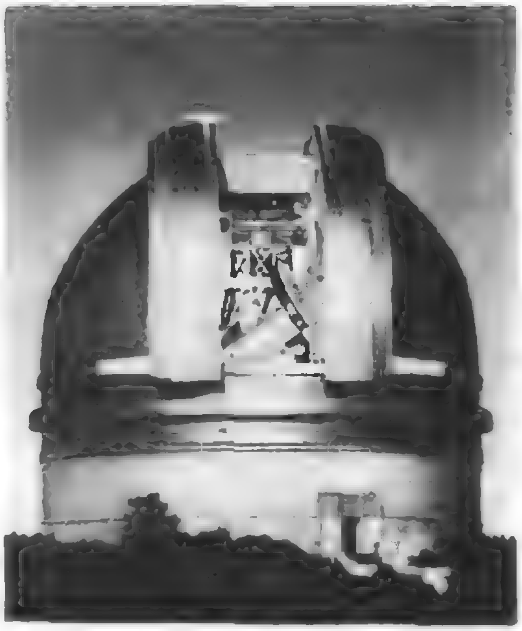


Рис. 8. Башня 5-метрового рефлектора на горе Паломар.

ных скоплений и Млечного Пути. Затем в 1908 году последовал 60-дюймовый (152 см) рефлектор на горе Вильсон (Маунт Вильсон) в Калифорнии. Такие большие зеркала, несмотря на значительную толщину (достигающую $^1/_8$ доли диаметра), заметно прогибаются под влиянием собственного веса при разных наклонах к горизонту. Для устранения этого вредного явления была придумана так называемая разгрузка, состоящая из многочисленных рычагов с противовесами, которые подпирают тыловую часть зеркала с силой, зависящей от наклона зеркала.

К этому времени окончательно определилась область применения больших рефлекторов. Это, с одной стороны, фотографические наблюдения наиболее слабых и удаленных объектов — туманностей (главным образом, внегалактических, находящихся на расстояниях во много десятков и сотен миллионов световых лет), а с другой стороны, фотографирование спектров для исследования физических свойств и химического состава звезд и их атмосфер. Сюда же относятся открытие и изучение спектрально-двойных звезд и вспыхивающих новых звезд. Для всех этих целей нужно собрать как можно больше света, что действительно можно сделать с помощью больших зеркал. Кроме того, для спектральных наблюдений очень важна полная ахроматичность рефлекторов.

Большие успехи, достигнутые с помощью упомянутых рефлекторов, поставили вопрос о создании еще более мощных инструментов. Так, в 1917 году вступил в строй 100-дюймовый (254 см) рефлектор тоже на обсерватории Маунт Вильсон, в установке которого было применено новшество: полярная ось оканчивалась двумя большими поплавками, наполовину погруженными в полуцилиндрические сосуды со ртутью, чем достигалось очень легкое и плавное вращение (рис. 6).

В начале тридцатых годов в калифорнийском городе Пасадена начались подготовительные работы по проектированию рефлектора вдвое большего диаметра — в 200 дюймов (508 см) и в 1946 году был закончен его монтаж на горе Паломар (в 200 км от Лос-Анжелеса, штат Калифорния) на высоте 1750 м над уровнем моря. Рефлектор (рис. 7) установлен в круглой башне под полусферическим куполом диаметром в 42 м, который имеет широкий люк, поворотом купола направляемый в нужную сторону неба (рис. 8). Что касается зеркала, то первоначально оно оказалось неудовлетворительной формы и его пришлось доводить местной полировкой уже в самом телескопе. К этому времени вместо серебрения был изобретен способ покрытия стекла алюминием путем испарения в высоком вакууме. Оказалось, что алюминиевый слой прочнее серебряного и очень хорошо отражает свет, особенно в его коротковолновой части. До самого последнего времени это был самый большой рефлектор в мире.

В Советском Союзе до войны самый большой рефлектор имел зеркало диаметром 1 м; он был изготовлен в Англии и находился в Симеизской обсерватории в Крыму. С ним академик Г. А. Шайн с сотрудниками выполнили ряд интересных спектроскопических исследований по движению звезд и составу звездных атмосфер. Во время войны этот инструмент погиб. Раньше наша оптико-механическая промышленность не имела опыта по изготовлению больших астрономических инструментов (особенно в отливке и шлифовке зеркал). Однако Ленинградский завод освоил это трудное дело и сделал несколько рефлекторов в 1, 1,25 и 1,5 м, а в 1960 году на новой Крымской астрофизической обсерватории Академии наук СССР завершилась установка рефлектора в 2,6 м, который и теперь остается одним из самых больших в Европе.

Удачный опыт позволил поставить еще более сложную задачу. По инициативе крупнейшего советского оптика Д. Д. Максутова был разработан план постройки рефлектора с 6-метровым зеркалом (см. заставку к статье). При этом главный конструктор Б. К. Иоаннисиани не стал копировать американские образцы, а пошел по новому, оригинальному пути. Развитие электронных вычислительных машин позволило отказаться от обычной экваториальной монтировки, а применить более простую — горизонтальную, в которой одна ось направлена вертикально, а перпендикулярная к ней — горизонтально. Это сильно упростило механическую часть конструкции и монтировку зеркала с его разгрузкой, поскольку теперь зеркало в зависимости от положения наблюдаемого объекта наклоняется только в одном направлении и не испытывает боковых наклонов. Зато осложнилось слежение телескопа за вращением небесной сферы: вместо одного равномерного движения вокруг полярной оси теперь нужно строго согласованно вращать телескоп с переменной скоростью вокруг двух осей. Кроме того, само поле зрения испытывает вращение вокруг своего центра, и поэтому при фотографировании протяженных объектов кассетную часть с фотопластинкой приходится вращать тоже неравномерно. Эти сложные движения удалось осуществить с помощью электронных машин, которые пересчитывают координаты наблюдаемой точки неба, определяют скорости их изменений и дают соответствующие команды движущим телескоп моторам (подвижная часть телескопа имеет массу почти 700 тонн).

Главное зеркало телескопа диаметром 6 м было отлито и обработано на стекольном заводе под Москвой, для чего там были сооружены два специальных цеха. После отливки из особого сорта стекла с малым коэффициентом расширения, раскаленная масса медленно охлаждалась с электрическим подогревом во избежание возникновения вредных напряжений, которые обычно приводят к разрыву стеклянного блока. Такой процесс «отжига» обычно продолжается не меньше года, лишь после чего можно узнать, удалась отливка или нет.

Огромная и сложная монтировка телескопа была выполнена на оптико-механическом заводе в Ленинграде при участии ряда других ленинградских заводов тяжелого машиностроения. В результате получился инструмент, по габариту и массе соответствующий самым большим металлическим конструкциям, а по точности и тонкости не уступающий технике микроскопа.

Отшлифованное зеркало имеет фокусное расстояние 24 м; на таком расстоянии перед зеркалом образуется изображение наблюдаемого объекта. Сюда нужно поместить фотопластинку или другой светоприемник, которые, таким образом, окажутся на пути световых лучей, идущих от объекта к зеркалу. Здесь же на распорках висит небольшая кабина в форме ци-

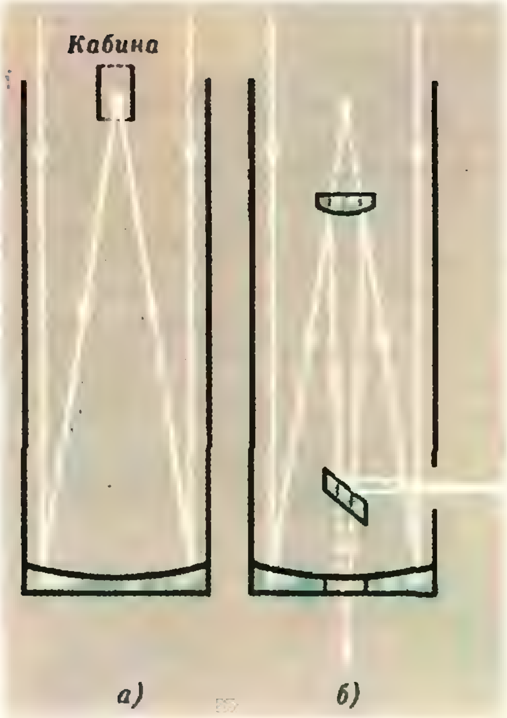


Рис. 9. Системы рефлекторов: а) схема в прямом фокусе; б) схема Кассегрена.

линдра диаметром около двух метров с осью, направленной по оптической оси зеркала (рис. 9, *а*). Внутри кабины сидит наблюдатель в случае, если наблюдения ведутся непосредственно в главном фокусе. Из всего пучка света диаметром в 6 м кабина экранирует около 10%, вызывая потерю в 0,1 звездной величины.

Кроме этого, так называемого главного фокуса, можно вести наблюдения и в фокусе Кассегрена, по имени французского физика, предложившего в 1672 году поместить близ главного фокуса небольшое выпуклое зеркало, которое посылает лучи обратно в сторону главного зеркала (для этого имеющего отверстие в центре), так что они собираются позади главного зеркала (рис. 9, *б*). Эта система применяется, главным образом, для фотографирования звездных спектров. В шестиметровом телескопе для удобства наблюдений в системе Кассегрена лучи отклоняются под прямым углом в сторону дополнительным плоским зеркалом и фокусируются сбоку над удобной площадкой, где можно помещать любые светоприемники. Фокусное расстояние телескопа в этом случае достигает 190 м.

Шестиметровый телескоп установлен в круглой башне под вращающимся полусферическим куполом, широкий люк которого автоматически направляется в сторону наблюдаемой части неба. Все управление телескопом, то есть наведение на объект и слежение за ним, совершается от соответствующего пульта. В нижних этажах башни находятся лаборатории для первичной обработки результатов наблюдений, помещение с огромной вакуумной камерой для алюминирования зеркала и комнаты для отдыха наблюдателей.

Иногда спрашивают, какое наибольшее увеличение может давать шестиметровый телескоп. Такой вопрос совершенно праздный и вот по какой причине. Увеличение определяется отношением фокусного расстояния объектива, в данном случае зеркала, к фокусному расстоянию окуляра. При фокусном расстоянии зеркала 24 м употребительный окуляр с фокусным расстоянием 24 мм дает линейное увеличение в 1000 раз, а по площади в 1 000 000 раз. Однако бесполезно применять столь большие увеличения, так как неоднородность и неспокойствие воздуха настолько портят изображение, что ничего большего, по сравнению с наиболее употребительными увеличениями в 300—500 раз, не видно.

Впрочем, с большими телескопами-рефлекторами вообще не производят визуальных наблюдений, а светоприемниками являются фотопластинки или электрические фотоэлементы. Тогда важно не увеличение, а количество собранного света. Диаметр шестиметрового зеркала примерно в 1000 раз больше диаметра зрачка глаза, поэтому зеркало собирает в 1 000 000 раз больше света, что соответствует выигрышу в 15 звездных величин. Значит, если глаз видит звезды до 6-й величины, то такой телескоп «видит» звезды до 21-й величины, а при длительном фотографировании еще на 3—4 величины слабее. Именно в этом и заключается главное преимущество больших рефлекторов.

Однако при любом способе наблюдений спокойствие, однородность и прозрачность окружающего воздуха играют главную роль и являются самым важным условием для выбора места установки телескопа. Прежде всего, необходимо устранить влияние наиболее плотных и обычно загрязненных нижних слоев атмосферы, что заставляет выбирать достаточно высокое, обычно более 1000 м над уровнем моря, место. Затем большое значение имеют окружающий рельеф и поверхностный покров. Наперед нельзя определить, где окажутся хорошие условия для установки большого телескопа, — это решается довольно продолжительными специальными исследованиями. Поэтому еще задолго до окончания постройки шестиметрового телескопа Пулковская обсерватория, первоначально курировавшая его сооружение, снарядила несколько экспедиций, которые обследовали 16 мест в южных районах Советского Союза. Кроме астро-климатических условий пришлось учитывать также возможность доставки сорокатонного зеркала и крупногабаритных частей монтировки. После трехлетних поисков и испытаний было найдено наиболее благоприятное место на Северном Кавказе, в горах, над одной из долин, параллельных долине Теберды с известным курортом. Выбранное место лежит на высоте 1700 м над уровнем моря над горной речкой Зеленчук, в 30 км от станции Зеленчукской. Оказалось, что там бывают ночи, когда изображения имеют почти идеальную четкость и спокойствие. Одна ночь наблюдений в таких условиях может дать больше, чем десятки ночей с посредственным, а тем более плохим качеством изображений.

В конце 1975 года большой телескоп был принят комиссией Академии наук СССР и включен в состав Специальной астрофизической обсерватории Академии.

Итак, наибольший и самый мощный телескоп-рефлектор сооружен и находится в Советском Союзе. Естественно возникает вопрос: можно ли ожидать, что в не очень отдаленном времени будет сделан еще больший телескоп? На это приходится ответить отрицательно, поскольку современная техника открывает совсем иные, новые пути для исследования космоса. Это, прежде всего, путь, по которому уже пошли радиоастрономы — синтезирование изображений, даваемых несколькими телескопами более скромных размеров, установленными близко друг к другу или даже на некотором расстоянии один от другого. При этом сложение изображений может производиться не непрерывно, а выборочно — лишь в сравнительно редкие моменты отличной видимости и наибольшей четкости изображений, что, конечно, можно сделать только с помощью современной электронной техники.

Другой многообещающий путь — вынесение наблюдательных средств за пределы земной атмосферы: на искусственные спутники Земли и даже на Луну, где можно получить прочную основу для установки даже больших инструментов. Шаги в этом направлении уже делаются и начинают давать интересные результаты.

Сверхтяжелые элементы — не открытие, а ошибка!

В ноябрьском номере «Кванта» за 1976 год было рассказано о возможном открытии свертяжелых элементов, которые должны стоять в таблице Менделеева под номерами 116, 124, 126.

Напомним, что открытие, если бы оно подтвердилось, поставило бы перед физиками очень трудный вопрос: как сверхтяжелые атомы попали в образцы слюды, где они были обнаружены.

После того как было объявлено о предполагаемом открытии, во многих лабораториях занялись его проверкой. Хотя рентгеновские спектры в новых опытах оказались теми же, но для них нашлось более простое объяснение. Оказалось, что все линии этих спектров совпадают с линиями рентгеновских спектров более легких элементов — скандия, олова и др., малые количества которых присутствуют в образцах.

Таким образом, нет никаких оснований придумывать хитрые объяснения опытов. Они объясняются вполне естественно.

Правда, остается непонятным, откуда взялись большие гало (их называют гигантскими). Но это уже другой вопрос. Над ним и надо думать.

Я. Смородинский

М. Маневич, М. Слуцкин

«Линейные построения» Грассмана

> *«Едва обозримо число тех разнообразных областей, которыми занимался Грассман и которые он обогатил своими исследованиями. Он был не только математиком оригинальнейшего склада с сильно выраженными философскими интересами, но и физиком, занимавшимся как теоретическими, так и практическими вопросами; ему мы обязаны великолепными работами об электрическом токе, об учении о цветах и о теории гласных звуков»* *).
>
> *Феликс Клейн*

Наиболее значительные результаты Германа Грассмана (1809—1877), замечательного немецкого математика, собраны в его сочинении «Учение о протяженности» (1844 г.). В этой книге излагается теория многомерных пространств. Из других его работ особого внимания заслуживают так называемые «линейные построения». Они наглядны по своей идее и имеют большое значение в теории алгебраических кривых.

В настоящей заметке мы познакомим читателей с «линейными построениями» Грассмана, относящимися к плоским алгебраическим кривым.

Определения и напоминания

1. *Координатной плоскостью* называется плоскость, на которой зафиксирована *система координат*. Положение каждой точки на координатной плоскости задается двумя числами (*координатами*) — абсциссой и ординатой (см. учебник «Математика 5», п. 16).

2. *Графиком уравнения* $f(x, y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых служат решениями этого уравнения (см. учебник «Алгебра 6», п. 23). Например, графиком уравнения $x^2 + y^2 - 4 = 0$ является окружность, а графиком уравнения $x + y - 3 = 0$ — прямая (рис. 1).

3. *Алгебраической кривой n-го порядка* называется график уравнения $P_n(x, y) = 0$, где $P_n(x, y)$ — некоторый многочлен n-й степени относительно переменных x и y. Например, прямая на рисунке 1 — кривая первого порядка, для нее $P_1(x, y) = x + y - 3$, а окружность на том же рисунке — кривая второго порядка, для нее $P_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ — многочлен второй степени относительно x и y.

Кривые второго порядка

О кривых второго порядка подробно рассказывалось в «Кванте» № 8 за 1977 год.

Оказывается, точки таких кривых можно строить с помощью одной линейки. Вот как строится кривая второго порядка по методу Грассмана *).

Зафиксируем на плоскости две прямые a_1, a_2 и три точки A, S, T (рис. 2). Проведем через точку S некоторую прямую l, точку ее пересечения с прямой a_1 обозначим через A_1. Теперь проведем прямую AA_1 *) и точку ее пересечения с прямой a_2 обозначим через A_2. Наконец, проведем прямую A_2T, пересекающую прямую l в некоторой точке M.

Когда прямая l поворачивается вокруг точки S, точки A_1 и A_2 как-то перемещаются на прямых a_1 и a_2, а точка M движется по плоскости. Оказывается, *траектория точки M является кривой второго порядка, как*

---

*) Цит. по книге Ф. Клейн «Лекции о развитии математики в XIX столетии», ч. I, М.—Л., ОНТИ, 1937 (с. 213)

*) Для кривой второго порядка этот метод совпадает с ранее известными (Паскаль, XVI век).

*) Если прямые l и a_1 параллельны, то прямая AA_1 проводится параллельно им (аналогично поступаем, если параллельны прямые AA_1 и a_2 и т. п.).

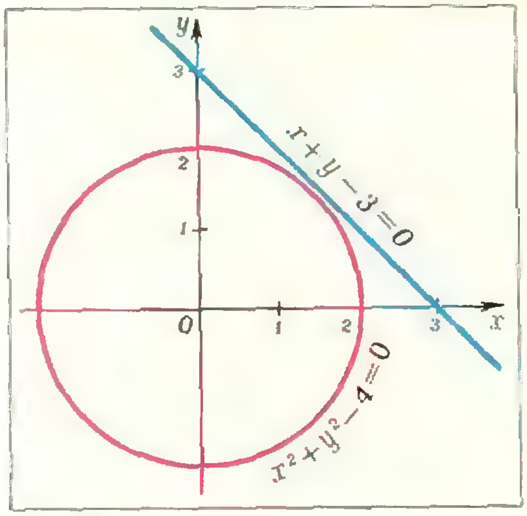


Рис. 1.

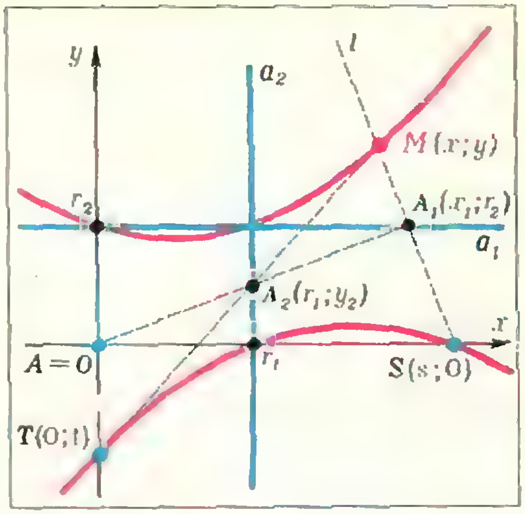


Рис. 3.

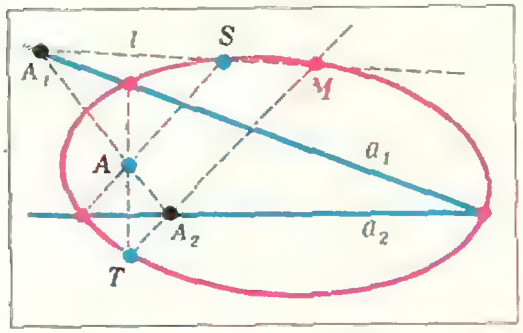


Рис. 2.

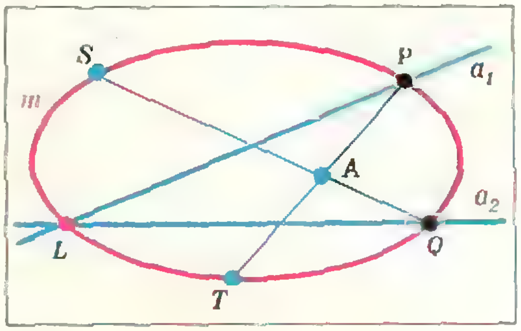


Рис. 4.

бы мы ни выбирали прямые a_1, a_2 и точки A, S, T.

Мы докажем этот факт для одного простого случая — когда прямые a_1 и a_2 перпендикулярны, а пары прямых SA, a_1 и TA, a_2 параллельны. Поместим начало координат в точку $O=A$, ось Ox направим по AS, ось Oy — по AT (рис. 3). Обозначим координаты точек S и T соответственно через $(s;\ 0)$, $(0;\ t)$. Пусть уравнения прямых a_1 и a_2 имеют вид $y=r_2$, $x=r_1$. Если точка M лежит на кривой, определяемой прямыми a_1, a_2 и точками A, S, T, то точки $M(x;\ y)$, $A_1(x_1;\ r_2)$ и $S(s;\ 0)$ должны лежать на одной прямой. Точки $M(x;\ y)$, $A_2(r_1;\ y_2)$ и $T(0;\ t)$ должны лежать на другой прямой, а точки $A_1(x_1;\ r_2)$, $A_2(r_1;\ y_2)$ и $A(0;\ 0)$ — на третьей прямой (рис. 3).

Точки M, S и A_1 лежат на одной прямой, если угловые коэффициенты прямых MS и A_1S равны (см. «Алгебра 6», п. 21 и «Алгебра и начала анализа 9», п. 52):

$$\frac{r_2}{x_1-s}=\frac{y}{x-s}.$$

Аналогичные равенства получатся для троек точек A, A_1, A_2 и M, A_2, T:

$$\frac{y_2}{r_1}=\frac{r_2}{x_1},$$

$$\frac{y_2-t}{r_1}=\frac{y-t}{x}.$$

Исключая из этих равенств x_1 и y_2, получим уравнение, которому должны удовлетворять x, y:

$$(r_2x+sy-sr_2)(tx+r_1y-r_1t)-r_1r_2xy=0$$

(s, t, r_1, r_2 у нас константы). Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы видим, что это уравнение — второй степени относительно x, y:

$$tr_2x^2+tsxy+sr_1y^2-sr_1(t+r_2)y-$$
$$-tr_2(r_1+s)x+tsr_1r_2=0.$$

Таким образом, все точки построенной кривой лежат на кривой второго порядка.

Итак, кривая, построенная методом Грассмана по прямым a_1, a_2 и точкам A, S, T, оказывается кривой второго порядка. Верно и обратное утверждение: *для всякой кривой* m *второго порядка найдутся такие прямые* a_1, a_2 *и точки* A, S, T, *что методом Грассмана по ним получается именно кривая* m.

Вот способ нахождения таких прямых и точек по кривой m. Возьмем кривую m второго порядка (рис. 4).

Зафиксируем на этой кривой три произвольные точки S, T, L. Через точку L проведем произвольные прямые a_1, a_2; пусть они пересекают m в точках P и Q, а прямые TP и SQ пересекаются в точке A. Тогда точки A, S, T и прямые a_1, a_2 определяют «по Грассману» как раз кривую m.

Способ прост, а вот доказать, что он даст именно кривую m, нелегко. Мы здесь только наметим ход доказательства.

Прежде всего надо показать, что на кривой, определяемой прямыми a_1, a_2 и точками A, S, T, лежат точки S, T, L, P и Q*). Эти же точки лежат и на исходной кривой m, то есть построенная нами «кривая Грассмана» имеет с кривой m уже пять общих точек. *А дальше надо показать*, что пять точек определяют не более одной кривой второго порядка. Проще всего это сделать с помощью уравнений.

Уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Все три коэффициента A, B, C не могут одновременно равняться нулю, так как тогда это уравнение определит кривую первого порядка — прямую линию. Допустим, что $C\neq 0$. Тогда левую часть этого уравнения можно разделить на коэффициент C, в результате получим уравнение

$$A_1x^2+B_1xy+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

где $A_1=A/C$, $B_1=B/C$ и т. д.

Если в полученное уравнение подставлять вместо x, y координаты точек S, T, L, P, Q, то получится система из пяти линейных уравнений относительно коэффициентов A_1, B_1, D_1, E_1, F_1. А такая система при условии, что никакие три точки из S, T, L, P, Q не лежат на одной прямой, имеет единственное решение.

Кривые высших порядков

Для кривых третьего порядка метод Грассмана состоит в следующем. На плоскости задаются точки S («вход»), T («выход») и два набора («блока»), каждый из которых состоит из двух прямых и одной точки: a_1, A, a_2 и b_1, B, b_2 (рис. 5). Затем для некоторой точки M плоскости производится такое построение: проводится прямая MS и находится точка A_1 ее пересечения с прямой a_1, затем проводится прямая A_1A и находится точка A_2 ее пересечения с прямой a_2, после этого проводится прямая MA_2 и находится точка B_1 ее пересечения с прямой b_1, дальше так же находится точка B_2 и проводится прямая MB_2. Если эта прямая проходит через «выход» (точку T), то точка M принадлежит кривой, а если не проходит, то не принадлежит. (Терминология вполне естественная: «войдя» на рисунке 5 во «вход», мы «вышли» через «выход».)

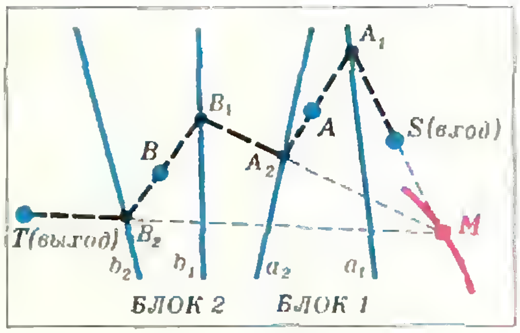


Рис. 5.

Заметим, что при построении кривой второго порядка (см. рис. 2) точка M участвует в построении два раза, а при построении кривой третьего порядка (рис. 5) — три раза.

Описанные построения Грассман назвал *линейными*. Эти построения были полностью исследованы Грассманом в общем случае, то есть для кривой n-го порядка. А именно, Грассман показал, что если на плоскости задать вход, выход и $n-1$ блок, то всякая точка M плоскости, удовлетворяющая схеме, изображенной на рисунке 6 (M участвует в линейных построениях ровно n раз), *принадлежит некоторой кривой n-го порядка*. И обратно, любая алгебраическая кривая n-го порядка укладывается в схему рисунка 6, то есть можно так за-

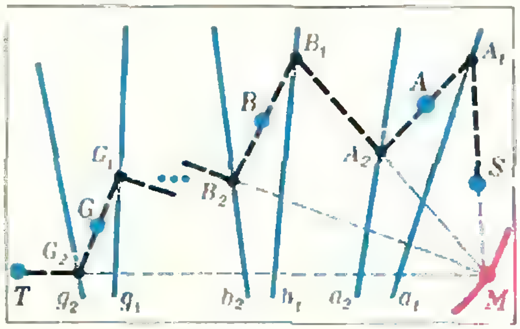


Рис. 6.

---

*) *Например, если $M=L$, то $A_1=(SM)\cap a_1=L$, $(AA_1)\cap a_2=L$* и $(TA_2)\cap(MS)=L$; аналогично проверяются остальные точки.

дать вход, выход и $n-1$ блоков, что по ним получится как раз заданная кривая n-го порядка.

Вы видите, что между кривыми второго порядка и более высокого — третьего, четвертого и т. д. — существует большое различие в реализации построений Грассмана. Кривую второго порядка «по Грассману» можно непосредственно построить (см. рис. 2) как траекторию некоторой точки, а для кривых третьего порядка метод Грассмана позволяет лишь проверять, принадлежит ли алгебраической кривой данная точка M плоскости или нет. Такое различие метода Грассмана для $n=2$ и $n \geqslant 3$ — не случайное.

Построения Грассмана проводятся одной линейкой. Если бы, задав прямые и точки, соответствующие, например, кривой $x^3-2y^3=0$, мы смогли бы построить хотя бы одну точку этой кривой, отличную от O (0; 0), то отношение x/y было бы равно $\sqrt[3]{2}$. А такую величину циркулем и линейкой построить невозможно.

Планиметрические произведения Грассмана

Все приведенные построения описываются Грассманом в следующей последовательности:

MS — прямая, проходящая через точки M и S;

MSa_1 — точка пересечения прямых MS и a_1;

MSa_1A — прямая, соединяющая точки MSa_1 и A и т. д.

Для кривой второго порядка прямая MSa_1Aa_2T должна проходить через точку M. Этот факт Грассман записывает в следующем символическом виде:

$$(MSa_1Aa_2T)\ M = 0.$$

Выражение, стоящее в левой части этого «уравнения», Грассман называет *планиметрическим произведением*, а само уравнение — *экстенсивным*. Экстенсивное уравнение кривой n-го порядка по Грассману имеет вид

$$(MSa_1Aa_2Mb_1Bb_2M\ \ldots\ \ldots\ Mg_1Gg_2T)M=0.$$

Вид уравнения показывает, сколько раз точка M встречается в построениях. Сами планиметрические произведения обладают рядом интересных свойств, которые Грассман также подробно изучал. В терминах планиметрических произведений результат Грассмана может быть сформулирован следующим образом: *если точка M входит в экстенсивное уравнение n раз, то координаты этой точки удовлетворяют алгебраическому уравнению n-й степени.* Обратно, *координаты точек всякой алгебраической кривой n-го порядка удовлетворяют уравнению $G=0$, где G — некоторое планиметрическое произведение, содержащее n раз точку M.*

«Эта теорема, — писал Ф. Клейн, — может быть положена в основу такого построения теории алгебраических кривых, проще которого вряд ли что можно придумать».

Описанные построения были обобщены Грассманом на случай трехмерного пространства. В трехмерном пространстве речь шла о стереометрических произведениях и соответствующих им «линейных построениях» точек алгебраических поверхностей.

Графическая реализация метода Грассмана

Еще Ф. Клейн заметил, что метод Грассмана можно рассматривать как механизм, позволяющий вычерчивать кривые. В точках M, $A_1, A_2, \ldots, G_2$ на прямые надо «одеть колечко», в точках $S, A, B, \ldots, T$ — сделать шарниры и т. п. Такие механизмы существуют для кривых второго и третьего порядков.

Линейные построения Грассмана могут быть полезными и при использовании ЭВМ и графопостроителей *). Действительно, можно написать программу, в которой будут реализованы две операции: проведение прямой через две точки и нахождение точки пересечения двух прямых. По этой программе ЭВМ будет определять координаты точек некоторой алгебраической кривой и выдавать их на печатающее устройство или непосредственно на графопостроитель в виде соответствующей команды для движения пера (просмотр точек плоскости проводится как в телевизоре — по строчкам с заданной степенью точности).

---

*) О графопостроителях мы писали в статье «ЭВМ в конструкторском бюро» («Квант», 1976, № 9).

В. Майер

Интерференционный опыт Брюстера

Экспериментальная установка

В 1817 году английский физик, член Лондонского королевского общества Д. Брюстер (1781—1868) обнаружил, что если две плоскопараллельные стеклянные пластинки одинаковой толщины расположить почти параллельно друг другу, то, глядя сквозь них, можно наблюдать интерференционную картину.

Оптическая схема опыта Брюстера изображена на рисунке 1. Свет, падая от лампы накаливания *S* на лист белой бумаги *Б*, рассеивается на нем и, проходя через плоскопараллельные пластинки P_1 и P_2, попадает в глаз *Г* наблюдателя. Интерференционная картина видна на черном фоне непрозрачного экрана *Э*.

Чтобы повторить опыт Брюстера, нужно в первую очередь подобрать подходящее стекло: пластинки P_1 и P_2 должны быть плоскопараллельны и установлены параллельно друг другу. Стекло толщиной около 7 мм, которое часто используется для изготовления зеркал и витрин магазинов, наиболее доступно и нередко вполне пригодно для постановки тонких интерференционных экспериментов. Достав кусок такого стекла, расположите его перед глазом так, чтобы в нем на светлом фоне отражался какой-либо темный предмет с четкими границами (например, на фоне дневного неба отражалась рама оконного переплета). Сфокусируйте (аккомодируйте) глаз на поверхность стекла так, чтобы была видна граница изображения темного предмета. Если при этом ровные края предмета видны слегка волнистыми или «размытыми» в каких-то местах, то, значит, поверхности стекла не гладкие и такое стекло не годится для опытов. Обычно удается подобрать стекло, поверхности которого настолько гладкие, что граница между изображением темного предмета и светлым фоном выглядит вполне резкой. Именно такое стекло следует использовать в опытах.

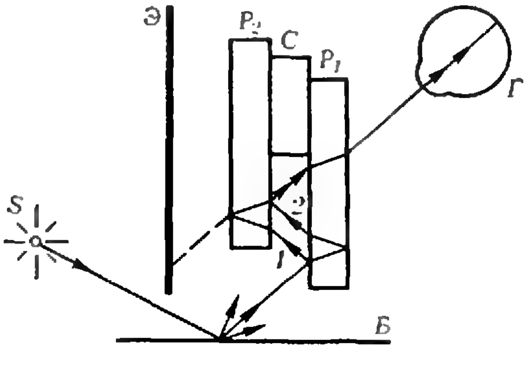


Рис. 1.

Из отобранного стекла твердосплавным или алмазным стеклорезом вырежьте кусок размером примерно 80 × 70 мм и разрежьте его пополам, так, чтобы получились две пластинки P_1 и P_2 размером 40 × 70 мм. Эти пластинки, очевидно, имеют с достаточно высокой точностью одинаковую толщину вблизи линии разреза. Приготовьте также третью стеклянную пластинку *С* такой же толщины, как и две первые, размером 30 × 40 мм.

Чтобы при работе не пораниться об острые края пластинок, отшлифуйте их (смочите их водой и обработайте на абразивном бруске или круге). Старайтесь при этом не поцарапать поверхности пластинок. Обработанные стеклянные пластинки вымойте водой, насухо протрите чистой мягкой тряпочкой и удалите с их поверхностей оставшиеся пылинки и ворсинки.

Для успешной постановки описанных ниже опытов соберите специаль-

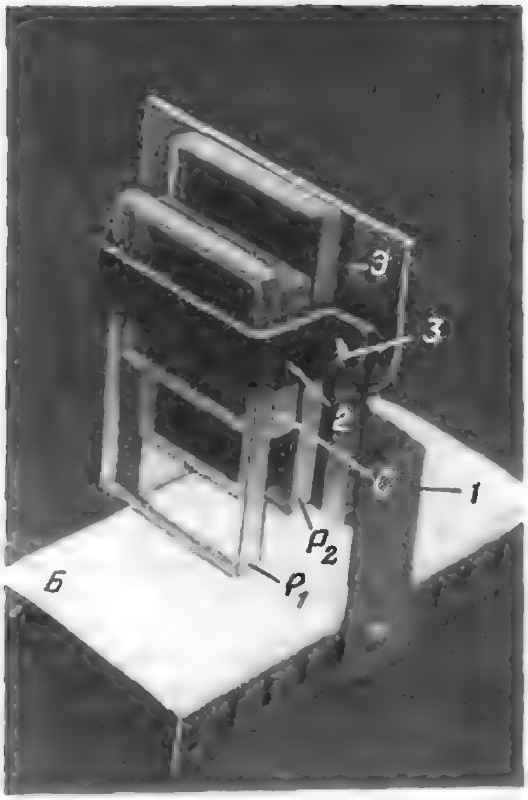


Рис. 2.

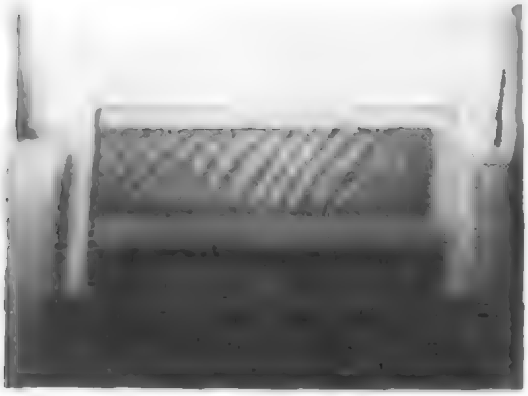


Рис. 3.

ный прибор, устройство которого вполне понятно из приведенной на рисунке 2 фотографии. Стеклянные пластинки P_1, P_2, C закреплены на алюминиевой стойке 1 прибора скобой 2 из винипласта или жести. В качестве экрана Э использован расположенный за пластинкой P_2 листок черной бумаги. Источник (лампу накаливания) поместите за экраном Э. При сборке прибора расположите пластинки P_1 и P_2 так, чтобы их области, близкие к линии разреза aa', оказались рядом. Угол между пластинками можно отрегулировать болтами 3 и перемещением пластинки C вверх или вниз.

При включенном источнике посмотрите на нижние части пластин. На черном фоне экрана вы увидите несколько широких горизонтальных полос различной яркости. Слегка изменяя угол между пластинами, можно отрегулировать его так, что одна из ярких горизонтальных полос покроется почти вертикальными интерференционными полосами.

На рисунке 3 приведена фотография интерференционных полос Брюстера, полученная в белом свете. Эта фотография, конечно, не идет ни в какое сравнение с тем прекрасным явлением, которое можно наблюдать непосредственно глазом.

Немного теории

Пусть на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины d под некоторым углом φ падает световой луч (рис. 4). В результате многократных отражений и преломлений света на поверхностях пластинки из нее выйдет множество параллельных и равноотстоящих друг от друга лучей. Ясно, что интенсивность каждого последующего луча, выходящего из пластинки, меньше интенсивности предыдущего и быстро уменьшается с увеличением порядкового номера луча. Поэтому из дальнейшего рассмотрения можно исключить все лучи, кроме лучей 1, 2 и 1′, 2′. Нетрудно

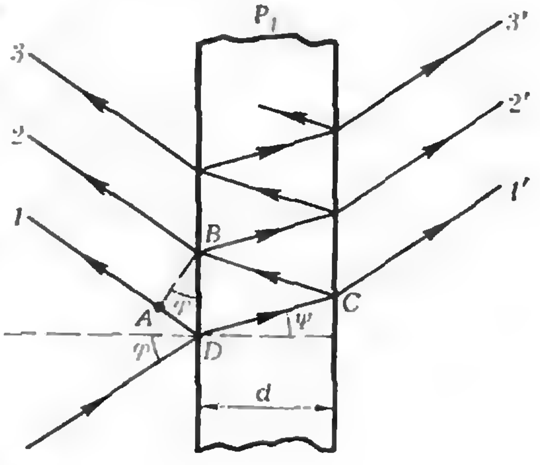


Рис. 4.

видеть, что эти пары лучей в общем-то эквивалентны, следовательно, достаточно проанализировать «поведение» лучей *1* и *2*.

Лучи *1* и *2*, которые указывают направления распространения световых волн, получились из одного луча, падающего на пластинку. Следовательно, они когерентны. А это означает, что световые волны, идущие в направлениях этих лучей, будучи сведены вместе, должны интерферировать.

Вычислим разность хода между лучами *1* и *2*, возникающую после прохождения первой пластины (рис. 4). Проведем из точки B отрезок AB, перпендикулярный к этим лучам. Разность путей, проходимых когерентными волнами от точки их образования D до точек B и A (идущие дальше в бесконечность волны дополнительной разности хода не приобретают), равна геометрической разности хода

$$\delta = DC + CB - AD = 2DC - AD.$$

Если стеклянная пластинка имеет показатель преломления n, то световая волна проходит путь DCB в стекле со скоростью, в n раз меньшей скорости света в воздухе, двигаясь в котором она за то же время прошла бы расстояние $2n \cdot DC$. Кроме того, при отражении света в точке D от оптически более плотной среды происходит «потеря полуволны» (изменение фазы отраженной волны на π). Поэтому истинная, или, как принято говорить, оптическая разность хода между когерентными волнами равна

$$\Delta = 2n \cdot DC - AD + \frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Из геометрических соображений

$$DC = \frac{d}{\cos\psi}, \quad BD = 2DC \cdot \sin\psi = 2d \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi},$$

$$AD = BD \cdot \sin\varphi = 2d \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \cdot \sin\varphi.$$

Согласно закону преломления света

$$\sin\psi = \frac{1}{n}\sin\varphi.$$

Подставляя найденные значения DC и AD в формулу (1) и учитывая закон преломления, получим

$$\Delta = 2n\frac{d}{\cos\psi} - 2d\frac{\sin\psi}{\cos\psi} \cdot \sin\varphi + \frac{\lambda}{2} = 2d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} + \frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Максимумы интенсивности света (светлые интерференционные полосы) будут в том случае, если оптическая разность хода равна целому числу длин волн света:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \ k = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Проходя пластинку P_2, лучи *1* и *2* приобретают дополнительную разность хода, которая, как это следует из симметричности устройства, также определяется формулой (2). Нетрудно сообразить, что разность хода световых волн, прошедших обе пластинки и идущих в глаз наблюдателя (см. рис. 1), выражается формулой

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = 2d\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi_2}\right), \qquad (4)$$

где φ_1 — угол падения света от источника на пластинку P_1, а φ_2 — угол падения параллельных лучей *1* и *2* на пластинку P_2.

С помощью «геометрических» вычислений формулу (4) можно привести к виду

$$\Delta = \alpha d\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}},$$

где α — двугранный угол между пластинами.

Выходящие из пластин когерентные лучи параллельны между собой, а значит, пересекаются в бесконечности и образуют интерференционную картину тоже в бесконечности. Поэтому для наблюдения картины интерференции глаз должен быть аккомодирован на бесконечность. (Если на пути лучей, выходящих из пластины P_1 после отражений, поместить собирающую линзу, то картину интерференции можно наблюдать на экране, помещенном за линзой в ее фокальной плоскости.) Фотография, помещенная на рисунке 3, подтверждает сказанное: чтобы получить резкое изображение интерференционных полос на пленке, пришлось сфокусировать объектив фотоаппарата на бесконечность; при этом детали установки получились на фотографии не резкими.

Опыты и наблюдения

Внимательно рассмотрите получающуюся в установке Брюстера интерференционную картину. Если вы удачно подобрали стеклянные пластинки и угол между ними, то увидите почти прямые параллельные между собой разноцветные полосы, расположенные симметрично по обе стороны от центральной белой полосы. Рядом с этой белой полосой проходят две наиболее темные полосы.

Центральная белая полоса соответствует тем углам падения света на пластинки, при которых оптическая разность хода между интерферирующими волнами равна нулю. Действительно, вообще интерференционное условие максимумов интенсивности имеет вид

$$\Delta = k\lambda, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если $k = 0$, то $\Delta = 0$ для любой длины волны. А значит, при одних и тех же углах, соответствующих $\Delta = 0$, максимумы интенсивности дадут все монохроматические волны, входящие в состав белого света. Это приведет к тому, что центральный максимум интенсивности (максимум нулевого порядка) окажется белым.

Все другие интерференционные полосы окрашены, причем красные части полос расположены дальше от центрального максимума, чем фиолетовые или синие.

Введите снизу между пластинами P_1 и P_2 полоску черной бумаги шириной 5 мм. Перемещая ее, вы можете перекрыть один из интерферирующих пучков и уничтожить тем самым интерференционную картину.

Лучше это сделать так. К краям пластинок P_1 и P_2 пластилином прикрепите расположенную между ними горизонтально или слегка наклонно полоску картона, отделяющую один из когерентных пучков от другого. Тогда, перекрывая один из пучков непрозрачной бумагой, можно добиться исчезновения картины.

Теперь вместо полоски бумаги введите в один из интерферирующих пучков полоску стекла толщиной 1—2 мм. Интерференционная картина вновь исчезнет! Попробуйте объяснить результат опыта самостоятельно.

Расположите между пластинами P_1 и P_2 небольшую спираль, изготовленную из тонкой нихромовой проволоки. Подключив концы спирали с помощью многожильных проводников к батарейке, разогрейте спираль. При этом интерференционные полосы изогнутся и примут самую причудливую форму!

Можно поставить более простой вариант этого опыта, если поднести снизу под пластинки P_1 и P_2 пламя горящей спички (пламя должно быть расположено достаточно далеко от пластинок, так, чтобы в промежуток между ними попадал лишь нагретый от пламени воздух).

Чем же объясняется результат опыта? Очевидно, при нагревании воздуха изменяется его плотность, а следовательно, и его показатель преломления. Это ведет к тому, что между когерентными пучками возникает дополнительная разность хода, и интерференционная картина смещается. Положим, что картина сместилась на k полос. Это означает, что разность хода изменилась на k длин волн света. Поскольку длина световой волны очень мала, то в опыте можно измерить очень небольшие изменения разности хода и показателя преломления воздуха.

Приборы, служащие для измерения различных физических величин с помощью интерференции света, называются оптическими интерферометрами. Они позволяют производить измерения с очень высокой степенью точности. Описанный в статье прибор для наблюдения полос Брюстера фактически является простейшим интерферометром.

А. Тоом

Решения задач ВЗМШ

В этом номере мы публикуем решения некоторых задач из вступительной работы в ВЗМШ 1977 года («Квант», 1977, № 1, с. 53).

Задача 1. *В равенстве двух дробей, числители и знаменатели которых двузначные числа, цифры заменены буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными:*

$$\frac{\text{КУ}}{\text{РЕ}} = \frac{\text{КА}}{\text{КУ}}.$$

Какую цифру означает каждая из букв (достаточно привести все возможные ответы)?

Решение. Обозначим через $\frac{y}{x}$ несократимую дробь, равную $\frac{\text{КУ}}{\text{РЕ}}$. Иными словами, пусть $\frac{\text{КУ}}{\text{РЕ}} = \frac{y}{x}$, и натуральные числа x и y не имеют общих делителей, отличных от 1. Таким образом, $\text{РЕ} = ax$ и $\text{КУ} = ay$, и в то же время $\text{КУ} = bx$ и $\text{КА} = by$. Тогда $ay = bx$, откуда, так как x и y не имеют общих делителей, $a = cx$, $b = cy$. Итак, $\text{КУ} = cxy$, $\text{КА} = cy^2$, $\text{РЕ} = cx^2$, где c, x, y — натуральные числа.

С одной стороны, $|\text{КУ} - \text{КА}| = |\text{У} - \text{А}|$ и $\text{У} \neq \text{А}$. Значит, $0 < |\text{КУ} - \text{КА}| < 10$. С другой, $\text{КУ} - \text{КА} = cy(x - y)$. Следовательно,

$$0 < cy|x - y| < 10. \qquad (1)$$

Отсюда $c < 10$. Поскольку $\text{РЕ} = cx^2$ и $\text{Р} \neq 0$, получаем $x > 1$. Аналогично заключаем, что $y > 1$. Из $y \geqslant 2$ и (1) вытекает $c < 5$. Итак, $1 \leqslant c \leqslant 4$. Рассмотрим сначала возможности $c = 2, 3, 4$. Учитывая отсутствие общих делителей у x и y и неравенство (1), получаем для c, y и x девять вариантов (см. таблицу). Проверка показывает, что ни один из этих вариантов не подходит. Пусть теперь $c = 1$. Неравенство (1) принимает вид

$$0 < y|x - y| < 10. \qquad (2)$$

Поскольку $\text{КА} = y^2$, $\text{РЕ} = x^2$, имеем $4 \leqslant x \leqslant 9$ и $4 \leqslant y \leqslant 9$. Из $y \geqslant 4$ и (2) следует $0 < |x - y| \leqslant 2$. Значит, $|x - y| = 1$ или $|x - y| = 2$. Покажем, что $|x - y| \neq 2$. Если $y \geqslant 5$, то из (2) $|x - y| < 2$. Если же $y = 4$ и $|x - y| = 2$, то $x = 6$ — противоречие с отсутствием общих делителей у x и y. Итак, $|x - y| = 1$. Следовательно, $4 \leqslant x \leqslant 8$ и $y = x + 1$ или $5 \leqslant x \leqslant 9$ и $y = x - 1$. Проверка всех 10 вариантов дает три возможных ответа:

1) КУ = 20, КА = 25, РЕ = 16;
2) КУ = 30, КА = 36, РЕ = 25;
3) КУ = 42, КА = 49, РЕ = 36.

c	y	x
4	2	3
3	2	3
3	3	2
3	3	4
2	2	3
2	3	2
2	3	4
2	4	3
2	4	5

Задача 3. *Дополните табличку* 4 × 4 (рис. 1) *буквами* В, З, М, Ш, *обведите их рамками четырех типов (квадрат, ромб, круг, треугольник) и раскрасьте их в четыре цвета так, чтобы выполнялись следующие условия:* 1) *в каждой строчке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, цвета и типы рамок;* 2) *каждая буква должна быть раскрашена по разу каждым цветом;* 3) *рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет.* (*Достаточно нарисовать требуемую картинку.*)

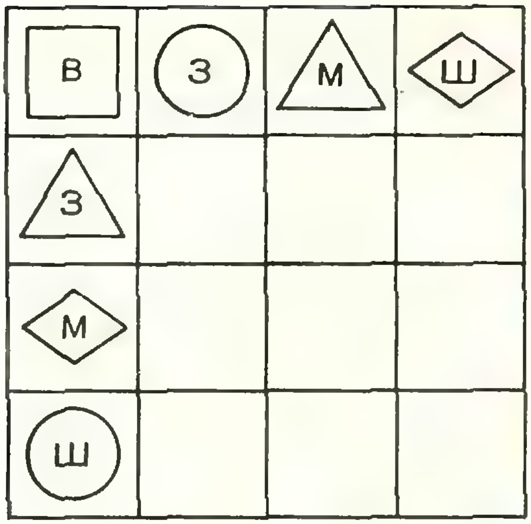


Рис. 1.

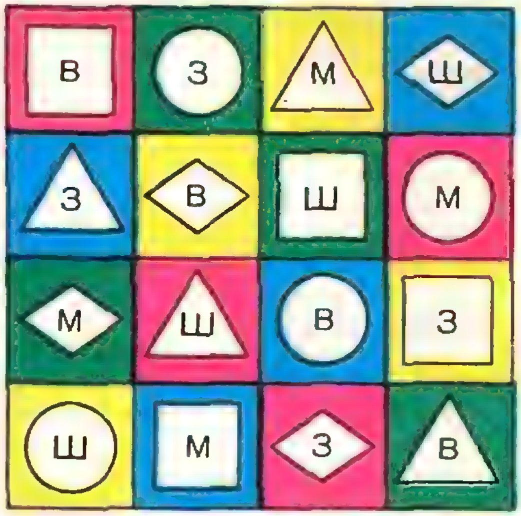


Рис. 2.

Решение. См. рисунок 2. Общая теория, помогающая решать задачи такого рода, развита в статье Л. Беве («Квант», № 6 за 1976 г.).

Задача 5. *Найдите все решения системы уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решение. Вычтем второе уравнение из первого:

$$x^2 - y^2 = y - x$$

$$(x - y)(x + y + 1) = 0.$$

Рассмотрим два случая.

I. $x = y$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 = x + z, \\ z^2 = 2x^2. \end{cases}$$

Следовательно, $z = x(x - 1)$ и $x^2(x - 1)^2 = 2x^2$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$. Мы получаем такие три ответа: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$, $z = 2 + \sqrt{2}$ и $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 1 - \sqrt{2}$, $z = 2 - \sqrt{2}$.

II. $x + y + 1 = 0$. Сложим все три уравнения исходной системы;

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + x + y + 2z,$$

$$z^2 - 2z = x + y.$$

Подставим сюда -1 вместо $x + y$: $(z - 1)^2 = 0$, $z = 1$.

Тогда из первого уравнения $x^2 = y + 1$, а поскольку $x + y + 1 = 0$, $x^2 + x = 0$. Получим еще два ответа: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$; $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Задача 6. *Даны две непересекающиеся окружности. Существует ли вне окружностей такая точка, что всякая прямая, проходящая через нее, пересекает хотя бы одну из окружностей.*

Решение. Будем предполагать, что окружности расположены так, как на рисунке 3, а (если они расположены так, как на рисунке 3, *б*, то такой точки, очевидно, не найдется). В этом случае искомая точка существует. Такой будет любая внутренняя точки «треугольника» и *МКР*, где *МК* — общая внутренняя касательная, *КР* — общая внешняя касательная, *МР* — дуга окружности. Докажите сами, что любая прямая, пересекающая *МК* или *КР*, пересекает хоть одну из наших окружностей.

Задача 7. *Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из А в В. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю оставалось треть пути до В. Автомобиль, доехав до В, без остановки поехал обратно в А. Кто приедет раньше: автомобиль в А или велосипедист в В?*

Решение. Проехав треть пути, велосипедист остановился и ждал, пока автомобиль проедет две трети пути. Значит, велосипедист проехал треть пути быстрее, чем автомобиль — две трети. Поэтому скорость велосипедиста составляет более половины скорости автомобиля. Посмотрим теперь, что происходит после того, как велосипедист снова трогается в путь. Ему остается две трети расстояния от A до B. Автомобилю же остается четыре трети этого расстояния: одна треть туда и целый путь от B до A обратно. Таким образом, велосипедисту предстоит проехать вдвое меньше, чем автомобилю; по найденному выше, велосипедист приедет раньше.

Задача 9. *Большой прямоугольник разбит на клетки* 1 см × × 1 см. *Внутри каждой клетки написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строчке равна* 1, *а в каждом вертикальном столбце — равна* 2. *Может ли площадь прямоугольника равняться* 1976 см²?

Ответ: не может.

Решение. Докажем это от противного, то есть допустим, что площадь такого прямоугольника равна 1976 см², и придем к противоречию. Пусть число строчек равно m, а число столбиков равно n. Тогда $mn = 1976$. Вычислим двумя способами сумму всех чисел, написанных в клетках. С одной стороны, сумма чисел в каждой строчке равна 1, а строчек m, значит, сумма всех чисел равна m. С другой стороны, сумма чисел в каждом столбике равна 2, а столбиков n, значит, сумма всех чисел равна $2n$. Итак, $m = 2n$, откуда $2n^2 = 1976$, $n^2 = 988$, что невозможно при целом n.

Задача 10. *Несколько ящиков весят вместе* 10 *тонн, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?*

Ответ: 5 трехтонок.

Решение. Покажем сначала, что четырех трехтонок может не хватить. Так будет, например, если имеется 13 одинаковых ящиков весом по $\frac{10}{13}$ тонны. Тогда в одну трехтонку мы не можем поместить больше трех ящиков.

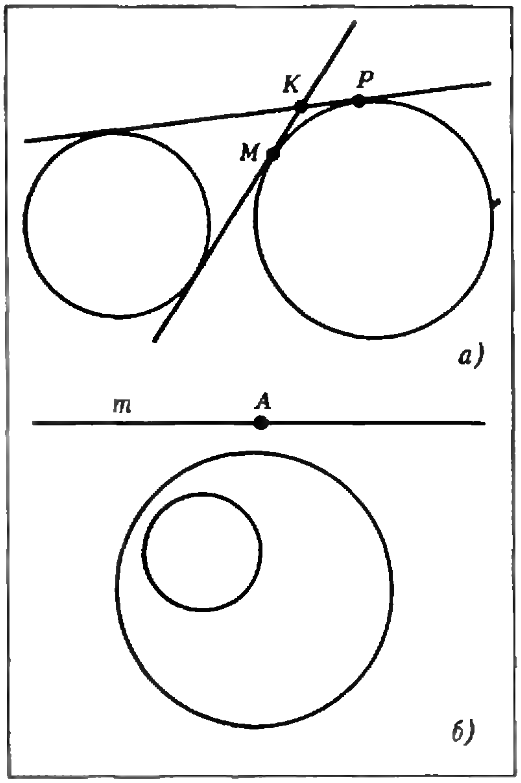


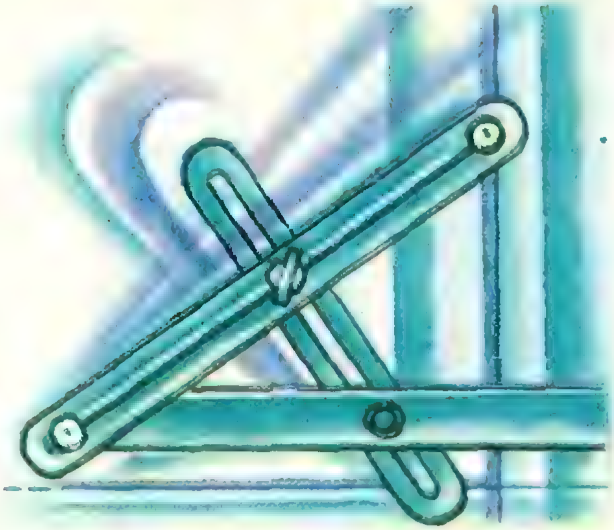
Рис. 3.

Докажем теперь, что пяти трехтонок всегда хватает. Будем грузить ящики на первую трехтонку, пока это возможно, чтобы не перегрузить ее. При этом на ней окажется более двух тонн груза. Затем грузим ящики по очереди на остальные трехтонки таким же образом. При этом все ящики окажутся погружены, так как на долю последней трехтонки останется менее двух тонн груза.

В этой задаче надо было указать количество трехтонок, достаточное при *любой* расфасовке груза. К сожалению, многие решавшие, не поняв этого, просто приводили примеры, когда груз можно увезти на четырех машинах.

В. Книжник

Построение алгебраических кривых с помощью шарнирных механизмов



Эта заметка родилась из доклада, сделанного московским школьником, учеником 9 класса Вадимом Книжником на школьной конференции. В ней рассказывается, как с помощью механизмов, состоящих из планок с прорезями и винтов, можно строить графики различных функций.

Механизмы

Шарнирным механизмом мы будем называть систему из планок с прорезями и дырками, соединенных винтами. При этом прорези и дырки располагаются строго по оси планки. При соединении винтом планки с дырками могут лишь поворачиваться вокруг винта, а планки с прорезями — поворачиваться и смещаться (рис. 1; снизу на рисунке приведены обозначения соединений).

Работают эти механизмы так. На плоскости закрепляются две перпендикулярные планки, образующие прямоугольную систему координат Oxy. К этим планкам винтами крепится механизм, имеющий один «вход» — дырку, перемещающуюся по оси Ox, и один «выход» — дырку, которая все время находится на одной вертикали со входом, но на высоте, зависящей от положения входа. Если в «выход» вставить карандаш, а «вход» вести по оси Ox, то карандаш нарисует кривую — график некоторой функции.

Для дальнейшего полезно ввести еще один блок «угол», состоящий из трех планок (с дырками), скрепленных винтами. Этот блок, привинченный теми же винтами к любым двум планкам с прорезями, позволяет им лишь смещаться, сохраняя между собой постоянный угол (обозначение на рисунке — угол).

Примеры

На рисунке 2, *а* изображен механизм со входом A и выходом B, строящий график функции $y=x$. Он основан на том, что прямоугольник, диагональ которого образует угол 45° с основанием, является квадратом. На рисунке 2, *б* изображен механизм, строящий график постоянной ($y=c$). Механизм, строящий график функции f (рис. 2, *в*), мы будем обозначать на рисунке волнистой линией, соединяющей вход A и выход B, в середине волнистой линии будем писать f в кружочке, у выхода будем ставить стрелку; а в тексте мы такой механизм будем обозначать буквой f.

Таким образом, у нас уже есть две функции. Научимся умножать, складывать, делить функции и извлекать из функций корень.

Блоки алгебраических операций

Блок сложения. По определению, назовем *блоком сложения* способ скрепления механизмов f и g, при котором точка C — выход g,— выписывает график функции $y(x) = f(x) + g(x)$. Блок сложения изображен на рисунке 3а. Ось абсцисс

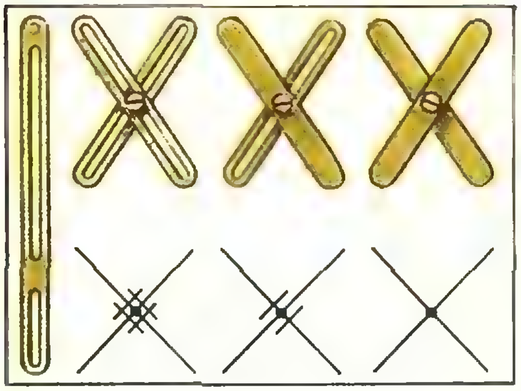


Рис. 1.

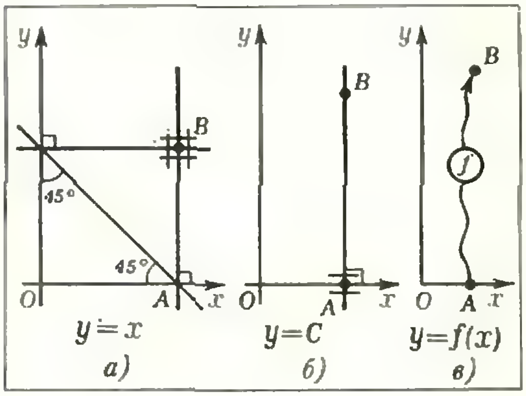


Рис. 2.

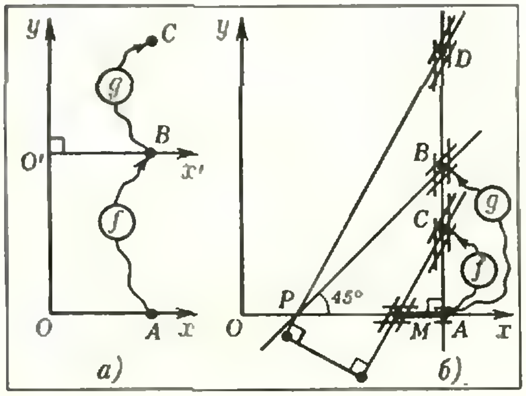


Рис. 3. *а*) Блок сложения; *б*) Блок умножения.

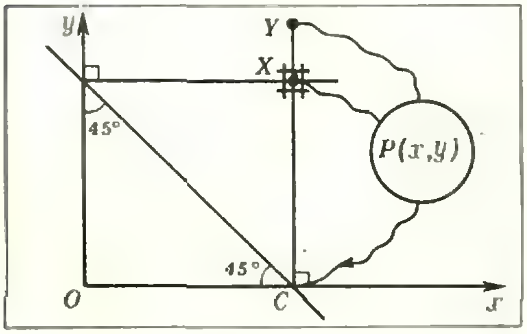


Рис. 4.

механизма g совпадает с осью $O'x'$ на рисунке, входом его является точка B — выход механизма f.

Блок умножения. Это — способ скрепления механизмов f и g, при котором выход D выписывает график функции $y(x) = f(x)\cdot g(x)$. Блок умножения изображен на рисунке 3б. Здесь $|AM| = 1$, $(PD) \parallel (CM)$, поэтому

$$\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AM|}.$$

Но $|AP| = |AB|$, $|AM| = 1$, отсюда $|AD| = |AC|\cdot|AB| = f(x) \times g(x)$.

Блок деления. Этот блок получается из блока умножения, если выход f переместить в точку D; тогда в точке C получится выход механизма f/g.

Блок извлечения корня. Этот блок получается из блока умножения, если точки B и C объединить, а в точку D поместить выход механизма f, тогда в точке C получится выход механизма $\sqrt{f(x)}$. Аналогично строится блок $\sqrt[n]{f(x)}$.

Графики уравнений

С помощью описанных механизмов и блоков можно конструировать механизмы для построения графиков различных функций типа многочленов, алгебраических дробей и т. п. Можно сделать и механизм для построения графика уравнения $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ — некоторый многочлен. Для этого сначала собирается механизм, изображенный на рисунке 4. Точки X и Y рассматриваются как выходы для «функций» $y = x$, $y = y$. Затем собирается механизм $P(x, y)$, входы которого — X и Y, а выход помещается в точку C (то есть находится такое положение точки Y, что выход оказывается в точке C). После этого точка Y может перемещаться только так, что для ее координат x, y будет справедливо равенство $P(x, y) = 0$. Если вставить в точку Y карандаш, то он сможет двигаться только по графику уравнения $P(x, y) = 0$.

Премии «Кванта»

За 1976—77 учебный год редакция получила большое количество писем с решениями задач из «Задачника «Кванта». Среди авторов этих писем редакция отобрала школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант» — подпиской на журнал «Квант» на 1978 год.

1. **Аронов Борис (Саратов)**
2. **Билер Петр (Вроцлав, ПНР)**
3. **Гаркавый Виктор (Лида)**
4. **Гисин Борис (Ленинград)**
5. **Ефашкин Анатолий (Оренбург)**
6. **Жердев Анатолий (Славянск)**
7. **Забродин Антон (п. Черноголовка Московской обл.)**
8. **Касянчук Александр (Николаев)**
9. **Корельштейн Леонид (Москва)**
10. **Кулеско Александр (Донецк)**
11. **Мошонкин Андрей (Кирово-Чепецк)**
12. **Никитенков Алексей (Великие Луки)**
13. **Пономарев Евгений (п. Черноголовка Московской обл.)**
14. **Палей Вадим (Харьков)**
15. **Побылица Павел (Ленинград)**
16. **Штейншрайбер Юрий (Баку)**

За успешное участие в XI Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на журнал «Квант» на 1978 год награждаются:

1. **Аболтыньш Айнарс (Рига)**
2. **Барпиев Бакытбек (с. Успеновка КиргССР)**
3. **Бернотас Андрюс (Вильнюс)**
4. **Ваякас Тойво (Тарту)**
5. **Власов Вячеслав (Киев)**
6. **Гусев Игорь (Воркута)**
7. **Ирматов Анвар (Наманган)**
8. **Левин Марк (Таллин)**
9. **Ляховец Андрей (Краснодар)**
10. **Пивоваров Валентин (Красноярск)**
11. **Таурайтис Виргилиюс (Вильнюс)**
12. **Хлебутин Сергей (Пермь)**

задачник Кванта

Задачи

M461—M465; Ф473—Ф477

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М456, М457» или «Ф468». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи — просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом номере «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

M461. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR$... Здесь буква L означает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б)* Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

M462. Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d (рис. 1). Докажите, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

К. Шварцман

M463.* Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1+x_2+\ldots+x_m$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

К. Сибиряков

M464.* На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее, чем в один и не более, чем в четыре отмеченных квадрата.

А. Плоткин

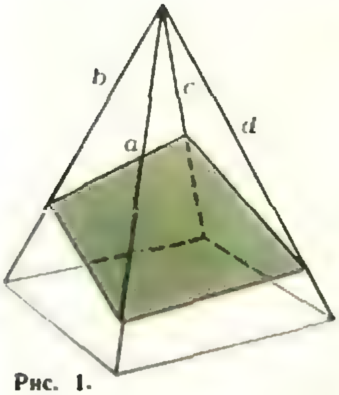


Рис. 1.

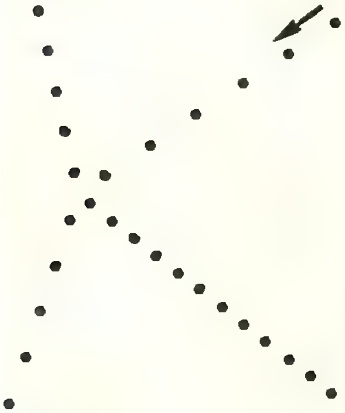


Рис. 2.

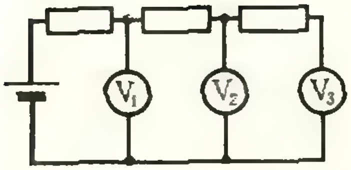


Рис. 3.

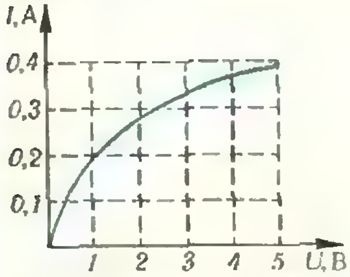


Рис. 4.

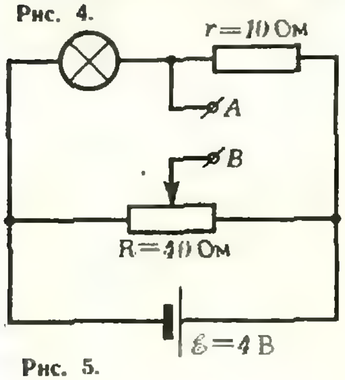


Рис. 5.

М465*. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, . . ., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, . . ., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее, чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее, чем в 50 ящиков.

Пусть вообще имеется 10^k билетов с k-значными номерами от 00. . . 0 до 99. . . 9. Билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера этого билета вычеркиванием некоторых $k-2$ цифр.

г) Докажите, что при $k=4$ все 10 000 четырехзначных билетов, можно разложить по 34 ящикам.

д) Найдите минимальное количество ящиков, в которые можно разложить k-значные билеты. Попробуйте решить эту задачу для $k=4$, 5, 6, ...

С. Фомин

Ф473*. Рисунок 2 сделан со стробоскопической фотографии движения двух сталкивающихся шариков одинаковых диаметров, но разных масс. Стрелкой на рисунке показано направление движения одного из шариков до столкновения.

1) Определить отношение масс шаров.

2) Указать, в каком направлении двигался до столкновения второй шар. (9 кл.)

Ф474. Цепь, показанная на рисунке 3, собрана из одинаковых вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1=10$ В, а третий — $U_3=8$ В. Каково показание второго вольтметра? (9 кл.)

Ф475*. На рисунке 4 приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря. Лампочка включена в схему, показанную на рисунке 5.

1) Найти графически ток в лампочке.

2) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю?

3) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи?

Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (10 кл.)

Ф476. Природный уран состоит из смеси двух изотопов с относительными атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций 7 : 1000. Для увеличения концентрации ^{235}U, который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного соединения UF_6 (шестифтористый уран) в вакуум через маленькие отверстия. Газ пропускается через трубу T с пористыми стенками

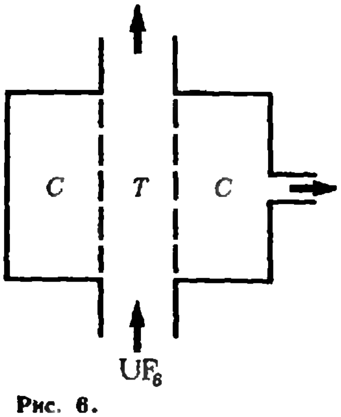


Рис. 6.

(рис. 6). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C. Оценить отношение концентраций $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в откачиваемом газе. Относительная атомная масса фтора равна 19. (10кл.)

Ф477. Резиновое кольцо массы M лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Кольцо немного растягивают так, что оно сохраняет форму окружности и центр его остается неподвижным. После этого кольцо отпускают. Описать дальнейшее поведение кольца. Коэффициент упругости резинового жгута равен k.

А. Абрамян

Решения задач

М421—М425; Ф432—Ф437

М421. *При каких натуральных m и n ($m < n$) можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в черный цвет так, чтобы любой прямоугольник размера $m \times n$ содержал ровно одну черную клетку?*

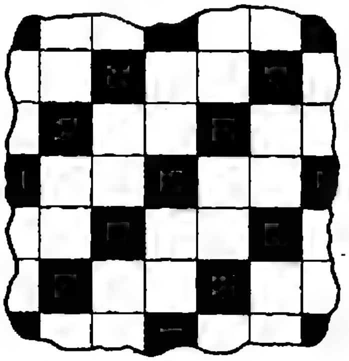


Рис. 1.

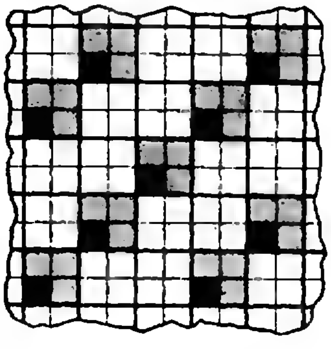


Рис. 2.

Докажем, что требуемая раскраска клетчатой плоскости для пары (m, n), $m < n$ существует в том и только в том случае, когда n делится на m.

Если раскраска плоскости такова, что в любом ряде (вертикальном и горизонтальном) закрашена черным каждая k-я по счету клетка (как на рисунке 1, где $k=3$), то в любом прямоугольнике $1 \times k$ будет ровно одна черная клетка. Из такой периодической раскраски для пары $(1, k)$ нетрудно получить периодическую раскраску для пары (m, km): нужно измельчить в m раз сетку и в каждой черной клетке старой (крупной) решетки оставить черной только одну, — скажем, левую нижнюю клетку (рисунок 2 получен из рисунка 1 именно таким приемом; здесь $k = 3$, $m = 2$). Итак, мы показали, как построить нужную раскраску для пары (m, n), если n делится на m.

Предположим теперь, что для пары (m, n), где n не делится на m ($n > m > 1$), построена нужная раскраска, и придем к противоречию.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $n \leqslant 2m - 1$. Если два вертикально расположенных прямоугольника $m \times n$ имеют общую угловую черную клетку, как показано на рисунке 3, то в их объединении больше не может быть черных клеток. Но в нем можно разместить горизонтальный (красный) прямоугольник $n \times m$, не содержащий черной клетки. Противоречие.

2) Пусть $n > 2m - 1$. Докажем сначала, что если K — черная клетка, то n-я клетка в том же ряду (считая от K) — тоже черная. Рассмотрим два вертикально расположенных прямоугольника $m \times n$ с общей нижней угловой клеткой K и еще два прямоугольника, полученные из них сдвигом на одну клетку вверх (голубой и желтый на рисунке 4). Поскольку в них должно быть по одной черной клетке, то черным цветом должны быть закрашены либо одна из желтых клеток и одна из голубых, либо одна зеленая клетка. Но первая возможность исключена, так как в горизонтальном красном прямоугольнике не может быть двух черных клеток; значит, зеленую клетку нужно закрасить в черный цвет.

Рассмотрим теперь квадрат $n \times n$ с черной клеткой в нижнем левом углу. Если $n = mk + r$, где $0 < r < m$, то квадрат можно разрезать на k горизонтальных прямоугольников $n \times m$ и «остаток» — прямоугольник $n \times r$ (рис. 5).

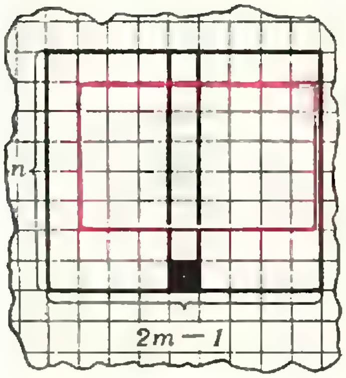


Рис. 3.

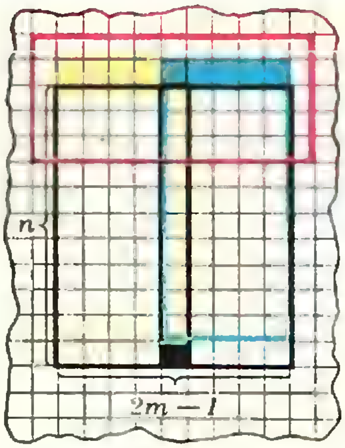


Рис. 4.

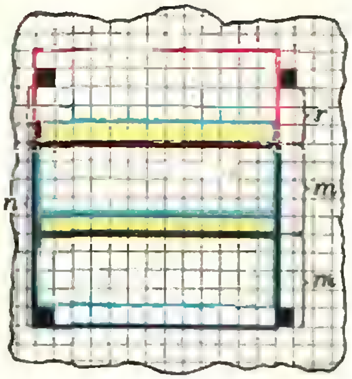


Рис. 5.

Рассматривая эти k прямоугольников, а также прямоугольники, полученные из них сдвигом на одну клетку вверх, мы последовательно убедимся, что в нижней (желтой) полоске каждого прямоугольника должна быть черная клетка. Но тогда в красном прямоугольнике будет две черные клетки. Противоречие.

Н. Васильев,
С. Охитин

◆

М422. *Разбейте произвольный треугольник на семь равнобедренных треугольников, из которых три конгруэнтны между собой.*

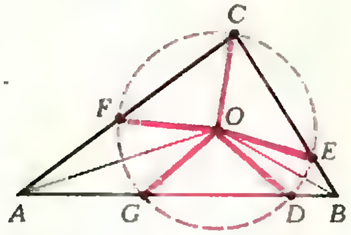


Рис. 6.

Пусть AB — бо́льшая сторона треугольника ABC. Проведем из вершины A, как из центра, дугу радиусом $|AC|$ и отметим точку D ее пересечения со стороной AB (рис. 6). Затем из вершины B проведем дугу радиусом $|BD|$; пусть E — точка ее пересечения со стороной BC. Из вершины C радиусом $|CE|$ проведем дугу до пересечения со стороной AC в точке F. И, наконец, снова из вершины A проведем дугу радиусом $|AF|$ и отметим точку G ее пересечения со стороной AB.

Нетрудно доказать, что точки C, D, E, F и G лежат на одной окружности, центр которой совпадает с центром O окружности, вписанной в треугольник ABC. Соединив эти пять точек с точкой O, а также точки F с G и D с E, получим требуемое разбиение (см. рисунок 6; $|CE| = |CF| = |DG|$).

А. Хабелашвили

◆

М423. *Докажите, что для любых действительных x, y и z выполнено неравенство*

$$(x^2+y^2-z^2)\times(x^2+z^2-y^2)\times(y^2+z^2-x^2)\leqslant(x+y-z)^2\times(x+z-y)^2\times(y+z-x)^2.$$

Если одна из скобок в левой части отрицательна, то неравенство очевидно. Легко понять, что одновременно две скобки левой части отрицательными быть не могут. Поэтому можно считать, что все скобки в левой части больше нуля.

Так как $x^2+z^2-y^2>0$, то $2(x-z)^2(x^2+z^2-y^2)\geqslant 0$, или

$$(x-z)^2(2x^2+2z^2-2y^2+2xz-2xz)\geqslant 0.$$

Значит, $(x-z)^2((x+z)^2+(x-z)^2-2y^2)\geqslant 0$, то есть $(x-z)^2(x+z)^2+(x-z)^4-2y^2(x-z)^2\geqslant 0$. Перепишем последнее неравенство так:

$$y^4-(x^2-z^2)^2\leqslant(y^2-(x-z)^2)^2,$$

или

$$(y^2+z^2-x^2)(x^2+y^2-z^2)\leqslant(y+z-x)^2(x+y-z)^2. \quad (1)$$

Аналогично из неравенства $x^2+y^2-z^2>0$ следует, что

$$(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)\leqslant(x+z-y)^2(y+z-x)^2. \quad (2)$$

а из неравенства $y^2 + z^2 - x^2 > 0$, — что

$$(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2) \leqslant$$
$$\leqslant (x + z - y)^2 (x + y - z)^2. \qquad (3)$$

Перемножая неравенства (1) — (3) и извлекая затем квадратный корень из обеих частей, получаем требуемое неравенство.

Г. Гуревич

◆

М424. *Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной около противоположной грани, и перпендикулярная к противоположной грани. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.*

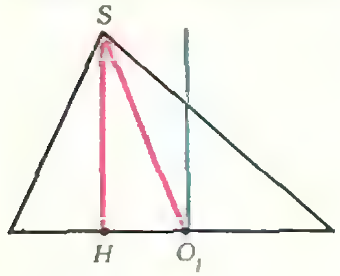


Рис. 7.

Пусть S — одна из вершин тетраэдра, SH — его высота, O_1 — центр окружности, описанной вокруг грани, противоположной вершине S. Плоскость, проходящая через вершину S, содержит высоту SH и отрезок SO_1 (рис. 7). Проведем через точку O_1 прямую, параллельную SH; очевидно, что она принадлежит нашей плоскости. С другой стороны, ясно, что эта прямая проходит через центр сферы, описанной вокруг тетраэдра, так что центр сферы принадлежит проведенной плоскости. Поэтому все четыре плоскости, содержа центр описанной вокруг тетраэдра сферы, пересекаются в одной точке.

А. Ягубьянц

◆

М425. *Существует ли такое натуральное N, что каждое рациональное число между нулем и единицей представляется в виде суммы N чисел, обратных натуральным?*

Обозначим через A_n множество чисел, представимых в виде суммы не более, чем n слагаемых, обратных натуральным. Тогда $A_{n+1} = \{\alpha + 1/q\}$, $\alpha \in A_n$, $q \in \mathbf{N}$ (натуральное); ясно, что $A_{n+1} \supset A_n$.

Мы сейчас докажем, что A_n (ни при каком n) не содержит все рациональные числа промежутка $]0; 1[$. Для этого докажем индукцией по n более сильное утверждение:

I. *В любом отрезке* $[a; b] \subset]0; 1[$ *найдется целый отрезок* $[c; d]$, *не пересекающийся с* A_n*).

Для $n = 1$ это очевидно. Докажем это утверждение для некоторого n, считая, что для $n - 1$ оно доказано.

Пусть задан отрезок $[a; b] \subset]0; 1[$. Выберем отрезок $[c_0; d_1] \subset [a; b]$, не пересекающийся с A_{n-1}, и возьмем число $m \in \mathbf{N}$, такое что $d_1 - c_0 > 2/m$ (т. е. $2/(d_1 - c_0) < m$). Тогда ни одно из чисел вида $\alpha + 1/q$, где $\alpha \in A_{n-1}$, $q \geqslant m$, не лежит в правой половине $[c_1; d_1]$ отрезка $[c_0; d_1]$: если $\alpha \leqslant c_0$, то $\alpha + 1/q < (c_0 + d_1)/2 = c_1$. Мы можем, далее, последовательно выбирать $[c_1; d_1] \supset [c_2; d_2] \supset [c_3; d_3] \supset \ldots \supset [c_m; d_m]$ так, что $[c_k - 1/k; d_k - 1/k]$ не пересекается с A_{n-1} $(k = 1, 2, \ldots, m)$. В промежутке $[c_2; d_2]$, тем самым, не будут содержаться числа вида $\alpha + \frac{1}{2}$ и $\alpha + \frac{1}{q}$, где $\alpha \in A_{n-1}$, $q \in \mathbf{N}$ и $q \geqslant m$; в промежутке $[c_3; d_3]$ не содержатся числа вида $\alpha + \frac{1}{2}$, $\alpha + \frac{1}{3}$ и $\alpha + \frac{1}{q}$ для $q \geqslant m$, $\alpha \in A_{n-1}$, и т. д.; так что в промежутке $[c_m; d_m]$ не будет уже содержаться никакое число вида $\alpha + 1/q$, $\alpha \in A_{n-1}$, $q \in \mathbf{N}$. То есть отрезок $[c_m; d_m]$ не пересекается с A_n, что и требовалось доказать.

Таким образом, ответ на вопрос, поставленный в задаче М425, отрицательный: такого натурального числа N нет.

В решениях, присланных читателями, был замечен целый ряд свойств множества A_n; некоторые из них сильнее, чем доказанное выше свойство I.

---

*) Как говорят, множество A_n *нигде не плотно.*

Другие свойства A_n, которые также отличают его от множества всех рациональных чисел:

II. *A_n не содержит никакой бесконечной возрастающей последовательности.*

Это свойство эквивалентно таким двум.

III. *Для каждой точки $x \in A_n$ существует ближайшая к ней слева.*

IV. *В каждом подмножестве A_n есть наибольшее число.*

V. *Пределом последовательностей различных чисел, содержащихся в A_n, может быть только число, содержащееся в A_{n-1} или* 0 (а не любое действительное число на отрезке, как было бы, если бы A_n содержало все рациональные числа этого отрезка!)

Доказательство этого последнего свойства особенно изящно.

Пусть $x_m = \frac{1}{q_1^{(m)}} + \cdots + \frac{1}{q_n^{(m)}}$, $q_1^{(m)} \leqslant q_2^{(m)} \leqslant \ldots \leqslant q_n^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$ — некоторая последовательность чисел из A_n, стремящаяся к пределу a. Мы можем выбрать из последовательности $q_1^{(m)}$ (натуральных чисел!) либо возрастающую подпоследовательность, либо «стационарную», в которой повторяется одно и то же число; потом (выбросив все остальные x_m) ту же операцию проделать для $q_2^{(m)}$ и т. д. Поскольку все x_m различны, некоторая подпоследовательность $q_i^{(m)}$ обязана возрастать и стремиться к бесконечности. Таким образом, мы получим, перейдя к подпоследовательности, такие x_m, что для некоторого $r < n$
$q_i^{(1)} = q_i^{(2)} = q_i^{(3)} = \ldots = q_i$ при $i \leqslant r$ и $q_i^{(m)} \to \infty$ для $i > r$ при $m \to \infty$.

Тогда число $a = \lim\limits_{m \to \infty} x_m = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_r}$ принадлежит $A_r \subset A_{n-1}$ (заметим, что число a может оказаться нулем, если уже из последовательности $q_1^{(m)}$ мы сможем выбрать возрастающую). С другой стороны, очевидно, что каждая точка A_{n-1} действительно будет *предельной точкой* A_n.

Теперь читатель без труда докажет и свойства II, III, IV множеств A_n. Разумеется, из V легко вывести и утверждение задачи (по индукции), и свойство I.

Н. Васильев

◆

Ф432. *В стеклянном шаре имеется воздушный сферический пузырек. Необходимо найти способы измерения диаметра этого пузырька. Шар должен остаться целым. Способы должны быть описаны как можно точнее.*

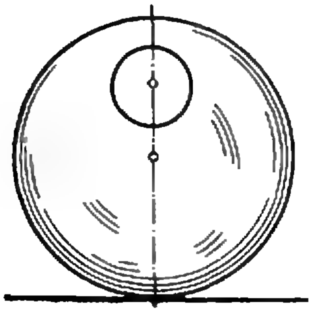


Рис. 8.

Прежде всего выясним, на каком диаметре шара находится центр воздушного пузырька. Для этого положим шар на горизонтальную поверхность и подождем, пока прекратятся его качания. В положении устойчивого равновесия шара центр пузырька лежит на вертикальном диаметре, выше центра шара (рис. 8).

Затем найдем положение центра тяжести шара с пузырьком. Поместим шар на наклонную плоскость и будем медленно увеличивать угол наклона плоскости к горизонту. При этом шар будет поворачиваться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его геометрический центр, так, чтобы в любой момент центр тяжести шара находился на вертикали, проходящей через точку касания шара с плоскостью. Шар начнет скатываться (при достаточно большом коэффициенте трения скольжения между шаром и плоскостью), когда центр тяжести займет самое правое из всех возможных его положений (рис. 9). Это позволяет определить положение центра тяжести шара с воздушным пузырьком: он отстоит от геометрического центра шара на расстояние

$$l = R \sin \alpha,$$

где R — радиус шара, α — угол наклона плоскости к горизонту, при котором шар начнет скатываться.

Теперь займемся непосредственно определением размеров пузырька и его положения внутри стеклянного шара. Предположим, что мы заполнили полость стеклом, из которого изготовлен шар. Центр тяжести переместителя и геометрический центр шара. Это означает, что

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho a = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho l.$$

Здесь r — радиус воздушного пузырька (полости), ρ — плотность стекла, a — расстояние от центра пузырька до центра шара (рис. 10). Взвесив шар в воздухе и в воде (с известной плотностью ρ_0), можно записать еще два уравнения:

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho|\vec{g}| = P_1,$$

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho|\vec{g}| - \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0|\vec{g}| = P_2.$$

Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем радиус пузырька r и его положение a.

Возможен другой способ измерения r — оптический. Достаточно поместить шар в жидкость с показателем преломления, равным показателю преломления стекла, чтобы шар в этой жидкости стал невидимым. Рассматривая ход лучей, например, от точечного источника, можно найти r (проверьте это самостоятельно).

Можно, конечно, предложить и много других способов. Поэтому мы обязательно еще раз вернемся к этой задаче, когда ознакомимся со всеми письмами наших читателей.

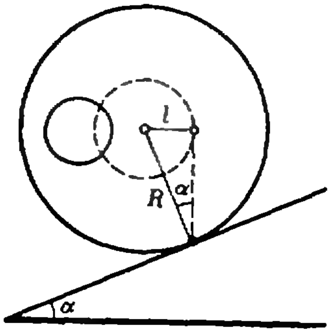


Рис. 9.

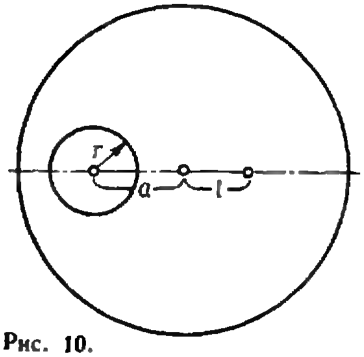


Рис. 10.

◆

Ф433. *Две одинаковые плосковыпуклые линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см каждая расположены на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Оптические оси линз совпадают, линзы обращены друг к другу плоскими сторонами. Где будет находиться изображение источника, находящегося на расстоянии $d = 40$ см от левой линзы, если пространство между линзами заполнить стеклом с показателем преломления таким же, как у линз?*

Обозначим через f расстояние от левой линзы до изображения источника, которое образуется при преломлении на выпуклой сферической поверхности левой линзы. Это расстояние связано с расстоянием d от источника до левой линзы соотношением

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f} = (n-1)\frac{1}{R},$$

где n — показатель преломления стекла, R — радиус сферической поверхности линзы.

Аналогичное равенство можно записать для преломления на выпуклой поверхности правой линзы:

$$\frac{n}{d'} + \frac{1}{f'} = (n-1)\frac{1}{R}.$$

Здесь $d^1 = l - f$ — расстояние от первого изображения, которое является «источником» для второго преломления, до правой линзы, а f' — искомое расстояние от правой линзы до изображения, даваемого системой. Кроме того, для каждой линзы в отдельности выполняется соотношение

$$(n-1)\frac{1}{R} = \frac{1}{F}.$$

Решая все три уравнения совместно, найдем f':

$$f' = \frac{F\{l(d-F) - ndF\}}{(d-F)(l-nF) - ndF}.$$

Полагая $n = 1{,}5$, получим $f' = 10$ см.

◆

Ф434. *Какое количество теплоты выделится на сопротивлении R при установлении равновесия после замыкания ключа K (рис. 11), если конденсатор был предварительно заряжен до разности потен-*

За малый промежуток времени Δt на сопротивлении R выделится количество теплоты

$$\Delta Q = U_R I\Delta t = U_R\Delta q,$$

где U_R — напряжение на сопротивлении и Δq — заряд, прошедший через сопротивление за время Δt. Очевидно, что Δq равен изменению заряда конденсатора. Так как заряд конденсатора q связан с напряжением на конденсаторе U_C

циалов 2U? Э. д. с. источника U, емкость конденсатора C. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

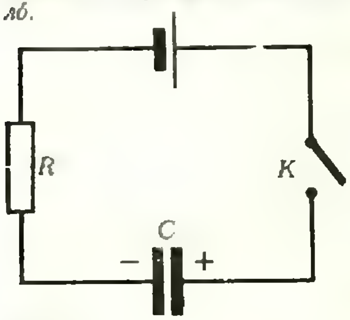


Рис. 11.

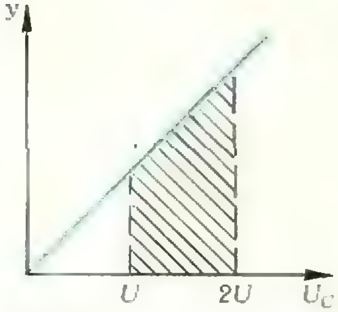


Рис. 12.

Ф435. *В установке, показанной на рисунке 13, муфта M прикреплена к двум одинаковым пружинам, коэффициенты жесткости которых $k = 10$ Н/м. Муфта без трения может скользить по горизонтальному стержню AB. Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}4$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти период малых колебаний муфты. Масса муфты $m = 0{,}2$ кг.*

При каком значении ω колебаний муфты не будет?

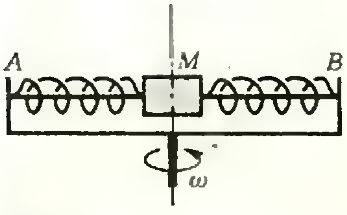


Рис. 13.

соотношением $q = CU_C$, то изменение заряда конденсатора пропорционально изменению напряжения:

$$\Delta q = C\Delta U_C.$$

Напряжение U_R на сопротивлении R равно

$$U_R = U_C - U.$$

Таким образом,

$$\Delta Q = (U_C - U)C\Delta U_C = CU_C\,\Delta U_C - CU\Delta U_C.$$

Полное количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R при установлении теплового равновесия, равно сумме ΔQ:

$$Q = \Sigma\Delta Q = C\Sigma U_C\Delta U_C - CU\Sigma\Delta U_C.$$

Вычислим эту сумму.

Напряжение на конденсаторе уменьшается от $2U$ до U. Поэтому

$$\Sigma\Delta U_C = U.$$

Сумма $\Sigma U_C\,\Delta U_C$ численно равна площади фигуры (трапеции) под графиком функции $y = U_C$ (рис. 12):

$$\frac{2U + U}{2}U = \frac{3}{2}U^2.$$

Тогда окончательно

$$Q = \frac{3}{2}CU^2 - CU^2 = \frac{1}{2}CU^2.$$

Задачу можно решить, пользуясь законом сохранения энергии: количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R, равно разности работы источника и изменения энергии конденсатора.

◆

При вращении установки муфта совершает колебания около положения равновесия, если при отклонении от этого положения равнодействующая всех сил, действующих на муфту, сообщает ей ускорение $\vec{a}$ относительно стержня, направленное к оси вращения. Это возможно, если в неподвижной системе координат ускорение муфты $\vec{a}_0$ направлено к оси вращения стержня и превышает центростремительное ускорение $\vec{a}_ц$ той точки стержня, в которой в данный момент находится муфта: $|\vec{a}| = |\vec{a}_0| - |\vec{a}_ц|$.

Пусть муфта находится на расстоянии x от оси вращения стержня, тогда центростремительное ускорение точки стержня, в которой находится муфта, равно $\omega^2 x$, и

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_0| - \omega^2 x.$$

На муфту со стороны пружин действуют силы упругости, равнодействующая которых направлена к оси вращения стержня и равна в проекции на ось X $-kx - kx = -2kx$. Согласно второму закону Ньютона

$$ma_0 = -2kx,$$

или

$$m(a + \omega^2 x) = -2kx.$$

Запишем это уравнение следующим образом:

$$a = -\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)x.$$

Мы получили, что ускорение муфты прямо пропорционально ее координате, взятой с противоположным знаком. Это означает, что муфта совершает гармонические колебания. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega^2}} \approx 0{,}7 \text{ с}.$$

Колебаний муфты не будет, если при смещении муфты из положения равновесия ее ускорение $\vec{a}$ относительно стержня окажется направленным от оси вращения, то есть

$$\frac{2k}{m} - \omega^2 < 0, \text{ или } \omega > \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10 \text{ рад/с}$$

◆

Ф436. *Плотность ρ газа, состоящего из смеси гелия и аргона, при давлении $p = 152$ кН/м² и температуре $T = 300$ К равна 2,0 кг/м³. Сколько атомов гелия содержится в 1 см³ газовой смеси?*

Для того чтобы найти число молекул (атомов) гелия N_1 в объеме $V = 10^{-6}$ м³, надо определить отношение массы гелия m_1 к его молярной массе $\mu_1 = 4\cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$N_1 = \frac{m_1}{\mu_1} N_A. \qquad (1)$$

Запишем уравнения газового состояния для гелия и аргона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT$$

(p_1 — давление гелия, p_2 — давление аргона, m_2 — масса аргона, $\mu_2 = 40\cdot 10^{-3}$ кг/моль — его молярная масса) Согласно закону Дальтона давление смеси газов $p = p_1 + p_2$, то есть

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) \frac{RT}{V}. \qquad (2)$$

Плотность ρ смеси равна сумме плотностей гелия и аргона:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{m_1}{V} + \frac{m_2}{V}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) найдем отношение $\frac{m_1}{\mu_1}$, подставим его в выражение (1) и получим

$$N_1 = N_A V \frac{p\mu_2 - \rho RT}{RT(\mu_2 - \mu_1)} \approx 4\cdot 10^{15} \text{ м}^{-3} = 4\cdot 10^{9} \text{ см}^{-3}$$

◆

Ф437. *Проволочная рамка, имеющая форму треугольника с углом α = 30°, помещена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке 14. По проволоке могут без трения скользить связанные друг с другом нитью два грузика с массами $m_1 = 0,1$ кг и $m_2 = 0,3$ кг. Чему равно натяжение нити и угол β в положении равновесия грузиков?*

Является ли это равновесие устойчивым?

На рисунке 14 показаны все силы, действующие на грузики. Силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ натяжения нити равны по абсолютной величине и противоположно направлены: $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$ и $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны к сторонам рамки и, следовательно, образуют друг с другом угол 90°. Силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, как всегда, направлены вертикально вниз.

Так как система из связанных нитью грузов находится в равновесии, то

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0,$$

или

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0.$$

Это означает, что векторы $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ и $m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$ образуют треугольник (рис. 15), причем этот треугольник прямоугольный: $\widehat{BAC} = 90°$. В равновесии находится и каждый из грузиков. Следовательно,

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = 0, \quad \vec{N}_2 + m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = 0.$$

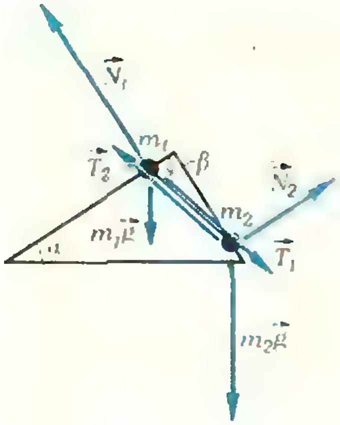


Рис. 14.

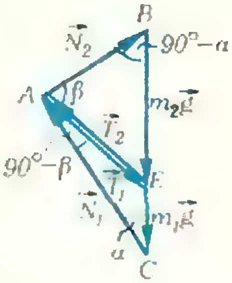


Рис. 15.

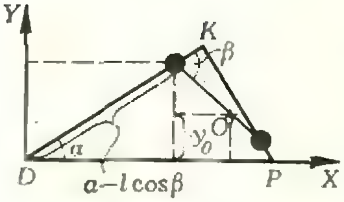


Рис. 16.

Из этих равенств следует, что вектор $\vec{T}_1$ соединяет вершину A треугольника ABC с точкой E, а вектор $\vec{T}_2$ — точку E с точкой A.

В треугольнике AEC $\widehat{ACE}=\alpha$ и $\widehat{CAE}=90^\circ-\beta$, а в треугольнике ABE $\widehat{ABE}=90^\circ-\alpha$ и $\widehat{BAE}=\beta$. Согласно теореме синусов

$$\frac{T}{\sin\alpha}=\frac{m_1|\vec{g}|}{\sin(90^\circ-\beta)}=\frac{m_1|\vec{g}|}{\cos\beta},\quad \frac{m_2|\vec{g}|}{\sin\beta}=\frac{T}{\sin(90^\circ-\alpha)}=$$
$$=\frac{T}{\cos\alpha}.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{m_2}{m_1}\operatorname{ctg}\alpha=3\sqrt{3},\ \beta\approx79^\circ;$$

$$T=m_1|\vec{g}|\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\approx2{,}7\ \text{Н}.$$

Теперь выясним, является ли найденное положение равновесия устойчивым. Положение равновесия устойчиво, если потенциальная энергия системы в этом положении минимальна, то есть центр тяжести системы грузов находится в наинизшем положении. Для того чтобы выяснить, выполняется ли это условие, найдем координату центра тяжести системы.

Обозначим длину стороны DK проволочного треугольника (рис. 16) через a, а длину нити — через l. Центр тяжести системы (точка O) делит длину нити в отношении $\frac{m_2}{m_1}$. Следовательно, он находится на расстоянии $b=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,l$ от левого грузика. Из рисунка 16 видно, что

$$y_0=(a-l\cos\beta)\sin\alpha-b\sin(\beta-\alpha)=a\sin\alpha-l(\cos\beta\sin\alpha+$$
$$+\frac{m_2}{m_1+m_2}\sin(\beta-\alpha)).$$

Это выражение минимально, когда максимально выражение

$$y_1=\cos\beta\sin\alpha+\frac{m_2}{m_1+m_2}\sin(\beta-\alpha). \qquad (*)$$

Преобразуем выражение (*):

$$y_1=\cos\beta\sin\alpha+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)=$$
$$=\frac{m_2}{m_1+m_2}\sin\beta\cos\alpha+\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\beta\sin\alpha=$$
$$=\sin(\beta+\varphi), \qquad (**)$$

где $\sin\varphi=\frac{m_1}{m_1+m_2}\sin\alpha$, $\cos\varphi=\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\varphi=\frac{m_1}{m_2}\operatorname{tg}\alpha$.

Очевидно, что выражение (**) максимально при

$$\beta+\varphi=\frac{\pi}{2},\ \text{или}\ \operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\varphi=\frac{m_2}{m_1}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно, найденное положение равновесия устойчиво. Тот, кто умеет дифференцировать, мог бы найти это значение β из условия экстремума (максимума) выражения (*).

И. Слободецкий

Нефроида

Нефроиду можно определить как траекторию фиксированной точки подвижной окружности (O_1, r), катящейся снаружи без скольжения по неподвижному кругу $(O, 2r)$ (рис. 1). Когда, например, окружность (O_1, r) повернется из начального положения на угол 2φ, то описывающая нефроиду точка попадет из M_0 в положение M. Нефроида обладает центром симметрии O и двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии.

Укажем некоторые свойства нефроиды и используем их для другого ее построения. Пусть RN — диаметр окружности (O_1, r) и $T=(MR)\cap(O, 2r)$. Пусть, далее, $U=(OT)\cap(MN)$. Можно доказать, что UN — касательная к нефроиде в точке M (см., например, построение касательной к дельтоиде в «Кванте», 1977, № 3).

Треугольники O_1MR и ROT — равнобедренные. Значит, $O_1\widehat{M}R=O_1\widehat{R}M=O\widehat{R}T=O\widehat{T}R$. Поэтому $UT\parallel MO_1$. Треугольники MO_1N и UON подобны. Следовательно, треугольник UON равнобедренный и $|UO|=4r$. UMT — прямоугольный треугольник. Опишем около него «синюю» окружность $(O_2, 3r)$. Тогда $\smile{MT}=2\varphi\cdot 3r=3\varphi\cdot 2r=\smile{M_0T}$. На этом основан второй способ построения нефроиды: катим по неподвижному кругу $(O, 2r)$ окружность $(O_2, 3r)$, касающуюся его так, как показано на рисунке 1. Нефроиду описывает точка $M\in(O_2, 3r)$.

Для дальнейшего введем понятие «огибающая семейства кривых $\{L\}$». *Огибающая* — непрерывная кривая l такая, что: а) каждая ее точка принадлежит одной из кривых семейства $\{L\}$ и, обратно, каждая из кривых $\{L\}$ имеет с l общую точку; б) в каждой такой точке касательная у l и у соответствующей кривой из $\{L\}$ — общая. В частности, если $\{L\}$ — семейство прямых, то каждая из них должна касаться огибающей в некоторой ее точке. На чертеж часто огибающая не наносится, но, тем не менее, видна, если кривых семейства $\{L\}$ нарисовано «много». Именно так предстает нефроида на второй странице обложки — как огибающая семейства окружностей. Чтобы убедиться, что эта огибающая действительно нефроида, можно провести из точки R отрезок прямой $RV\perp OM_0$. Ясно, что $|RV|=2r\sin\varphi=|RM|$ и что $RM\perp UN$. Значит, UN — касательная к окружности $(R, |RM|)$ и, одновременно, к нефроиде.

Чирнгауз, о котором говорилось в подписи к второй странице обложки, изучал главным образом «оптические» кривые, среди которых видное место занимали *катакаустики*. Катакаустика данной кривой — это огибающая отраженных от нее лучей света. Пусть CP — один из таких параллельных лучей, идущих, например, от Солнца. Если CP попадает на вогнутую «синюю» цилиндрическую поверхность (рис. 2), то он отражается от нее под углом θ, равным углу падения. Рассмотрим окружности

$$\left(O, \frac{|OP|}{2}\right) \text{ и } \left(O_1, \frac{|OP|}{4}\right)$$

(рис. 2).

Тогда $C\widehat{P}O=P\widehat{O}X=O\widehat{P}Q=\theta$

Ясно, что $O\widehat{O_1}M=2\theta$ и точка M может быть получена прокатыванием окружности $\left(O_1, \frac{|OP|}{4}\right)$ вокруг $\left(O, \frac{|OP|}{2}\right)$ на угол 2θ из положения M_0. Следовательно, луч света PQ действительно касается нефроиды в точке M.

Половинку нефроиды при ярком солнце можно увидеть утром над чашкой кофе.

Нефроида может быть также получена как огибающая следующего семейства прямых. Рассмотрим (рис. 3) окружность с центром в O и два ее взаимно перпендикулярных диаметра Ox и Oy. Выберем произвольно на диаметре Oy точку B и сделаем с помощью окружности $(B, |BO|)$ засечку A на исходной окружности. Проведем для всевозможных точек B через точки B и A прямые BA. Огибающая семейства этих прямых — нефроида. Докажите это.

В. Березин

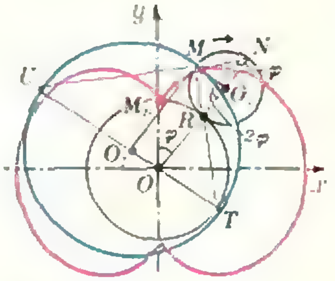


Рис. 1.

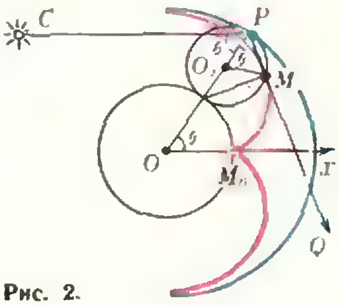


Рис. 2.

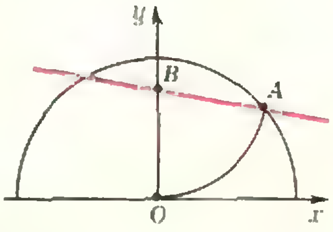


Рис. 3.

А. Земляков, Б. Ивлев

Задачи на повторение

В начале учебного года мы предлагаем ученикам IX—X классов не совсем обычное задание. К каждому из перечисленных ниже вопросов дано пять вариантов ответа (а, б, в, г, д), из которых в точности один — правильный. Найдите и подчеркните его. Зафиксируйте время, которое вам потребовалось; сравните ваши ответы с приведенными в конце номера.

Эти задания предлагались на республиканских олимпиадах по математике в 1977 году, причем на их выполнение давалось от 30 до 45 минут. В среднем из 10 ответов верными оказывались только шесть. А как будет у вас?

IX класс

1. Сколько стрелок можно оставить на рисунке 1 так, чтобы они задавали функцию с областью определения $X \subset \{x_1, x_2, x_3\}$? (Укажите все возможности.)

Ответ. а) Только 3; б) все 6; в) от 0 до 3; г) от 0 до 6; д) от 3 до 6.

2. При каких значениях m дробь

$$\frac{m^3 - m}{2\sqrt{m}}$$

равна 0?

Ответ. а) $m \in \{0; -1; 1\}$; б) $m \in \{0; 1\}$; в) $m = 0$; г) $m \in \{-1; 1\}$; д) $m = 1$.

3. Какой график имеет уравнение

$$x^2 - y^2 = 0?$$

Ответ. а) Пустое множество; б) точку; в) прямую; г) объединение двух прямых; д) окружность.

4. При каких значениях a и b справедливо соотношение

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}?$$

Ответ. а) $a = b = 0$; б) $a \in]-\infty; 0]$, $b \in]-\infty; 0]$; в) a и b одного знака; г) при любых a и b; д) ни при каких a и b.

5. Число A задано с точностью до 0,01, число B — с точностью до 0,02. С какой точностью можно указать число $2A - B$?

Ответ. а) 0,01; б) 0,02; в) 0,04; г) 0,00; д) ответ зависит от значений A и B.

6. В треугольнике длины сторон равны 3,5, n, где n — натуральное число. Укажите возможные значения n.

Ответ. а) $n \geqslant 1$; б) $n \geqslant 3$; в) $n \leqslant 8$; г) $3 \leqslant n \leqslant 7$; д) $3 \leqslant n \leqslant 5$.

7. Укажите значение $\cos(90^\circ + \alpha)$.

Ответ. а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) это значение не определено.

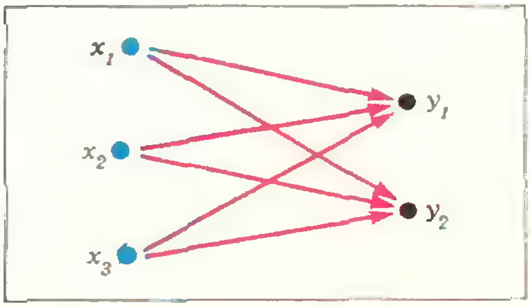


Рис. 1.

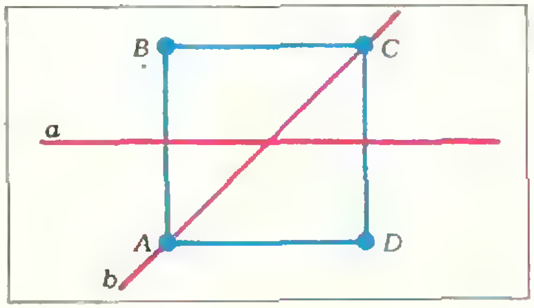


Рис. 2.

8. $ABCD$ — квадрат. Найдите образ вершины A при композиции $S_b \circ S_a$ симметрий относительно указанных на рисунке 2 осей a и b.

Ответ. а) A; б) B; в) C; г) D; д) точка, не являющаяся вершиной квадрата.

9. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана. Укажите вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA}$; д) $\overrightarrow{CA}$.

10. Высота правильного треугольника ABC равна 1. На каком расстоянии от вершины A следует провести прямую, параллельную прямой BC, чтобы она делила треугольник ABC на две части одинаковой площади?

Ответ. а) $^1/_2$; б) $^2/_3$; в) $^3/_4$; г) $\sqrt{2}/2$; д) $\sqrt{3}/2$.

X класс

1. Сколькими различными способами 12 человек можно распределить на работу в две смены по 6 человек?

Ответ. а) C_{12}^6; б) A_{12}^6; в) $\frac{1}{2}C_{12}^6$; г) $C_{12}^6 \cdot C_{12}^6$; д) P_4.

2. Даны два действительных числа $x = 0{,}1093\ldots$ и $y = 0{,}3006\ldots$ Сколько цифр после запятой можно указать у их суммы $x + y$?

Ответ. а) четыре; б) три; в) две; г) одну; д) ни одной.

3. Какими из свойств монотонности и ограниченности обладает последовательность $a_n = -\frac{1}{n^2}$?

Ответ. а) возрастает и не ограничена; б) убывает и не ограничена; в) возрастает и ограничена; г) убывает и ограничена; д) не ограничена и не монотонна.

4. Функция f дифференцируема в точке x_0. Чему равен предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)).$$

Ответ. а) 0; б) $f(x_0)$; в) $-f(x_0)$; г) $f'(x_0)$; д) этот предел не существует.

5. Найдите производную функции $(x^{10} + 1)^{10}$.

Ответ. а) $10(x^{10} + 1)^9$; б) $100(x^{10} + 1)^9$; в) $10x^9(x^{10} + 1)^9$; г) $100x^9(x^{10} + 1)^9$; д) $x^9(x^{10} + 1)^9$.

6. Плоскость пересекает ребра AB, BC и CD тетраэдра $ABCD$ (не в вершинах). Какое еще ребро будет пересекать эта плоскость?

Ответ. а) $[AC]$; б) $[AD]$; в) $[BD]$; г) никакое; д) еще два ребра.

7. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы в пространстве, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 90^\circ$. Каково возможное значение $\varphi = \widehat{\vec{a}, \vec{c}})$?

Ответ. а) $\varphi = 0^\circ$; б) $\varphi = 90^\circ$; в) $\varphi = 180^\circ$; г) $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$; д) $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$.

Советуем десятиклассникам решить и задачи для IX класса.

Продолжаем соревнования художников

Напоминаем, что точки в декартовой системе координат нужно ставить по очереди и соединять каждую точку отрезком с предыдущей точкой.

Что у вас получится, вы увидите сами!

1. (4; 7), (5; 8), (6; 8), (8; 9), (9; 9), (7; 8), (9; 8), (6; 7), (7; 6), (9; 6), (11; 5), (12; 3), (12; 2), (13; 3), (12; 1), (7; 1), (8; 2), (9; 2), (8; 3), (6; 1), (5; 1), (6; 2), (6; 3), (5; 6), (4; 6), (4; 7) и (5; 7).

2. (—12; 15), (—10; 17), (—1; 8), (1; 8), (3; 10), (2; 11), (9; 18), (11; 16), (1; 6), (5; 2), (6; 3), (13; —4), (11; —6), (1; 4), (4; —11), (5; —11), (5; —18), (—5; —18), (—5; —11), (—4; —11), (—1; 4), (—3; 2), (—2; 1), (—9; —6), (—11; —4), (—1; 6) (—4; 9), (—5; 8), (—12; 15) и (—4; —18), (—4; —14), (—1; —14), (—1; —18) и (0; —16), (0; —14), (4; —14), (4; —16), (0; —16).

3. (10; 7), (11; 6), (12; 7), (12; 6), (13; 5), (14; 3), (13; 3), (12; 4), (10; 0), (9; —1), (10; —2), (8; —4), (9; —2), (7; —4), (8; —2), (6; —1), (5; —1), (2; —4), (8; —10), (6; —10), (6; —9), (1; —4), (2; —2), (1; —1)(—1; 0), (—12; —3), (—6; —1), (0; 3), (4; 4), (6; 4), (8; 3), (9; 3), (11; 5), (10; 7) и (12,5; 5).

4. (—3; —4), (—4; —3), (—5; —3), (—7; —4), (—10; —7), (—11; —11), (—13; —14), (—11; —14), (—10; —12), (—9; —11), (—5; —9), (—6; —9), (—5; —8), (—4; —6), (—5; —5), (—4; —4), (—3; —4) и (—4; —3,5).

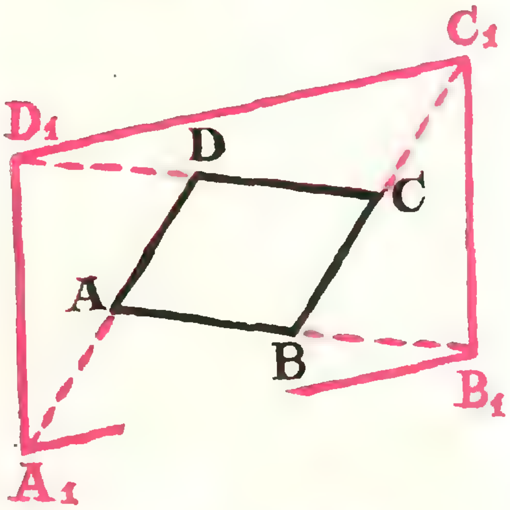
А. Синельников

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Один гражданин захотел выпить стакан сока. Он подошел к киоску и выложил перед продавщицей все деньги, которые у него были — бумажные купюры и мелочь. Продавщица пересчитала деньги, положила их в общую выручку, затем налила стакан сока стоимостью 9 копеек и отсчитала сдачу. Но при этом она ошиблась: дала столько копеек, сколько полагалось дать рублей, а рублей дала столько, сколько полагалось дать копеек.

Гражданин, не считая, положил деньги в карман и ушел, а придя домой, обнаружил, что денег у него стало в четыре раза больше, чем было. Сколько денег было у гражданина?



2. Килограмм пломбира на 40 копеек дороже килограмма шоколадного мороженого. Андрей и Виктор заказали по 150 г мороженого, причем у Андрея пломбира вдвое больше, чем шоколадного, а у Виктора того и другого поровну. Чья порция дороже и на сколько?

3. Ромб $ABCD$ «раздули» в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок: $A_1 \in [DA)$, $|A_1A| = |AD|$ и т. д.). Площадь ромба $ABCD$ равна S. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм и найти его площадь.

4. Почему ножницы, которыми пользуются портные, делают с короткими ручками и с длинными лезвиями, а ножницы, которыми режут металлические листы, например, жесть, делают с длинными ручками и с короткими лезвиями?

А. Перышкин

Оригинальное доказательство закона Архимеда

(Из истории физики)

Вопросами гидростатики, основы которой были заложены Архимедом, занимались многие ученые. Среди них — голландский ученый Симон Стевин (1548—1620). В своей книге «Начала гидростатики» Стевин дал простое, но очень оригинальное доказательство закона Архимеда. Изложению этого доказательства предшествуют семь постулатов — утверждений, не требующих доказательств. Вот один из этих постулатов:

«Собственным весом тела является вес его в воздухе; в воде вес тела является иным» *).

Далее Стевин доказывает такое «Предложение»: *«Вода удерживает в воде любое положение»*.

Дана невесомая форма A, содержащая воду и помещенная в воду BC (рис. 1). Требуется доказать, что вода A не будет перемещаться.
Доказательство. Если бы было иначе и вода A не осталась бы на месте, а опустилась в D, то вода, которая заняла бы ее место, также опустилась бы по той же причине; таким образом, вследствие перемещения A вода пришла бы в вечное движение, что является абсурдом.

Подобным же образом доказывается, что A не поднимется и не переместится в какую-либо сторону; поэтому она будет пребывать там, где она помещена — в D, E, F, G или любом другом месте в воде BC.

Опираясь на доказанное предложение, Стевин затем доказывает следующую теорему:

Всякое твердое тело весит в воде менее чем в воздухе на величину веса равного ему объема воды.

Дано твердое тело A и вода BC (рис. 2). Требуется доказать, что если A будет помещено в воду BC, то вес его будет меньше чем в воздухе на величину веса воды, занимающей объем, равный объему A.
Доказательство. Пусть D— невесомая форма, подобная и равная по объему телу A. Наполним ее водой и поместим в воду BC. Согласно доказанному выше «Предложению», форма D будет сохранять в воде BC любое положение. Выльем из формы D воду и поместим в нее тело A. Теперь вес содержимого формы D будет равен весу тела A, уменьшенному на вес вылитой воды. Но объем вылитой воды равен объему A. Следовательно, вес тела A в воде меньше чем в воздухе на величину веса воды, занимающей объем, равный объему тела A.

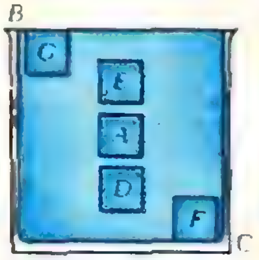


Рис. 1.

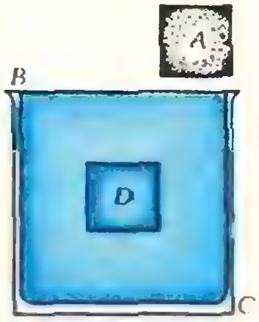


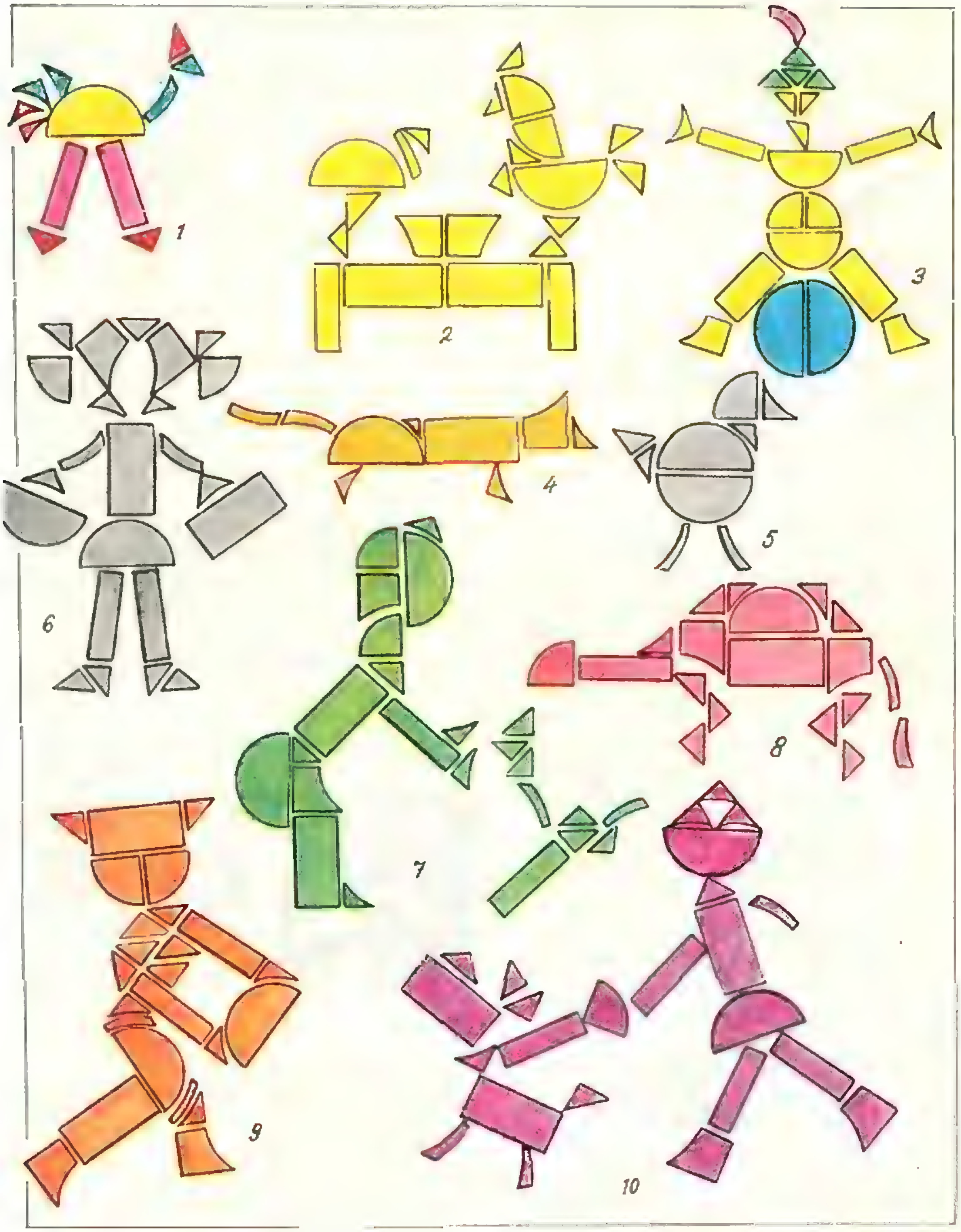
Рис. 2.

* * *

В заключение мы рекомендуем тем, кто интересуется историей физики, прочитать книгу «Начала гидростатики. Архимед, Стевин, Галилей, Паскаль» (Государственное технико-теоретическое изд-во, Москва, 1932). В ней приведены переводы оригинальных работ по гидростатике Архимеда, Стевина, Галилея, Паскаля.

---

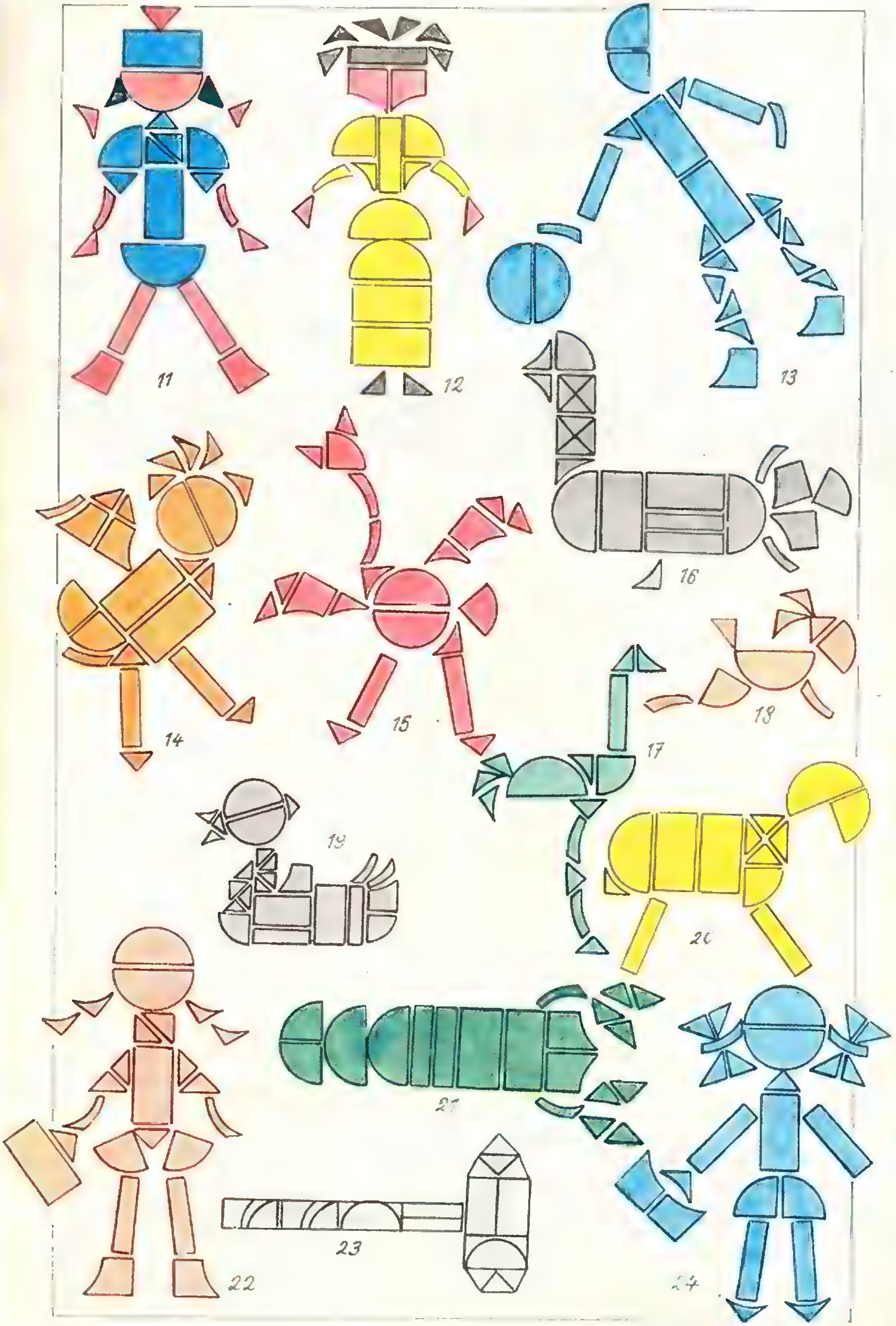
*) Долгое время «вес» рассматривался как некая характеристика тела. В этом смысле «собственный вес» следует понимать как «чистую» характеристику, ничем не искаженную. Следовало бы говорить о собственном весе тела как о весе его в вакууме, но в то время не различали понятия «воздух» и «вакуум».



Раскрой квадрата

Редакция получила свыше 1000 композиций по объявленному конкурсу (см. «Квант» № 2, 1977). Было отобрано 24 композиции для публикации: 1 — А. Рябчиков (Гомельская обл.); 2, 7, 9 — А. Можарова (Тамбов); 3 — А. Царев (Черновцы); 4, 17, 18 — А. Потапов (Московская обл.); 5 — Н. Трифонов (Красноярский край); 6 — И. Олейникова (Ставропольский край); 8 — С. Петраш (Ленинград); 10 — А. Сойфер (Пермь); 11, 12 — С. Губенина (Усть-Каменогорск); 13 — И. Цыганков (Севастополь); 14, 15 — А. Парфиров (Ульяновск); 16 — О. Шац (Московская обл.); 19 — Н. Тарасов (Новгородская обл.); 20, 21 — С. Коряк (Днепропетровск); 22 — О. Дымкова (Пенза); 23 — П. Капралов (Пенза); 24 — Л. Таначева (Удмуртская АССР).

По итогам конкурса лучшими были признаны композиции шестиклассницы Светы ГУБЕНИНОЙ и девятиклассниц Иры ОЛЕЙНИКОВОЙ и Тони МОЖАРОВОЙ, которые награждаются подпиской на «Квант» на 1978 год.


11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

А. Савин

КООРДИНАТЫ

Я думаю, каждому из вас приходилось обращаться к прохожим с просьбой объяснить, где находится то или иное здание или учреждение. Отвечающих можно разделить на три категории. Первые машут рукой в некотором направлении и говорят «там», иногда добавляя «минутах в двадцати ходьбы». Вторые говорят приблизительно так: «Пройдите булочную, там будет поворот налево, но вы туда не поворачивайте, а идите прямо мимо кафе, а когда пройдете книжный магазин, поверните налево, идите мимо школы, потом будет желтый двухэтажный дом с колоннами, вот напротив него и будет ваше учреждение». Третьи отвечают так: «Идите прямо до улицы Чернышевского, поверните по ней налево и второй дом от перекрестка с улицей Добролюбова на правой стороне — тот, который вы ищете».

И вот, следуя совету, вы двигаетесь в указанном направлении. Если возникает сомнение в правильности выбранного пути, вновь обращаетесь к прохожим и в конце концов находите нужный дом. Как говорится, «язык до Киева доведет».

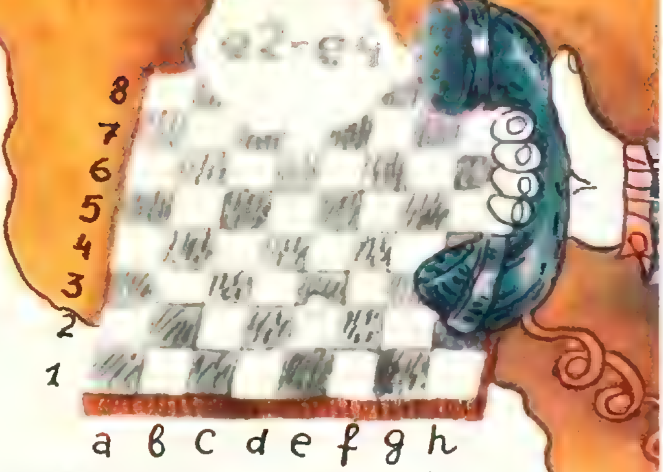
А что делать мореплавателям? У кого им спросить дорогу в открытом море? Как объяснить другим, где находится открытый ими остров?

И вот за 200 лет до нашей эры греческий ученый Гиппарх предлагает хорошо вам известные географические координаты: *широту* и *долготу*. С помощью этих двух чисел можно точно определить положение острова, поселка, горы или колодца в пустыне и нанести их на карту или глобус. Научившись определять в открытом море широту и долготу местонахождения корабля, моряки получили возможность, никого не спрашивая, выбирать нужное им направление.

Напомним, что восточную долготу и северную широту обозначают числами со знаком «плюс», а западную долготу и южную широту — со знаком «минус». Таким образом, пара чисел со знаками однозначно определяет точку на земном шаре. Например, пара +70°, +60° определяет точку в центре острова Вайгач, расположенного в Карском море.

У одного из моих любимых писателей, Жюля Верна, некоторые романы прямо построены на ситуациях, связанных с географическими координатами. В романе «Удивительные приключения дядюшки Антифера» одному из героев известна широта острова, на котором спрятаны сокровища, а другому — долгота этого острова. А вспомним текст записки из романа «Дети капитана Гранта»:

«7 июня 1862 года трехмачтовое судно «Британия» Глазго потерпело крушение ...гони... южн... берег ...два матроса... Капитан Гр... достиг... контин... пл. ... жесток... инд... брошен этот документ ... долготы



и 37°11 широты ... окажите им помощь ... погибнут.»

Сколько трудностей пришлось испытать героям романа, пока они нашли капитана Гранта, и все из-за того, что оказалось невозможным восстановить долготу.

В XIV веке французский математик Н. Орсем ввел, по аналогии с географическими, координаты на плоскости. Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой то, что мы теперь называем *абсциссой* и *ординатой*.

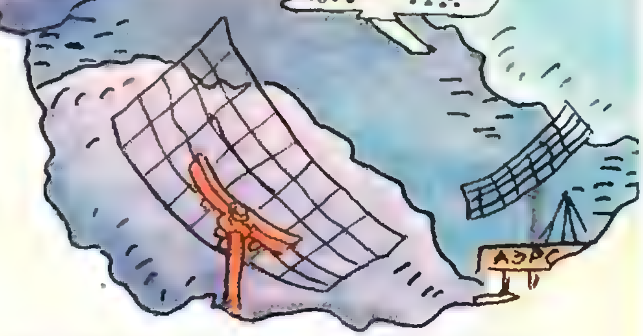
Это нововведение оказалось чрезвычайно удачным. На его основе возник метод координат, связавший геометрию с алгеброй. Основная заслуга в создании этого метода принадлежит великому французскому математику Рене Декарту. В его честь такая система координат называется декартовой. На этой системе основаны многие способы указания места. Например, на билете в кинотеатр стоят два числа: ряд и место — их можно рассматривать как координаты вашего места в зале. Подобные же координаты приняты в шахматах, правда, вместо одного из чисел берется буква: вертикальные ряды клеток обозначаются буквами латинского алфавита, а горизонтальные — цифрами

Таким образом, каждой клетке шахматной доски ставится в соответствие пара из буквы и числа, и шахматисты получают возможность записывать свои партии.

Тот же «шахматный» принцип применяется сейчас на планах городов. План города разбивают на квадраты, занумерованные с помощью букв и цифр, а на оборотной стороне перечисляют все изображенные улицы в алфавитном порядке и указывают, в каком квадрате они находятся.

Существуют на плоскости и другие системы координат. Вспомним прохожего, который показывал направление рукой и говорил, сколько времени нужно идти. На таком принципе основана *полярная система координат*. Чтобы ее ввести, выбирают начальную точку, называемую *полюсом* (поэтому система и называется «полярной»); из этой точки проводят луч, называющийся *полярной осью*. Чтобы определить координаты точки на плоскости, ее соединяют отрезком с полюсом и вычисляют длину этого отрезка и угол между ним и полярной осью.

Иногда координаты выступают в завуалированном виде. Например, в здании Московского университета на Ленинских горах комнаты нумеруются так, что по номеру аудитории можно узнать этаж, на котором она находится. Для этого номер нужно разбить на две части: число сотен и остальную часть. Число сотен и есть этаж. Например, аудитория 1503 находится на 15-м этаже, а 817 — на восьмом.



До сих пор мы говорили о координатах на сфере или на плоскости, задающихся двумя числами. Существуют также координаты, задаваемые одним числом. Это координаты на прямой. Я думаю, каждый из вас знает, что достаточно задать одно число — расстояние от точки до начала отсчета, чтобы указать на прямой положение этой точки. В жизни мы очень часто сталкиваемся с такими координатами. Пример — железная дорога с километровыми столбами вдоль нее. Другой пример — номера домов на улице. А время? Хотя каждый момент времени мы обозначаем целым ворохом чисел: годом, месяцем, днем, часом, минутой и секундой, ясно, что можно обойтись одним числом, выраженным, например, в секундах. Одним числом задается положение точки на окружности. Когда мы говорим «Ваня родился 14 сентября», мы, по существу, имеем дело с координатами на окружности (почему?).

Ну, а сколько координат зададут положение точки в пространстве? Естественно, три. Эти три числа можно получить, например, так. Соединим лучом центр Земли и нашу точку и рассмотрим широту и долготу пересечения луча с Землей и расстояние от нашей точки до центра Земли. Такая система координат называется *сферической*. Можно поступить подругому. Выберем некоторую плоскость и введем на ней декартову систему координат, а нашей точке сопоставим координаты ее проекции на эту плоскость и расстояние от нее до плоскости, взятое со знаком плюс для одной половины пространства и со знаком минус — для другой; так мы получим декартову систему координат в пространстве.

Сферической системой координат обычно пользуются на аэродромах. Рядом с аэродромом ставят радиолокатор. Этот прибор умеет определять дальность до самолета, угол, под которым самолет виден над горизонтом, и угол между направлением на самолет и направлением на север.

В заключение обсудим одно деловое предложение. Каждую точку в пространстве можно задать тремя числами. Тем более можно задать тремя числами положение моей или вашей квартиры. Так зачем же писать на конвертах длинные адреса? Достаточно было бы договориться о системе координат (например, долготе, широте и номере этажа) и письма прекрасно приходили бы к адресату.

Вот тут-то пришла пора вспомнить письмо капитана Гранта. Ведь если вы ошибетесь в одной из цифр такого короткого адреса или эту цифру нельзя прочесть (мало ли что случится в дальней дороге), письмо до адресата не дойдет. Обычный адрес более устойчив. Если вы ошибетесь в нем не слишком сильно, письмо все равно дойдет до места. В адресе содержится, как говорят, избыточная информация. Избыточную информацию включил в свое письмо и капитан Грант. Он написал свое письмо на трех языках и сообщил не только координаты места крушения, но и материк, вблизи которого оно произошло. Но и этого оказалось недостаточно. Так что переходить на упрощенный адрес, пожалуй, не стоит.

И. Габович

Ответ в тригонометрическом уравнении

Запись ответа тригонометрического уравнения нередко связана с понятиями объединения и пересечения множеств. Обычно при решении таких уравнений получаются серии корней, и в окончательном виде ответ записывается в виде объединения этих серий. Но как быть, если эти серии пересекаются? Надо ли исключать повторяющиеся решения или это можно не делать?

С понятием пересечения множеств связан и еще один, видимо, самый важный вопрос: в ответе не должно быть значений переменной, при которых выражения в левой или правой частях уравнения не определены. Такие значения, если они появились в процессе решения, надо исключить. А для этого надо уметь находить пересечение различных серий.

Этим вопросам и посвящена настоящая статья.

Один пример

Рассмотрим решение следующей задачи.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}. \qquad (1)$$

Допустимые значения переменной определяются условиями $\sin x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$, $\sin 4x \neq 0$. Это дает нам $x \neq \pi k$, $x \neq \pi m/2$, $x \neq \pi n/4$ (k, m, $n \in \mathbf{Z}$). Легко заметить, что эти три условия можно заменить одним: $x \neq \pi n/4$ ($n \in \mathbf{Z}$). Заметить это можно как из рассмотрения тригонометрического круга (серия $x = \pi n/4$ содержит в себе серии $x = \pi k$ и $x = \pi m/2$), так и чисто алгебраически: при четных n из серии $x = \pi n/4$ получается серия $x = \pi m/2$, а при n, кратных четырем, получается серия $x = \pi k$. Можно и вообще не решать уравнения $\sin x = 0$, $\sin 2x = 0$, а заметить, что множество корней уравнения $\sin 4x = 0$ содержит и корни уравнений $\sin x = 0$, $\sin 2x = 0$, поскольку $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$ (отсюда следует, что корнями уравнения $\sin 4x = 0$ являются не только корни уравнения $\sin 2x = 0$, но и корни уравнения $\cos 2x = 0$, и аналогично для уравнения $\sin x = 0$).

Теперь, домножив уравнение (1) на $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x$, получим уравнение

$$\sin 2x \sin 4x - \sin x \sin 4x = \sin x \sin 2x,$$

равносильное исходному на области допустимых значений переменной. Преобразуя это уравнение, получим:

$$\sin 2x \sin 4x = \sin x (\sin 2x + \sin 4x),$$

$$\sin 2x \sin 4x = 2 \sin x \sin 3x \cos x,$$

$$\sin 2x \sin 4x = \sin 2x \sin 3x,$$

$$\sin 2x (\sin 4x - \sin 3x) = 0,$$

$$\sin 2x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{7x}{2} = 0.$$

Остается рассмотреть три случая:

$$\sin 2x = 0, \ \sin\frac{x}{2} = 0, \ \cos\frac{7x}{2} = 0.$$

Уравнение $\sin 2x = 0$ не дает нам корней исходного уравнения, так как в рассматриваемой области должно быть $\sin 2x \neq 0$.

Уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$ и $\cos\frac{7x}{2} = 0$ дают нам соответственно серии $x_1 = 2\pi k$ и $x_2 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Остается проверить, лежат ли они в области $x \in \mathbf{R}$, $x \neq \pi n/4$, $n \in \mathbf{Z}$. Серию x_1 проверить легко: поскольку $x \neq \pi n/4$, а при n, кратных восьми $n = 8l$, получается как раз $x \neq 2\pi l$, вся серия x_1 исключается. Сложнее обстоит дело с серией x_2. Здесь нам надо выяснить, при каких целых k найдется такое n, что выполняется равенство

$$\frac{\pi(2k+1)}{7} = \frac{\pi n}{4},$$

и исключить такие k. Последнее уравнение приводится к виду

$$8k + 4 = 7n,$$

причем решать это уравнение надо в целых числах.

Линейные диофантовые уравнения с двумя переменными

Линейным диофантовым уравнением с двумя переменными называется уравнение вида

$$ax + by = c, \qquad (2)$$

где a и b — целые числа, отличные от нуля, c — произвольное целое число, причем требуется найти только целочисленные решения.

Можно считать, что числа a, b и c в уравнении (2) взаимно просты (мы всегда можем сократить обе части уравнения (2) на НОД $(a, b, c) \neq 1$). Но три взаимно простых числа попарно взаимно простыми могут и не быть (пример: 6, 10, 15). Очевидно, что если числа a и b в уравнении (2) не взаимно просты, то целочисленных решений это уравнение не имеет. В самом деле, положив $a = ka_1$, $b = kb_1$, получим $(a_1x + b_1y)\,k = c$, откуда $a_1x + b_1y = c/k$, и если x и y — целые, то и c/k — целое число, а это невозможно, поскольку c не делится на k (мы предположили, что a, b и c — взаимно простые числа).

Если же a и b в уравнении (2) — взимно простые числа, то уравнение имеет целочисленные решения. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а покажем лишь, как найти все решения, если известно хотя бы одно из них (его надо искать подбором).

Пусть (x_0, y_0) — какое-то целочисленное решение уравнения (2):

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Вычтем почленно это равенство из уравнения (2); получим

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0,$$

откуда

$$x = x_0 - \frac{b\,(y - y_0)}{a}. \qquad (3)$$

Чтобы x, определяемое формулой (3), было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы число $\frac{b\,(y - y_0)}{a}$ также было целым. Но, по предположению, a и b взаимно просты, следовательно, целым должно быть число $\frac{y - y_0}{a}$. Обозначив отношение $\frac{y - y_0}{a}$ буквой t, получим:

$$x = x_0 - bt,$$
$$y = y_0 + at,$$

где $t \in \mathbf{Z}$.

Продолжение примера

Итак, нам надо решить в целых числах уравнение

$$7n - 4 = 8k.$$

Сразу видно, что n должно делиться на четыре; полагая $n = 4$, находим

$$7 \cdot 4 - 4 = 24 = 8k,$$

откуда $k = 3$. Нам удалось довольно быстро найти одно решение уравнения: $k = 3$, $n = 4$. Общее решение тогда записывается в виде $k = 3 + 7t$, $n = 4 + 8t$ $(t \in \mathbf{Z})$.

Отсюда следует, что в серии x_2 (см. с. 53) надо исключить все k вида $3 + 7t$, то есть ответ к примеру 1 можно записать в виде

$$x = \frac{\pi}{7}\,(2k + 1),\ k \neq 7t + 3,\ t \in \mathbf{Z}$$

или

$$\left\{ \frac{\pi}{7}\,(2k + 1) \,\middle|\, k \neq 7t + 3;\ k, t \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Уравнение $8k + 4 = 7n$ можно решать и без использования общей теории. Из него следует, что $n = 4l$ (поскольку левая часть уравнения делится на четыре). Подставляя $n = 4l$ в уравнение, получаем: $8k + 4 = 28l$, откуда $2k + 1 = 7l$. Далее l должно быть нечетно, $l = 2t + 1$; поэтому $2k + 1 = 14t + 7$, $k = 7t + 3$. Вот решение и получилось: $k = 7t + 3$, $n = 4l = 4\,(2t + 1) = 8t + 4$.

Запись ответа

Теперь рассмотрим еще одну задачу.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2.$$

Пользуясь известными тождествами, получаем:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} = 2,$$

$$\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0,$$

$$2\cos 5x \cos x + 2\cos 9x \cos x = 0,$$

$$\cos x\,(\cos 5x + \cos 9x) = 0,$$

$$\cos x \cos 2x \cos 7x = 0.$$

Рассматривая три случая, получаем три серии корней ($k,\ l,\ m \in \mathbf{Z}$):

1) $\cos x = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2) $\cos 2x = 0, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}$;

3) $\cos 7x = 0, x_3 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi m}{7}$.

Как записать ответ? Надо ли перечислять все три серии? Посмотрим, пересекаются эти серии или нет. Здесь можно действовать разными способами.

Способ геометрический. «Период» серий равен π. Рассмотрим те корни из серий x_1, x_2, x_3, которые попадают в промежуток $[0;\ \pi]$. Это будут

$x_1 : \pi/2;$

$x_2 : \pi/4,\ \ 3\pi/4;$

$x_3 : \pi/14,\ \ 3\pi/14;\ \ 5\pi/14,\ \ \pi/2,\ \ 9\pi/14,\ \ 11\pi/14,\ \ 13\pi/14.$

Сразу видно, что серия x_1 содержится в серии x_3, а серии x_2 и x_3 не пересекаются. Значит, ответ можно записать в виде

$$\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Способ алгебраический. Общим знаменателем в сериях x_1 и x_2 будет 4:

$$x_1 = \frac{\pi\,(2 + 4k)}{4},\quad x_2 = \frac{\pi\,(1 + 2l)}{4}.$$

Если $x_1 = x_2$, то $2 + 4k = 1 + 2l$, но слева — четное число, а справа — нечетное. Равенство невозможно, серии x_1 и x_2 не пересекаются. Аналогично получаем, что серии x_2 и x_3 тоже не пересекаются. А вот для серий x_1 и x_3 получаются формулы

$$x_1 = \frac{\pi\,(7 + 14k)}{14},\quad x_3 = \frac{\pi\,(1 + 2m)}{14}.$$

Из равенства $7 + 14k = 1 + 2m$ получаем $m = 7k + 3$. Это означает, что для всякого k найдется целое m такое, что будет выполняться равенство $7 + 14k = 1 + 2m$, то есть всякий корень из серии x_1 встретится и в серии x_3, поэтому серия x_1 содержится в серии x_3, и в ответе писать ее не надо.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\cos 7x\,(\sin 5x - 1) = 0.$$

Сразу получаем два случая ($k,\ n \in \mathbf{Z}$):

1) $\cos 7x = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$;

2) $\sin 5x = 1,\ x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}$.

Пересекаются ли эти серии? Посмотрим. Из равенства

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$$

следует $5k = 14n + 1$. Это уравнение имеет решения. Одно из них находим подбором: $k = 3,\ n = 1$, а общее тогда имеет вид $k = 3 + 14t,\ n = 1 + 5t$.

Ответ можно записать в виде

$$\left\{\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7};\ \ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \,\middle|\, k \neq 3 + 14t;\ \ k, n, t \in \mathbf{Z}\right\}$$

или в виде

$$\left\{\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7};\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \,\middle|\, n \neq 1 + 5t;\ \ k, n, t \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Замечание. Иногда объединение серий выглядит довольно просто. Например, объединение серий $x_1 = \pi k$ и $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi l$ имеет вид $x = \frac{\pi n}{2}$.

Пренебрегать таким упрощением ответа не стоит. А иногда, наоборот, объединение серий выглядит сложнее самих серий. В таких случаях бывает полезно разбить эти серии на «куски». Например, объединение серий $x_1 = \frac{\pi k}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ можно записать в виде

$$\left\{\frac{\pi k}{2};\ \ \frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ \frac{5\pi}{6} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Системы

При решении некоторых тригонометрических уравнений их заменяют эквивалентной системой уравнений,

Олимпиады МФТИ

Различные математические конкурсы в истории математики известны с давних пор. История донесла до нас сведения о математических конкурсах, проводимых еще в XIII веке.

История школьных физико-математических олимпиад начинается с 1894 года, когда в Венгрии была проведена первая математическая олимпиада школьников (так называемое «соревнование Этвеша»).

В Советском Союзе первая математическая олимпиада школьников была проведена в Ленинграде весной 1934 года. Инициаторами проведения этой олимпиады были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне (председатель оргкомитета олимпиады) и профессор В. А. Тартаковский.

По инициативе Московского математического общества осенью 1935 года была проведена первая Московская математическая олимпиада школьников. Московские математики встретили ее с большим воодушевлением. В оргкомитет вошли крупнейшие математики-москвичи.

Вплоть до Великой Отечественной войны математические олимпиады в Москве проводились ежегодно и очень скоро завоевали всеобщее признание. Во время войны московские математики провели олимпиады в Ашхабаде и Казани. После Отечественной войны проведение математических олимпиад стало традицией во многих городах Советского Союза.

Вслед за математиками свои олимпиады стали проводить физики, химики, астрономы, географы, биологи, а затем и лингвисты.

Первые олимпиады по физике были проведены Московским университетом еще в 1938 году. С тех пор эти олимпиады стали традицией для московских школьников.

В дальнейшем такие олимпиады начали проводить Московский физико-технический институт (МФТИ) и другие вузы Москвы. Почин москвичей подхватили в других городах страны.

В феврале 1962 года состоялась первая «большая» физико-математическая олимпиада школьников, проводимая по инициативе МФТИ. В ней приняли участие свыше 6500 школьников из 58 городов Советского Союза. Она проводилась в один тур во время зимних каникул.

Интересна форма проведения олимпиады. Студенты и аспиранты института проводили ее во время зимних каникул в своих родных городах. А затем решения задач привезли в Москву, где их проверяли. Всю работу по организации олимпиады возглавил комитет ВЛКСМ.

Начиная с 1964 года физические и математические олимпиады проводились совместно под руководством Министерства просвещения РСФСР. Эти олимпиады получили название Всероссийских физико-математических олимпиад.

С 1967 года проводятся уже Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады (Всесоюзные олимпиады).

К сожалению, и история олимпиад и задачи, предлагаемые на этих олимпиадах, постепенно забываются и с годами все труднее и труднее их восстановить.

Вышедшая в издательстве «Знание» книга «Физико-математические олимпиады» *) призвана в какой-то степени заполнить этот пробел. В ее основу легли материалы, накопленные организаторами олимпиад ведущего физического вуза страны — Московского физико-технического института. Однако, это не означает, что она носит узко «ведомственный» характер. Олимпиады МФТИ являются важнейшей

---

*) А. П. Савин и др. «Физико-математические олимпиады». М., «Знание», 1977.

а затем находят пересечение множеств решений. Часто эти пересечения находятся легко. Но иногда для нахождения решений необходимо решать диофантово уравнение.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}=2. \qquad (4)$$

Поскольку наибольшее значение функции $y=\cos t$ равно 1, уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x = 1,\\ \cos\dfrac{3x}{4}=1,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}x_1=\pi k,\\ x_2=\dfrac{8\pi n}{3}\end{cases}$$

($k, n\in\mathbf{Z}$). Решением уравнения (4) является пересечение серий x_1 и x_2, то есть нам надо решить уравнение составной частью Всесоюзных олимпиад, и задачи, представленные в книге, отличаются высоким научным уровнем и хорошо продуманы с методической точки зрения.

Книга начинается с рассказа об истории олимпиад. Авторы книги непосредственно принимали участие в проведении «больших» олимпиад, и им есть что рассказать читателям. Эта глава, написанная живо и эмоционально, является хорошей затравкой к книге.

Вторая и третья главы содержат формулировки задач, соответственно по математике и физике, предлагавшихся на олимпиадах МФТИ. Собранные задачи являются лишь частью того множества задач, которые за 15 лет предлагались на олимпиадах.

Следует подчеркнуть, что большинство задач совершенно не стандартны и в целом довольно трудны.

Многие задачи сформулированы очень затейливо и пожалуй даже чересчур искусственно: в формулировках участвуют не только разные звери, насекомые и рыбы, но даже — ...привидения. Но за замысловатой формулировкой скрываются очень содержательные и трудные математические задачи. Так одна очень необычная задача связана с Али-бабой и... селедками. Сама по себе она очень сложна — требуется придумать стратегию, следуя которой, можно привести все селедки в одинаковое положение за фиксированное число ходов (задача 98).

Победитель международной олимпиады 1975 года Боря Юсин (теперь он — студент МГУ) вместе с младшим братом довольно долго пытались обобщить эту задачу, когда «селедок» n, а смотреть и менять разрешается только k из них. В конце концов они придумали даже два различных решения. Вот как Б. Юсин сформулировал задачу в общем виде:

Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть пластина в форме правильного n-угольника, в углах которой расположены n выключателей, закрытых колпачками. Петя хочет, чтобы все выключатели были одновременно либо включены, либо выключены. Для этого он может открыть любые k колпачков и поставить каждый из этих k выключателей в любое положение по своему выбору, после чего он должен отвернуться, а Вася тем временем закрывает колпачки и может повернуть пластину на любой угол. Затем Петя снова может сделать то же самое и т. д. Начальное положение Пете неизвестно. Если он добивается своего, Вася сообщает ему это, как только он отворачивается. При каких k и n у Пети есть выигрышная стратегия?

Попробуйте и вы решить эту задачу. Ответ оказывается таким:

Разложим n на простые множители: $n = p^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, причем $p > p_1 > p_2 > \ldots > p_j$. Тогда выигрышная стратегия существует в том и только в том случае, когда $k \geqslant n - n/p$.

Возможно и другие задачи из этого сборника могут натолкнуть внимательных читателей на интересные размышления.

В то же время в книге есть и относительно простые задачи, их присутствие делает книгу вполне доступной тем, кто только начинает учиться решать задачи. Нетрадиционность (с точки зрения школьных критериев) формулировок задач требует и некоторой нестандартности мышления при решении таких задач. Именно это и отличает олимпиадные задачи от задач, обычно решаемых на школьных уроках. В то же время все собранные в книге задачи не требуют ничего выходящего за рамки обычной школьной программы. Представляется интересным и включение в книгу нескольких задач по физике, взятых из архивов жюри физтеховских олимпиад и требующих умения оценить те или иные физические величины из соображений размерности. К сожалению, таких задач обычно мало бывает даже на олимпиадах, школьники практически не учат делать оценки. Умение же оценивать те или иные величины в практических зада-

---

$\pi k = \frac{8\pi n}{3}$. Из него получаем уравнение $3k = 8n$, имеющее решение $k = 8t$, $n = 3t$. Значит, ответ в задаче выглядит так:

$$\{8\pi t \mid t \in \mathbf{Z}\}.$$

Упражнения

Решить следующие уравнения.

1. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos 2x \cos 3x}$.
2. $\cos x\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x) = 4 \sin 3x \sin 4x$.
3. $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$.
4. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0$.
5. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.
6. $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x = 2 \cos^2 \frac{3}{2} x$.
7. $2 \cos^2 3x + \sin 5x = 1$.
8. $\sin x \sin 3x + \sin 6x \sin 10x = 0$.
9. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$.

чах может придти только после соответствующей практики, и этому надо учить и школьников, и студентов как можно раньше.

В четвертой и пятой главах приводятся решения задач, собранных в главах 2 и 3. Решения написаны достаточно подробно. Пониманию, а часто и краткости решений, очень способствуют рисунки, сопровождающие формулировки и решения задач.

Некоторое неудовлетворение остается от полиграфического оформления книги. К сожалению, значительная часть рисунков, относящихся к отдельным задачам, приводится не на тех страницах, где напечатаны сами задачи. Это затрудняет чтение книги. Досадно, что отсутствует единообразие и в наборе формул (например, по-разному набраны дробные выражения).

В последней главе книги — шестой — приводятся задачи, также предлагавшиеся на олимпиадах, но уже без решений. Включение такой главы в книгу чрезвычайно полезно именно потому, что она дает очень богатый дополнительный материал для самостоятельной работы школьникам, материал для учителей и руководителей физико-математических кружков, для студентов и организаторов олимпиад, который можно использовать для различных видов внеклассной работы по физике и математике.

Эта книга, рассчитанная на школьников старших классов и учителей, безусловно сыграет важную роль в пропаганде физико-математических знаний.

В заключение мы хотели бы привести несколько задач из этой книги:

Математика

1. Дан угол на плоскости. Найти множество центров окружностей, описанных вокруг равнобедренных треугольников, у которых вершины при основании лежат на противоположных сторонах этого угла, а третья вершина — в данной точке A на его биссектрисе.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников ABC, ABD, ACD и BCD подобен данному.

3. В основании четырехгранной пирамиды — ромб с углом 60° при вершине A. Боковое ребро, выходящее из вершины A, равно стороне ромба. Доказать, что из остальных боковых ребер можно составить прямоугольный треугольник.

4. На шахматной доске 8×8 клеток ставятся две фишки. Два игрока поочередно делают ходы каждый своей фишкой. Фишка первого игрока может при каждом ходе передвигаться лишь на одну клетку по вертикали или горизонтали. Фишка второго — на одну клетку по вертикали или горизонтали либо на одну клетку — по диагонали. Выигрывает тот, кто поставит свою фишку на фишку партнера. Кто выигрывает при правильной игре?

5. n игроков играют в следующую игру: имеется $(2n+1)$ шашек, из них $2k$ черных, остальные белые. Играющие садятся вокруг стола и каждый из них получает по две шашки. По жребию один из игроков берет оставшуюся шашку. Если у него при этом три шашки оказываются одного цвета, то он выиграл, и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе шашки одинакового цвета, а третью отдает соседу справа. Если у того окажутся три шашки одинакового цвета, то он выиграл, если нет, то он делает то же, что и первый, и т. д.

Доказать, что при k, не равном n, игра окончится за конечное число передач шашек (ходов). Найти максимально возможное число ходов в этой игре.

Физика

6. Человек идет по шпалам железной дороги. Максимальная длина его шага 0,8 м. Шпалы уложены так, что на любом стометровом участке ровно 200 шпал. Расстояние между шпалами не меньше 0,3 м и не больше 0,6 м и может меняться в этих пределах от шпалы к шпале. При какой укладке шпал человек сделает максимальное число шагов на 1 км пути, а при какой минимальное?

7. Два автомобиля имеют одинаковую мощность. Максимальная скорость первого v_1 км/ч, второго v_2 км/ч. Какую максимальную скорость смогут развить автомобили, если один возьмет на буксир другого?

8. Оцените минимальную допустимую продолжительность суток для планеты с массой M и радиусом R.

9. При неправильной регулировке двигателя внутреннего сгорания иногда вместо сравнительно медленного сгорания горючей смеси происходит так называемая «детонация», когда смесь сгорает быстро со взрывом. Почему при этом падает к.п.д двигателя?

10. В кабине космического корабля имеется высокочастотная печь для исследования плавления в условиях невесомости. Хорошо проводящий тепло металлический шар нагревается в печи токами высокой частоты и начинает плавиться. Разработайте методику экспериментального определения времени полного расплавления шара. Для простоты считайте, что теплообмен шара с окружающей средой пропорционален разности их температур. Космонавт-исследователь имеет возможность наблюдать за плавлением визуально, может изменять подводимую к шару мощность и пользоваться необходимыми ему приборами и справочниками.

11. Оцените, какими должны быть размеры металлических пылинок в Солнечной системе, чтобы солнечное световое давление сообщило бы им скорость, направленную от Солнца? Светимость Солнца $L = 4\cdot 10^{33}$ эрг/с, его масса $M = 2\cdot 10^{33}$ г, гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-8}$ дин·см²/г².

М. Смолянский,
А. Стасенко

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М406—М420, Ф423—Ф437 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачей **М406**. Остальные задачи решили: *С. Абаджян* (с. Дараков ГрССР) **07, 08**; *А. Аббасов* (Джебраильский р-н АзССР) **18**; *Б. Амосов* (Мытищи) **08**; *В. Аксоткин* (Ленинград) **07, 08, 09, 10а—г), 13, 15, 17—19, 20**; *С. Антонов* (Киев) **07, 18**; *Б. Аронов* (Саратов) **07, 11, 12, 16, 17, 19**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **07, 08, 16**; *П. Баньковский* (Уральск) **07**; *В. Батырев* (Москва) **07, 08, 12—16, 18**; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) **08**; *А. Бер* (Ташкент) **08, 14**; *М. Бествина* (СФРЮ) **08**; *П. Билер* (ПНР) **07—09, 13, 14**; *И. Биргер* (Киев) **07, 08**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **07**; *Б. Блок* (Москва) **07—09, 12—14, 16, 17, 19**; *В. Бугаенко* (Киев) **07, 08, 17**; *И. Вайсбурд* (Томск) **08**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **07, 08, 16**; *А. Гарнаев* (Таллин) **08**; *Р. Гассиев* (с. Суижа СОАССР) **08**; *А. Гатилов* (Воронеж) **08**; *Р. Геворкян* (Ереван) **08, 18**; *И. Гершенгорин* (Харьков) **08**; *Б. Гисин* (Ленинград) **07—09, 10а—г), 12, 13, 15—19, 20**; *Е. Глезин* (Ленинград) **07—09), 10а—г), 12, 13, 15—19**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **09**; *А. Готовиков* (с. Кубенское Вологодской обл.) **08**; *С. Гришечкин* (Москва) **07—09, 13, 19, 20**; *В. Гроссман* (Одесса) **12**; *М. Грунтович* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **08**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **08**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **07, 08**; *А. Диденко* (Краснодар) **08**; *А. Егоян* (Тбилиси) **07**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **13, 14, 16, 19, 20**; *И. Захаревич* (Ленинград) **08, 09, 12, 13**; *Р. Измайлов* (Баку) **07**; *С. Исаков* (Пермь) **08, 12**; *И. Искендеров* (с. Нюснюс Нахичеванской АССР) **18**; *А. Исмаилова* (Мингечаур) **18**; *Л. Казарова* (Ереван) **16**; *Б. Каплан* (Киев) **07—09, 13, 16, 17, 19**; *А. Карпов* (Ленинград) **08, 09**; *В. Карташев* (Елец) **08**; *Ш. Касимов* (Киев) **13**; *В. Каскевич* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **08**; *А. Касянчук* (Николаев) **08, 09, 12, 16, 18, 19**; *А. Кириллов* (Ленинград) **07, 08, 12**; *В. Книжник* (Москва) **07—09, 13—19, 20**; *А. Князюк* (Киев) **07—09**; *В. Кокоц* (Липецк) **09**; *Л. Корельштейн* (Москва) **07—09, 12, 13, 15, 16, 18, 19**; *А. Крейндлин* (Москва) **07, 08, 12, 14**; *А. Кулеско* (Донецк) **07—09, 13, 16, 20**; *С. Лавренченко* (Москва) **12, 13, 16, 19**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **12, 13**; *М. Левинзон* (Ленинград) **07—09**; *Р. Леманн* (ГДР) **13**; *Е. Лумельская* (Пермь) **07**; *С. Майский* (Москва) **17**; *Г. Мамедов* (Баку) **08, 12**; *З. Мамедов* (Баку) **18**; *В. Медведь* (Молодечно) **07—09**; *А. Мирлин* (Ленинград) **07—09, 13, 16**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **07, 08**; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) **07, 08, 13, 15—19**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **08, 12, 16**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **07; 09, 13**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **08**; *А. Панеях* (Москва) **12, 13, 15**; *Д. Папуш* (Харьков) **07—09, 16, 17**; *Д. Патарая* (Тбилиси) **08, 14**; *А. Петухов* (Новосибирск) **07, 08**; *С. Полыгалов* (Пермь) **07**; *В. Рогава* (Тбилиси) **07**; *А. Родников* (Москва) **07, 08, 12, 13, 15, 16, 18**; *М. Свикловский* (ПНР) **19**; *В. Свинцов* (Камышин) **07**; *В. Свиридов* (Воронеж) **08**; *Р. Севдималиев* (Шаифлин АзССР) **18**; *М. Селектор* (Ленинград) **07—09, 16—19, 20**; *А. Сердюк* (Херсон) **17**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **08**; *М. Соколовский* (Москва) **07, 11, 13, 16—19**; *А. Сорчимелия* (Тбилиси) **13**; *В. Стовба* (Москва) **07, 09, 17**; *Л. Стотлан* (Хабаровск) **14**; *Н. Тренев* (Москва) **07, 09, 19**; *В. Трофимов* (Москва) **07—09, 12—18**; *В. Угриновский* (Хмельник) **08, 18**; *У. Умирбаев* (с. Туркуль Чимкентской обл.) **08, 18**; *В. Фалько* (Харьков) **07, 08, 12, 17, 18**; *Г. Фирсова* (Ленинград) **13, 18**; *С. Харенко* (Ангарск) **08**; *Г. Шахбазян* (Ленинград) **16**; *В. Шпильрайн* (Москва) **07**; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) **08, 09, 13**; *В. Щукин* (Ленинград) **07—09, 10а—в), 16—19**; *Л. Энтин* (Москва) **07, 09, 11—13**; *В. Эткин* (Москва) **14**; *Р. Эфендиев* (Баку) **18**; *А. Юрновец* (с. Романовка Красноярского кр.) **07, 08**; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) **18**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф423—Ф437**, справились с задачами **Ф423** и **Ф436**. Остальные задачи правильно решили: *А. Абрамян* (Ереван) **24—26**; *А. Аванесян* (с. Нор-шен АзССР) **33**; *Б. Авдеев* (ст. Староминская Краснодарского кр.) **35**; *А. Авдюшков* (Минск) **37**; *В. Акопян* (Ленинакан) **29, 32**; *Е. Александрова* (Глазов) **32**; *Б. Амосов* (Мытищи) **24, 26**; *И. Ананьев* (Москва) **33—35, 37**; *А. Арбатский* (Благовещенск Амурской обл.) **37**; *М. Багаутдинов* (Магнитогорск) **25**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **27—29**; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) **37**; *К. Базык* (Москва) **33—35, 37**; *А. Бакан* (Киев) **33, 37**; *О. Батищев* (Череповец) **24—28, 30**; *А. Беликов* (Москва) **25, 27—30, 32**; *О. Березюк* (Челябинск) **37**; *П. Билер* (Вроцлав ПНР) **24, 26, 35, 37**; *В. Бирюков* (Туймазы) **35, 37**; *А. Бобров* (Пермь) **24—27, 30, 32**; *Т. Болтуруков* (с. Тюп КиргССР) **28**; *А. Большаков* (Саратов) **37**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **37**; *И. Вайсбурд* (Томск) **24, 25, 28, 29, 34**; *А. Васильев* (п. Черноголовка Московской обл.) **33—35**; *Д. Великанов* (Красноярск) **24—27**; *Н. Великороссов* (Конаково) **24, 28, 29**; *С. Веселянский* (Харьков) **24, 26, 31, 32, 34, 35, 37**; *Я. Виннишин* (Туапсе)

29, 31, 32, 34, 35, 37, *В Вирясов* (Павлоград) 24, 27, *А Вихров* (Калининград Московской обл) 24, 25, 34, 35, 37, *О Вишнепольский* (Рига) 34, 35, 37, *В Гаврилов* (Орск) 24, 28, 34, 35, 37, *М Гаврилов* (п Черноголовка Московской обл) 35, 37, *Ю Гаврилов* (Славянск) 37, *Н Гаэда* (п Клевань Ровенской обл) 35, *В Гаркавый* (Лида) 24—32, 34, 35, 37, *В Гармаш* (Запорожье) 24—30, 32—35; *А Гатиссов* (Воронеж) 37; *Р Геваркян* (Ереван) 32, *М Глазунов* (Старый Оскол) 31, 33, 34, 37, *О Глушко* (Москва) 24, 25, 35, *О Голощапов* (с Архангельское Тульской обл) 25, 26, *Е Гордиенко* (Кишинев) 24—26, 32, 35, *Е Горюнова* (Петропавловск-Камчатский) 26, *А Готовиков* (с Кубенское Вологодской обл) 24, 27, *А Грайфер* (Запорожье) 33, 35, 37, *Б Грибов* (Воронеж) 24—26, 28, 30—32, *В Гришачев* (п Лесной Рязанской обл) 34, 35, 37, *С Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл) 37, *М Диберчуес* (с Хунзах ДАССР) 28, 29, 32, *А Дубровин* (д Березовка Кировской обл) 24, 26, 33, 35, 37, *Д Дубровин* (Калининград) 24, 25, 27, 30, *И Еникеев* (с Ютца ТАССР) 29, 32, *Ф Еникеев* (Уфа) 24, *В Ерофеев* (Новосибнрск) 33—35, 37, *К Жангозин* (Караганда) 24, 37, *В Жуков* (Абаза) 25, 26, *М Жуков* (Москва) 31, *А Забродин* (п Черноголовка Московской обл) 24—30, 34, 35, 37, *А Завриев* (Москва) 35, 37, *Н Зализняк* (пгт Ольшанка Кировоградской обл) 35, *В Запасников* (Волгоград) 35, *В Заславскии* (Днепропетровск) 24, *А Захаров* (Брест) 24, 25, 27, *И Захаров* (Ленинград) 35, *М Зельман* (Троицк) 28, 29, *В Иванов* (Минск) 34, 35, 37, *В Иванов* (с Борогонцы Усть Лабинской обл) 24, 27, *Н Иванова* (Броды) 35, *А Иванушкин* (Рига) 35, 37, *И Ден Нам* (Южно Сахалинск) 25, 26, *Л Ильчук* (Рогатин) 34, 35, 37, *В Каган* (Минск) 34, 37, *З Кидыров* (с Муслюмово ТАССР) 35, *Е Казарова* (Ереван) 24, *Л Какабадзе* (Тбилиси) 34, 35, 37, *А Кан* (Алма Ата) 35, *В Карлов* (Сочи) 26, *С Карнаух* (Ростов-на Дону) 34, 35, 37, *О Карпенко* (Киев) 35, 37, *Л Киневскии* (Челябинск) 35, 37, *М Кирсанов* (Тула) 24—26, 28, 29, 32, *И Кирюшин* (Ивано-Франковск) 24, 25, 34, 35, *С Клейман* (пгт Луков Волынской обл) 24—26, 35, 37, *Г Колпаков* (Набережные Челны) 35, *В Комов* (Александров) 37, *Г Корионов* (Москва) 26, 29, 31, 34, 37, *В Коробов* (Саратов) 31, 37, *А Косенкова* (Баку) 33, *И Костенко* (Сумы) 24, 25, *В Котюк* (Харьков) 24—27, *А Кречетников* (Сумы) 24, 26, 37, *С Крушинский* (Сарань) 37, *В Кузьменко* (Чернигов) 24, 28, *В Куликов* (Иваново) 25, *Г Купчишин* (с Чижовка Житомирской обл) 29, 32, 35, *Л Куравскии* (Калуга) 24—26, 31, 32, *С Куратов* (Кишинев) 31, 37, *М Курбатов* (Москва) 24, 26—32, 35, 37, *С Лавренченко* (Москва) 26, 35, *Д Лапин* (Калининград) 35, *Д Лапшин* (Калининград) 24, 25, *В Лашкин* (Киев) 24, 34, 35, *А Левченко* (Свердловск) 33, 37, *А Листовничий* (Киев) 24, 27, 31, *Ю Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл) 24—26, 31, *В Лобзин* (Свердловск) 24—27, 29—31, *И Лозицкий* (Ганцевичи) 37, *Л Лознер* (Минск) 24—27, *Т Лозовой* (п Совостлейко Горьковской обл) 24—27, *С Лукашенко* (Минск) 34, 35, 37, *С Ляхимец* (Киев) 27, *А Магадеев* (д Карачаево БашкАССР) 28, 35, 37, *С Магомедов* (с Кубра ДАССР) 35, *С Майский* (Москва) 24, 26, 27, 31, 34, 35, *Т Макиенко* (Днепропетровск) 24, *А Малаховский* (Львов) 24, *В Малинин* (Нижний Тагил) 24, 25, 27—29, 31, 32, *А Масягин* (Смоленск) 24—32, *М Матвеев* (Канаш) 24—28, 30—32, *А Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл) 37, *А Мачахов* (с Верхневилюйск ЯАССР) 35, *Б Межелевич* (Киржач) 31, *В Мелани* (Ереван) 33—35, 37, *В Мелихов* (Электрогорск) 35, 37, *А Местников* (с Верхневилюйск ЯАССР) 35, *Г Метревели* (Цхинвали) 35, 37, *Ю Мидодашвили* (Цхинвали) 24—27, *С Минаев* (Кемерово) 35, 37, *Ю Минаев* (Киев) 24—27, *А Мирлин* (Ленинград) 24, 26, 37, *А Михайлов* (д Кисербош ЧАССР) 24, 33—35, 37, *М Молдовский* (Тбилиси) 25—27, *К Морозов* (Пермь) 24, 26, 27, *И. Муллагалов* (Уфа) 24, 26, *О Мусаев* (Баку) 24, 25, 27, 30, 31, *Ю Мухарский* (Киев) 24—27, 29—31, *С Мухин* (Ленинград) 33, 35, *Б Налибоцкий* (Минск) 24—35, 37, *Б Наткович* (Тбилиси) 24, *И Нескоромный* (Симферополь) 34, 35, *С Нестер* (Днепропетровск) 24, 37, *О Нетсадзе* (Кутаиси) 33, 35, *А Никитенков* (Великие Луки) 24—35, *Н Никифоров* (Великие Луки) 25—27, 29, 31, 32, 37, *А Николаев* (ст Дубки) 37, *Л Николиев* (Москва) 29, 31 , *О Николаев* (с Верхневилюйск ЯАССР) 28, 29, *В Николайчик* (Старые Дороги) 24—27, *В Николаичик* (Москва) 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, *И Овсянников* (Саратов) 24, 27—35; *Е Огиевецкий* (Днепропетровск) 24, 26, 27, 31, *Э Озолин* (Борисов) 28, 31, 32, 35, 37, *М Онегин* (Архангельск) 24, 25, 28, 35, *А Осипов* (п Новосельский Новгородской обл) 37, *К Оспанов* (Байрам-Али) 25, 26, 31, 35, 37, *М Оспанов* (Семипалатинск) 37, *В Палей* (Харьков) 26, 28, 32, 34, 35, 37, *А Панченко* (Харьков) 34, 35, *О Певзнер* (Днепропетровск) 28, 30, 32, 33, 35, 37, *И Петренко* (Поти) 37, *С Петренко* (Запорожье) 34, 35, 37, *В Петров* (Псков) 28, 32, 33, 37, *А Петухов* (Цимлянск) 24—26, 34, 35, 37, *В Писецкий* (Запорожье) 24—27, 29—32, 37, *Н Плотникова* (с Верхневилюйск ЯАССР) 32, *П Побылица* (Ленинград) 24—27, 33—35, 37, *А Полвонов* (Хазарапский р н Хорезмской обл) 35, *А Померанцев* (Москва) 28, *Е Пономарев* (п Черноголовка Московской обл) 28—35, 37, *А Попов* (Чусовой) 28, 32, 37, *С Попов* (Москва) 24, 25, *Д Портнов* (Николаев) 34, 35, 37, *В Потемкин* (Великие Луки) 28—30, *Я Поярков* (Владивосток) 35, 37, *Н Прудзе* (Кутаиси) 33, 35, *В Рева* (с Хулолцевка Полтавской обл) 32, *А Родин* (Великие Луки) 24, 26, 28, 32, 35, 37, *С Розуван* (Киев) 24, 25, *А Романов* (Киев) 24, 25, *И Романова* (Москва) 28, 37, *Ю Ростовцев* (Горький) 25, *А Савков* (Иркутск) 37, *И Савченко* (Киев) 24—29, 32, 34, 35, 37, *Ю Сажин* (Магнитогорск) 34, 35, *А Саипов* (Ташкент) 24, 25, *Г Салахлы* (с Сарачло ГрССР) 24, 27, *М Салахлы* (с Сарачло ГрССР) 24, *Д Самедов* (Масаллы) 25, *С Самохин* (Калининград) 28, 30—32, *Г Санадзе* (Тбилиси)

24, 26, 27; *А. Сатилин* (Киев) **28**; *И. Свечко* (Гродно) **37**; *И. Семенов* (Воронеж) **26**; *Ю. Семенов* (Одесса) **28**; *А. Семеренко* (Краснодар) **24**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **24, 30, 34, 37**; *В. Синицын* (Ульяновск) **25, 28, 32**; *Л. Скатков* (Харьков) **25, 26**; *В. Слесирев* (п. Широкий Ворошиловградской обл.) **35, 37**; *В. Смирнов* (Ленинград) **26**; *В. Смирнов* (Уфа) **24, 25, 27**; *А. Смышляев* (Ленинград) **28**; *В. Сорокин* (Днепропетровск) **30, 33—35**; *В. Сорокин* (Усть-Каменогорск) **24, 25, 27**; *В. Софронов* (Москва) **34, 35, 37**; *В. Спинеев* (Ворошиловград) **24, 26**; *М. Стащенко* (Киев) **32—35, 37**; *В. Стовба* (Москва) **24, 25**; *М. Стойнов* (Москва) **30, 33**; *С. Субботин* (Алма-Ата) **25**; *М. Султанов* (Бостанлыкский р-н Ташкентской обл.) **29, 32**; *Р. Султанов* (Ташкент) **26, 34, 37**; *А. Сухинов* (с. Бутырки Воронежской обл.) **37**; *С. Татулов* (Дербент) **25, 26, 28**; *В. Тихон* (с. Метибово Гродненской обл.) **25**; *Г. Ткаченко* (Чирчик) **37**; *И. Толох* (Жидачов) **24, 25, 28—30**; *К. Третьяченко* (Киев) **24—27**; *А. Тычинский* (Витебск) **24**; *А. Тюрин* (Курск) **35**; *А. Уверский* (Сестрорецк) **37**; *М. Уршанский* (Ижевск) **24, 30**; *А. Фальковский* (Алма-Ата) **35, 37**; *А. Фарбер* (Тамбов) **35, 37**; *Н. Федин* (Омск) **24—29, 31, 32**; *Р. Федин* (Кемерово) **35**; *В. Фекета* (Турьи Реметы Закарпатской обл.) **37**; *И. Фесенко* (Днепропетровск) **24**; *А. Фомин* (Новосибирск) **24, 30—32, 37**; *А. Франкенберг* (Ташкент) **33, 35, 37**; *С. Фурман* (Черновцы) **37**; *К. Хаджиев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **28, 32**; *О. Хайкин* (Чебоксары) **34, 35, 37**; *А. Хачатуров* (Баку) **26, 27**; *А. Хизанишвили* (Тбилиси) **37**; *А. Худошин* (Харьков) **24—27**; *В. Цветков* (п. Комсомолец Кустанайской обл.) **35**; *И. Цуркис* (Калининград) **24—26, 28, 30—32**; *Д. Чачава* (Тбилиси) **37**; *В. Чеканов* (Быхов) **24, 25, 28, 29, 32, 34, 35, 37**; *Л. Черных* (Лида) **28, 29, 33**; *Б. Черный* (ст. Лысогорская Ставропольского кр.) **26**; *А. Чурилов* (Харьков) **24—26; 28, 34, 35**; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) **34, 35, 37**; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) **24—26**; *А. Шафаренко* (Караганда) **24—27**; *Д. Шафер* (Ленинград) **37**; *А. Шафир* (Челябинск) **37**; *К. Шахназарян* (Баку) **33, 35, 37**; *А. Швейдель* (Великие Луки) **24, 26, 28, 35, 37**; *В. Шевченко* (Краснодар) **24, 26, 28, 35, 37**; *О. Шейнин* (Мозырь) **34**; *А. Шептовецкий* (Москва) **24—27, 33—35, 37**; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) **24, 26, 27, 32—34, 37**; *И. Шиян* (Киев) **24—27**; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) **24—27**; *Р. Шувар* (п. Рогатин Ивано-Франковской обл.) **24—29, 31, 32**; *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) **37**; *В. Шутько* (Новосибирск) **37**; *В. Щукин* (Ленинград) **25—27, 30**; *М. Щукюров* (с. Дигях АзССР) **28**; *А. Яременко* (Калиевка) **26**; *И. Янюс* (Шилуте) **37**.

Ответы, указания, решения

К статье «Задачи на повторение»

Ответы. IX класс. **1.** в. **2.** д. **3.** г. **4.** б. **5.** в. **6.** г. **7.** в. **8.** г. **9.** б. **10.** г.

X класс. **1.** а. **2.** г. **3.** в. **4.** а. **5.** г. **6.** б. **7.** д.

Решения и комментарии к отдельным задачам.

IX—1. Для того чтобы соответствие между конечными множествами X и Y, заданное с помощью стрелок, являлось функцией с областью определения X, необходимо и достаточно, чтобы из каждого элемента множества X выходила одна и только одна стрелка. Значит, число стрелок должно равняться числу элементов множества X; в данном случае, когда $x\subset\{x_1, x_2, x_3\}$, число стрелок может быть от 0 до 3 (соответствие с 0 стрелками есть функция с пустой областью определения).

IX—3. $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x-y=0$ или $x+y=0$, поэтому исходное уравнение задает объединение прямых $y=x$ и $y=-x$.

IX—5. Значение $2A$ можно указать с точностью до 0,02, а если два числа известны с точностью до 0,02, то их разность можно указать с точностью до $0{,}02+0{,}02=0{,}04$. (Границы погрешностей как при сложении, так и при вычитании складываются.)

IX—6. Треугольник с длинами сторон a, b и c существует тогда и только тогда, когда справедливы неравенства $|a-b|<c<a+b$.

IX—8. $S_a(A)=B$, $S_b(B)=D$, поэтому $(S_b\circ S_a)(A)=D$ (другая запись: $(S_b\circ S_a)(A)=S_b(S_a(A))=S_b(B)=D$). Отметим, что при решении этой задачи участники республиканских олимпиад ошибались чаще всего.

IX—9. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$, поэтому $\vec{x}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.

IX—10. Площади подобных треугольников относятся как квадраты длин сходственных отрезков, поэтому для искомого расстояния h имеем $h^2:1=1:2$, откуда

$$h=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

X—1. Достаточно указать 6 человек работающих в первую смену (остальные пойдут во вторую); из 12 их можно выбрать C_{12}^6 способами.

X—2. Известно, что $0{,}1093\leqslant x<0{,}1094$ и $0{,}3006\leqslant y<0{,}3007$, поэтому $0{,}4099\leqslant x+y<0{,}4101$. Следовательно, первая цифра после запятой обязательно 4, а вторая может оказаться как 0, так и 1.

X—4. Это — лемма из п. 45 учебника «Алгебра и начала анализа 9».

X—5. Нужно правильно применить формулу для производной сложной функции.

X—6. Плоскость пересекает ребро, если границы этого ребра лежат по разные стороны от плоскости, поэтому, точка A лежит по одну сторону от плоскости, точка B — по другую. Тогда точка C — там же, где A, точка D — там же, где B. Следовательно, плоскость должна пересечь ребро AD.

X—7. Для произвольных ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ в пространстве можно указать вектор $\vec{b}$, перпендикулярный к ним обоим; поэтому угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ может быть любым.

К статье «Ответ в тригонометрическом уравнении»

1. $\{\pi/12+\pi k;\ 5\pi/12+\pi k \mid k\in \mathbf{Z}\}$. Указание. Уравнение приводится к виду $\operatorname{tg} 3x=1$ в области, определяемой условиями $x\in \mathrm{R}$, $\sin 4x\neq 0$, $\cos 3x\neq 0$.

2. $\{(-1)^k\pi/36+\pi k/6;\ \pi k;\ \pi/4+\pi k/2 \mid k\in \mathbf{Z}\}$. Указание. Уравнение приводится к виду $\sin 4x=0$, $\sin 6x=1/2$ в области, определяемой условиями $x\in \mathrm{R}$, $\cos x\neq 0$, $\cos 3x\neq 0$.

3. $\{\pi k;\ \pi/20+\pi k/10 \mid k\in \mathbf{Z}\}$. Указание. Привести уравнение к виду $\cos 10x\times\sin 2x=0$ при условии $\cos 5x\neq 0$.

4. $\{\pi(2k+1)/8;\ \pi(2n+1)/6 \mid n\neq 1+3l;\ k,\ l,\ n\in \mathbf{Z}\}$.

5. $\{\pi(2k+1)/4;\ \pi(2k+1)/7;\ \pi(2m+1)/5)m\neq 5n+2;\ k,\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$.

6. $\{\pi(2k+1)/8;\ -\pi/4+\pi k \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

7. $\{3\pi/22+2\pi k/11 \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

8. $\{\pi k/9;\ \pi n/7 \mid n\neq 7m;\ k,\ m\ n\in \mathbf{Z}\}$.

9. $\{4\pi k \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

10. $\varnothing$

К статье «Сигналы, графы и короли на торе»

(см «Квант» №7)

1. $\alpha(G_1)=1$, н. н. м. — любая вершина; $\alpha(G_2)=3$, н. н. м. — $\{1, 3, 4\}$; $\alpha(G_3)=2$, н. н. м. — $\{1,5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$; $\alpha(G_4)=4$, одно из н. н. м. $\{1, 4, 7, 10\}$.

2. $[n/k+1)]$.

3. G_1^2 и G_2^2 изображены на рисунке 1; в графе G_4^2 все вершины соединены; граф G_5^2 изображен на рисунке 4 в статье (надо только не склеивать его края); граф G_3^2 постройте самостоятельно.

4. а) Разбейте граф P_{2s}^2 на квадратики 2×2, в каждом из них будет не более одной точки из M.

б) Предположите, что на какой-то вертикали стоит меньше s точек из M и воспользуйтесь тем, что на любой паре соседних вертикалей стоит не более $[n/2]$ точек из M.

в) Решается аналогично предыдущей, только здесь на вертикалях чередуются s и $s+1$ точек из M (кроме одной пары соседних вертикалей).

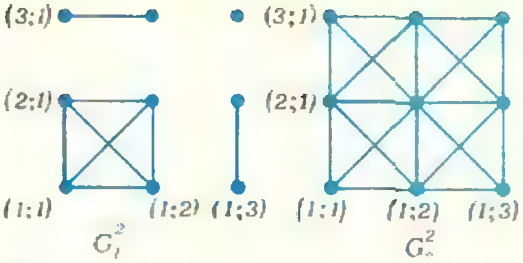


Рис. 1.

5. $\alpha(P_5^2)=5$. Перегоним одну из вершин M в точку (0; 0). Если на вертикали 0 или горизонтали 0 стоит еще одна точка из M, *то еще более двух вершин из M разместить не удастся.* Далее рассмотреть еще точку на вертикали 1 или горизонтали 1 и перегнать ее (симметрией) (в 1; 3) или в (2; 1)— после этого все определятся

6. В графе G^k есть н. м. M^k (M — н. н. м. G).

7. n^k.

8. 3^k-1.

9. Провести индукцию по k.

10. $(n/2)^k$. Указание. См. задачу 4а и указание к ней (н. н. м. здесь — M^k, где M — н. н. м. графа P_n).

К статье «Теория игр»

(см. «Квант» № 8)

1. Матрица игры имеет вид

	Алик	Коля
Сеня	3	0
Вася	1	2

Это дает следующую задачу: $3p_1+p_2\geqslant v$, $2p_2\geqslant v$, $p_1+p_2=1$; если положить $x_1=p_1/v$, $x_2=p_2/v$, $L=1/v$, то получится задача линейного программирования

$$\begin{cases} 3x_1+x_2\geqslant 1, \\ 2x_2\geqslant 1, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0, \\ L(x_1,\ x_2)=x_1+x_2. \end{cases}$$

(ищем минимум). Решение этой задачи даст

$$x_1=1/6,\ x_2=1/2,\ L=2/3,$$

$$v=3/2,\ p_1=1/4,\ p_2=3/4.$$

Таким образом, Сеню следует ставить в одном случае из четырех, а Васю во всех остальных. Этого можно добиться, скажем, подбросив две монеты: если на обеих выпадет решка, то играет Сеня. Легко найти, что

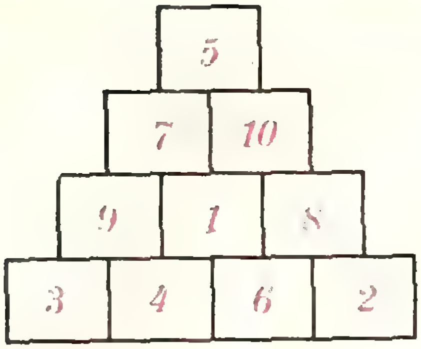


Рис. 2.

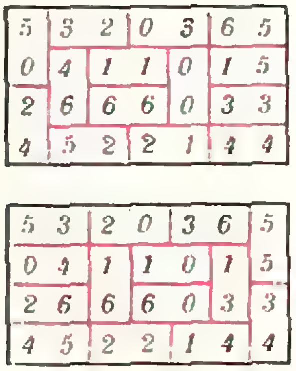


Рис. 3.

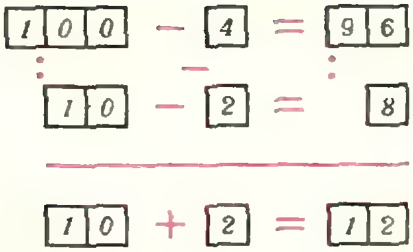


Рис. 4.

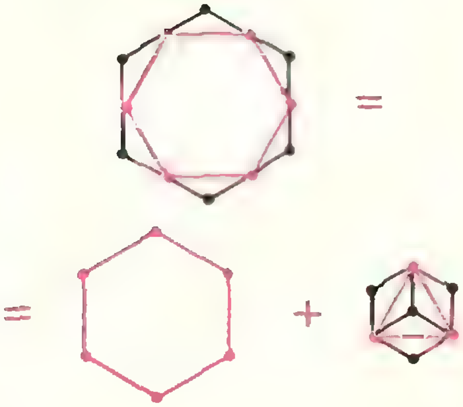


Рис. 5.

противникам надо одинаково часто ставить Алика и Колю (то есть перед матчем бросать лишь одну монету).

2. Здесь получается $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. Поразительное дело: менее результативного Петю нужно ставить в каждой игре, хотя в среднем уже удастся забить только один гол, а не полтора! Но и противники должны быть начеку и чаще прежнего ставить высокорослого защитника: их оптимальная стратегия — ставить Алика в одном случае из трех ($q_1 = 1/3$, $q_2 = 2/3$; впрочем, тот же итог даст им любая стратегия $0 \leqslant q_1 \leqslant 1/3$, $q_2 = 1 - q_1$, например, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ — Алик сидит на скамье запасных).

3. Русский сразу же отпадает, так как в любом случае дает не больше баллов, чем любая из двух других стратегий. Здесь имеет место *доминирование* двух стратегий над третьей. Решение дает: физика — $1/3$, алгебра — $2/3$. Как реализовать такую смешанную стратегию? Петя должен бросить игральную кость, и если выпадет 3 или 6 — учить физику, в остальных случаях — алгебру. Все это, разумеется, верно, если учителя действительно придираются к Пете, — в этом случае они должны с вероятностью $3/4$ устроить контрольную по алгебре, а с вероятностью $1/4$ — по физике. Если же учителя не преследуют Петю (гораздо более разумное предложение), то правильнее применить подход Бейеса и учить алгебру.

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. 20 *кг*. **2.** См. рис. 2. **3.** 123 457 896. **4.** 37 · 99 = 3663. **5.** В деревне *А*. Действительно, для любой другой точки *M* будет $|AM| + |MB| \geqslant |AB|$, $|AM| + |MC| \geqslant |AC|$, причем хотя бы в одном случае неравенство строгое. Значит, $20|AM| + 20|MB| \geqslant 20|AB|$ и $10|AM| + 10|MC| \geqslant 10|AC|$. Поскольку хотя бы в одном случае неравенство строгое, то, складывая неравенства, получаем $30|AM| + 20|MB| + 10|MC| > 20|AB| + 10|AC|$.

К головоломкам

(см. «Квант» № 8, 3-ю с. обл.)

См. рис. 3—5.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
В. Тихомирова, Ю. Шихонович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
Л. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор *М. Л. Медведская*
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 24/VI-77 г.
Подписано в печать 3/VIII-77 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 5,60.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,40. Т-13262.
Цена 30 коп. Заказ 1377. Тираж 289 910 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Ребята с нашего двора

Кто не знает ребят с нашего двора Симу, Римму, Фиму, Тиму и Диму? Их часто называют «дружной пятеркой» и не без основания они все делают вместе Вместе ходят в школу (хотя учатся в разных классах), летом вместе купаются в пруду, зимой вместе катаются на катке во дворе нашего дома, и даже — удивительное совпадение[1] — день рождения у них общий все пятеро родились в один день, хотя и в разные годы В этом году ребятам исполнилось впрочем, это вы узнаете, заполнив следующий «кросснамбер»

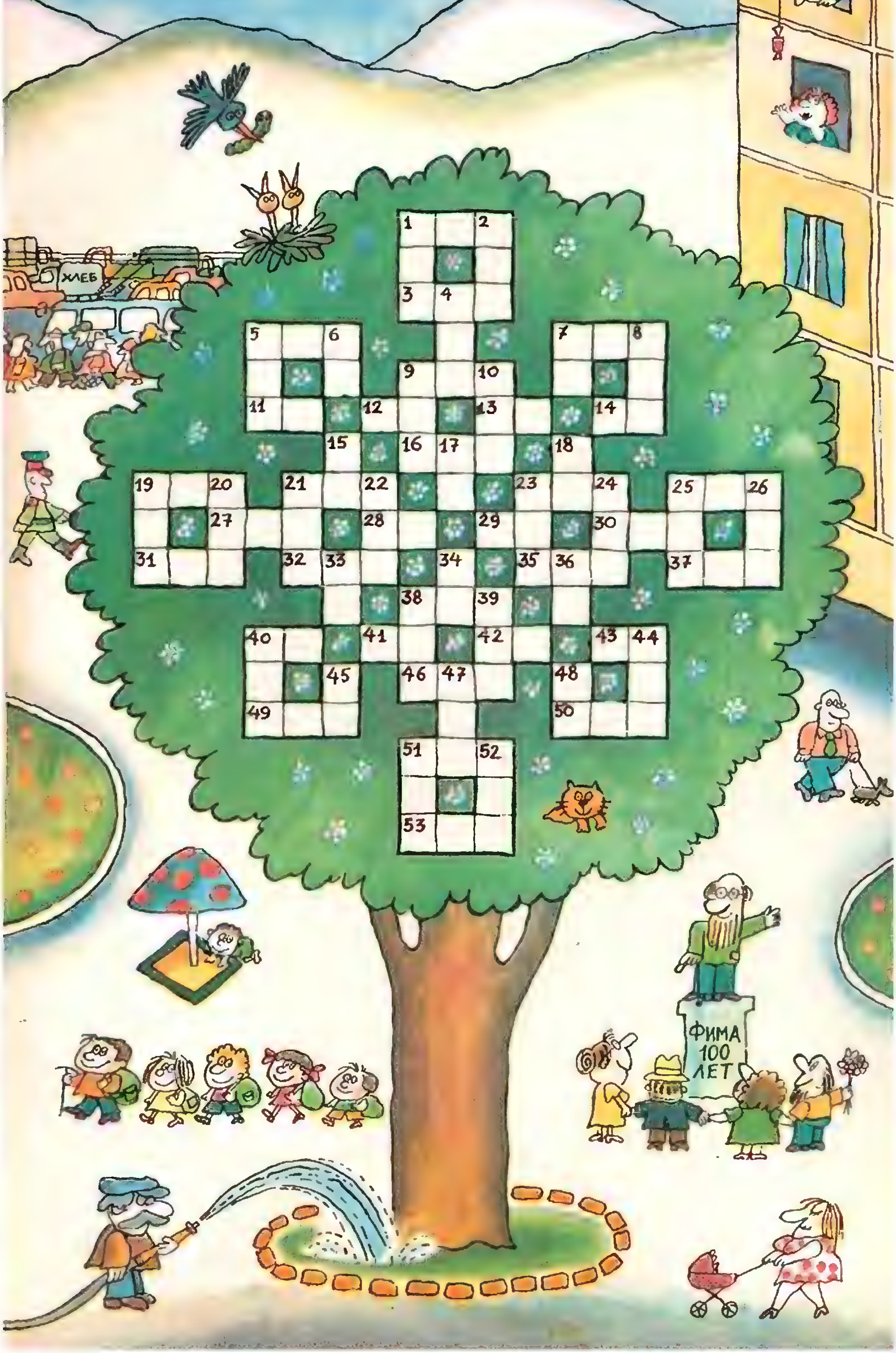
По горизонтали

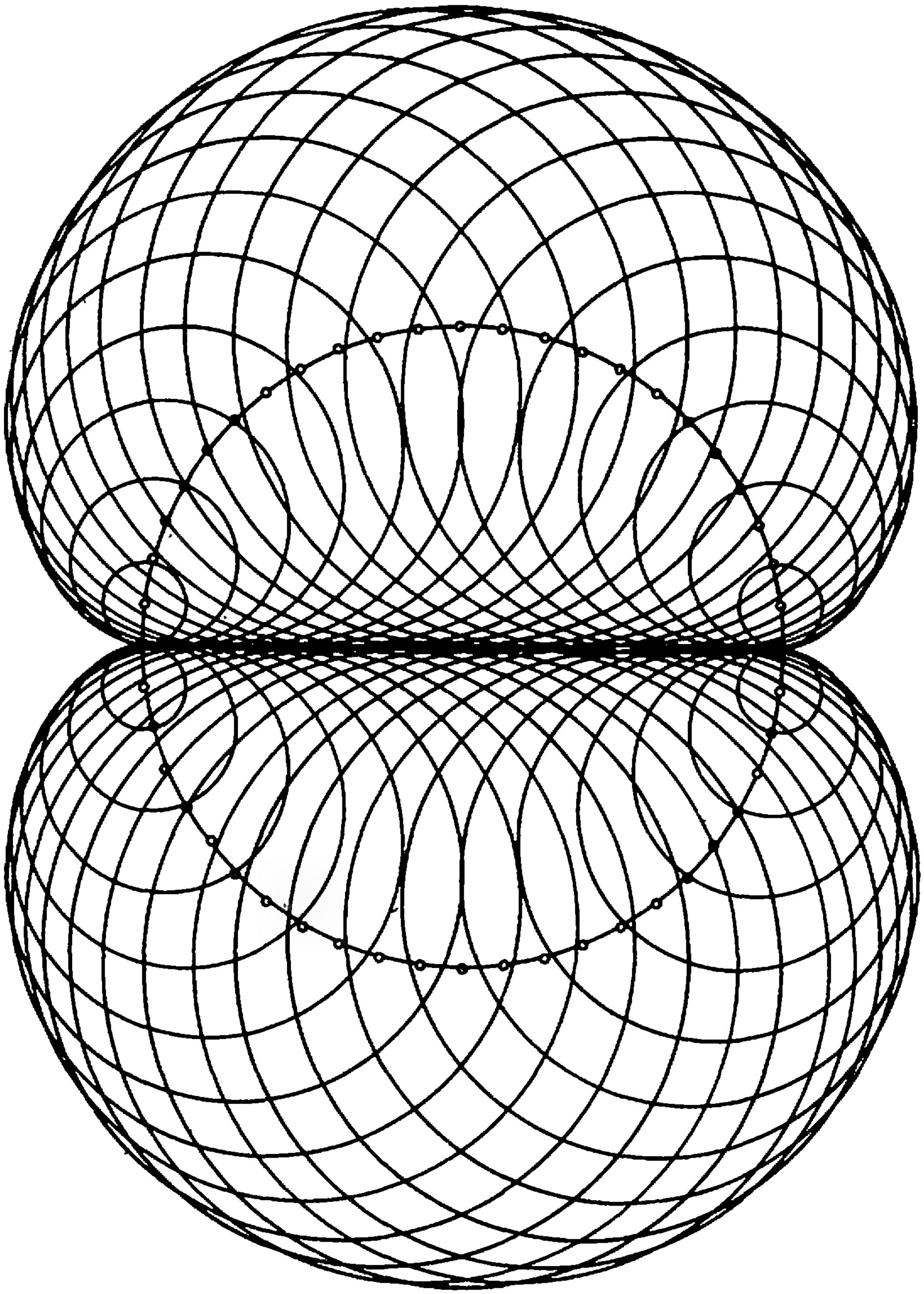
1 Куб возраста Фимы в том году, когда Сима была вдвое старше Димы, а Римма — вдвое старше Тимы 3 Утроенное произведение возраста Фимы и суммы возрастов Симы и Тимы 5 Произведение возрастов Тимы и Симы, когда они станут на год старше 7 Произведение возраста Фимы и наименьшего из трехзначных простых чисел, бо́льших наименьшего трехзначного простого числа 9 Произведение удвоенных возрастов Симы и Димы 11 Возраст Симы в том году, когда она станет втрое старше, чем был Тима, когда Сима была вдвое старше его 12 Произведение возрастов Фимы и Тимы, когда Дима был вдвое моложе 13 Возраст Димы в том году, когда Римма достигнет совершеннолетия 14 Квадрат возраста Тимы 16 Удвоенное произведение возрастов Симы и Димы через год 19 Квадрат суммы возрастов Фимы и Симы 21 Трехзначное число, первая цифра которого совпадает с половиной возраста Димы, а две последние — с удвоенным возрастом Димы 23 Произведение квадрата возраста Димы и полусуммы возрастов Симы и Риммы 25 Квадрат суммы возрастов Тимы и Димы минус квадрат возраста Димы 27 Произведение возрастов Фимы и Тимы, когда каждый из них станет на 10 лет старше 28 Произведение возрастов Тимы и Димы через год 29 Произведение возрастов Димы 5 лет назад и через 5 лет 30 Куб возраста Димы 31 Произведение суммы возрастов Симы и Фимы и суммы возрастов Риммы и Тимы, когда все ребята станут на год старше 32 Куб возраста Симы, когда Сима была втрое старше Димы 35 Произведение возраста Фимы и суммы возрастов Риммы, Симы и Фимы 37 Квадрат возраста Риммы 38 Куб возраста Тимы 40 Произведение возрастов Фимы и Димы 41 Сумма возрастов Тимы, Димы и Риммы 42 Возраст Димы в том году, когда Тиме исполнится столько лет, сколько сейчас Римме 43 Сумма возрастов Риммы, Фимы и Димы 46 Куб возраста Фимы в том году, когда Сима была вдвое старше Димы 49 Произведение возраста Симы через 5 лет и возрастов Симы и Риммы 5 лет назад 50 Квадрат возраста Симы, когда ей было столько лет, сколько сейчас Римме, а Римме — столько лет, сколько сейчас Диме 51 Куб возраста Димы 53 Произведение возраста Симы на число лет, которое ей исполнится, когда она станет вдвое старше

По вертикали

1 Возраст Симы в том году, когда самому младшему из ребят исполнится 100 лет 2 Произведение суммы возрастов Риммы и Фимы и суммы возрастов Симы, Тимы и Димы 4 Произведение возрастов Симы и Фимы 5 Возраст Риммы в том году, когда Фиме исполнится 100 лет 6 Сумма возрастов Симы, Риммы, Фимы, Тимы и Димы 7 Произведение возраста Тимы и двузначного простого числа 8 Куб возраста Риммы, когда она была втрое старше, чем Сима, когда та была втрое старше Риммы 9. Учетверенное произведение возрастов Тимы и Риммы через год 10. Произведение возрастов Симы и Тимы, когда они станут на 11 лет старше 15. Квадрат возраста Фимы 17 Разность квадратов возрастов Фимы и Тимы 18 Суммы возрастов Симы, Риммы и Димы 19 Квадрат возраста Тимы, когда он станет старше на столько лет, сколько сейчас Тиме и Диме вместе 20 Простое число 21 Утроенный квадрат возраста Симы 22 Квадрат суммы возрастов Риммы, Тимы и Фимы 23 Произведение возрастов Симы, Риммы и Фимы год назад 24 Произведение возраста Симы, когда Тиме исполнится столько лет, сколько сейчас Симе, и возраста Симы, когда Тима станет еще на 10 лет старше 25 Произведение возраста Димы, когда Фиме исполнится столько лет, сколько сейчас Симе, и возраста Тимы, когда Диме будет столько лет, сколько сейчас Симе 26 Произведение возрастов Симы и Риммы 33 Сумма возрастов Симы, Риммы, Фимы и Димы в том году, когда родился Тима 34. Произведение возрастов Тимы и Симы 36. Произведение возрастов Риммы через 5 лет и 5 лет назад 38. Произведение возраста Симы, когда она станет на год старше, и суммы возрастов Риммы, Фимы и Димы 39 Произведение возрастов Тимы и Фимы и разности возрастов Симы и Тимы 40 Произведение возраста Риммы, когда она станет в полтора раза старше, и квадрата возраста Тимы 44 Произведение возрастов Риммы, Фимы и Димы 45 Сумма возрастов Тимы и Димы через 20 лет 47 Произведение возрастов Тимы сейчас, через 4 года и 4 года назад 48 Квадрат возраста Риммы, когда она была на год моложе 51 Учетверенное произведение возраста Симы, когда она станет старше на столько лет, сколько сейчас Тиме, и возраста Тимы 52 Произведение возраста Фимы сейчас, через 7 лет и 7 лет назад

Ю Данилов


ХЛЕБ
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53
ФИМА
100
ЛЕТ



Кривая, изображенная на обложке, называется нефроидой. Ее назвали так в конце XIX века за сходство с почками (от греческого νεφρος — «почка»). Впервые свойства нефроиды изучал в XVII веке саксонский дворянин Э. В. Чиргауз. В 1686 году Чиргауз издал книгу Medicina mentis («Врачевание души»), в которой пытался указать универсальные правила отыскания истины. Правила забыли, а анализ кривых, которым сам Чиргауз отводил вспомогательную роль, принес автору мировую известность.

На рисунке нефроида представлена как огибающая некоторого семейства окружностей. Строится это семейство так: фиксируются окружность и один из ее диаметров и проводятся всевозможные окружности с центрами на данной окружности, касающиеся данного ее диаметра.

Подробнее о нефроиде читайте на с. 43.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К нашим читателям

Объявляется подписка на 1978 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант»

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ожидающих своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи различных олимпиад и просто интересные задачи.

Раздел «Лаборатория «Кванта»» рассказывает о поучительных экспериментах, которые можно осуществить в домашних условиях.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Ответы на эти и многие другие вопросы, с которыми приходится сталкиваться при поступлении в вузы, читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента».

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас произведены коренные изменения в школьных курсах математики и физики. «Квант» всячески старается освещать на своих страницах эти изменения, публикуя статьи по новой программе.

В 1977 году «Квант» открыл новую рубрику «По страницам школьных учебников». В статьях этого раздела разбираются наиболее тонкие и важные вопросы математики, изучаемой в школе. В 1978 году мы существенно расширим эту рубрику.

Мы также предполагаем в 1978 году значительно расширить раздел ««Квант» для младших школьников».

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

●

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ

●

**При подписке ссылайтесь
на наш индекс 70465
Цена номера 30 коп.**

НОМЕР
10

Основан в 1970 году

Квант

10
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

К 60-летию Великого Октября

2 *И. Кикоин.* Как создавалась советская физика
13 *П. Александров.* Лузинская математическая школа
22 XX лет космической эры
26 *В. Большаков.* Оптическое зондирование Земли и Луны из космоса

Лаборатория «Кванта»

32 *В. Майер.* Зеленая красная лампа

Математический кружок

34 *А. Егоров.* Уравнения и пределы

Задачник «Кванта»

40 Задачи М466—М470; Ф478—Ф482
42 Решения задач М426—М430; Ф438—Ф441

По страницам школьных учебников

48 *Б. Гейдман.* Гомотетия и замечательные точки в треугольнике

«Квант» для младших школьников

50 Задачи
51 *Е. Семенов.* Степа Мошкин повторяет геометрию
55 *В. Гутенмахер,* Пантограф

Практикум абитуриента

56 *Н. Андрианова, Т. Шорыгина.* Подготовительные курсы при МИСИ
60 **Спрашивайте — отвечаем**

Рецензии, библиография

62 *В. Рудов.* Настольная книга по астрономии
64 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с. 33, 39, 63*)

На первой странице обложки вы видите цветную фотографию, полученную с помощью автоматической станции «Зонд-7». На фотографии четко видны восточный сектор обратной стороны Луны и планета Земля. Подробнее об исследовании Луны и Земли из космоса можно прочитать в статье В. Большакова (см. с. 26).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

И. Кикоин

Как создавалась советская физика

Редакция обратилась к Герою Социалистического Труда, академику И. К. Кикоину с просьбой рассказать об основных этапах становления советской физики. Исаак Константинович Кикоин начал заниматься физикой в 1927 году — в год десятилетия Советской власти. Ему посчастливилось работать со многими замечательными учеными, которых по праву можно считать основоположниками советской физики. Поэтому его рассказ — это рассказ очевидца и участника описываемых событий.

В этом номере мы начинаем публикацию воспоминаний академика И. К. Кикоина. Публикация подготовлена Т. Петровой и И. Слободецким.

С первых же лет своего существования молодое советское государство уделяло огромное внимание развитию отечественной науки. По инициативе и при активной поддержке Владимира Ильича Ленина в стране было создано немало новых научных центров. Одним из них был Ленинградский физико-технический институт, основанный в 1918 году академиком Абрамом Федоровичем Иоффе. В этом институте я и начал заниматься физикой.

До революции наука в России развивалась в основном в университетах и была оторвана не только от практической жизни, но даже и от настоящей современной науки. Абрам Федорович Иоффе рассказывал, что, когда он начал заниматься физикой, в университетах России господствовала такая точка зрения на работу ученого-физика: дело научного работника — повторять опыты, которые ставились за границей, а новые идеи и самостоятельные работы считались немыслимыми, потому что, мол, у нас нет достаточно подготовленных ученых.

Еще в 1918 году, сквозь дым пожара гражданской войны, А. Ф. Иоффе сумел увидеть будущие контуры социалистической страны и понять, что будущая техника и промышлен-

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе

ность должны базироваться на хорошо развитой физической науке. А для этого нужны были физики, знакомые с техникой, которые могли бы в будущем связать физическую науку с потребностями техники. Для подготовки таких специалистов Иоффе создал в Ленинградском политехническом институте физико-механический факультет. На этот факультет я и поступил в 1925 году.

Учиться на факультете было трудно, потому что физико-математические дисциплины преподавались на уровне университетской программы, а вместе с тем студенты должны были изучать инженерные дисциплины. Поступив в институт, я сразу погрузился в атмосферу настоящей науки.

Мы, студенты, знали, что наш декан — знаменитый ученый, именем которого назван открытый им эффект. Эффект Иоффе заключается в том, что при смачивании поверхности кристалла каменной соли (NaCl) водой его прочность возрастает в несколько сот раз. Результаты необычайно простого по исполнению опыта, поставленного Иоффе, имели чрезвычайно важное значение. И вот почему.

В 1915 году замечательный немецкий физик Макс Борн создал строгую теорию кристаллов. Эта теория объясняла оптические, электрические и другие свойства различных кристаллов. Многочисленные экспериментальные данные, имевшиеся в то время, подтверждали справедливость теории. И только в одном теория резко расходилась с экспериментом — в оценке прочности кристаллов. Было, например, известно, что кристалл каменной соли при его растяжении разрушается, когда возникающие в нем в результате деформации напряжения составляют приблизительно $4{,}5 \cdot 10^6$ Н/м^2. (Напряжением σ называют отношение силы упругости $|\vec{F}_{\text{упр}}|$ к площади S поперечного сечения образца, перпендикулярного направлению деформации: $\sigma = |\vec{F}_{\text{упр}}|/S$. Значение σ, при котором образец разрушается, называют пределом прочности.) А теоретический расчет давал совершенно иную оценку — порядка 10^9 Н/м^2. И объяснить это расхождение в рамках теории Борна никому не удавалось.

Абрам Федорович Иоффе (1880—1960)

А. Ф. Иоффе предположил, что рассматриваемая в теории модель разрушения кристалла отличается от того, что происходит в реальном кристалле при его деформации. Теоретические расчеты предела прочности делались в предположении, что кристалл разрушается мгновенно по всему сечению образца. Иоффе же предположил, что разрушение кристалла проходит постепенно. Начинается оно в каком-то самом «слабом» месте, а потом распространяется вдоль по сечению образца. Постепенность разрушения связана с тем, что на поверхности кристалла имеются микроскопические трещины. С такой трещинки и начинается разрушение при напряжениях, конечно, меньших, чем теоретические значения пределов прочности. Трещинка постепенно разрастается и приводит к разрыву всего кристалла.

Идея опыта, который А. Ф. Иоффе поставил для проверки своего предположения, была необычайно проста. Тонкий монокристаллический образец каменной соли погружался частично в теплую воду. Вода постепенно растворяла соль, мокрая часть образца становилась тоньше, но поверхность ее делалась гладкой, трещины исчезали. В таком виде образец подвергался растяжению. Опыты показали, что сухая часть образца разрушалась при напряжениях $4{,}5 \times \times 10^6$ Н/м², а погруженная в воду часть образца выдерживала напряжения до $1{,}6 \cdot 10^9$ Н/м². Так блестяще подтвердилась гипотеза А. Ф. Иоффе.

Многие физики считали, что предложенная Иоффе модель разрушения кристалла не соответствует действительности. Но многократно повторенные убедительные опыты подтвердили ее правильность. И обнаруженному Иоффе явлению повышения прочности кристаллов при сглаживании их поверхности было присвоено название «эффекта Иоффе».

На одной из своих популярных лекций студентам-первокурсникам А. Ф. Иоффе иллюстрировал свою идею следующими простыми опытами. Он брал прямоугольную полоску бумаги и пытался ее разорвать, непосредственно растягивая ее руками. Для этого ему приходилось прилагать значительное усилие. Но стоило эту полоску чуть надорвать поперек (то есть создать в ней «трещинку»), как разрыв ее происходил при ничтожном усилии. (Читатель легко сам может повторить этот опыт.) Другой опыт проводился со стеклянными палочками. Абрам Федорович приготовил к лекции стеклянные палочки диаметром 2—3 мм, которые в течение нескольких часов были погружены в сосуд с дистиллированной водой. Такие же, но сухие палочки лежали рядом на столе. Попытка согнуть сухие палочки в «дугу» неизменно кончались неудачей — палочки ломались. Палочки же, только что вынутые из воды, легко сгибались в обруч! Объясняется это тем, что, хотя и много медленнее, чем соль, но стекло тоже растворяется в воде, и вода «смывает» трещинки с поверхности палочек.

Мы, студенты, очень внимательно следили за научными успехами наших профессоров, болели за них. Мы очень гордились тем, что у нас на факультете работает Александр Александрович Фридман — один из крупнейших механиков в мире. Мы знали, понаслышке, что он внес очень существенный вклад в общую теорию относительности, поправив самого Эйнштейна.

Александр Александрович Фридман (1888—1925)

Эйнштейн в первой четверти XX столетия сформулировал вслед за специальной теорией относительности общую теорию относительности. Эта теория позволяла создать математическую модель Вселенной — составить систему уравнений,решение которой описывало состояние Вселенной. Сам Эйнштейн нашел стационарное решение, и модель Вселенной, построенная Эйнштейном, была статичной, неизменной во времени. Фридман догадался, что наряду со статическим решением Эйнштейна существует динамическое решение. Это означает, что состояние Вселенной постоянно изменяется во времени, Вселенная расширяется.

Известно, что поначалу Эйнштейн встретил эту работу Фридмана в штыки, но потом понял, что идея, которую высказал Фридман, справедлива*.) Оказалось, что расширение Вселенной следует из общей теории относительности. Когда это было учтено, теория относительности стала практически законченной теорией. Таким образом, Фридман наряду с Эйнштейном является одним из авторов общей теории относительности. Мы этим очень гордились.

У нас в институте Фридман читал курс механики. А в нашей студенческой библиотеке был отпечатанный курс лекций, прочитанных Фридманом в Военно-морской академии. Назывался он «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости». Мы тогда еще не понимали, что это означает. И только потом мы узнали, что в нем впервые была решена задача о движении жидкости или газа с очень большими скоростями, когда жидкость или газ принципиально нельзя считать идеальными и надо учитывать их сжимаемость. Теперь эта работа Фридмана стала общепринятой теорией, на которой основана вся гидромеханика сверхзвуковых скоростей. Этот раздел гидромеханики называется газовой динамикой. Так что родоначальником газовой динамики был наш профессор А. А. Фридман. К сожалению, он погиб очень рано — в 1925 году, когда ему было всего 37 лет.

Напротив нашего института, через улицу, которая называлась «Дорога в Сосновку», находился Ленинградский физико-технический институт (тогда он назывался Физико-технический рентгеновский институт). Директором его был академик А.Ф. Иоффе. Зрелых физиков в этом институте было очень мало. Был сам академик Иоффе; он привлек к работе профессора Дмитрия Аполлинариевича Рожанского, крупного радиофизика; привлек Ивана Васильевича Обреимова, недавно окончившего университет (ныне академика); пригласил работать недавно кончившего университет Николая Николаевича Семенова (ныне академика, Нобелевского лауреата); к работе был привлечен профессор Яков Ильич Френкель, крупный ученый, один из основателей советской теоретической физики; был привлечен Александр Алексеевич Чернышев — крупный электрик, который занимался вопросами электротехники. Основную массу сотрудников составляли молодые люди, начавшие работу, будучи студентами физико-механического факультета. На этом основании недруги коренного, я бы сказал, революционного преобразования в физике и в развитии научных работ, которое начиналось в физико-техническом институте, называли этот институт детским садом. Тем не менее, ЛФТИ уже стал одним из основных центров физической науки в СССР.

Отбирались студенты на работу в институт таким способом. Преподаватели факультета — сотрудники института, в том числе и студенты старших курсов, которые руководили лабораторными работами студентов, имели указания А. Ф. Иоффе присматриваться к студентам, которые проявляют интерес и способности к экспериментальной физике, и приглашать их на работу в Физико-технический институт. В 1927 году, будучи студентом второго курса, я был приглашен на работу в Физико-технический институт. Там молодежь сразу приобщалась к современной науке. С нами не очень нянчились и не считались с тем, что у себя на факультете мы еще чего-то «не проходили». На научных семинарах, которые происходили регулярно по пятницам, с 5 до 7 вечера, разбирались научные работы, только что сделанные сотрудниками института или опубликованные в зарубежных журналах. Мы принимали участие в работе семинара, должны были слушать и понимать, о чем идет речь, а если не понимали, то спрашивать.

---

*) 18 сентября 1922 года Эйнштейн опубликовал свое «Замечание к работе А. Фридмана «О кривизне пространства», в котором он писал: «Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе, представляются мне подозрительными». Но уже 31 мая 1923 года Эйнштейн писал: «В предыдущей заметке я подверг критике работу Фридмана... Однако моя критика, как я убедился... основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты Фридмана правильными ..»

В первое время мы даже не решались спрашивать, потому что не понимали ничего. Но довольно быстро понимание наступило, по-видимому, потому, что мы привыкли к стилю изложения и сами много читали.

У нас на факультете были, конечно, учебные студенческие семинары. Одним из них руководил профессор Рожанский, а другим — профессор Френкель. На этих семинарах разбирались самые современные вопросы физики, и мы довольно быстро усваивали, какие проблемы волнуют физиков. В частности, в 1927 году на семинаре профессора Рожанского разбиралась только что вышедшая работа Дэвиссона и Джермера, в которой впервые было экспериментально показано, что при отражении электронов от кристаллов наблюдается дифракционная картина, как при рассеянии самого обычного света на дифракционной решетке. Мы знали, что дифракция света объясняется тем, что свет — это волна. Но электрон считался нормальной частицей, подчиняющейся законам механики. И сначала представлялось просто невозможным понять, почему отражение электронов происходит так, как будто на поверхность кристалла падает не пучок частиц, а пучок света. Этот вопрос мы и разбирали на семинаре Рожанского, на котором подробно разбирался опыт Дэвиссона и Джермера (докладывали студенты) и обсуждалась его интерпретация. Этот опыт был первым убедительным доказательством справедливости предположения, сделанного в 1924 году французским физиком де Бройлем, о том, что движущиеся электроны проявляют свойства не только частиц (корпускул), но и волн, подобно тому, как электромагнитное излучение, например, свет обладает свойствами как волн, так и частиц. И еще де Бройль предположил, что соотношения между корпускулярными характеристиками и волновыми должны быть одними и теми же для электронов и излучения. Опыт Дэвиссона и Джермера показал, что действительно электроны при отражении от поверхности кристалла ведут себя как волны, и что длина волны λ, соответствующая движущемуся электрону, равна h/mv, где h — постоянная Планка, m — масса электрона, v — его скорость. В наши дни это стало уже тривиальностью.

Дмитрий Аполлинариевич Рожанский (1882—1936)

На семинаре Френкеля тоже разбирался вопрос, который волновал физиков того времени. Вопрос касался не отдельных атомов и не отдельных электронов, а строения вещества. Мы уже знали, что атомы притягиваются, пока расстояние между ними примерно равно размеру атома. А при дальнейшем сближении атомов между ними начинают действовать силы отталкивания. Но было непонятно, почему атомы располагаются в твердом теле, образуя правильную кристаллическую решетку.

Тогда теорией твердого тела занимались довольно мало. Начало созданию современной теории твердого тела положил Эйнштейн. В 1907 году он разработал квантовую теорию теплоемкости твердого тела. Твердое тело Эйнштейн рассматривал как совокупность атомов, совершающих колебания около положения равновесия с одной и той же частотой. При

Яков Ильич Френкель (1894—1952)

нагревании тела меняется амплитуда этих колебаний, следовательно, меняется и энергия колеблющихся атомов. Изменение энергии тела при его нагревании на один градус и есть теплоемкость тела. Формула Эйнштейна для теплоемкости твердого тела правильно описывала характер изменения теплоемкости с температурой, но при низких температурах рассчитанные по этой формуле значения теплоемкости не совпадали с экспериментальными результатами.

Теорию Эйнштейна усовершенствовал Дебай в 1912 году. Он предположил, что атомы в твердом теле колеблются не независимо, они связаны между собой и образуют единую колебательную систему. Расчеты, основанные на этом предположении, дали прекрасное совпадение теоретических значений теплоемкости с экспериментальными данными. Они, в частности, согласовывались с давно известным фактом — так называемым законом Дюлонга и Пти, по которому теплоемкость одного моля любого твердого вещества одна и та же и равна 25 Дж/(моль·К).

Но в разработанной теории теплоемкости было одно «темное место» — это теплоемкость металлов. Металл, как известно, состоит из ионизированных атомов, образующих кристаллическую решетку, и свободных электронов. Эти свободные электроны ведут себя как обычный идеальный газ (его называют электронным газом). Казалось бы, теплоемкость 1 моля металла должна складываться из теплоемкости решетки (25 Дж/(моль·К)) и теплоемкости электронного газа. А последнюю подсчитать совсем нетрудно — как теплоемкость одноатомного идеального газа: энергия E одного моля газа равна $^3/_2RT$ (R — универсальная газовая постоянная), а теплоемкость

$$C=\frac{\Delta E}{\Delta T}=\frac{3}{2}\cdot\frac{R\Delta T}{\Delta T}=\frac{3}{2}R\approx 12{,}5\,\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

Итак, теплоемкость моля металла должна бы равняться приблизительно 37,5 Дж/(моль·К). А измерения показывали, что она равна 25 Дж/(моль·К). Это было настолько непонятно, что физики называли этот парадокс «катастрофой теплоемкости».

Объяснить этот факт стало возможно только с появлением квантовой механики. Квантовомеханическую теорию электронного газа в металле разработали Зоммерфельд в Германии, а у нас в Советском Союзе профессор Яков Ильич Френкель. Согласно этой теории свойства электронного газа существенно отличаются от свойств одноатомного газа. В частности, при обычных (не очень высоких) температурах энергия свободных электронов в металле практически не зависит от его температуры, тогда как кинетическая энергия атомов газа прямо пропорциональна температуре. Иными словами, при нагревании металла его внутренняя энергия изменяется только за счет изменения энергии колебания атомов (точнее — ионов) кристаллической решетки; энергия же электронного газа остается неизменной. Следовательно, теплоемкость металлов — это теплоемкость атомов его решетки и равна она 25 Дж/(моль·К). Так была устранена «катастрофа теплоемкости».

На семинаре Я. И. Френкеля он сам рассказывал нам элементы теории Зоммерфельда и о своих исследованиях в этом направлении.

Была еще одна проблема в физике металлов, которая волновала ученых. Есть такое явление, которое называется эффектом Холла. Заключается оно в следующем. Представим себе прямоугольную металлическую пластину, вдоль которой течет электрический ток I (рисунок 1). Очевидно, что между точками A и A' пластины напряжение равно нулю. Но если эта пластина помещена в магнитное поле, индукция $\vec{B}$ которого перпендикулярна плоскости пластины, то между точками A и A' возникает некоторое напряжение U, которое называют э. д. с. Холла. Э. д. с. Холла можно измерить с помощью гальванометра, подсоединенного проводниками к точкам A и A'.

Возникновение в проводнике с током под действием магнитного поля разности потенциалов в направлении, поперечном по отношению к направлению тока, и называется эффектом Холла. (Это явление было теоретически предсказано в шестидесятых годах прошлого столетия Максвеллом.) Как объяснить возникновение э. д. с. Холла?

Известно, что ток представляет собой движение электронов, а на электрон, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной к индукции поля $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F}_Л$, равная по абсолютной величине $e|\vec{v}||\vec{B}|$. Направление силы Лоренца определяется правилом левой руки (если левую руку расположить так, чтобы вектор $\vec{B}$ «входил» в ладонь, четыре сложенных пальца были вытянуты вдоль направления, противоположного направлению скорости $\vec{v}$ электрона, то отогнутый большой палец укажет направление силы Лоренца). Пусть пластина расположена в магнитном поле так, как показано на рисунке 1. По пластине вдоль оси Y течет ток (скорость электронов направлена в противоположную сторону!). Тогда под действием силы Лоренца электроны будут отклоняться к грани a' пластины, и на этой грани скопится избыточное количество электронов. Накопившиеся электроны создают внутри пластины электростатическое поле, напряженность которого пропорциональна их числу. В этом поле на электроны действует сила $|\vec{F}_э| = e|\vec{E}|$, направленная противоположно силе Лоренца, то есть тормозящая их. Очевидно, что когда эта сила станет равной силе Лоренца, действующей на «протекающий» по пластине электрон, поперечное перемещение электронов прекратится. Из условия равенства этих сил можно найти напряженность $|\vec{E}|$ установившегося электростатического поля внутри пластины:

$$e|\vec{E}| = e|\vec{B}||\vec{v}|,$$

откуда

$$|\vec{E}| = |\vec{B}||\vec{v}|.$$

При этом между точками A и A' пластины установится разность потенциалов

$$U = |\vec{E}|b = |\vec{B}||\vec{v}|b,$$

где b — ширина пластины. Скорость электронов легко определить, зная ток I, концентрацию n электронов в образце (число их в единице объема) и площадь S сечения пластины, перпендикулярного направлению тока. Действительно,

$$I = ne|\vec{v}|S,$$

откуда

$$|\vec{v}| = I/neS = I/nebd$$

(d—толщина пластины).

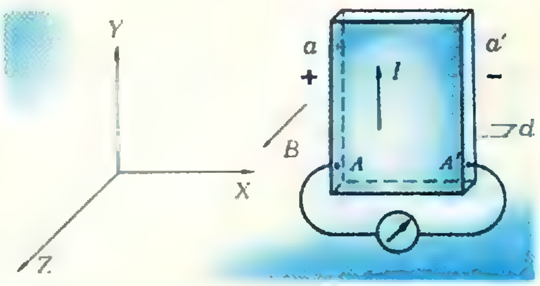


Рис. 1.

Таким образом, напряжение U, возникающее между точками A и A' пластины, равно

$$U = |\vec{B}|I/ned.$$

Эту разность потенциалов впервые обнаружил и измерил американский физик Холл.

Итак, электронная теория металлов довольно просто объясняет эффект Холла. Однако, в этом вопросе существовала одна трудность. Из приведенного выше объяснения следует, что знак э. д. с. Холла определяется только направлением тока, протекающего через пластину, и направлением магнитного поля и должен быть одним и тем же для всех металлов. Между тем опыты показали, что у ряда металлов э. д. с. Холла имеет обратный знак, как будто в них носители тока не электроны, а положительные заряды. Этому никто не мог найти объяснения.

И только в тридцатых годах ученик Зоммерфельда Рудольф Пайерлс дал объяснение этому явлению. Он сумел это сделать на основе квантовомеханических представлений о поведении электронов в металлах. Как почти всем квантовым явлениям, дать наглядное объяснение возникновения обратной э. д. с. Холла нельзя.

Когда работа Пайерлса появилась в печати, Френкель поручил мне рассказать ее на нашем «пятничном» семинаре в институте. Плохо понимая эту работу, я все же выполнил поручение Френкеля. И только после «дополнений» к моему докладу, сделанных Яковом Ильичом, я сам и, думаю, слушатели, поняли, о чем писал Пайерлс.

В теории металлов был еще один вопрос, связанный с эффектом Холла. Дело в том, что в то время эффект Холла наблюдали только в твердых металлах, и никому не удалось наблюдать его в жидких металлах. А из теории следовало, что эффект в жидких металлах может быть меньше, чем в твердых, но все же он должен быть.

Когда я начал работать в Ленинградском физико-техническом институте, под влиянием лекций и семинаров Я. И. Френкеля, который рассказывал нам о современных идеях в физике металлов, я решил заняться вопросами именно этой области физики и, прежде всего, эффектом Холла. Я решил проверить, возникает ли эффект Холла в жидких металлах. Этим вопросом ранее, в начале века, занимались такие корифеи науки, как Нернст, Друде. Просмотрев имевшуюся по этому вопросу литературу, я пришел к выводу, что выбор жидких металлов в проводившихся ранее опытах был сделан неудачно. В первых экспериментах в качестве образца выбирали ртуть, потому что при комнатной температуре она всегда в жидком состоянии. Эффекта Холла в ней не обнаружили. Как потом оказалось, и в твердой ртути этот эффект очень мал, и его трудно измерять. Проводились опыты и с висмутом. Висмут казался очень подходящим образцом, поскольку в твердом висмуте э. д. с. Холла на несколько порядков больше, чем в других металлах: в «обычных» металлах она измеряется в микровольтах, а в висмуте — в милливольтах. Однако в жидком висмуте эффекта не обнаружили. Теперь известно, что аномально большой эффект Холла в твердом висмуте связан с особенностями его кристаллической структуры. В жидком состоянии эта структура пропадает. А экспериментаторы, собиравшиеся измерить большой эффект, увидев, что в 1000 раз меньше ожидаемого, пришли к выводу, что эффекта просто нет.

Я решил взять в качестве образца металл, который является наиболее простым. Это — щелочной металл. Щелочные металлы хороши тем, что у них практически все теоретические предсказания относительно их свойств хорошо оправдываются в опытах. Я выбрал для эксперимента сплав натрия с калием, который при известной концентрации компонент становится жидким уже при комнатной температуре.

Мне представлялось, что отрицательные результаты в предыдущих опытах связаны не только с неудачным выбором образцов, но и с недостаточно точной постановкой эксперимента. Дело в том, что когда через жидкий металл, находящийся в магнитном поле, пропускают ток, то со стороны магнитного поля на металл начинают действовать силы, которые приводят к смещению отдельных слоев жидкого металла друг относительно друга. (В твердом металле этого перемещения слоев, естественно, нет.) В результате возникают вихревые токи, которые «смазывают» эффект Холла в жидком металле. Так что необходимо, если не свести на нет, то максимально уменьшить влияние этих «паразитных» токов. Для этого мы взяли образец в виде тонкого слоя жидкого металла. Тщательно проведенные измерения обнаружили наличие эффекта Холла. Года через полтора вышла работа Зоммерфельда, в которой рассказывалось об опытах, подтверждающих современную теорию металлов. Ссылался Зоммерфельд и на наш опыт. По правде говоря, я был необыкновенно горд собой — такой авторитет, как Зоммерфельд, оценил мою работу.

Была еще одна проблема в физике металлов, которая тогда очень волновала физиков-теоретиков — вопрос о ферромагнетизме. Было хорошо известно, что из всех металлов, которые имеются в природе, только три металла являются ферромагнитными — это железо, никель и кобальт. (Сейчас их известно значительно больше.) Они отличаются тем, что их намагниченность, появляющаяся в очень слабом магнитном поле, довольно большая, в несколько сотен тысяч раз больше, чем у обычных металлов. Например, чтобы в обычном металле получить такую же намагниченность, какая появляется у железного образца в поле ~0,01 Т, необходимо иметь внешнее магнитное поле ~1000 Т. Для объяснения этого непонятного явления французский физик Вейсс создал теорию, согласно которой в ферромагнитных металлах — в железе, никеле и кобальте — существуют области, в которых магнитные поля отдельных атомов ориентированы строго параллельно друг другу. Так что суммарное магнитное поле такой области — ее называют доменом (от французского слова «domain» — область) — достаточно большое. Размеры этих областей очень маленькие — порядка долей микрона, но в каждой из них умещается много сотен тысяч ориентированных «элементарных магнитиков». Сами домены распределены по металлу совершенно хаотически, так что в обычном состоянии (в отсутствие внешнего магнитного поля) намагниченность ферромагнитного образца равна нулю.

Когда такой образец помещается в магнитное поле, то происходит ориентация магнитных полей отдельных доменов вдоль внешнего поля, и образец в целом сильно намагничивается. А ориентировать целые домены легче, чем огромное количество отдельных «элементарных магнитиков».

Вот так, грубо говоря, выглядела теория ферромагнетизма, предложенная Вейссом. Для того чтобы объяснить наличие доменов — наличие областей с ориентированными «элементарными магнитиками —Вейсс предположил существование внутри металла особого магнитного поля, которое ориентирует магнитные поля внутри доменов. Это поле — Вейсс назвал его молекулярным магнитным полем — по подсчетам Вейсса должно быть порядка 1000 Т. Однако происхождение этого поля было совершенно непонятно.

Чтобы обнаружить это огромное гипотетическое поле, профессор Яков Григорьевич Дорфман, в лаборатории которого я тогда работал в Ленинградском физико-техническом институте, проделал такой опыт. Он установил в магнитном поле тонкую железную фольгу так, что плоскость листочка фольги была параллельна индукции поля. Фольга очень сильно намагничивалась. Сквозь фольгу, перпендикулярно ее поверхности, и следовательно, перпендикулярно внешнему магнитному полю, пропускался пучок быстрых электронов, испускаемых радиоактивным источником, «вырезаемый» установленной перед фольгой щелью (рисунок 2). За фольгой была установлена фотопластинка. Пролетевшие через фольгу электроны попадали на пластинку, вызывая ее почернение. Если, проходя фольгу, электроны попадают в громадное молекулярное поле, то оно должно привести к смещению положения почернения на пластинке. Однако это смещение в эксперименте не наблюдалось. Отсюда следовало, что если существуют такие силы, которые ориентируют «элеметарные магнитики» в отдельных доменах, то они не магнитные, потому что на движущийся электрон они практически не действуют.

И только в 1928 году Я. И. Френкель в Ленинградском физико-техническом институте и почти одновременно с ним немецкий физик Гейзенберг создали квантовомеханическую теорию ферромагнетизма. Они показали, что на самом деле никакого молекулярного поля нет. Силы, которые ориентируют «элементарные магнитики» внутри доменов — электрические силы специфического характера. Их называют теперь обменными силами. Небольшая статья об этом была опубликована Френкелем в 1928 году в июньском номере немецкого физического журнала «Zeitshrift für Physik», а в июльском номере этого же журнала появилась подробная статья Гейзенберга. Так что независимо друг от друга они создали теорию ферромагнетизма. (Впоследствии Яков Ильич Френкель говорил мне, что он занялся ферромагнетизмом потому, что мы, экспериментаторы, постоянно его «намагничивали»).

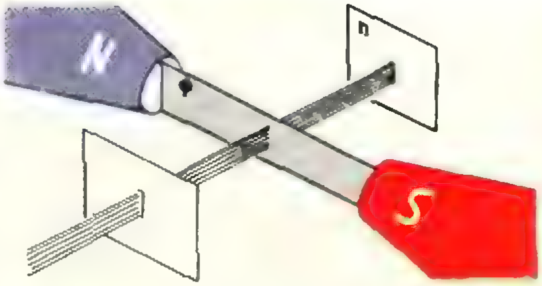


Рис. 2.

После создания теории ферромагнетизма появилось много работ, посвященных вопросам магнетизма в металлах. В частности, было показано, что, как и следует из теории, обменные силы могут возникать только в кристаллах. Жидких ферромагнетиков быть не может. Было также показано, что вдоль разных направлений внутри кристалла обменные силы различны. То есть было показано,что имеется резко выраженная анизотропия магнитных свойств ферромагнитных кристаллов. Это и сейчас имеет очень большое значение при создании новых магнитных материалов, на которых базируется вся электротехника. И трансформаторы, и генераторы, и электродвигатели — все сделаны из ферромагнитных материалов, и их характеристики существенно зависят от свойств самого ферромагнитного материала. Несколько позже теорию ферромагнетизма развили наш выдающийся теоретик Лев Давыдович Ландау и его ученик Евгений Михайлович Лифшиц. Теперь современная теория ферромагнетизма целиком базируется на работах Френкеля, Гейзенберга, Ландау и Лифшица.

Как я уже говорил, у нас на физико-механическом факультете были учебные семинары. Один из таких семинаров был организован для студентов 4—5 курсов. Назывался этот семинар расчетным, и вел его наш профессор академик Владимир Александрович Фок. Проходил семинар не совсем обычно. Фок придумывал какую-нибудь хитрую задачу, решения которой он сам не знал. И тут же у доски он вместе с нами (вернее, мы вместе с ним) начинал решать ее. Так что мы могли наблюдать, так сказать, «творческую кухню» такого замечательного теоретика, каким был В. А. Фок.

И вот мы видели, как он подходил к решению задачи: пробовал один способ — не получалось; он стирал с доски, пробовал другой способ — тоже не получалось. В конце концов, рано или поздно, решение отыскивалось. Иногда на этом же занятии, иногда на следующем. Мы видели не просто готовое решение, а как постепенно находились пути к этому решению. Это было очень поучительно для нас. Однажды на семинаре Владимира Александровича был такой случай. Решали мы какую-то сложную несимметричную задачу по электростатике. На первом семинаре мы решения не нашли, а на следующем, в конце концов, получили длиннющее дифференциальное уравнение. Оно занимало всю доску. За математическими выкладками мы следили очень внимательно, так что с математикой все было в порядке, а вот усмотреть физический смысл скрытый за этой длинной формулой, мы не могли. Кто-то из студентов спросил Владимира Александровича: «А какой физический смысл имеет это уравнение?». Он на нас посмотрел с укором и сказал: «А физический смысл этого уравнения заключается в том, что оно имеет решение».

В. А. Фок занимался различными проблемами теоретической физики. Но наряду с этим он не гнушался решений прикладных задач, чисто практических. В частности, его привлекли геофизики для решения ряда задач о распределении электрического поля внутри Земли. Это решение было очень важным для геологической разведки. Фок решил эту задачу вместе с В. К. Фредериксом. Вообще, для всего стиля работы Ленинградского физико-технического института было характерно, что наряду с разработкой теоретических и экспериментальных проблем физики большое внимание уделялось решению чисто прикладных задач, связанных с нуждами техники, промышленности и сельского хозяйства.

В 1930 году, когда я только что окончил институт и получил звание инженера-физика, по рекомендации А. Ф. Иоффе меня направили в командировку в Германию, чтобы ознакомиться с физическими лабораториями запада. Я пробыл в Германии около трех месяцев и смог познакомиться с работами физических лабораторий Лейпцига, Мюнхена, Гамбурга. И нужно сказать, что я был очень удовлетворен, когда убедился, что уровень наших физиков, в частности, мой собственный уровень, был ничуть не ниже уровня физиков, с которыми я встречался в лабораториях за рубежом. Правда, они имели некоторое преимущество по сравнению с нами: их лаборатории были очень хорошо оснащены приборами. У нас в Советском Союзе не было еще тогда отечественного приборостроения, нам часто приходилось самим делать приборы, либо покупать их за рубежом, а это было трудно в те времена, когда большие средства затрачивались на развитие народного хозяйства. Но в смысле уровня знаний, уровня понимания, даже техники эксперимента мы находились, как я убедился, не ниже, чем самые крупные университетские лаборатории Германии.

Находясь в командировке, я около месяца работал в лаборатории в Мюнхене, в бывшей лаборатории Рентгена. Там работали и университетские докторанты (так назывались у них заканчивающие университет студенты, которые готовят дипломные работы). Однажды я заметил, что докторанты, готовясь к выпускным экзаменам, читают книгу Я. И. Френкеля «Курс электродинамики», изданную на немецком языке. Я спросил: «А кому вы сдаете экзамены?», они ответили: «Зоммерфельду». Тому самому Зоммерфельду, крупнейшему теоретику мирового класса, про которого у нас, когда мы были студентами, ходила поговорка «нет Бора кроме Бора, и Зоммерфельд его пророк». Я знал, что имеется пятитомный курс физики самого Зоммерфельда, и спросил, почему докторанты учат электродинамику не по Зоммерфельду, а по Френкелю. А потому, ответили они, что Зоммерфельд сказал, что он будет принимать экзамены только по курсу Френкеля, поскольку лучшего курса в мире сейчас нет. Когда я сказал, что лично знаком с Френкелем, то почувствовал, что мой авторитет в их глазах резко возрос. А я испытал чувство истинной гордости за наших советских физиков, заслуживших широкое признание в среде крупнейших теоретиков мира.

Н. Н. Лузин (1883—1950)

Лузинская математическая школа

П. Александров

Автор этой статьи — один из крупнейших советских математиков, Герой Социалистического Труда, академик Павел Сергеевич Александров. В статье рассказывается о становлении одной из самых плодотворных математических школ — школы академика Н. Н. Лузина. Слева (в узкой колонке) разъясняются мало знакомые школьникам термины, встречающиеся в статье.

Современная московская математическая школа теоретико-множественной математики возникла в первые годы революции в стенах Московского университета. Ее основателями были Дмитрий Федорович Егоров и Николай Николаевич Лузин.

В предшествовавшие ее возникновению десятилетия, начиная с семидесятых годов девятнадцатого века, интересы математиков Москвы концентрировались главным образом вокруг проблем дифференциальной геометрии и механики.

Эти проблемы, тесно связанные с теорией дифференциальных уравнений с частными производными и теорией конформных отображений, культивировались, с одной стороны, проживавшим в Москве и занимавшим скромную должность учителя гимназии выдающимся латышским геометром Карлом Михайловичем Петерсоном, а, с другой стороны, были связаны с замечательными работами великих московских механиков: Николая Егоровича Жуковского и его ученика Сергея Алексеевича Чаплыгина. Деятельность этих ученых была тесно связана с основанным в середине 1860-х годов Московским математическим обществом, служившим во все последние десятилетия прошлого и

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — часть геометрии, изучающая гладкие кривые линии и поверхности методами дифференциального исчисления. В ней рассматриваются свойства касательных прямых к плоским и пространственным кривым, касательных плоскостей к кривым поверхностям, различные типы линий и поверхностей (например, цилиндрические, конические, винтовые поверхности), измерение длин линий, площадей областей и углов на кривых поверхностях, а также свойства поверхностей, не изменяющиеся при тех или иных отображениях. Важным разделом дифференциальной геометрии является теория геодезических линий на поверхностях, то есть кратчайших линий, соединяющих две точки поверхности (на плоскости — это отрезок прямой, на сфере — дуга большого круга). В работах Московской дифференциально-геометрической школы изучались, в частности, изгибания поверхностей, то есть отображения, не изменяющие длин линий на них. По существу вы имели дело с дифференциальной геометрией, когда занимались в 9-м классе проведением касательных к графику функции.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ — уравнения, содержащие производные от искомых функций. Если эти функции зависят от одного аргумента, дифференциальные уравнения называют *обыкновенными*, а если от нескольких — *уравнениями в частных производных*, эти последние часто называют *уравнениями математической физики*.

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — отображения поверхности на поверхность, сохраняющие углы между линиями. Пример — преобразования подобия, которые вы изучали в геометрии. Еще пример — *стереографическая проекция* сферы на плоскость (проекция, при которой сфера проектируется из северного полюса на плоскость, касающуюся ее в южном полюсе) Конформные отображения играют важную роль в картографии, гидромеханике, аэромеханике и других областях науки.

первые десятилетия текущего столетия основной научно-общественной базой Московской математической школы.

Дифференциальной геометрии принадлежали на рубеже прошлого и нынешнего столетий и математические интересы Б. К. Млодзеевского и Д. Ф. Егорова, бывших в ту пору наиболее популярными профессорами-математиками в Московском университете. Фундаментальное участие Д. Ф. Егорова в создании московской школы теории функций относится к 1911—1913 годам, когда он доказал (1911) свою знаменитую теорему о последовательностях измеримых функций и поставил в связи с этой теоремой перед своим лучшим учеником Н. Н. Лузиным задачу доказательства одной из основных теорем развивающейся в то время теории функций. То отношение, которое к созданию Московской школы теории функций имел Б. К. Млодзеевский, конечно, не может быть даже сравниваемо с основополагающим участием Д. Ф. Егорова, но тем не менее должно быть упомянуто: оно заключается в том, что Б. К. Млодзеевский, никогда сам не работавший в этой области, но являвшийся широко образованным математиком, имевшим представление обо всем, что делалось в ней в его время, был первым профессором Московского (и вообще какого-либо русского) университета, прочитавшим в университете курс общей теории функций действительного переменного. Курс этот слушал и Н. Н. Лузин и неоднократно с большим признанием отзывался о нем.

Два самых выдающихся профессора-математика, преподававшие в Московском университете в первой трети текущего столетия: Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин как лекторы и вообще профессора университета принадлежали к двум противоположным типам. Д. Ф. Егоров принадлежал, я бы сказал, к классическому типу, а Н. Н. Лузин — к романтическому. В лекциях Д. Ф. Егорова, всегда безукоризненно тщательно приготовленных, все доказательства были до конца продуманы и изложены в абсолютно строгой форме. В них не было места никаким элементам импровизации, и они соответствовали подготовке и уровню понимания тех слушателей, для которых были предназначены. Внешне Д. Ф. Егоров всегда был крайне сдержан, он не пользовался никакими ораторскими приемами или украшениями и на непривыкшего к его манере изложения слушателя его лекции могли даже производить впечатление несколько суховатых. В действительности в его изложении бывал и настоящий подъем, но подъем этот, как и вся вообще эмоциональная сторона его личности ученого и профессора, был подчинен строго продуманной и даже несколько суровой на вид форме. В противоположность этому Н. Н. Лузин был ярким представителем «романтического» типа профессоро

Д. Ф. Егоров

университета. Все его преподавание было чрезвычайно эмоционально. Форма этого преподавания далеко не всегда бывала безукоризненной. Н. Н. Лузину случалось приходить на лекцию и плохо подготовленным и тут же, стоя у доски перед студентами, импровизировать еще неготовое доказательство. При этом он часто ошибался, путался в выкладках и откладывал до следующей лекции материал, предназначавшийся для данной лекции, но оказавшийся не подготовленным. Словом, образцовым его преподавание назвать было нельзя. При этом он иногда и несколько кокетничал этой своей «необразцовостью». Но лекции Лузина, в эпоху расцвета его педагогической деятельности в Московском университете, были полны новыми и интересными идеями, способными побудить слушателя к дальнейшим самостоятельным занятиям. Даром увлекать умы и воспламенять сердца Н. Н. Лузин обладал в высшей степени. Естественно, что результаты этого увлечения и воспламенения были различны в зависимости от того горючего материала, на который падали брошенные в него искры вдохновения. Способные молодые начинающие математики, а их было немало среди студентов, слушавших Н. Н. Лузина, побуждались к серьезным и глубоким собственным исследованиям, осуществлявшим дальнейшие продвижения в математической науке. Но были и просто восторженные девицы, восклицавшие, что слушать Лузина лучше, чем слушать Шаляпина, чем и ограничивалось их восприятие математических идей великого учителя.

Не менее важным, чем характер лекций Лузина, побуждавший и, я бы сказал, вдохновлявший слушателей к самостоятельным исследованиям в области математики, был и введенный Лузиным в практику нашего факультета совершенно новый стиль взаимоотношений между профессором и студентами. В нем поражали большая свобода и непринужденность, отсутствие всякой официальности и замена внешних проявлений почтительности со стороны студентов действительно глубоким уважением, часто переходившим в восторженное преклонение. Это уважение и делало невозможным вырождение свободы и непосредственности в отношениях между Н. Н. Лузиным и его студентами в какое-либо панибратство.

Я впервые встретился с Н. Н. Лузиным в 1914 году, будучи студентом 2 курса. Впечатление от этой встречи было, можно прямо сказать, потрясающим и навсегда запомнилось мне. Обратившись к Лузину после окончания его лекций за советом, как мне заниматься математикой дальше, я был прежде всего поражен внимательностью и (не могу найти другого слова) уважением к собеседнику, как ни странно звучит это слово, когда речь идет о беседе уже знаменитого, хотя еще и молодого

ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА — множества, обладающие мерой. В конце XIX века французским математиком Анри Лебегом была построена теория меры, позволяющая приписывать меру весьма широкому классу множеств. Мера Лебега является обобщением обычных понятий длины, площади, объема. Оказалось, что «длина» множества рациональных чисел на отрезке [0,1] равна нулю, а длина множества иррациональных чисел на том же отрезке равна 1 («Квант», 1975, № 8). Один из самых общих методов конструирования измеримых множеств был предложен автором данной статьи академиком П. С. Александровым — в те годы начинавшим свои занятия математикой студентом университета.

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ — функции, обладающие тем свойством, что для любых a и b множество точек x, для которых $a\leqslant f(x)<b$, измеримо. Любая непрерывная функция измерима. Примером всюду разрывной, но измеримой функции может служить функция Дирихле, равная нулю во всех иррациональных точках и единице во всех рациональных точках. Если выкинуть из области определения функции Дирихле все рациональ-

В. В. Голубев

ные точки (которых с некоторой точки зрения «меньше», чем иррациональных), то функция Дирихле превратится в константу, т. е. станет непрерывной на сокращенной области определения. Большим достижением анализа явилось понимание того, что разрывные функции, имеющие интерес для анализа, «в основном» непрерывны. Такими и являются функции, «измеримые по Лебегу». В выяснении всех относящихся сюда вопросов большую роль сыграли результаты Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина.

АКСИОМА ЦЕРМЕЛО — использование итальянским математиком Цермело утверждение, что для любой совокупности попарно не пересекающихся множеств можно построить новое множество, выбрав по одному элементу из каждого множества. Несмотря на свою кажущуюся очевидность, это утверждение (называемое также *аксиомой произвольного выбора*) приводит к весьма парадоксальным результатам (например, к утверждению, что сферу можно разбить на 4 конгруэнтных друг другу множества так, что из двух таких множеств можно получить всю сферу, повернув их относительно центра). Ряд исследований Московской математической школы был посвящен выяснению того, ка-

ученого с 18-летним студентом, еще только начинавшим интересоваться математикой. Выслушав меня, Лузин посредством умело поставленных вопросов очень скоро разобрался в характере моих математических склонностей и сразу же в доступной мне форме обрисовал основные направления, которые он мог мне предложить для дальнейших занятий; очень осторожно он сам меня склонил к выбору одного из этих направлений, причем все это сделано было тонко, без всякого нажима и, как я теперь могу сказать, правильно. Я стал тогда же учеником Лузина.

Мое знакомство с Лузиным пришлось довольно точно в середину того десятилетия, в котором он получил самые значительные свои результаты. Он жил тогда совершенно один в меблированных комнатах (Кокоревское подворье на Балчуге), жил только наукой. Мне запомнилась одна его фраза, сказанная в одну из многочисленных наших встреч: «Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело (аксиома произвольного выбора в теории множеств). Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!».

Видя Лузина в эти годы, я действительно видел то, что может называться вдохновенным отношением к науке, и я не только учился у него математике, но и получил урок того, что такое настоящий ученый, а также и того, каким должен быть профессор университета.

Тогда же я понял, что наука и приобщение к ней новых молодых людей — две стороны одной и той же деятельности — деятельности ученого. Все это осталось мне на всю жизнь. Педагогическая деятельность в Московском университете осуществлялась школой Егорова — Лузина в нескольких направлениях. Д. Ф. Егоров читал обязательные курсы дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Кроме того, он читал ряд спецкурсов, которые хотя и не были обязательными, но пользовались большой популярностью и посещались большим числом студентов. Курсы Д. Ф. Егорова могли служить и первым введением в только что возникавший тогда функциональный анализ.

Н. Н. Лузин ежегодно читал тот или иной курс теории функций действительного (иногда и комплексного) переменного, меняя его специальную тематику, но доводя изложение каждый раз до вопросов непосредственно интересовавших его самого и составлявших в данной области сегодняшний день науки.

К старшему поколению учеников Д. Ф. Егорова принадлежали кроме Н. Н. Лузина В. В. Голубев, И. И. Привалов и В. В. Степанов, принимавшие активное участие в московской математической жизни, в частности в преподавании в Московском университете. В. В. Голубев и И. И. Привалов вели интенсивную научную работу и читали ряд курсов в направлении,

И. И. Привалов

кие утверждения теории множеств можно получить, не опираясь на аксиому Цермело. В настоящее время доказано, что аксиому Цермело нельзя ни вывести, ни опровергнуть, опираясь на остальные аксиомы теории множеств.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — ветвь математики, изучающая задачи на максимум и минимум функций, зависящих от линий, других функций и т. д. (например, отыскание геодезических линий на поверхностях, отыскание линии наименьшей длины, ограничивающей область данной площади и т. д.). Многие принципы физики и механики имеют вариационный характер (например: *свет распространяется так, что время, за которое он проходит от одной точки до другой, минимально*).

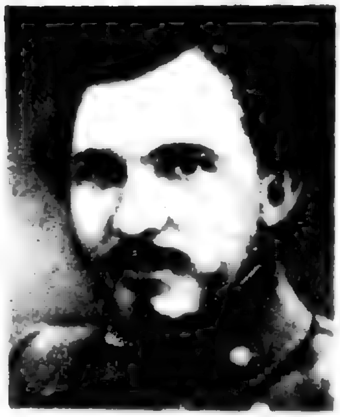
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ — ряды, состоящие из гармонических колебаний с кратными частотами:
$A_0 + A_1\cos(\omega x + \alpha_1) + A_2\cos(2\omega x + \alpha_2) + \ldots + A_n\cos(n\omega x + \alpha_n) + \ldots$
Физики часто представляют колебания весьма общего вида как результат наложения друг на друга бесконечного множества гармонических колебаний, то есть как сумму тригонометрического ряда. Такое представление функций используется и при решении многих задач тео-

продолжавшем проблематику Н. Н. Лузина. В. В. Степанов, обладавший исключительной широтой математической эрудиции и математических интересов, читал курсы и вел семинары по самым различным вопросам математического анализа в широком смысле слова. Мне, например, запомнился один прослушанный мною с большим интересом курс В. В. Степанова по проблеме Дирихле, очень увлекательный, хотя и прочитанный в строгой манере Д. Ф. Егорова, верным учеником которого был и считал себя В. В. Степанов. Хочу также вспомнить, что первые получившие широкую известность работы А. Н. Колмогорова по теории функций (а именно, по теории тригонометрических рядов) были сделаны им, когда он был участником семинара В. В. Степанова. Упомянув об этом семинаре, я уже забегаю вперед, в первую половину двадцатых годов, когда первоначально единая школа Егорова—Лузина уже дала начало ряду новых школ, разработавших различные области математики и живших самостоятельной жизнью.

В первые годы педагогической деятельности Н. Н. Лузина в Московском университете (а это были годы, непосредственно предшествовавшие революции) в университете работал один-единственный математический семинар. Он имел своим руководителем Д. Ф. Егорова и так и назывался: Математический семинар или, точнее, Математический семинарий. Теперешнее слово «семинар» получило распространение в Московском университете лишь в середине двадцатых годов и было привезено в Москву О. Ю. Шмидтом из Киева, где, по-видимому, было распространено в школе Д. А. Граве. Так вот, Математический семинарий Д. Ф. Егорова происходил каждый год в весеннее полугодие; тема его менялась от года к году. Я впервые принял участие в этом семинаре в 1914 году, будучи еще студентом второго семестра первого курса; считая, что он предназначен для старших курсов, я не сразу и лишь после настойчивой рекомендации В. В. Степанова решил записаться на этот семинар. (Тогда в Университете еще господствовала так называемая предметная система, и каждый студент мог записаться на любой курс или семинар по своему выбору, что было, в частности, связано с платностью обучения и отсутствием государственных стипендий для студентов.) Как я уже говорил, каждый год семинар Д. Ф. Егорова был посвящен одной какой-нибудь теме. В 1914 году темой семинара были «Бесконечные последовательности». Тема разбивалась на несколько подтем, работа над которыми шла параллельно; участники семинара, занимавшиеся данной подтемой, образовывали определенную «группу» семинара. Моя группа называлась «Функциональные последовательности». Мы изучали работы о различных обобщениях понятия равномерной сходимости. Была также и группа, занимающаяся более элементар-

Д. Е. Меньшов

А. Я. Хинчин



М. Я. Суслин

П. С. Александров

П. С. Урысон

Л. А. Люстерник

ретической физики. Докторская диссертация Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» была посвящена изучению многих тончайших вопросов теории тригонометрических рядов с помощью понятий измеримой функции, интеграла Лебега и т. д. Эту тематику продолжали многие ученики Лузина (А. Н. Колмогоров, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари и др.).

ными вопросами: рядами с постоянными членами и различными признаками сходимости этих рядов. Каждая группа несколько раз собиралась на дому у Д. Ф. Егорова. На первом из этих собраний Д. Ф. Егоров распределял литературу между участниками группы, и эта литература докладывалась соответствующими участниками на последующих собраниях группы. Наконец, в заключение работы группы один или два участника группы должны были выступить с докладом уже на пленарном собрании семинара. Так, один доклад был посвящен рядам с постоянными членами, по функциональным рядам было два доклада и т. д. Пленарные собрания семинара Д. Ф. Егорова собирали фактически всех активно работающих математиков Москвы и в этом отношении в некотором роде даже конкурировали с математическим обществом. Эти пленарные собрания проходили всегда очень оживленно. Доклады, делавшиеся на них, в большинстве случаев вызывали интересные высказывания многочисленных слушателей, среди которых особенно активными бывали Н. Н. Лузин и В. В. Степанов, имевшие, впрочем, совершенно различные темпераменты.

М. А. Лаврентьев

Н. К. Бари

А. Н. Колмогоров

Л. Г. Шнирельман

В. В. Степанов

П. С. Новиков

Л. В. Келдыш

Оживленный, хотя и совершенно «камерный» характер имели и немноголюдные собрания отдельных групп семинара, происходившие, как уже было сказано, на дому у Д. Ф. Егорова. Тон на этих собраниях задавал всегда сам Дмитрий Федорович.

Сформировавшаяся еще в 1914—1916 гг. группа старших учеников Н. Н. Лузина состояла из Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, М. Я. Суслина и меня. К 1919—1920 гг. она пополнилась рядом молодых математиков: П. С. Урысон, Л. А. Люстерник, М. А. Лаврентьев, Н. К. Бари, несколько других учеников и учениц Н. Н. Лузина. Так возник очень дружный коллектив, к которому вскоре присоединились два таких выдающихся математика, как А. Н. Колмогоров и Л. Г. Шнирельман. В этот коллектив сразу же включился из математиков несколько более старшего поколения В. В. Степанов. Несколько позже в этот коллектив вошли П. С. Новиков и Л. В. Келдыш. Так возникла знаменитая **Лузитания** — сообщество молодых математиков, спаянных не только тесными дружескими отношениями между его сочленами, но и горячей любовью и живым бескорыстным интересом к математической науке.

Лузитания сразу осознала себя как нечто целое и провозгласила себя «орденом» с «командором» Н. Н. Лузиным и «гроссмейстером» Д. Ф. Его-

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ — последовательности, состоящие из функций (например, 1, x, x^2, ..., x^n, ... или 1, $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$, ...). Назовем *расстоянием между функциями* φ *и* ψ *на отрезке* $[a; b]$ наибольшее значение выражения $|\varphi(x)-\psi(x)|$ на этом отрезке. Говорят, что функциональная последовательность

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ *равномерно сходится на отрезке* $[a; b]$ к функции φ, если расстояние между φ_n и φ стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Рассматриваются и иные виды сходимости функциональных последовательностей, например, *сходимость в среднем*:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx = 0$$

и т. д. В основе определения различных видов сходимости функциональных последовательностей лежат различные способы определения расстояния между функциями.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. Функции, являющиеся в окрестности любой точки x_0, где они определены, суммами рядов вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

(коэффициенты такого ряда выражаются через производные исходной функции в точке x_0), называются *аналитическими функциями*. К их числу относятся изучаемые в школе рациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции, а также почти все функции, встречающиеся в приложениях математики. Разрывные функции и функции, графики которых имеют изломы (например, $y = |x|$ или $y = [x]$), не аналитичны. Замечательно, что две аналитические функции, совпадающие на сколь угодно малом промежутке, равны друг другу всюду. В полной своей красоте теория аналитических функций раскрывается, если рассматривать их не только для действительных, но и для комплексных значений аргумента. Поэтому эта теория называется также *теорией функций комплексной переменной*. Она тесно связана с теорией конформных отображений.

В комплексной области можно выразить значения аналитической функции внутри некоторой области через ее значения на границе области. Однако эти граничные значения могут оказаться не только не аналитической, но даже раз-

ровым. Лузитания была коллективом большого трудового, творческого и эмоционального подъема, отражавшего в «микрокосме» тогдашнего математического факультета Московского университета грандиозный и всеобъемлющий подъем, переживавшийся всей страной в те годы, в первые годы революции, годы становления новой жизни. Об этом особенно хочется вспомнить сейчас, в год шестидесятилетия Великой Октябрьской революции.

Существенным элементом общения Н. Н. Лузина с его учениками были встречи и беседы, которые Н. Н. Лузин имел с совсем небольшими их группами (примерно в 1—3 человека, занимавшимися какой-нибудь темой). Кроме того, был еженедельный общий приемный день для всех учеников Николая Николаевича. Одно время это были четверги, потом среды.

На этих еженедельных собраниях на дому у Н. Н. Лузина кроме непосредственных учеников Н. Н. Лузина часто бывал В. В. Степанов, иногда и И. И. Привалов. Эти вечера у Н. Н. Лузина состояли из двух частей: сначала была математическая часть в кабинете Николая Николаевича, очень уютной комнате, в которой, как, впрочем, и во всей тогдашней квартире Н. Н. Лузина (Арбат, 25, третий этаж), было (по желанию хозяина) керосиновое освещение. Никогда не забуду тех насыщенных самой живой математикой разговоров, которые тогда происходили. Эти разговоры иногда затягивались за полночь, но, когда бы они ни кончались, за ними следовал чай с неизменным очень вкусным ореховым тортом. За этим чаем — уже не в кабинете, а в столовой квартиры Лузиных — разговоры принимали другой, нематематический характер и касались самых различных вопросов культурной и общественной жизни. Иногда что-нибудь читалось вслух. В. В. Степанов с большим увлечением читал стихи Блока, чаще же читались менее серьезные вещи. Так, например, Н. Н. Лузин с большим мастерством и артистичностью читал предназначенные собственно для детей произведения Корнея Чуковского. Я, помню, однажды прочитал рассказ Анатоля Франса «Чудо святого Николая».

Собрания у Н. Н. Лузина кончались глубокой ночью. После их окончания участники большой гурьбой выходили на Арбат и его переулки и постепенно, в различных последовательных комбинациях провожая друг друга, наконец расходились — обычно уже к утру—по своим домам.

Лузитания жила не только дружно, она жила весело, и ещё как весело! Это веселье даже захлестывало «старших», и не только Н. Н. Лузина, но и Д. Ф. Егорова, принимавших, так сказать, полноправное участие в наших оживленных веселых собраниях. Собрания эти были многочисленны и происходили по различным поводам. Встреча Нового года и Татьянин день, именины Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина, дни рождения отдельных лузитанрывной (хотя и измеримой по Лебегу) функцией. Ряд работ Н. Н. Лузина и его учеников (И. И. Привалова и других) посвящен изучению свойств граничных значений аналитических функций.

РАЗМЕРНОСТЬ— число измерений данной фигуры (например, размерность отрезка и окружности равна единице, размерность квадрата, круга и сферы — двум, а размерность куба и шара — трем). После введения в математику множеств весьма общей природы возникла задача общего определения понятия размерности и изучения свойств этого понятия. В окончательном формировании теории размерности основное значение имеют работы П. С. Урысона («Квант», 1974, № 8), а позднее П. С. Александрова. В работах П. С. Александрова и его учеников обнаружены очень тонкие связи между размерностью и другими геометрическими свойствами множеств.

цев — все давало повод для наших встреч, и на них было всегда в высшей степени оживленно и весело и при этом, заметьте, ни на одной из этих встреч не было выпито ни капли вина, пива и вообще какого бы то ни было содержащего алкоголь напитка: это были годы «сухого закона», и он в нашем кругу соблюдался абсолютно. Бывали и бесконечные, многочасовые прогулки — дневные и ночные, как загородные, так и по московским улицам и переулкам, в том числе лодочные прогулки, купанья и так далее до бесконечности. Но не надо думать, что мы только развлекались. Вся Лузитания жила интенсивной и самой рабочей научной жизнью. «Две половины» лузинских вечерних приемов стали широко выполнявшейся традицией и собственно лузитанских собраний и развлечений: в них развлекательная часть чередовалась, а иногда и объединялась с самой серьезной математической частью. Так, например, эскизы впоследствии ставшей знаменитой совместной работы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова по функциям комплексной переменной были впервые намечены во время загородного «похода». Вся программа построенной П. С. Урысоном теории размерности была им изложена мне во время затянувшегося на несколько часов купанья в реке Клязьме в деревне Бурково близ Болшева в 1921 году. Эти примеры можно было бы умножать без конца.

Лузинская школа, Лузитания, была единственным в своем роде, неповторимым коллективом молодых, в большинстве своем одаренных и жизнерадостных математиков.

В августе 1924 года этот коллектив пережил тяжелый удар: погиб один из самых талантливых членов Лузитании и вообще один из самых талантливых советских математиков — Павел Самуилович Урысон.

Члены Лузитании восприняли этот удар судьбы как личное горе каждого из них, а Лузитания как целое недолго его пережила. К этому времени в недрах Московской, тогда еще единой, математической школы начался процесс формирования отдельных школ по различным областям математики: по теории функций комплексного переменного, по топологии, по теории вероятностей, по дифференциальным уравнениям и др. Повторяю, школы эти возникали в рамках самой Лузитании, но, раз возникнув, они сразу, как новорожденные киты, зажили самостоятельной жизнью и быстро и успешно росли и развивались.

Лузитания как таковая перестала существовать, превратившись в непроходящее воспоминание каждого из ее участников, слившееся с воспоминанием о его собственной юности.

XX ЛЕТ

4-го октября 1957 года впервые в истории человечества был запущен искусственный спутник Земли. Эта дата является началом космической эры человечества. Мы можем гордиться, что эта эра началась в нашей стране — первый спутник был запущен в Советском Союзе.

Академик С. П. Королев — Главный конструктор первых ракетно-космических систем.

◀Старт космического корабля «Союз».

Первый в мире искусственный спутник Земли.

КОСМИЧЕСКОЙ ЭРЫ

За прошедшие двадцать лет в космосе были проведены многочисленные научные исследования. Достаточно сказать, что только в Советском Союзе запущено свыше тысячи различных аппаратов для исследования космоса.

Освоение космоса идет гигантскими шагами. Нашей стране — родоначальнице космонавтики — принадлежит приоритет в этапных событиях, связанных с освоением космоса. Советский Союз первым осуществил запуск спутника с человеком на борту — первым в мире космонавтом стал гражданин Советского Союза коммунист Юрий Алексеевич Гагарин. Первый человек, вышедший в открытое космическое пространство, был гражданин Советского Союза коммунист Алексей Архипович Леонов. Советский Союз впервые осуществил запуск многоместных летательных аппаратов, автоматическую стыковку летательных аппаратов на орбите, фотографирование обратной стороны Луны, мягкую посадку станции на

Первый космонавт Ю. А. Гагарин.

Первая женщина-космонавт В. В. Николаева-Терешкова.

Космонавт А. А. Леонов — первый человек, совершивший выход в открытый космос.

Луне, создание спутников Луны, облет Луны и возвращение космических аппаратов на Землю, доставку на Землю лунного грунта автоматическими станциями, создание самодвижущихся дистанционно - управляемых лунных аппаратов (луноходов), посадку автоматических станций на поверхность Венеры и Марса.

Влияние космонавтики на изучение Вселенной огромно. Космические исследования оказали стимулирующее воздействие на развитие научной и технической мысли, экономики и культуры. Они привели к резкому подъему уровня науки и техники в таких актуальных и передовых областях, как аэродинамика, теплофизика, химическая физика, радиотехника и техника телевидения, техника систем автоматического управления, применение в промышленности электронных машин, проблемы миниатюризации технических конструкций.

В настоящее время космические исследования вступают в новую фазу. Спустя двадцать лет после выхода человека в космос они все больше становятся нормальным видом научно-исследовательской деятельности, а космос — рабочим местом, лабораторией ученых. После первых, можно сказать, рекогносцировочных экспериментов началась эпоха систематических исследований, и грядущие десятилетия, несомненно, будут отмечены еще более крупными достижениями.

Публикацию подготовил М. Смолянский.

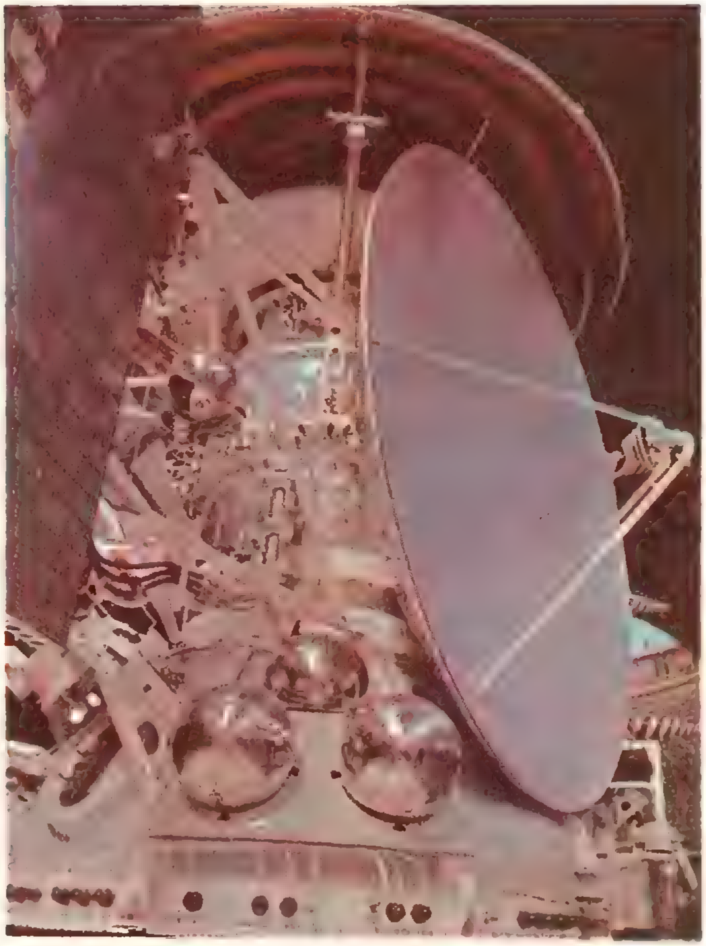
Фото ТАСС

Лунный грунт, доставленный станцией «Луна-16».

На месте приземления космического корабля «Союз-19» А. А. Леонов и В. Н. Кубасов с поисковой группой.

«Луноход-1».

В. В. Горбатко и Ю. Н. Глазков во время тренировок.



Автоматическая межпланетная станция «Марс».

Экипажи космических кораблей «Союз-19» и «Аполлон».

В. Большаков

Оптическое зондирование Земли и Луны из космоса

Двадцать лет назад 4 октября 1957 года запуском первого в мире искусственного спутника Земли Советский Союз открыл новую эру в истории человечества — эру завоевания космоса. 20 лет — срок небольшой, а успехи науки и техники в освоении космического пространства грандиозны. И ведущее место в мире здесь по праву принадлежит нашей стране, где последовательно осуществляется научно-обоснованная программа изучения космического пространства, Луны и планет. Эти задачи решаются с помощью автоматических средств (искусственных спутников, космических аппаратов-зондов, автоматических станций) и с помощью пилотируемых космических кораблей «Союз» и орбитальных станций «Салют».

Много новых возможностей перед наукой открыла практическая космонавтика, особенно после успешного решения технической задачи возвращения с космических трасс на Землю автоматических и пилотируемых станций. Одна из таких возможностей — дистанционное зондирование Земли и Луны оптическими средствами, прежде всего, методом фотографирования.

Как известно, возвращение космических аппаратов из дальнего космоса впервые в мире было выполнено в СССР во время полета станции «Зонд-5». Станция облетела Луну и 21 сентября 1968 года вернулась на Землю, совершив мягкую посадку в заданном районе. Тогда же было положено начало практическому использованию метода космического фотографирования: при полете станции с расстояния 90 тыс. км была сфотографирована Земля (рис. 1).

Фотографии, на которых изображена вся Земля или другое космическое тело, принято называть глобальными. Сразу же после получения глобальных фотографий Земли с «Зонда-5» они были использованы, в частности, для изучения закономерностей распределения облачных образований в масштабах всей Земли и сравнения фактических погодных условий с прогнозируемыми, а также для определения размеров Земли. Поскольку Земля фотографировалась непрерывно в течение почти 30 минут, любая точка земной поверхности, расположенная на экваторе, переместилась относительно оптической оси фотоаппарата (вследствие вращения Земли вокруг своей оси) примерно на 800 км (длина экватора ≈40 000 км). В результате на снимках, соединенных попарно и разнесенных по времени, получилось объемное (так называемое стереоскопическое) изображение Земли. Это позволило (с помощью измерений на специальных фотограмметрических приборах) определить пространственные координаты дуг произвольных сечений объемного изображения Земли и, зная расстояние от точки фотографирования до центра Земли, вычислить размеры Земли.

Для самой Земли это практически не нужно, так как для нее геодезические методы дают достаточно хорошие результаты. Но это позволило разработать методику определения размеров космических тел по измерениям на глобальных фотографиях и применить эту методику, например, для определения размеров Луны (после фотографирования ее с расстояний около 10 тыс. км межпланетными автоматическими станциями «Зонд-6, 7,8»).

Данная методика подходит и для определения размеров других планет Солнечной системы.

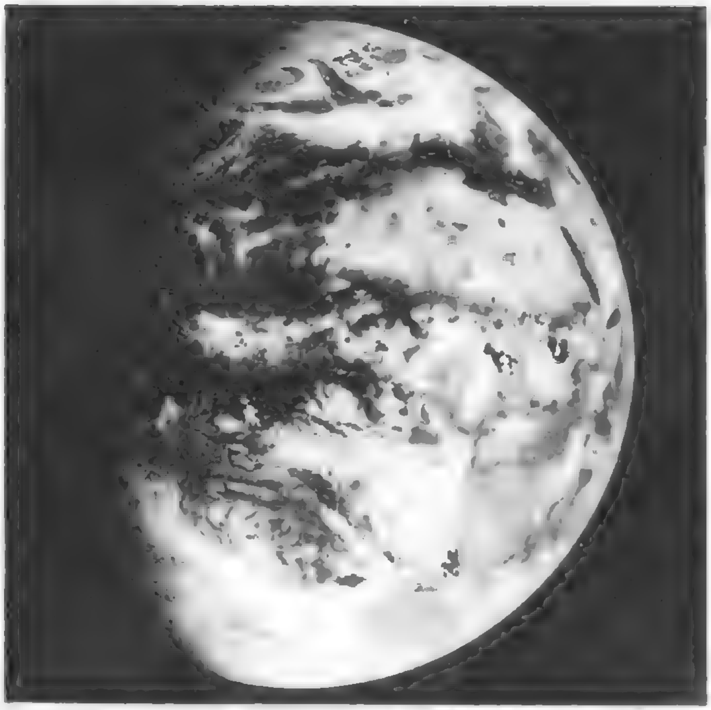


Рис. 1. Освещенная часть земной поверхности ограничена меридианами 60° восточной и 50° западной долготы. Терминатор (граница света и тени на планете) проходит примерно по меридиану 50° западной долготы. На снимке хорошо просматриваются очертания материков и водных поверхностей, не закрытых облачностью: районы Средиземного, Черного, Каспийского и Аральского морей, Аравийский полуостров, Иранское нагорье и большая часть Африки. Значительная часть земной поверхности закрыта облачностью различной структуры — слоисто-кучевой, кучевой, высококучевой, перисто-кучевой и разорванной. В северных широтах земного шара хорошо просматриваются два мощных циклонических образования.

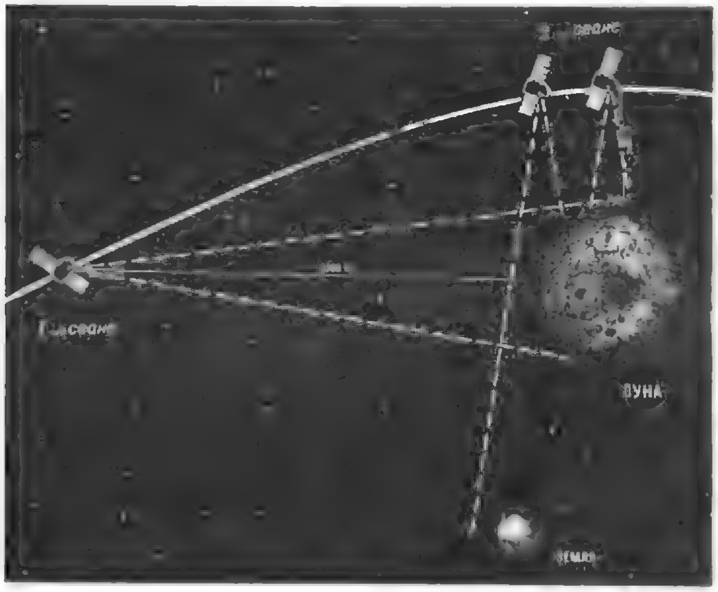


Рис. 2. В первом сеансе фотографирования после ориентации по Солнцу и звездам станция «Зонд-6» была развернута таким образом, что оптическая ось фотоаппарата оказалась направленной на центр Луны, примерно на границу между ее видимой и невидимой с Земли частями, при этом в кадр попал почти весь лунный диск. Второй сеанс фотографирования проводился для получения снимков в возможно более крупном масштабе с целью картографирования невидимой части Луны. При этом в поле зрения попала и Земля. Во время первого сеанса расстояние до Луны составляло 9,3 тыс. км, во время второго — от 3,3 до 2,4 тыс. км и до Земли — 388 тыс. км.

Через два месяца после возвращения станции «Зонд-5» (в ноябре 1968 года) к Луне стартовала советская автоматическая станция «Зонд-6», которая выполнила в соответствии с программой полета два сеанса фотографирования Земли и Луны (рис. 2) и совершила виртуозный спуск на поверхность Земли. В результате полета станции «Зонд-6» впервые в мире были получены и доставлены на Землю снимки обратной стороны Луны, позволившие приступить к составлению топографических карт.

Для автоматических станций «Зонд» характерны высокая точность и совершенство системы ориентации и стабилизации. Так, точность выдерживания оптической оси съемочной камеры в процессе сеанса фотографирования, вычисленная по не-

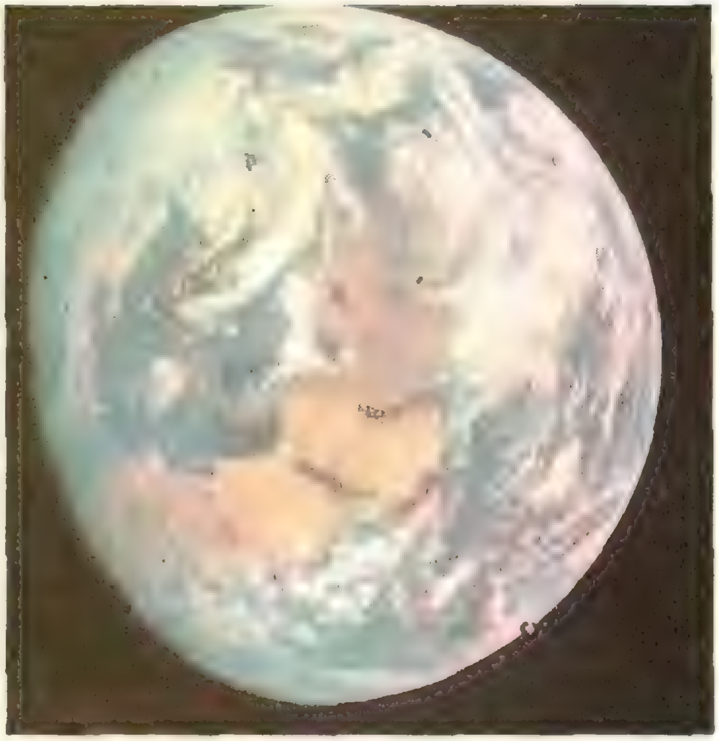


Рис. 3. Снимок планеты Земля получен с помощью автоматической станции «Зонд-7» с расстояния 78 тыс. км. На снимке хорошо видны территории среднеазиатских республик, Аральское море, озера Балхаш, Иссык-Куль. Отчетливо выделяются горные хребты Памира и Тянь-Шаня. К востоку в просветах между облаками, просматриваются горы Алтая, а далее — озеро Байкал. За границей сплошной облачности, затянувшей весь Кавказ, видны Черное и Азовское моря и Крымский полуостров. Севернее, за грядой облаков, просматриваются очертания Ботнического залива, Карелии и Белого моря. На южной части снимка — территории Ирана, Афганистана, Ирака, Малой Азии и Аравийского полуострова. За Красным морем видны пространства Северной Африки. В момент фотографирования линия терминатора проходила в Атлантическом океане.

совпадению центра диска Земли, изображенного на космическом снимке, с оптическим центром фотоснимка, составляла 30—40 угловых минут.

На борту станций «Зонд» находилась съемочная камера с фокусным расстоянием 400 мм и форматом кадра 13 × 18 см. Она обеспечивала, при полном использовании пленки, получение около двухсот снимков. Доставленная станциями «Зонд-5, 6» фотоинформация по своему качеству значительно превосходит ранее передаваемые телевизионные изображения, снятые с тех же расстояний. Например, в интервале между черным и белым тонами лучшие телевизионные системы передают до 12 тонов различной плотности (градаций). Доставленные станциями фотоснимки позволяют использовать все возможности человеческого глаза — до 60 градаций, а с применением соответствующих приборов — до 100 градаций. Или еще один пример. Фототелевизионная система передает три — пять пар черных и белых штрихов на участке шириной в один миллиметр (так называемая разрешающая способность изображения). Фотографирующая система, установленная на станциях «Зонд», имеет в 10—20 раз большую разрешающую способность, что существенно увеличивает объем полученной информации. При этом значительно уменьшаются и геометрические искажения.

В августе 1969 года и октябре 1970 года состоялись полеты автоматических станций «Зонд-7, 8», во время которых продолжались физические исследования на трассе полета и в окололунном пространстве. Со станции «Зонд-7» впервые были получены цветные фотографии Земли и Луны (рис. 3). Безусловный интерес представляют и черно-белые фотографии (рис. 4).

Какие же научные задачи решались с помощью станций серии «Зонд»?

Это прежде всего наблюдения Луны с близкого расстояния и по направлениям, недоступным для наблюдений с Земли. Искусственные спутники Луны позволяют изучать лунное гравитационное поле. Для

Рис. 4. На черно-белом снимке, полученном при фотографировании с автоматической станции «Зонд-8» с расстояния 9,6 тыс. км, видна та часть поверхности Луны, которая ограничена меридианами 17 (линия терминатора) и 150 западной долготы. Северо-восточную область снимка занимает Океан Бурь. На светлой части фотографии рельефно выделяется Море Восточное с окаймляющими его горами.

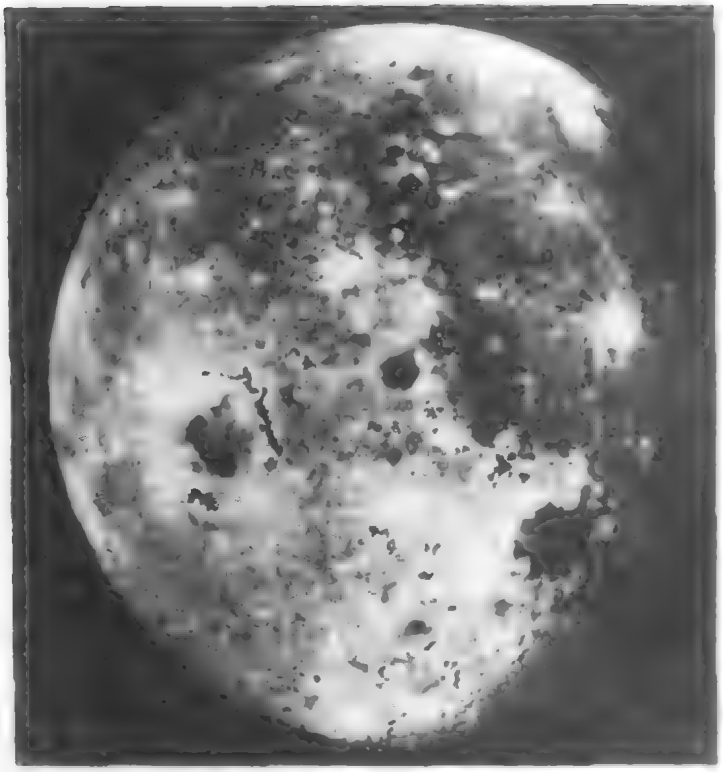
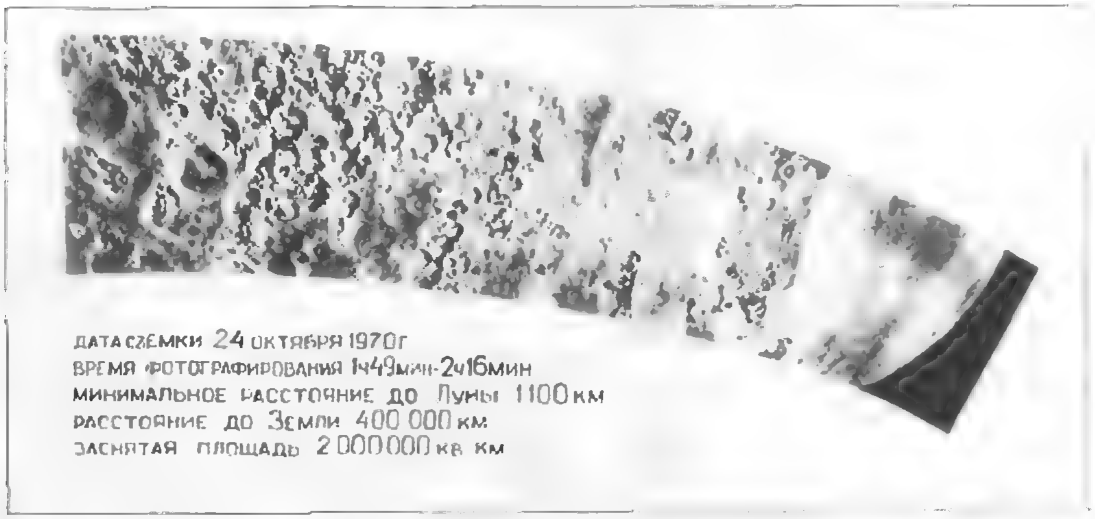


Рис. 5. На рисунке показан вид ландшафта обратной стороны Луны и приведены основные характеристики ее фотографирования с автоматической станции «Зонд-8».


ДАТА СЪЕМКИ 24 ОКТЯБРЯ 1970г
ВРЕМЯ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ 1ч49мин-2ч16мин
МИНИМАЛЬНОЕ РАССТОЯНИЕ ДО Луны 1100 км
РАССТОЯНИЕ ДО Земли 400 000 км
ЗАСНЯТАЯ ПЛОЩАДЬ 2 000 000 кв км

привязки гравитационного поля к ориентирам лунной поверхности, изучения ее физической природы, геологических структур и т. п. необходимо знать форму именно физической поверхности. Фотографирование Луны с помощью станций «Зонд» позволило получить изображения как видимой, так и невидимой с Земли частей лунной поверхности. А это дает возможность построить пространственную модель Луны и определить ее фигуру.

Другой целью фотографирования Луны с «Зондов» было детальное изучение лунной поверхности, в частности, топографии обратной стороны Луны (рис. 5), а также изучение отражательных свойств лунной поверхности.

По фотографическим материалам, полученным с автоматических станций «Зонд», впервые составлена топографическая карта обратной стороны Луны. Оказалось, что невидимая сторона нашего спутника по характеру

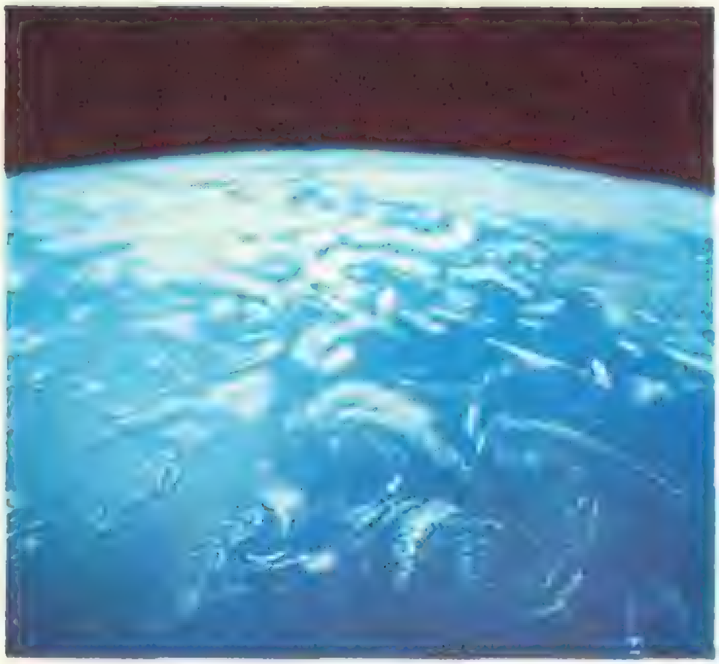


Рис. 6. Снимок акватории восточной части Атлантического океана получен с борта научной орбитальной станции «Салют-3». На первом плане над необозримым пространством океана, сливаясь, закручиваются отдельные спирали слоисто-кучевых облаков. На втором плане до линии горизонта простирается мощный покров облачности с незначительными просветами морской глади. Тон изображения облаков неоднородный: от голубовато-белого до ярко-белого.

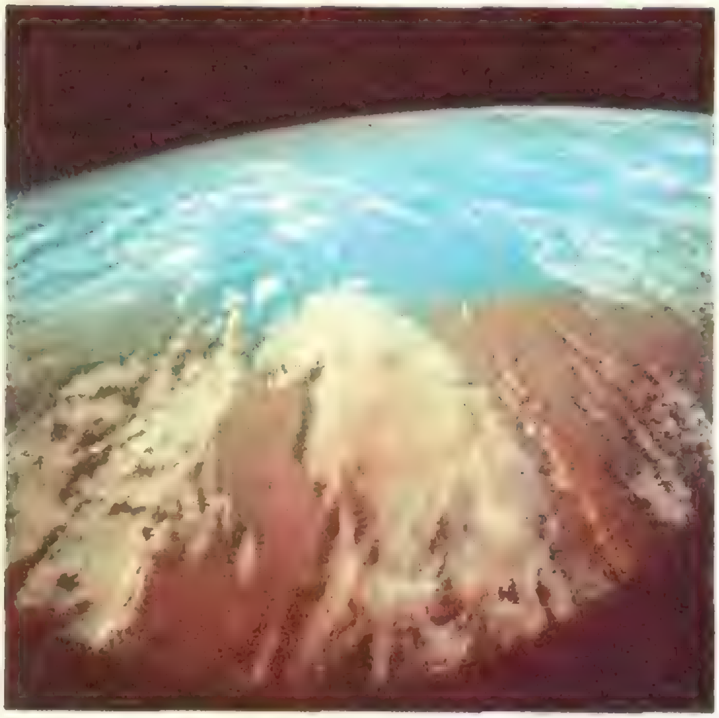


Рис. 7. На космическом снимке Земли, полученном при съемке с орбитальной станции «Салют-3», сквозь слои облачных образований просматривается Прикаспийская низменность, северная и восточная части акватории Каспийского моря, русло реки Волги, ее дельта. К востоку от дельты Волги на фоне сплошного облачного покрова заметно темное пятно — «глаз» циклона (облачность наиболее пониженного давления). Растительный покров в пределах Прикаспийской низменности на снимке можно различить по красным и пурпурным пятнам, водная гладь Каспийского моря имеет голубой тон, облачность — от светло-серого до ярко-белого.

ландшафта совершенно не похожа на ту, которую видели и изучали астрономы. На ней мало морей, все пространство занято кольцевыми образованиями. Это различие в строении двух полушарий Луны еще не нашло исчерпывающего объяснения и стоит перед учеными очередной, ждущей решения, задачей.

К числу научно-прикладных задач экспериментов принадлежит составление более точных карт Луны, необходимых для научных исследований, ориентировки во время полетов в окололунном пространстве и привязки орбит космических аппаратов к физической поверхности Луны.

Непосредственное фотографирование Земли с больших высот тоже позволяет получить ряд важных научных данных. Например, по снимкам земной поверхности можно установить взаимное пространственное положение крупных метеорологических структур (циклонов, антициклонов, облачных образований и т. д.). Снимки Земли из космоса позволяют изучить отражательную способность земной поверхности. Как известно, отражение света от различных веществ происходит по-разному. Это дает возможность при изучении снимков распознавать (дешифрировать) сфотографированные объекты по так называемым коэффициентам яркости. Так, по фотографиям Земли и величинам коэффициентов яркости рек, озер, морей, океанов, материков, лесных массивов и т. д. можно судить: о водных запасах рек, озер и других водных бассейнов; о запасах и сортах лесных массивов; о величине и качестве пастбищ; о геологическом строении и полезных ископаемых; о почве и о том, какие посевы выгоднее производить на ней; о том, где выгоднее и удобнее проложить трассу шоссейной или железной дорог, газопровода, нефтепровода или судоходного канала.

Выдающиеся полеты советских станций серии «Зонд» со всей убедительностью показали, что на современном этапе многие научные проблемы изучения Луны и Земли могут быть решены с помощью автоматических устройств, многократно доказавших свою эффективность. Однако существуют и такие задачи освоения космического пространства, когда участие человека необходимо и оправдано.

Создание длительно действующей в космосе научной лаборатории, посещаемой в орбитальном полете сменными экипажами, позволяет проводить периодические фотосъемки из космоса, которые способствуют решению актуальных научных и практических народнохозяйственных задач. Для выполнения фотографических экспериментов на борту научных орбитальных станций устанавливается специальный комплекс аппаратуры, производящий съемку в различных диапазонах спектра электромагнитных излучений на различные типы пленок с учетом метеорологической обстановки и фактической орбиты (рис. 6 и 7).

Полученные при фотографировании с орбитальных станций «Салют-1, 3, 4, 5» высокоинформативные космические снимки Земли, обработанные на электронных устройствах, принесли разнообразную информацию о состоянии природной среды в различных районах нашей страны.

Так, по материалам космических съемок составлены десятки карт различных районов нашей страны — структурно-геологических, геоморфологических, почвенных, ландшафтных, грунтовых вод и т. д.

В результате гидрологического изучения космических снимков установлено правильное очертание береговой линии озера Зайсан, изменившейся вследствие создания Бухтарминской ГЭС и водохранилища; выявлены неотразившиеся на картах озера в районе Казахского мелкосопочника и водохранилища (Чарвакское и Токтогульское) в районе Западного Тянь-Шаня; по различному типу водной поверхности на цветных снимках определены границы пресных и соленых вод, вод с различным содержанием взвешенных частиц.

Изучение космических снимков геологами позволило получить новые сведения о строении территории Рудного Алтая (установлено его блоковое строение) и проектировать поиски в этом районе месторождений полиметаллов, обнаружить новые перспективные нефтегазоносные районы (Туранская плита и др.), выполнить оценку гидроэнергетических ресурсов Памира, Тянь-Шаня и Кавказа, получить ценную информацию о ландшафте мелководной акватории Черного, Азовского, Аральского морей и озера Балхаш.

В настоящее время фотографии Земли, полученные из космоса, используются все шире и шире в различных областях науки и практики; такой метод изучения Земли получает все большее признание.

В. Майер

Зеленая красная лампа

В замечательной книге У. Брэгга «Мир света. Мир звука» *) описан красивый опыт, демонстрирующий одно любопытное свойство глаза. Опыт этот настолько прост, что каждый из вас без особых затруднений может повторить его у себя дома.

Прибор для постановки опыта (рис. 1) можно собрать из деталей механического конструктора. На алюминиевом основании (*1*) размером 15 × 60 × 110 мм скобой из жести или алюминия закрепите микроэлектродвигатель (*2*). В отверстия двух стоек (*3*) высотой примерно 60 мм вставьте вал (*4*) со шкивом (*5*) внутренним диаметром 15—25 мм. К торцу вала предварительно должен быть прикреплен картонный диск (*6*) диаметром 100—140 мм (если вал с резьбой, диск можно закрепить двумя гайками с шайбами). На основании прибора расположите алюминиевую стойку (*7*) с отверстием для лампочки (*8*). Наденьте на вал микроэлектродвигателя и шкив резиновое кольцо (*9*). Двигатель подключите к одной или двум последовательно соединенным батарейкам карманного фонаря. По рекомендации Брэгга диск должен вращаться со скоростью 2—3 об/с. Скорость вращения диска в некоторых пределах можно регулировать, притормаживая шкив пальцем.

После предварительного испытания подготовьте прибор для опыта. В картонном диске вырежьте сектор с дугой примерно 45° и оклейте одну половину оставшегося сектора белой бумагой, а другую — черной (рис. 2). Стеклянный баллон лампочки карманного фонаря, рассчитанной на напряжение 3,5 В, покройте красной нитроэмалью (можно попробовать использовать лак для ногтей). Когда краска высохнет, вверните лампочку в отверстие стойки прибора и подключите к ее электродам проводники. Перед диском на расстоянии 20—50 см от него расположите настольную лампу так, чтобы свет от нее падал на диск. Подсоедините лампочку к батарейке и включите микроэлектродвигатель.

Если направление вращения диска такое, что при каждом обороте лампочку сначала перекрывает черная часть диска, то при любых освещенностях и скоростях вращения лампочка выглядит красной. Если, поменяв полярность источника питания, изменить направление вращения, то есть заставить крутиться диск так, чтобы лампочку перекрывала сначала его белая часть, то лампочка будет... зеленой или сине-зеленой! Если условия эксперимента (скорость вращения диска, краска, которой покрыта лампочка) подобраны недостаточно хорошо, лампочка выглядит не сине-зеленой, а светло-голубой с белесоватым оттенком.

Попробуем объяснить результат опыта. Диск вращается быстро, и когда прорезь в нем оказывается перед красной лампочкой, на сетчатке глаза на мгновение получается красное изображение лампочки. Если при дальнейшем вращении диска лампочку перекрывает его белая половина, то на сетчатку глаза попадает рассеянный белый свет настольной лампы. Белый цвет действует на сетчатку в течение более длительного промежутка времени, чем красный цвет. После того как перед глазом прокрутится черная половина диска, процесс повторяется. При этом лампочка воспринимается сине-зеленой.

---

*) У. Брэгг. Мир света. Мир звука. М., «Наука», 1967.

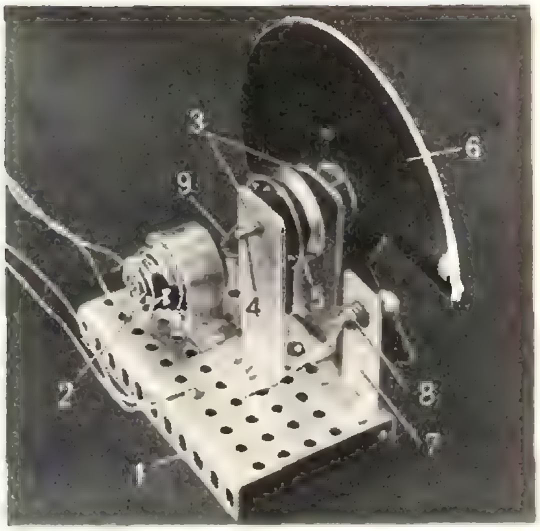


Рис. 1.

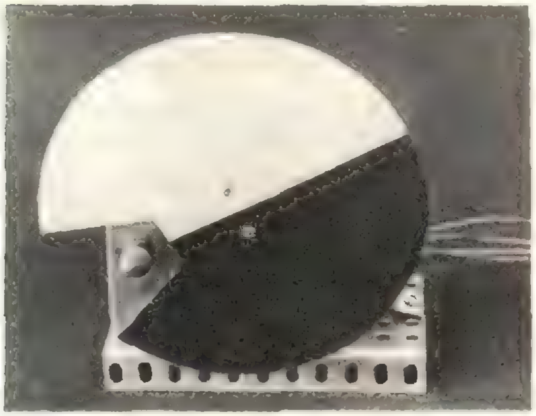


Рис. 2.

Если «смешать» сине-зеленый цвет и красный цвет, то получится белый цвет. Эти цвета называют дополнительными (сине-зеленый цвет дополнителен красному и наоборот). Таким образом, в опыте глаз вместо истинного цвета лампочки воспринимает дополнительный ему цвет.

Можно высказать предположение, что при кратковременном освещении сетчатки красным светом сетчатка в дальнейшем лучше реагирует на все другие спектральные составляющие белого света. Она как бы «утомляется» красным светом, и когда освещается белым светом, то воспринимает его без «красной компоненты», то есть только дополнительный красному — сине-зеленый свет. Поскольку время освещения сетчатки белым светом значительно больше времени освещения красным светом, лампочка выглядит сине-зеленой, а не красной.

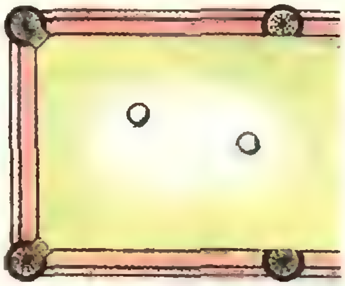
Это предположение подтверждает результат опыта, в котором диск вращается в обратную сторону — так, что лампочку перекрывает сначала его черная половина. Действительно, область сетчатки, где получается красное изображение лампочки, за время, в течение которого перед глазом находится черная часть диска, успевает «отдохнуть». Поэтому, когда перед глазом оказывается белая половина диска, все цвета, входящие в состав белого света, воспринимаются глазом одинаково хорошо. Так как красный свет воздействует на сетчатку более длительное время, чем остальные компоненты белого света (сначала воздействует красная компонента белого света, а затем — красный свет лампочки), то лампочка выглядит красной.

Задачи наших читателей

1. В мокрую погоду при быстрой езде на велосипеде без «крыльев» на спине велосипедиста остается грязная полоса от попавших на нее брызг. Почему?

Г. Барванян (г. Очамчира)

2. При игре в биллиард иногда возникает ситуация, позволяющая загнать одним ударом два шара в разные лузы. Можно ли сделать это при таком положении шаров, которое показано на рисунке?



Ю. Балашов (г. Москва)

3. Тонкая плоско-выпуклая линза, имеющая в воздухе фокусное расстояние F, встроена в стенку аквариума, в который налита жидкость с коэффициентом преломления n. На каком расстоянии от линзы будет собираться параллельный пучок света, падающий на сферическую поверхность линзы?

А. Шведов (г. Запорожье)

А. Егоров

Уравнения и пределы

1. Простой пример

Для приближенного вычисления квадратного корня из положительного числа a поступают следующим образом (см., например, книгу «Алгебра и начала анализа 9», с. 83). В качестве первого приближения берут произвольное число $a_0 > \sqrt{a}$. Следующее приближение a_1 находят по формуле

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{a}{a_0}\right),$$

по a_1 находят a_2:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right)$$

и вообще

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right).$$

Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$. Тогда $s > 0$ и $s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$, то есть $s^2 = a$, а так как $s > 0$, то $s = \sqrt{a}$.

Если взять достаточно большое n, то a_n будет достаточно мало отличаться от $\sqrt{a}$.

Упражнения

1. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает.

2. Оцените разность $|a_n - \sqrt{a}|$.

Проанализируем наш способ вычисления последовательных приближений для $\sqrt{a}$. Последовательность приближений $\{a_n\}$ задавалась рекуррентно: $a_n = \varphi(a_{n-1})$, где $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Установив сходимость последовательности $\{a_n\}$, мы заключили, что ее предел s удовлетворяет равенству $s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$, то есть является корнем уравнения

$$\varphi(x) = x. \qquad (1)$$

На рисунке 1 изображен график функции $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, $x > 0$, и показаны три первых члена последовательности

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right). \end{cases}$$

Упражнение 3. Выразите a_n через n, если $a_0 = 1$ и а) $a_n = a \cdot a_{n-1}$; б) $a_n = a^{a_{n-1}}$; в) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$; г) $a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1 + a_{n-1}^2}}$; д*) $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$.

2. Уравнения и пределы

Пусть нам нужно решить уравнение (1), где φ — некоторая функция. Возьмем произвольное число $a_0 \in D(\varphi)$ и определим рекуррентно последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \varphi(a_{n-1})$. Предположим, что $a_n \in D(\varphi)$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

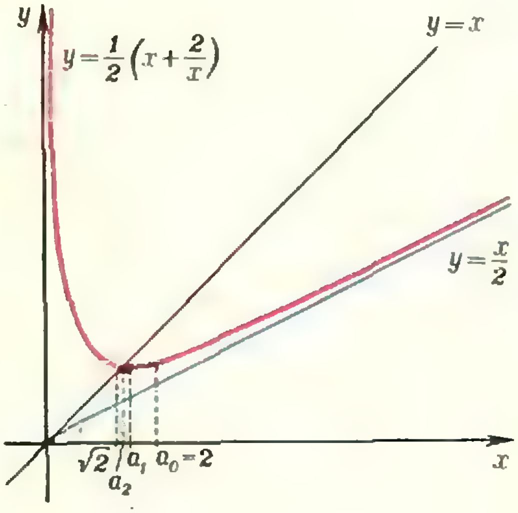


Рис. 1.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится к* s *и функция* φ *непрерывна при* $x=s$, *то* s *является корнем уравнения* (1).

Эта теорема и была фактически применена в п. 1. Выбор первого приближения (или «нулевого члена» последовательности) диктуется соображениями удобства — a_0 естественно брать поближе к искомому корню.

Как будет видно из дальнейшего, умение исследовать разрешимость уравнения (1) позволяет иногда решить вопрос о сходимости соответствующей последовательности $\{a_n\}$.

Упражнения

4. Исследуйте сходимость последовательностей:

а) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

б) $a_n = \sin a_{n-1}$, $a_0 = a \in]0;\ \pi[$;

в) $a_n = \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$, $a_0 = 1$.

5. Укажите способ нахождения положительного корня уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0. \qquad (1)$$

6. (Способ приближенного вычисления $\sqrt[3]{a}$.) Последовательность $\{a_n\}$ строится по следующему правилу:

$$\begin{cases} a_0 = a > 0, \\ a_n = \dfrac{1}{3}\left(2a_{n-1} + \dfrac{a}{a_{n-1}^2}\right). \end{cases}$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{a}$.

7. Пусть $a>0$, $b>0$, $p>0$, $q>0$. Рассмотрим последовательность

$$\frac{a}{b},\ \frac{b}{pa+qb},\ \frac{pa+qb}{pb+q(pa+qb)},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots,$$

где $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = pa_n + qb_n$. Существует ли у этой последовательности предел? (Эту задачу предложил наш читатель *В. Фищук.*)

3. Главный пример

Остальная часть статьи посвящена вопросу о сходимости последовательности

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, \\ \alpha_n = a^{\alpha_{n-1}}, \end{cases} \qquad (2)$$

то есть $1,\ a,\ a^a,\ a^{a^a},\ a^{a^{a^a}},\ \ldots$. Эта сходимость зависит, конечно, от параметра a.

Оказывается, для больших a выяснить существование предела сравнительно легко, а для маленьких — гораздо труднее. Приведем несколько примеров.

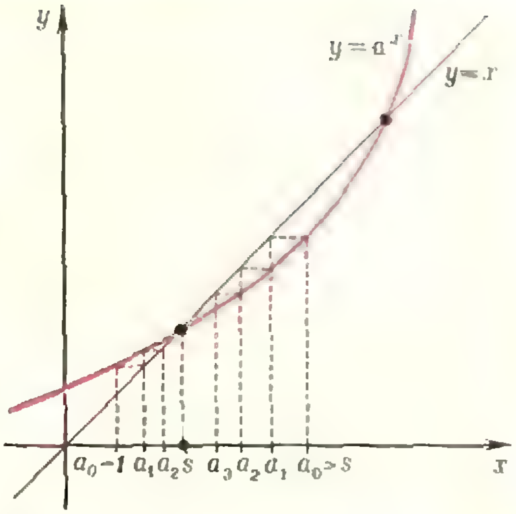


Рис. 2.

При $a = 2$ получаем последовательность

$$1;\ 2;\ 4;\ 16;\ 65536;\ \ldots$$

(она, очевидно, расходится).

При $a = 1{,}5$ — последовательность

$$1;\ 1{,}5;\ 2{,}106;\ 2{,}349;\ 2{,}592;\ \ldots;$$
$$\alpha_{11} \approx 10{,}99;\quad \alpha_{12} \approx 86{,}163;$$
$$\alpha_{13} > 10^{16}$$

(она тоже расходится, но здесь с самого начала это далеко не так очевидно).

При $a = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ — последовательность

$$1;\ \sqrt{2};\ 1{,}632;\ 1{,}761;\ \ldots;$$
$$\alpha_8 \approx 1{,}966;\ \alpha_{25} \approx 1{,}9999$$

(тут, как мы увидим, предел существует и равен 2).

При $a = 1$

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

(предел, очевидно, существует и равен 1).

При $a = 0{,}5$

$$1;\ 0{,}5;\ 0{,}707;\ 0{,}613;\ 0{,}654;\ \ldots;$$
$$\alpha_{12} \approx 0{,}641206;\ \alpha_{13} \approx 0{,}641177.$$

При $a = 0{,}01$

$$1;\ 0{,}01;\ 0{,}955;\ 0{,}0123;\ 0{,}945;$$
$$0{,}013;\ \ldots;$$
$$\alpha_{15} \approx 0{,}013;\quad \alpha_{18} \approx 0{,}941$$

(поведение двух последних последовательностей мы прокомментируем в конце статьи).

Из теоремы 1 мы знаем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = s$, то s является корнем

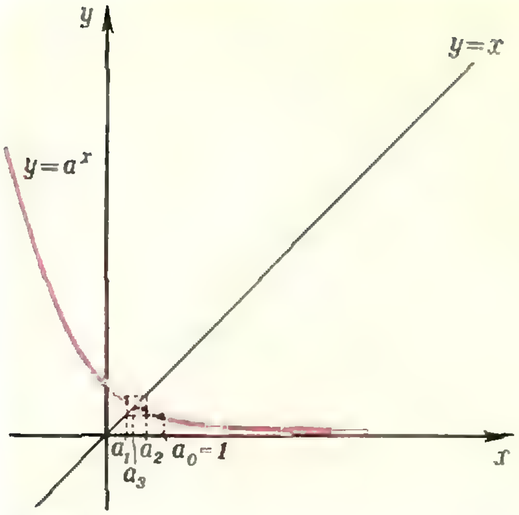


Рис. 3.

уравнения

$$a^x = x \tag{3}$$

(функция $x \to a^x$ непрерывна во всех точках числовой прямой). Следовательно, если уравнение (3) при некотором a не имеет корней, то соответствующая последовательность (2) расходится.

На рисунке 2 изображен график функции $y = a^x$ и первые члены последовательности (2) — при $a > 1$ и предположении, что уравнение (3) имеет корни; на рисунке 3 — то же при $0 < a < 1$.

4. a>1

При $a > 1$ последовательность (2) монотонно возрастает (проверьте!).

Теорема 2. *При $a > 1$ последовательность (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет хотя бы один корень. В этом случае ее предел равен меньшему из корней уравнения (3).*

Доказательство. Мы только что отмечали, что если последовательность (2) сходится, то ее предел является корнем уравнения (3). Пусть теперь уравнение (3) имеет корни. Обозначим через s_0 наименьший корень. Покажем, что $\alpha_n < s_0$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Легко видеть, что $s_0 > 1 = \alpha_0$. Если же $s_0 > \alpha_n$, то $s_0 = a^{s_0} > a^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что последовательность (2) сходится, причем, очевидно, к s_0. Теорема доказана.

5. 0<a<1

В этом случае последовательность (2) ограничена: $0 < \alpha_n < 1$. К сожалению, она не монотонна. В самом деле, поскольку $0 < a < 1$, функция $y = a^x$ убывает, и $\alpha_2 = a^a < 1 = \alpha_0$, следовательно, $\alpha_3 = a^{a^a} > a^1 = a$, то есть $\alpha_3 > \alpha_1$. Далее, $\alpha_4 = a^{\alpha_3} < a^{\alpha_1} = \alpha_2$, то есть $1 = \alpha_0 > \alpha_2 > \alpha_4$. Пользуясь методом математической индукции, легко доказать, что подпоследовательность $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots, \alpha_{2n-1}, \ldots$ нашей последовательности монотонно возрастает, а подпоследовательность $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots$ монотонно убывает. При этом всегда $\alpha_{2n} > \alpha_{2n-1}$. По теореме Вейерштрасса каждая из этих подпоследовательностей имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = s_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n} = s_2$. Ясно, что $s_2 \geqslant s_1$ и последовательность (2) будет сходящейся в том и только в том случае, когда $s_1 = s_2$ (докажите это!).

Что можно сказать про числа s_1 и s_2? Поскольку $\alpha_{2n+2} = a^{a^{\alpha_{2n}}}$, $\alpha_{2n+1} = a^{a^{\alpha_{2n-1}}}$ и функция $x \to a^{a^x}$ непрерывна во всех точках числовой прямой, числа s_1 и s_2 являются корнями уравнения

$$a^{a^x} = x. \tag{4}$$

Теорема 3. *Числа s_1 и s_2 являются, соответственно, меньшим и большим корнями уравнения* (4).

Доказательство. Пусть s — произвольный корень уравнения (4). Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\alpha_{2n-1} < s < \alpha_{2n}$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Прежде всего заметим, что $s < 1$. В самом деле, если $s \geqslant 1$, то, ввиду $a^s > 0$, $a^{a^s} < 1$, то есть $a^{a^s} \neq s$. Кроме того, очевидно, $s > 0$. Из $0 < s < 1$ следует $a^0 > a^s > a^1$, то есть $\alpha_0 > a^s > \alpha_1$. Значит, $a^{\alpha_0} < a^{a^s} < a^{\alpha_1}$, то есть $\alpha_1 < s < \alpha_2$. Индукционный шаг проделывается аналогично.

Следствие 1. *Если уравнение (4) имеет более одного корня, то последовательность (2) расходится.*

Следствие 2. *Если уравнение (4) имеет ровно один корень, то последовательность (2) сходится, и предел*

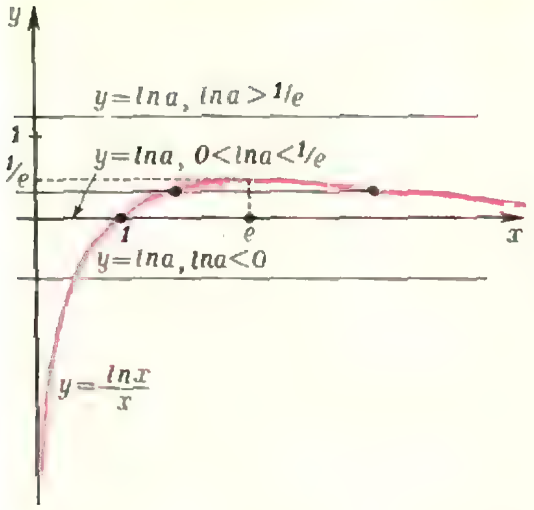


Рис. 4.

этой последовательности есть корень уравнения (3).

Легко видеть, что всякий корень уравнения (3) удовлетворяет также и уравнению (4). Но при $0<a<1$ уравнение (3), очевидно, имеет корень (нарисуйте графики!). Значит, при таких a и уравнение (4) обязательно имеет хотя бы один корень.

Упражнение 8. Рассмотрим последовательность $\alpha_0 = x > 0$, $\alpha_n = a^{\alpha_{n-1}}$. При каких x эта последовательность сходится? (Рассмотрите отдельно случаи $a>1$ и $0<a<1$.)

Итак, вопрос о сходимости последовательности (2) сводится к вопросу о числе корней уравнения (3) при $a>1$ и уравнения (4) — при $0<a<1$.

6. Исследование уравнения (3) при a>1

Уравнение (3) равносильно уравнению

$$\frac{\ln x}{x} = \ln a. \qquad (5)$$

Построим график функции $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 4). Эта функция определена при $x>0$, достигает максимума, равного $1/e$, при $x=e$, убывает при $x>e$ и возрастает при $0<x<e$.

Упражнение 9. Проведите подробное исследование функции $y=\frac{\ln x}{x}$.

Следовательно, при $\ln a>1/e$, то есть $a>e^{1/e}$, уравнение (5) корней не имеет.

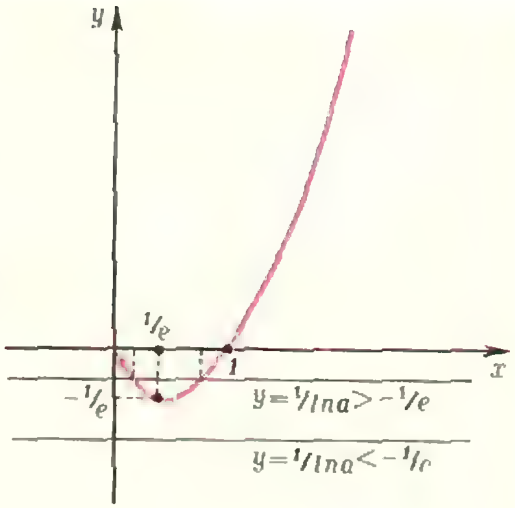


Рис. 5.

При $0<\ln a<1/e$, то есть $1<a<e^{1/e}$, уравнение (5) имеет два корня.

При $a=e^{1/e}$ оно имеет один корень.

Заметим для дальнейшего, что при $\ln a\leqslant 0$, то есть $0<a\leqslant 1$, уравнение (5) имеет единственный корень.

7. Исследование уравнения (4) при 0<a<1

Мы уже знаем, что все корни уравнения (4) заключены в интервале]0; 1[. Уравнение (4) равносильно уравнениям $a^x=\log_a x$, $x=\log_a\log_a x$ или $x=\frac{1}{\ln a}\ln\frac{\ln x}{\ln a}$. Обозначим через φ функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln a}\ln\frac{\ln x}{\ln a}-x.$$

Мы хотим выяснить, сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $\varphi(x)=0$, равносильное уравнению (4). Чтобы это сделать, нужно посчитать, сколько существует точек пересечения графика функции φ с осью абсцисс.

Прежде всего заметим, что к этим точкам пересечения заведомо принадлежит точка s_0, где s_0 — единственный корень уравнений (3), (5), — см. замечания в конце пп. 6 и 5.

Исследуем функцию φ.

Так как $\ln a<0$, функция φ определена при $0<x<1$. При $x\to 0$ (справа) $\varphi(x)\to-\infty$; при $x\to 1$ (слева) $\varphi(x)\to+\infty$.

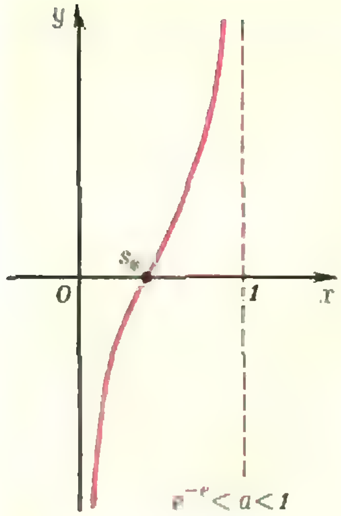


Рис. 6.

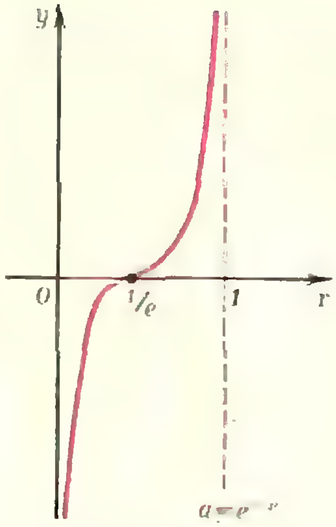


Рис. 7.

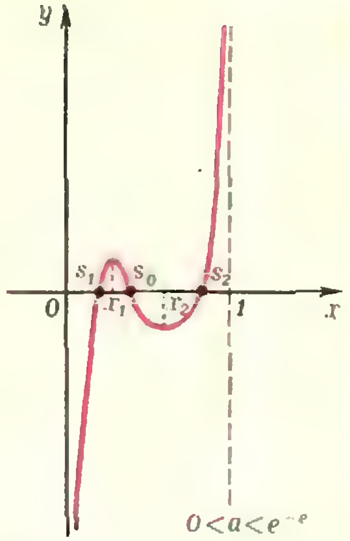


Рис. 8.

Найдем экстремумы функции φ; для этого исследуем ее производную:

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x\ln x\ln a}-1.$$

Приравняв ее к нулю, мы получим уравнение

$$x\ln x=\frac{1}{\ln a}. \qquad (6)$$

На рисунке 5 изображен график функции $y=x\ln x$.

Упражнение 10. Исследуйте функцию $y=x\ln x$ и постройте ее график.

Мы видим, что при $x=1/e$ функция $y=x\ln x$ достигает минимума, равного $-1/e$. Поэтому, если $1/\ln a<-1/e$, то есть $\ln a>-e$ или $a>e^{-e}$, то уравнение (6) корней не имеет. Так что при $e^{-e}<a<1$ производная функции φ строго больше нуля, то есть при таких значениях a функция φ строго возрастает. Значит, уравнение $\varphi(x)=0$ при $e^{-e}<a<1$ имеет единственный корень s_0 (примерный график функции φ для $e^{-e}<a<1$ изображен на рисунке 6).

Если $a=e^{-e}$, то $\varphi'(x)=0$ при $x=1/e$ и $\varphi'(x)>0$ при всех остальных $x\in\,]0;\,1/e[\,\cup\,]1/e;\,1[$.

В этом случае φ тоже строго возрастает во всей области определения, и уравнение $\varphi(x)=0$ по-прежнему имеет единственный корень $x=1/e$ (график функции φ для $a=e^{-e}$ изображен на рисунке 7).

Итак, если $e^{-e}\leqslant a<1$, уравнение (4) имеет ровно один корень.

Если же $0<a<e^{-e}$, то уравнение (6) имеет два корня: x_1 и x_2 (рис. 5). Причем при $x\in\,]0;\,x_1[\,\cup\,]x_2;\,1[$ производная $\varphi'(x)$ положительна, а при $x\in\,]x_1;\,x_2[$ — отрицательна, так что x_1—точка максимума, а x_2 — точка минимума функции φ; значит, φ при $x\in\,]0;\,x_1[$ возрастает и при $x\in\,]x_2;\,1[$ возрастает, а при $x\in\,]x_1;\,x_2[$ убывает (разберитесь в этом!).

Покажем теперь, что $s_0\in\,]x_1;\,x_2[$. Для этого достаточно доказать, что $\varphi'(s_0)<0$. Имеем

$$\varphi'(s_0)=\frac{1}{s_0\ln s_0\ln a}-1=\frac{1}{(\ln s_0)^2}-1$$

(так как $\frac{\ln s_0}{s_0}=\ln a$). Докажем, что $\ln s_0<-1$ (тогда $\varphi'(s_0)<0$). Для этого обратимся вновь к функции $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 4). Поскольку она при $0<x<1$ возрастает, а $\ln a<-e$, корень s_0 уравнения (5) лежит левее корня уравнения $\frac{\ln x}{x}=-e$, то есть левее точки e^{-1}. Значит, $s_0<1/e$ и $\ln s_0<-1$.

Итак, про функцию φ нам теперь известно, что

1) $\varphi(x)\to-\infty$ при $x\to 0$;

2) $\varphi(x)\to+\infty$ при $x\to 1$;

3) φ возрастает на промежутке $]0;\,x_1[$, в точке x_1 имеет максимум, убывает на промежутке $]x_1;\,x_2[$, в точке x_2 имеет минимум и снова возрастает на промежутке $]x_2;\,1[$;

4) φ обращается в нуль в точке s_0 промежутка $]x_1;\ x_2[$. Этих сведений достаточно, чтобы нарисовать примерный график функции φ для $0 < a < e^{-e}$; мы видим, что он пересекает ось абсцисс, кроме точки s_0, еще в двух точках s_1 и s_2 (рис. 8), так что в случае $0 < a < e^{-e}$ уравнение $\varphi(x) = 0$, а следовательно, и уравнение (4) имеет три корня: $s_1 < s_0 < s_2$.

Вопрос об уравнении $a^x = \log_a x$ в «Кванте» уже обсуждался. В частности, разбиралось уравнение $(1/16)^x = \log_{1/16} x$. Из нашего исследования следует, что у этого уравнения ровно три корня. Два из них легко найти подбором: $x_1 = {}^1/_4$ и $x_2 = {}^1/_2$.

Упражнение 11. Исследуйте разрешимость уравнений в зависимости от параметра a:

1) $x^3 - 3x^2 + a = 0$; 2) $x^4 - ax + 1 = 0$; 3) $a^x = x^2$; 4) $a^x = 2x + 1$; 5) $\cos x \times \cos 3x = a$, $x \in\ ]0;\ \pi[$.

8. Подведем итог

Теорема 4. *Последовательность (2) сходится тогда и только тогда, когда*

$$(1/e)^e \leqslant a \leqslant e^{1/e}$$

$[(1/e)^e = 0{,}065988\ \ldots;\ e^{1/e} = 1{,}444668\ \ldots$; случай $a = 1$ очевиден$]$.

Возвращаясь к последовательностям, с которых мы начинали п. 3 (см. с. 35), мы можем теперь сказать:

при $a = 2$; 1,5 и 0,01 последовательность (2) расходится;

при $a = \sqrt{2}$ и 0,5 последовательность (2) сходится.

* * *

Ниже мы публикуем несколько необычных «уравнений» с выражениями $f_\infty(x)$, содержащими бесконечное число операций. Прежде чем их решать, надо разобраться, как понимать такие выражения. Об этом рассказано в статьях А. Егорова и Г. Дорофеева, Н. Розова (см. с. 34 и с. 60 этого номера): такое $f_\infty(x)$ нужно понимать как предел при $n \to \infty$ выражения $f_n(x)$, в котором наша операция встречается n раз. В каждой из предлагаемых задач требуется провести целое исследование: аккуратно определить, о каком именно выражении идет речь, затем найти все «подозрительные» x и доказать существование предела.

1. $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = 1$.
2. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\ldots}}}} = 3$.
3. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}} = 2$.
4. $\log_2(3^x + \log_2(3^x + \log_2(3^x \ldots))) = 5$.
5. $\sqrt{2 + x\sqrt{2 + x\sqrt{2 + \ldots}}} = 14$.
6. $(x+1)^{(x+1)^{(x+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$.
7. $\sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \ldots}}} = 6$.

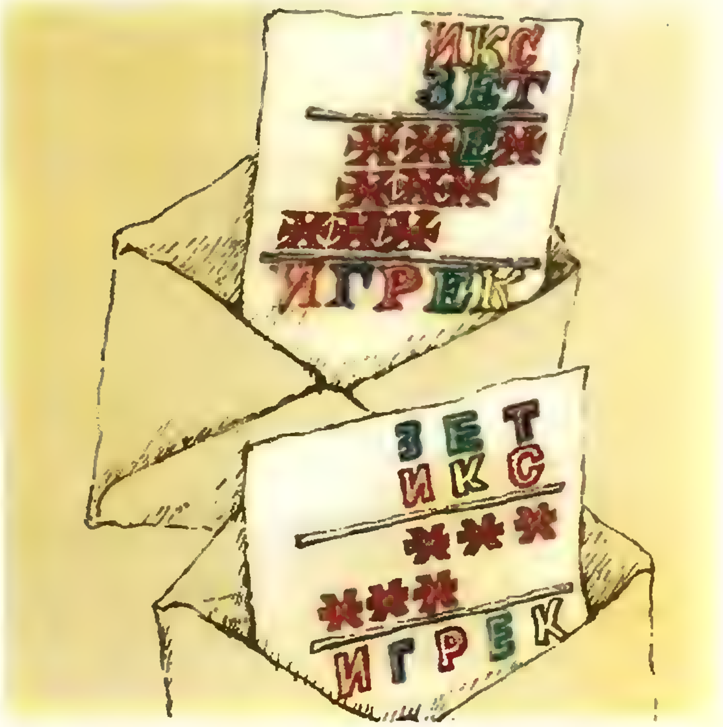
Н. Федин

Вот это близнецы!

Семья математических задач-близнецов пополнилась еще одной поистине фантастической парой. Почему фантастической?

Во-первых, потому, что у этих «близнецов» разные родители. Одного нам «подкинул» Э. Рекстин из Риги (первое письмо), другого — В. Чайковский из Бердянска. В каждом примере одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, разные цифры — разными буквами, звездочка может быть любой цифрой. Каждый пример расшифровывается единственным образом.

Во-вторых, эти близнецы... впрочем, расшифруйте их и посмотрите, что получится.



задачник кванта

Задачи

M466—M470; Ф478—Ф482

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 декабря 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M466, M467» или «Ф478». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу.

M466. Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на 1 г (в ту или другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс одной и другой чашки. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Как это сделать?

С. Фомин

M467. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $|AD|:|DC| = |BE|:|EA| = 1:2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC — прямой.

А. Краснодемская

M468. Точки A, B, C и D плоскости таковы, что для любой точки M этой плоскости скалярные произведения векторов $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ не равны друг другу. Докажите, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. Верно ли обратное утверждение?

Ю. Ионин

M469. а) Уравнение $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ имеет четыре различных вещественных корня. Докажите, что $ab < 0$.

б*) Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{k-1}x^{n-k+1} + a_{k+1}x^{n-k-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет n различных вещественных корней. Докажите, что $a_{k-1}a_{k+1} < 0$.

В. Вавилов

M470*. Докажите равенства

а) $$\frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} - \ldots + \frac{(-1)^k}{C_n^k} + \ldots + \frac{(-1)^n}{C_n^n} = \frac{(n+1)(1+(-1)^n)}{n+2};$$

б) $$\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2}+\frac{1}{C_n^3}+\ldots+\frac{1}{C_n^n}=$$
$$=\frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}\right).$$

Л. Курляндчик, А. Лисицкий

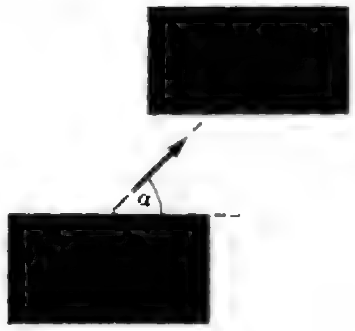


Рис. 1.

Ф478. На кубик, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, налетает точно такой же кубик, причем кубики сталкиваются своими параллельными гранями. Скорость налетающего кубика до столкновения была направлена под углом α к боковым граням (рис. 1). Как будут двигаться кубики после столкновения, если коэффициент трения между гранями кубиков равен μ?

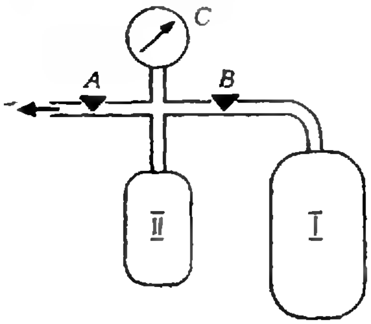


Рис. 2.

Ф479. Для определения неизвестного объема V_1 баллона I собирают схему, приведенную на рисунке 2. Объем баллона II равен V_2 и $V_2 \ll V_1$.

Сначала систему откачивают до давления p_0, близкого к нулю. Затем закрывают кран B и заполняют баллон I газом до давления p_a. После этого закрывают кран A, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_1 манометром C. Затем при закрытом кране B вновь наполняют баллон газом до давления p_a, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_2. Эту операцию повторяют n раз. Покажите, что отношение $\frac{p_n-p_0}{np_a}$ есть величина постоянная и равная $\frac{V_2}{V_1+V_2}$.

А. Митрофанов

Ф480. Корабль приводится в движение водометным двигателем, выбрасывающим с кормы струю воды со скоростью $\vec{u}$. Ежесекундно выбрасывается масса воды μ, которая берется из реки. При каком значении скорости корабля к. п. д. двигателя максимален? Силой трения и сопротивлением воды пренебречь.

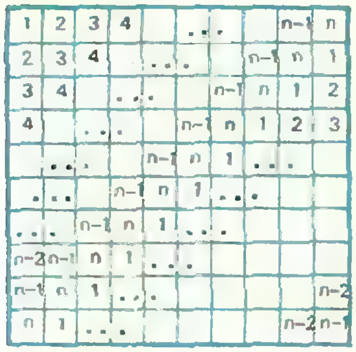
Ф481. В старой аккумуляторной батарее, состоящей из n последовательно соединенных аккумуляторов, резко возросло внутреннее сопротивление одного из аккумуляторов и стало равным $\rho = 10\,r$, где r — внутреннее сопротивление нормального аккумулятора. Считая э. д. с. всех аккумуляторов одинаковыми, определить, при каких сопротивлениях нагрузки R мощность, выделяемая на нагрузке, не изменится при коротком замыкании поврежденного аккумулятора.

Ф482. Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны R_1 поверхности капли в ее верхней точке от радиуса кривизны R_2 в нижней точке, если расстояние между этими точками равно $d = 2\cdot10^{-3}$ м? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7\times\times10^{-2}$ Н/м.

Решения задач

М426—М430; Ф438—Ф441

М426. *Таблица из $n \times n$ клеток заполнена числами от 1 до n так, как показано на рисунке 1. При каком n в ней можно выбрать n клеток так, чтобы никакие две клетки не принадлежали одной строке или одному столбцу и чтобы все числа в выбранных клетках были разные?*



1	2	3	4		...			n−1	n
2	3	4		...			n−1	n	1
3	4		...			n−1	n	1	2
4		...			n−1	n	1	2	3
	...			n−1	n	1	...		
...			n−1	n	1	...			
...		n−1	n	1	...				
n−2	n−1	n	1	...					
n−1	n	1	...						n−2
n	1	...						n−2	n−1

Рис. 1.

Легко видеть, что если n — нечетное, то условию задачи удовлетворяют клетки диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол таблицы (в этих клетках стоят сначала все нечетные, а затем все четные числа).

Докажем, что в случае четного n выбрать n клеток нужным образом нельзя. Занумеруем строки таблицы снизу вверх: 1, 2, …, n, а столбцы — слева направо. Обозначим через a_{ij} число, стоящее на пересечении i-го столбца и j-й строки. Легко доказать, что

$$a_{ij} = \begin{cases} i-j, & \text{если } i > j, \\ i-j+n, & \text{если } i \leqslant j. \end{cases}$$

Поэтому, если все n чисел a_{ij} взять из разных строк и разных столбцов, то сумма их обязана делиться на n (i и j пробегают все значения от 1 до n).

С другой стороны, если все эти n чисел — разные, то это числа 1, 2, …, n. Сумма их равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$ и при четном n на n не делится. Значит, в этом случае выбрать клетки так, как требуется в задаче, нельзя.

[Многие читатели ошибочно считали, что если все n чисел взяты из разных строк и разных столбцов, то это обязательно числа, стоящие по диагонали таблицы (идущие из левого верхнего в правый нижний угол), и доказывали невозможность требуемого выбора (при четных n) только для этого случая.]

А. Ненашев

◆

М427. *а) Докажите, что существует нечетное число n, для которого ни при каком четном k ни одно из чисел бесконечной последовательности*

$$k^k+1, k^{k^k}+1, k^{k^{k^k}}+1, \dots$$

не делится на n.

б) Докажите, что для каждого натурального n существует такое натуральное число k, что каждый из членов бесконечной последовательности

$$k+1, \quad k^k+1, \quad k^{k^k}+1, \quad k^{k^{k^k}}+1, \dots$$

делится на n.

а) Таково, например, число $n=3$. В самом деле, поскольку k — четное число, все числа k^k, k^{k^k}, … — также четные, и любой член нашей последовательности имеет вид $k^{2m}+1=(k^m)^2+1$, где m — натуральное число. Но квадрат любого целого числа либо делится на 3, либо дает в остатке 1, так что число $(k^m)^2+1$ на 3 не делится ни при каком m.

[Некоторые читатели неправильно поняли условие задачи а) и для каждого k находили свое значение n.]

б) Положим $k=2n-1$ и докажем, что любой член последовательности $k+1$, k^k+1, $k^{k^k}+1$, … делится на n.

В самом деле, любое из чисел k^k, k^{k^k}, … при нечетном k является нечетным, так что любой член нашей последовательности имеет вид $k^{2m+1}+1$ (m — натуральное) и делится на $k+1=2n$ [$x^{2m+1}+1=(x+1)(x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}-\dots$ $\dots+(-1)^k x^k+\dots+1)$], что и требовалось доказать.

С. Лавренченко

◆

М428. *В олимпиаде участвуют $(m-1)n+1$ человек. Докажите, что среди них либо найдутся m участников, попарно незнакомых между собой, либо найдется один участник, знакомый не менее чем с n участниками олимпиады. Останется ли верным утверждение задачи, если число участников олимпиады уменьшить на единицу?*

Вначале ответим на последний вопрос: если число участников олимпиады равно $(m-1)n$, то утверждение задачи неверно. Сказанное подтверждает такой пример: на олимпиаду приехали $(m-1)$ команд по n участников в каждой, причем члены каждой команды знакомы друг с другом, а любые два участника из разных команд между собой не знакомы.

Докажем теперь утверждение задачи для $(m-1)n+1$ участников индукцией по числу m.

Для $m=2$ утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для $m-1$ и докажем его для m. Выберем любого участника олимпиады. Он либо знаком не менее чем с n другими участниками, и тогда ничего доказывать не нужно, либо знаком не более чем с $(n-1)$ участником. В этом случае он незнаком не менее чем с $(m-1)n-(n-1)=(m-2)n+1$ участниками. По предположению индукции среди них либо найдутся $(m-1)$ участников, попарно не знакомых между собой — в этом случае они вместе с ранее выбранным образуют группу из m участников, попарно не знакомых друг с другом; либо среди них найдется участник, знакомый не менее чем с n другими участниками олимпиады. Утверждение доказано.

Э. Туркевич

◆

М429. *а) Сколько решений имеет уравнение*

$$[x]-1977\{x\}=1978?$$

(Здесь $[x]$ — целая часть x, а $\{x\}=x-[x]$.)

б) Докажите, что при любых $p\neq 0$ и q уравнение

$$[x]+p\{x\}=q$$

имеет $[|p|]$ или $[|p|]+1$ решений.

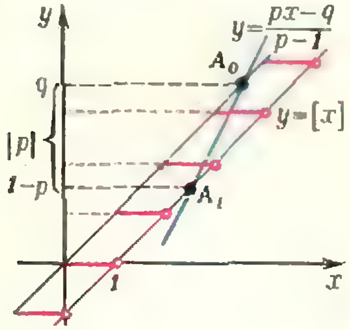


Рис. 2.

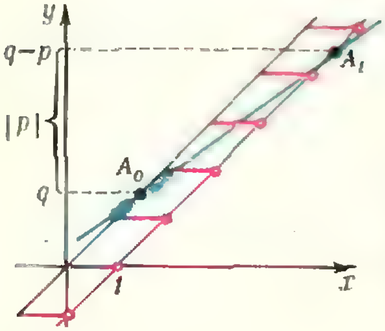


Рис. 3.

Приведем одно из наиболее коротких решений, присланных читателями. Пусть $p\neq 1$. (Случай $p=1$ тривиален: уравнение

$$[x]+p\{x\}=q \qquad (1)$$

превращается в $x=q$.) Тогда (1) эквивалентно

$$[x]+px-p[x]=q \Leftrightarrow [x]=\frac{px-q}{p-1}. \qquad (2)$$

Прямая $y=(px-q)/(p-1)$ пересекает края полосы, ограниченной прямыми $y=x$ и $y=x-1$ и заключающей график $y=[x]$, в точках $A_0(q;\,q)$ и $A_1(q-p+1;\,q-p)$ (рисунки 2 и 3; чтобы найти абсциссы x_0, x_1 этих точек, нужно лишь решить уравнения $px_0-q=x_0(p-1)$ и $px_1-q=(x_1-1)(p-1)$). Ясно, что число решений уравнений (2), то есть число горизонтальных прямых $y=h$ (h целое), пересекаемых отрезком $[A_0A_1[$ (без точки A_1), равно количеству целых чисел, заключенных между q и $q-p$ (включая q, если оно целое, но не включая $q-p$). Теперь нетрудно привести ответ в задаче а): отрезок $[1978;\,1978+1977[$ содержит 1977 целых точек, — и доказать утверждение задачи б): на любом отрезке длины $|p|$ числовой прямой лежит $[|p|]$ или $[|p|]+1$ целых точек.

Можно решать эту задачу, оставив в уравнении x и $\{x\}$ («дробную часть» x). Некоторые читатели, которые шли по этому пути, ошибались в определении $\{x\}$ при $x<0$ (обратите внимание, что $\{-0{,}1\}=0{,}9$; $\{-\sqrt{2}\}=-2+\sqrt{2}$ и т. п.).

Наше решение приятно тем, что случаи разных знаков p (рисунки 2 и 3) рассматриваются одновременно. Разобравшись в нем, вы сможете провести исследование множества решений такого уравнения: $ax+b[x]+c=0$ (эту задачу прислал нам *И. С. Петраков*); не забудьте рассмотреть особые случаи, когда решения заполняют целый интервал, или составляют бесконечную арифметическую прогрессию.

◆

М430. *а) Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру площади S можно поместить в прямоугольник площади $2S$.*

б) Докажите, что любое выпуклое тело объема V можно поместить в ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда объема $6V$.

Назовем *диаметром* выпуклой фигуры (или выпуклого тела) отрезок, соединяющий две точки, расстояние между которыми наибольшее (диаметров может быть, конечно, больше одного; существование диаметра для выпуклого многоугольника и многогранника очевидно — им будет отрезок, соединяющий наиболее далекие друг от друга вершины; существование диаметра произвольного замкнутого ограниченного множества на плоскости или в пространстве мы оставим здесь без доказательства).

а) Пусть $[MN]$ — диаметр данной выпуклой фигуры Φ. Прямые, проходящие через точки M и N, перпендикулярные к отрезку MN, будут *опорными* для фигуры Φ, то есть Φ целиком заключена внутри полосы, ограниченной ими: ведь для любой точки X вне этой полосы либо $|XM| > |MN|$, либо $|XN| > |MN|$. Проведем еще две перпендикулярные этим прямым опорные прямые, содержащие некоторые граничные точки K и L фигуры Φ (рис. 4). Полученный прямоугольник Π удовлетворяет нужному условию: если площадь прямоугольника Π равна s, то площадь Φ не меньше $S_{\triangle KMN} + S_{\triangle LMN} = s/2$.

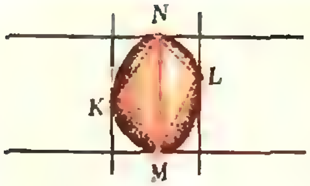
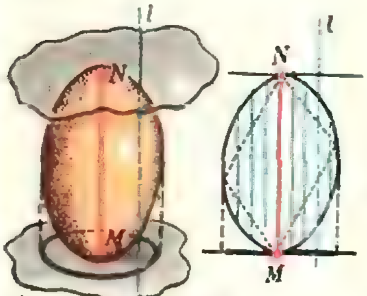


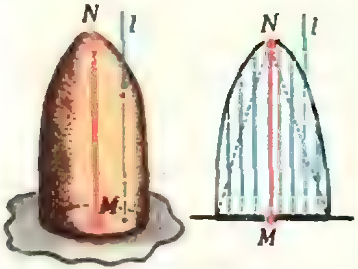
Рис. 4.

б) Пусть $[MN]$ — диаметр данного выпуклого тела T, Φ — проекция тела на опорную плоскость α, проходящую через нижний конец M диаметра (мы считаем $[MN]$ вертикальным, рис. 5, *а*). Докажем, что если заключить фигуру Φ в прямоугольник Π такой, как в задаче *а*), то прямоугольный параллелепипед с основанием Π и высотой $|MN|$ — нужная прямоугольная коробка для T. Сделаем с T такое преобразование: каждый отрезок $l \cap T$, где l — вертикальная прямая, сместим вниз так, чтобы нижний его конец попал на плоскость α. Объединение полученных отрезков обозначим $\hat{T}$ (рис. 6, *а*; на рис. 5, *б* и 6, *б* показано преобразование отдельных сечений). Ясно, что объемы T и $\hat{T}$ совпадают (это — аналог *принципа Кавальери*, о котором говорилось в «Кванте» № 2 (статья С. Пухова) и № 5 — (статья В. Болтянского), но здесь тела пересекаются не семейством параллельных плоскостей, а семейством параллельных прямых). При этом $\hat{T}$ содержит конус с основанием Φ и высотой $[MN]$ — это нетрудно доказать, рассмотрев вертикальные сечения. Если объем построенной нами прямоугольной коробки равен V, то объем цилиндра с основанием Φ и высотой $[MN]$ не меньше $V/2$, а объем конуса — не меньше $(V/2)/3 = V/6$. Значит, и объем нашего тела не меньше $V/6$.



а) б)

Рис. 5.



а) б)

Рис. 6.

Н. Васильев

◆

Ф438. *Однородная палочка лежит внутри шероховатой сферической полости. Длина палочки равна радиусу сферы. Коэффициент трения равен μ. Какой наибольший угол с горизонтом может составлять палочка?*

Очевидно, что палочка будет составлять наибольший угол α с горизонтом, когда плоскость большого круга, проведенная через точки касания палочки со сферой, вертикальна. В этой плоскости на палочку действуют сила тяжести $M\vec{g}$, силы нормальной реакции сферы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и силы трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 7).

Палочка находится в покое, если сумма проекций этих сил на любое направление и сумма моментов сил относительно любой неподвижной оси равна нулю. Запишем условие равновесия палочки в проекции на ее направление:

$$|\vec{N}_1|\cos\varphi - |\vec{N}_2|\cos\varphi + |\vec{F}_1|\sin\varphi + |\vec{F}_2|\sin\varphi - \\ - |M\vec{g}|\sin\alpha = 0.$$

Проектируя силы на направление, перпендикулярное к палочке, получим

$$|\vec{N}_1|\sin\varphi + |\vec{N}_2|\sin\varphi - |\vec{F}_1|\cos\varphi + \\ + |\vec{F}_2|\cos\varphi - |M\vec{g}|\cos\alpha = 0.$$

Уравнение моментов удобно записать относительно оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через центр сферы:

$$|\vec{F}_1|R + |\vec{F}_2|R - |M\vec{g}|R\sin\varphi\sin\alpha = 0.$$

Здесь $\varphi = \pi/3$, R — длина палочки, равная радиусу сферы.

При наибольшем угле $\alpha_{\max}$ наклона палочки к горизонту силы трения достигают своих наибольших значений:

$$|\vec{F}_1| = \mu|\vec{N}_1| \quad и \quad |\vec{F}_2| = \mu|\vec{N}_2|.$$

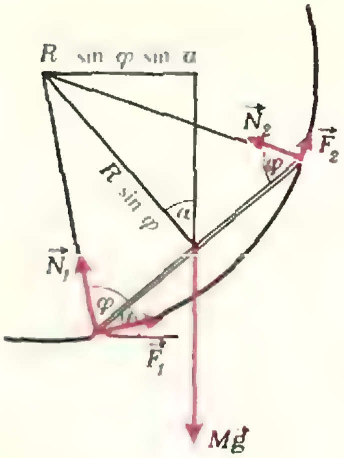


Рис. 7.

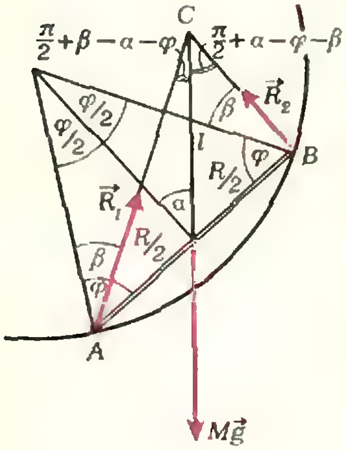

C
$\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha-\varphi$
$\frac{\pi}{2}+\alpha-\varphi-\beta$
$\vec{R}_2$
β
φ/2
φ/2
l
φ
B
R/2
α
$\vec{R}_1$
R/2
β
φ
A
$M\vec{g}$

Рис. 8.

Решив полученную систему пяти уравнений, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{\mu}{\sin^2\varphi-\mu^2\cos^2\varphi} = \frac{4\mu}{3-\mu^2},$$

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}\frac{4\mu}{3-\mu^2}.$$

Задачу можно решить также, используя так называемую «теорему о трех силах»: если тело находится в равновесии под действием трех приложенных к нему непараллельных сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

В нашем случае тремя силами, приложенными к палочке, являются сила тяжести $M\vec{g}$ и результирующие сил реакций $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{N}_1$ и $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{N}_2$ (рис. 8). Поскольку силы трения при наибольшем угле $\alpha_{\max}$ наклона палочки максимальны, силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ составляют с радиусами сферы, проведенными в точках касания, один и тот же угол $\beta = \operatorname{arctg}\mu$ (угол трения).

Рассмотрим треугольник ACB, в котором палочка является основанием, а точка C пересечения линий действия сил — противолежащей вершиной. Линия действия силы тяжести делит упомянутый треугольник на два, имеющих общую сторону длиной l (медиану треугольника ACB) и конгруэнтные основания длиной по $R/2$. Применив к каждому треугольнику теорему синусов, получим

$$\frac{\sin(\pi/2+\alpha-\varphi-\beta)}{R/2} = \frac{\sin(\varphi+\beta)}{l}$$

и

$$\frac{\sin(\pi/2-\alpha-\varphi+\beta)}{R/2} = \frac{\sin(\varphi-\beta)}{l},$$

где $\operatorname{tg}\beta = \mu$ и $\varphi = \pi/3$.

Поделив эти два уравнения одно на другое, получим

$$\frac{\cos(\alpha-\varphi-\beta)}{\cos(\alpha+\varphi-\beta)} = \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(\varphi-\beta)},$$

из которого найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{4\mu}{3-\mu^2}.$$

Б. Буховцев

◆

Ф439. *Неоновая лампочка (НЛ) загорается, когда напряжение на ней достигает значения U_1. При этом сопротивление лампочки становится пренебрежимо малым. Когда напряжение на лампе падает до значения U_2, лампа гаснет, и ее сопротивление становится бесконечно большим. Эту лампу включили в цепь, как показано на рисунке 9. Считая $\mathscr{E} \gg U_1 > U_2$, построить примерный график зависимости напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K.*

После замыкания ключа K в цепи потечет ток, и напряжение на конденсаторе начнет расти, пока не достигнет значения U_1, при котором зажигается неоновая лампочка. Поскольку $\mathscr{E} \gg U_1$, можно считать, что в течение всего времени зарядки конденсатора ток $I = \mathscr{E}/R$ и напряжение U_C на конденсаторе растет по линейному закону (рис. 10).

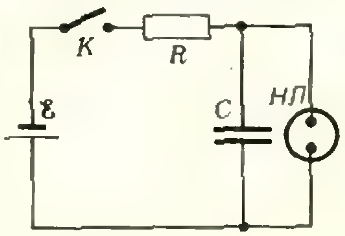


Рис. 9.

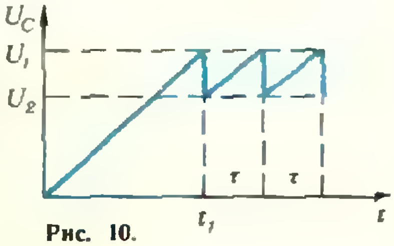


Рис. 10.

В момент времени t_1, когда напряжение на конденсаторе станет равным U_1, загорится лампочка. Время t_1 можно найти из условия

$$It_1 = Q = CU_1, \text{ и } t_1 = \frac{CU_1R}{\mathscr{E}}.$$

При загорании лампочки конденсатор практически мгновенно разрядится до напряжения U_2, при котором лампочка гаснет. Затем в течение промежутка времени τ конденсатор снова будет заряжаться до напряжения U_1 и т. д.

Таким образом, напряжение на конденсаторе периодически изменяется с периодом

$$\tau = \frac{(U_1 - U_2)CR}{\mathscr{E}}.$$

Рассмотренная схема представляет собой так называемый генератор пилообразного напряжения.

В. Копылов

Ф440. *Оцените приближенно, при каком минимальном радиусе планеты она сможет удерживать атмосферу, состоящую в основном из кислорода и азота, если температура поверхности планеты $T = 300$ К. Среднюю плотность вещества планеты принять равной $\rho = 4\cdot 10^3$ кг/м^3.*

Рассмотрим молекулу, входящую в состав атмосферы планеты. Эта молекула будет удерживаться в непосредственной близости от поверхности планеты, если ее кинетическая энергия не превосходит потенциальной энергии молекулы в гравитационном поле планеты:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} \leqslant \gamma\frac{mM}{r}.$$

Здесь m — масса молекулы, $\overline{v^2}$ — средний квадрат ее скорости, γ — гравитационная постоянная, M — масса планеты и r — ее радиус. Оценку минимального радиуса планеты можно провести, используя равенство кинетической и потенциальной энергий по порядку величины:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} \approx \gamma\frac{mM}{r_{\min}}. \qquad (1)$$

Средний квадрат скорости молекулы газа связан с температурой T газа соотношением

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{\mu},$$

где k — постоянная Больцмана, R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса газа. Массу планеты можно выразить через среднее значение ρ плотности вещества планеты и ее минимальный радиус $r_{\min}$:

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{\min}^3\rho.$$

Тогда соотношение (1) можно переписать в таком виде:

$$\frac{3RT}{2\mu} \approx \frac{4}{3}\gamma\pi r_{\min}^2\rho, \quad \text{откуда}$$

$$r_{\min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\gamma\pi\rho\mu}}. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что $r_{\min}$ зависит (при прочих равных условиях) от молярной массы μ: $r_{\min}$ тем меньше, чем больше μ. По условию задачи атмосфера планеты состоит в основном из кислорода и азота, для которых молярные массы равны соответственно $\mu_к = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль и $\mu_а = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль. Очевидно, для оценки минимального радиуса планеты достаточно найти $r_{\min}$, считая, что атмосфера состоит только из азота.

Итак,

$$r_{\min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\gamma\pi\rho\mu_а}} \approx 3\cdot 10^5 \text{ м} = 300 \text{ км}.$$

С. Козел

Ф441. *Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится точечный заряд q. Площадь пластин бесконечно велика, расстояние между ними равно d. Первоначально заряд находится на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от левой пластины. Какой заряд пройдет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряда q в новое положение, при котором он будет находиться на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от правой пластины?*

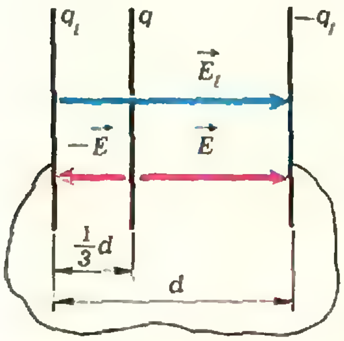


Рис. 11.

Так как пластины конденсатора большие, индуцированные на них заряды не изменятся при перемещении заряда q параллельно плоскостям пластин (краевыми эффектами мы пренебрегаем). Это означает, что не изменятся заряды пластин и в том случае, если заряд q равномерно «размазать» по плоскости, параллельной пластинам конденсатора и находящейся первоначально на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от левой пластины.

Обозначим через q_1 заряд левой пластины конденсатора. Тогда заряд правой пластины (согласно закону сохранения заряда) равен $-q_1$. Заряды q_1 и $-q_1$ пластин конденсатора создают между пластинами электростатическое поле с напряженностью $\left|\vec{E}_1\right| = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}$ (S — площадь каждой пластины), а находящаяся внутри конденсатора пластина с зарядом q — поле с напряженностью $\left|\vec{E}\right| = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ (рис. 11). С одной стороны от пластины направления напряженностей обоих полей совпадают, а с другой стороны — противоположны друг другу. Поэтому разность потенциалов $\Delta\varphi$ между пластинами конденсатора равна

$$\Delta\varphi = \left(\left|\vec{E}_1\right| - \left|\vec{E}\right|\right)\frac{1}{3}d + \left(\left|\vec{E}_1\right| + \left|\vec{E}\right|\right)\frac{2}{3}d.$$

С другой стороны, так как пластины конденсатора замкнуты, напряжение между ними равно нулю: $\Delta\varphi = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{3}d\left(\frac{q_1}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right) + \frac{2}{3}d\left(\frac{q_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right) = 0.$$

Из этого уравнения найдем заряд q_1:

$$q_1 = -\frac{1}{6}q.$$

Аналогично можно найти заряд q_1' левой пластины конденсатора, когда средняя пластина (заряд q) находится от нее на расстоянии $\frac{2}{3}d$:

$$q_1' = \frac{1}{6}q.$$

Таким образом, при перемещении внутри конденсатора точечного заряда q (или заряженной пластины) по проводнику, соединяющему пластины конденсатора, проходит заряд

$$\Delta q = q_1' - q_1 = \frac{1}{3}q.$$

И. Слободецкий

Б. Гейдман

Гомотетия и замечательные точки в треугольнике

В этой заметке мы расскажем, как с помощью гомотетии решаются многие трудные планиметрические задачи — в частности, задачи про замечательные точки в треугольнике.

Задача про трапецию

Начнем с задачи про трапецию. Вот ее формулировка:

Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения ее диагоналей, проходит через середины оснований трапеции.

Как ее решать? Нарисуем трапецию, продолжим ее боковые стороны, проведем диагонали, соединим середины оснований (см. рис. 1). Мы видим, что образуется много пар подобных треугольников. С подобными фигурами связано отображение плоскости на себя, которое называется *гомотетией*. При гомотетии с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ образом произвольной точки X является точка X_1 такая, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$ (см. «Геометрию 7», п. 79). Попробуем решить нашу задачу про трапецию, используя гомотетию.

Пусть S — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения ее диагоналей (рис. 1).

Рассмотрим две гомотетии: H_S с центром S и H_O — с центром O, переводящие основание AD трапеции в основание BC. Середина M отрезка AD и в той и в другой гомотетии перейдет в середину N отрезка BC, а потому точки M и N лежат на прямой OS, проходящей через центры гомотетии H_S и H_O.

Разберем это решение подробнее.

Гомотетия H_S задается своим центром S и парой соответствующих точек A и B. По свойству гомотетии прямая AD при этом перейдет в параллельную ей прямую BC. Образ точки D будет находиться на прямой BC. С другой стороны, точка, соответствующая точке D, лежит на прямой SD, проходящей через центр гомотетии S.

Таким образом, гомотетия H_S переводит точку D в точку пересечения прямых BC и SD, т. е. в точку C, а основание трапеции AD — в основание BC: $H_S([AD]) = [BC]$.

Аналогично доказывается, что $H_0([AD]) = [CB]$ (гомотетия H_O задается центром O и парой соответствующих точек A и C).

Середину отрезка гомотетия переводит в середину образа этого отрезка, так как при гомотетии все расстояния между точками умножаются на одно и то же число, равное модулю коэффициента гомотетии.

И, наконец, середины оснований трапеции, как соответствующие точки гомотетии, лежат на прямой, проходящей через ее центр.

Центр тяжести треугольника

Докажем теперь с помощью результата задачи о трапеции теорему о медианах треугольника, а именно, докажем, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть AD, BE и CF — медианы треугольника ABC (рис. 2). В трапеции $AFDC$ медианы AD и CF служат диагоналями, а потому точка M их пересечения лежит на прямой, соединяющей середину E основания AC трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон AF и CD, то есть — с вершиной B треугольника. Таким образом, точка M пересечения медиан AD и CF лежит и

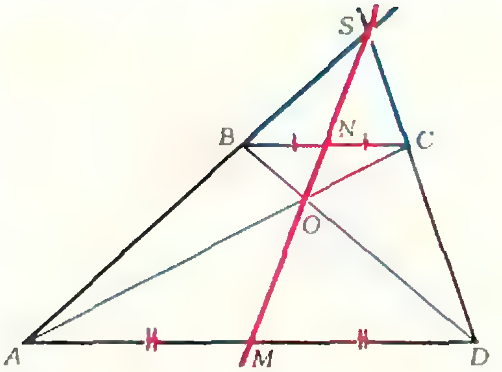


Рис. 1.

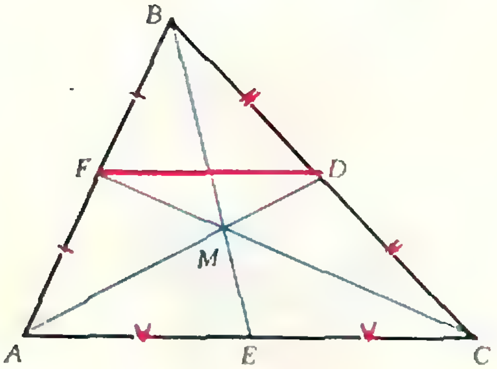


Рис. 2.

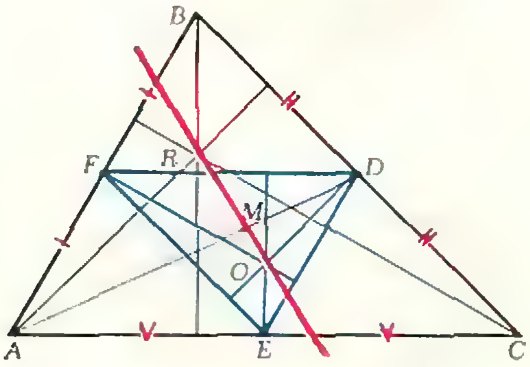


Рис. 3.

на медиане BE, то есть все три медианы треугольника ABC действительно пересекаются в одной точке M. Точка пересечения медиан треугольника и называется его *центром тяжести*.

Далее. Гомотетия H_M, переводящая основание AC трапеции $AFDC$ в основание DF, имеет коэффициент $k=-\frac{1}{2}$, так как $|FD|=\frac{1}{2}|AC|$ ($[FD]$ — средняя линия треугольника ABC). Поэтому $|AM|:|MD| = |CM|:|MF| = |BM|:|ME| = 2:1$. Это завершает доказательство теоремы о медианах.

Ортоцентр треугольника

Докажем еще одну теорему.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке. (Точка пересечения высот называется *ортоцентром* треугольника.)

Доказательство. Пусть M — центр тяжести данного треугольника ABC; F, D и E — середины его сторон (рис. 3). Рассмотрим гомотетию H_M^{-2} с центром в точке M и коэффициентом $k=-2$. Эта гомотетия переводит точки F, D и E соответственно в вершины C, A и B треугольника ABC, а высоты треугольника FDE — в высоты треугольника ABC. Но высоты треугольника FDE, являясь серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке O — центре описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно, их образы (при гомотетии H_M^{-2}) также пересекаются в одной точке R (*ортоцентре* треугольника ABC).

Попутно мы доказали такое важное следствие:

Центр тяжести M любого треугольника, его ортоцентр R и центр O описанной около него окружности лежат на одной прямой (она называется прямой Эйлера), причем точка M расположена между точками O и R так, что $|MR| = 2\,|OM|$.

Задачи

1. Найдите гомотетии, переводящие один из двух данных параллельных отрезков в другой.

2. На плоскости заданы окружность и две точки A и B на ней. Пусть N — произвольная точка этой окружности, M — центр тяжести треугольника ABN. Найдите множество точек M.

3. На плоскости заданы две концентрические окружности. Проведите хорду в большей из них так, чтобы она делилась меньшей окружностью на три конгруэнтные части.

4. Две окружности касаются внешним образом. Точки касания общих внешних касательных последовательно соединены. Докажите, что в получившийся четырехугольник можно вписать окружность.

5. Дан острый угол AOB и внутри него точка C. Найдите на стороне OB точку M, равноудаленную от стороны OA и от точки C.

6*. Докажите, что во всяком треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. а) В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, затем полученное двузначное число умножили на 7. В результате получилось исходное трехзначное число. Найти такое число.

б) В трехзначном числе зачеркнули среднюю цифру, получилось число, в 6 раз меньшее. Найдите такое трехзначное число.

в) Найдите все трехзначные числа, которые при зачеркивании средней цифры уменьшаются в 7 раз, в 9 раз.

2. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, ромб, круг, квадрат. Цвета этих фигур: зеленый, желтый, синий, красный. В каком порядке лежат фигуры и каков цвет каждой из них, если фигура красного цвета лежит между зеленой и синей, справа от желтой фигуры лежит ромб, круг лежит правее треугольника и ромба, причем треугольник лежит не с краю, и, наконец, фигура синего цвета не лежит рядом с фигурой желтого цвета?

3. Тамаре в 1977 году исполнится столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась?

4. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена натуральными числами от 1 до n^2, причем в первой строке записаны подряд числа от 1 до n, во второй от $n+1$ до $2n$ и так далее.

Доказать, что если вырезать из этой таблицы квадрат $m \times m$, то сумма стоящих в нем чисел будет делиться на m^2.

Е. Семенов

Степа Мошкин повторяет геометрию

1. В чем ошибка? И есть ли она?

Давно уже Степа Мошкин не приходил домой таким расстроенным.

— Ты посмотри, папа, как я старался,— жаловался он отцу.— Вот ось симметрии — проведена черным цветом (см. рис. 1). Вот данный треугольник — синенький! А вот желтый треугольник — это образ данного треугольника в осевой симметрии. Все в цвете, сделано аккуратно, как надо! А Петр Иванович даже не посмотрел как следует, даже в руки не взял. Бросил взгляд и говорит: «Неверно! Плохо повторяешь геометрию. Придется переделать!» А что тут переделывать, если все сделано так старательно!

Отец не спеша, пережидая, пока сын немного успокоится, рассматривал его рисунок. Потом произнес:

— Да, к сожалению, Петр Иванович прав: плоховато ты повторил этот материал. Тут на самом деле есть ошибки.

— Какие же?! — воскликнул Степа.

— А ты сначала скажи, что такое осевая симметрия с осью l?

— Ну-у, это перемещение, в котором точки прямой l остаются на месте, а...

— Не продолжай, достаточно. Выполнено это условие на твоем чертеже?

Степа замер над чертежом в поисках ошибки.

Посмотрите и вы на рисунок. Видите маленький желтый треугольник, образовавшийся при пересечении прямых l, AC и A_1C_1? И еще один — с другой стороны? В этом и заключается ошибка Степы. Отрезок A_1C_1 должен пересекать прямую l в той же точке, что и отрезок AC, ведь в симметрии с осью l точки прямой l остаются на месте.

Такие точки — остающиеся на месте в некотором отображении — называются *неподвижными*. Их часто можно использовать для построения образа фигуры.

2. Другое построение

Таня решила ту же задачу, что и Степа, иначе, и на следующем уроке Петр Иванович предложил Степе, глядя на Танин рисунок (рис. 2), рассказать, как она выполняла построения. Степа сразу заметил, что Таня пользовалась циркулем и линейкой, причем точки A_1, B_1 и C_1 получились как пересечения дуг окружностей.

— При чем здесь окружность? —

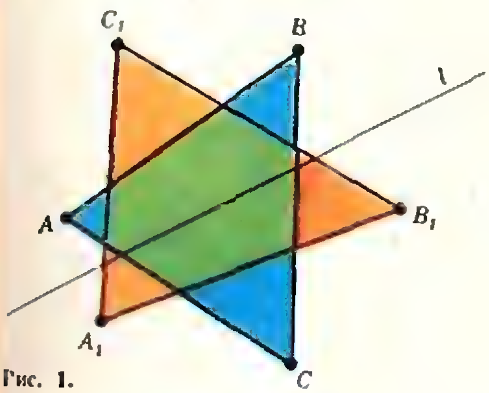


Рис. 1.

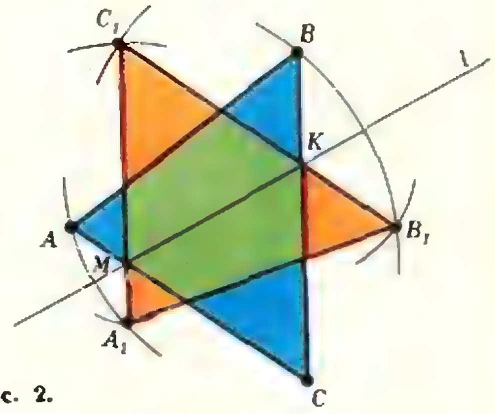


Рис. 2.

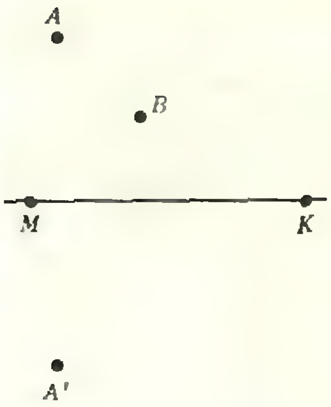


Рис. 3.

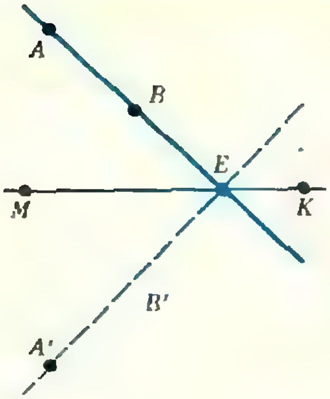


Рис. 4.

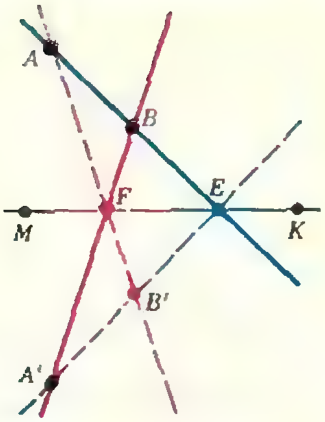


Рис. 5.

стал вслух размышлять Степа.— Окружность — это множество точек, находящихся на одном и том же расстоянии от данной точки. А расстояния... расстояния осевая симметрия сохраняет! Ага, Таня, наверное, использовала точки M и K пересечения прямых AC и BC с прямой l. Точка M остается на месте, поэтому должно быть

$$|MC| = |MC_1|,$$

и аналогично

$$|KC| = |KC_1|.$$

Значит, точка C_1 получится как пересечение окружности с центром в точке M радиуса $|MC|$ с окружностью с центром K радиуса $|KC|$. Правда, эти окружности пересекутся в двух точках. Какая же вторая?.. Так это же точка C. Все ясно. Так же Таня строила точки A_1 и B_1. Получается, что линейка для построения образов точек в осевой симметрии вообще не нужна. Хватит двух точек на оси l и циркуля. Здорово!

3. Неподвижные точки помогают Степе

Вечером Степа рассказал папе о Танином способе построения образов точек в осевой симметрии, а затем сел делать уроки. Открыв тетрадь, он прочитал. «На дом — решить задачу 33» (см. «Геометрия 6», стр. 104). Вот она, эта задача.

Даны ось симметрии (MK), *симметричные точки* A *и* A' *и еще одна точка* B *такая, что прямая* AB *пересекает ось симметрии. С помощью одной линейки постройте точку* B', *симметричную* B *относительно* (MK).

Степа изобразил указанные элементы черным цветом (см. рис. 3) и задумался.

— Если бы воспользоваться угольником! Но нельзя. И циркуль также попал в число «запрещенных» инструментов. Можно пользоваться только одной линейкой. Как поступить?.. У Тани был один циркуль. Она проводила им окружности и находила образы точек как точки пересечения окружностей. У меня одна линейка. Тоже одна! И проводить я могу только прямые. Так, может, искать точку B' как пересечение двух прямых? Что же это будут за прямые? Видимо, образы прямых, проходящих через точку B. А как искать образы прямых? Нужны образы двух точек. Ну что же, образ одной точки есть — ведь даны точки A и A'.

Степа нарисовал синим цветом прямую AB (рис. 4) и стал рассуждать дальше.

— Нужен образ еще одной точки прямой AB. Ага, если прямые AB и MK пересекаются в точке E, то эта точка E — неподвижная в симметрии с осью MK. Значит, образом прямой AB будет прямая $A'E$.

Степа провел пунктиром прямую $A'E$ (рис. 4) и снова задумался.

— Где же на прямой $A'E$ будет точка B'? Нужна еще прямая. А как ее проводить? Может, есть образ еще одной точки?

Степа еще раз перечитал условие задачи. Нет, образов других точек нет. Впрочем, ...сказано «симметричные точки A и A'». Что это значит? Точка A' — образ точки A. Но ведь тогда A — образ точки A'.

Степа поскорее схватил красный карандаш и провел прямую $A'B$. Ура! Она пересекла прямую MK в точке F (рис. 5), прямая AF пересеклась с прямой $A'E$, и Степа, торжествуя, поставил около точки их пересечения: B'.

Упоенный победой над непокорной было задачей, Степа закрыл тетрадь. И в то же мгновение его что-то кольнуло: с задачей не все ладно. Степа открыл тетрадь, посмотрел на рисунки и замер.

— А что, если прямые AF и $A'E$ параллельны? — Спеша, он набросал рисунок. — Как тогда решить задачу? Да и прямая AB может пересечь прямую MK за пределами листа бумаги, и тогда неподвижной точки не будет!

Но, немного подумав, Степа успокоился. Он нашел способ решения задачи и в этом случае.

Задачи

1. На рисунке 6 синим цветом изображены данные фигуры, а красным — их образы в осевой симметрии с осью l. Имеются ли ошибки в этих построениях? Можете ли вы их обнаружить «с первого взгляда»?

2. Степа нашел способ решения задачи (№ 33) в случае, когда $(AF) \parallel (A'E)$ или точка E (или F) оказывается за пределами листа бумаги. А вы сможете это сделать?

3. Дана ось симметрии l, пара симметричных точек A и A' и прямая a, параллельная l. Пользуясь одной линейкой, постройте образ прямой a.

4. Что за перемещение?... Неизвестно... Но нужно ли это знать?

Повторяя геометрию, Степа дошел до пункта 20, написанного мелким шрифтом (см. «Геометрия 6», с. 48).

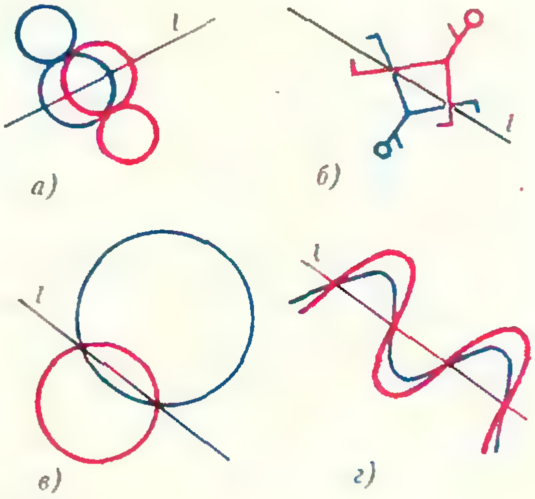
— Это не обязательно, — подумал он. Но из любопытства посмотрел на рисунок, а затем наугад прочел.

«2. *Любое сохраняющее расстояние отображение плоской фигуры Φ на лежащую в той же плоскости фигуру Φ_1 можно выполнить при помощи перемещения, то есть при помощи отображения всей плоскости на себя, сохраняющего расстояния*».

— Отображение фигуры Φ на фигуру Φ_1, сохраняющее расстояния... — размышлял Степа. — Но ведь это означает, что $\Phi \cong \Phi_1$! Точно, вот в п. 14 определение конгруэнтных фигур! Но тогда прочитанное мною свойство можно пересказать так: *если $\Phi \cong \Phi_1$, то существует перемещение, при котором Φ отображается на Φ_1*?! И в этом перемещении можно построить, вероятно, образ любой фигуры? Интересно. Возьму-ка я в качестве Φ треугольник ABC (рис. 7), в качестве Φ_1 — треугольник $A_1B_1C_1$. Конгруэнтны они? Вроде, да. Так. Значит, существует перемещение, отображающее треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$. Теперь нарисую еще полуплоскость с границей BC, не содержащую треугольник ABC. И еще квадрат $DEFG$. Куда же они отобразятся? Чтобы это найти, надо... надо знать, что это за перемещение. Но что же это за перемещение? Осевая симметрия?... Нет. Поворот? Параллельный перенос? Кажется, тоже нет.

Степа задумался. Он долго ломал голову, пока, наконец, не произнес.

— А может, это и не нужно знать? Достаточно знать, что перемещение, и все? Ведь можно же воспользоваться свойствами перемещения вообще! При перемещении полуплоскость отображается на полуплоскость, прямая — на прямую. У меня $(BC) \to$



а) б) в) г)

Рис. 6.

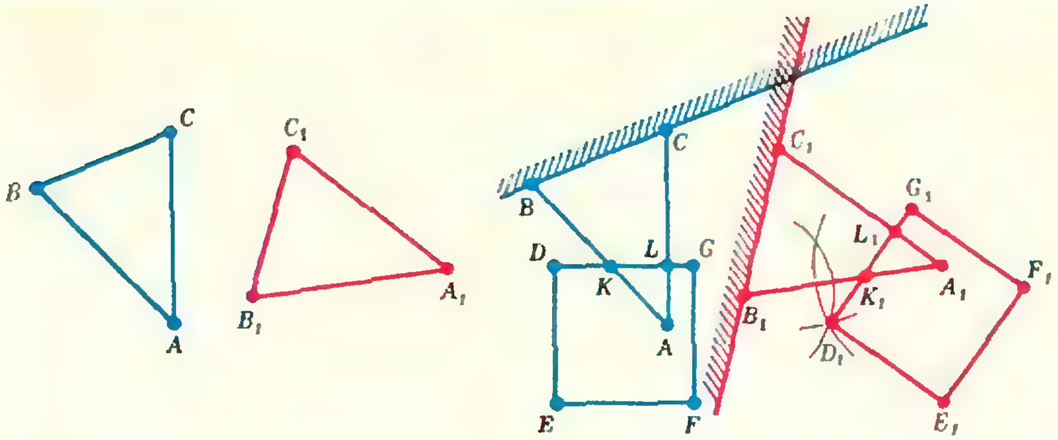


Рис. 7.

→ (B_1C_1). Но полуплоскостей с границей (B_1C_1) две. На которую отобразится «синяя» полуплоскость?.. Синяя полуплоскость не содержит точку A... Значит, ее образ не должен содержать точку A_1!

И Степа, сияя от догадки, закрасил искомую полуплоскость красным цветом.

— Победа! Но еще неполная. А как построить образ квадрата?.. Квадрат не лежит в «синенькой» полуплоскости, значит, его образ не будет лежать в «красной» полуплоскости... Но как же его построить!? Что я могу? Могу построить образы точек K и L — эти образы будут лежать на отрезках A_1B_1 и A_1C_1, причем на том же расстоянии от точки A_1, что точки K и L — от точки A. Затем могут провести прямую K_1L_1 и на ней с помощью циркуля найти точки D_1 и G_1... циркуля... Стоп. Так уже делала Таня. Она одним циркулем строила образы новых точек по образам уже известных. Может, и здесь засечь точку D из точек A и B и перенести эти размеры на образы точек? Если я проведу окружности с центрами в точках A_1 и B_1 радиусов $|AD|$ и $|BD|$, то они пересекутся в двух точках. Одна из них D_1. Какая же именно? Ага, точка D вне треугольника ABC, значит D_1 — вне треугольника $A_1B_1C_1$. А можно еще сделать засечку из точки C_1, тогда все будет совсем ясно. И Степа тут же построил квадрат $D_1E_1F_1G_1$.

— Ну вот, еще одно открытие! До чего же хороший инструмент — циркуль! — облегченно вздохнул наш герой, и стал придумывать новые задачи.

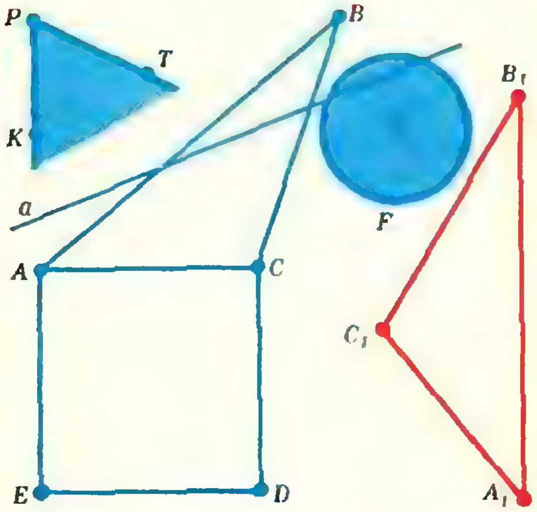


Рис. 8.

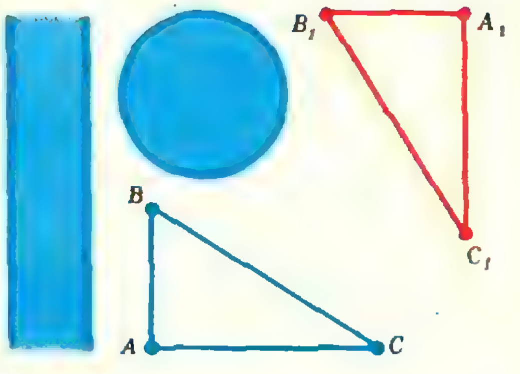


Рис. 9.

Задачи

4. В некотором перемещении треугольник ABC отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$.

а) Постройте фигуру, на которую ото-

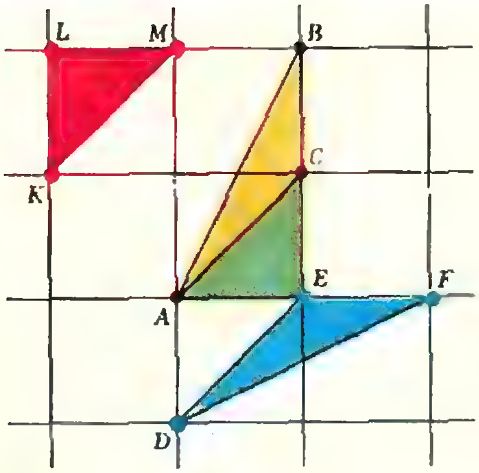


Рис. 10.

бразится в этом перемещении прямая a (рис. 8), круг F, квадрат $ACDE$, точка A_1, угол KPT.

б) Постройте образы окружности и полосы, изображенных на рисунке 9.

5. Дана равнобедренная трапеция. С помощью одной линейки постройте ее ось симметрии.

6. Задан центр поворота O и угол поворота α. Пользуясь одним циркулем, постройте образ произвольной точки A, если угол поворота равен: а) 60°; б) 120°.

7. Задан центр симметрии O. Как, пользуясь одним циркулем, построить точку, симметричную произвольной заданной точке A?

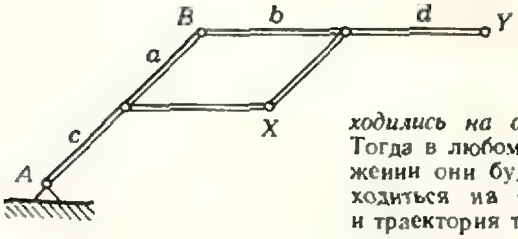
8. Дан отрезок AB. Пользуясь одним циркулем, постройте отрезок, имеющий в три раза бóльшую длину.

9. На листе клетчатой бумаги отмечены некоторые точки (см. рис. 10).

а) В некотором перемещении треугольник ABC отобразился на треугольник DEF. Найдите образы точек A, B, C в этом перемещении.

б) В некотором перемещении треугольник ACE отобразился на треугольник KLM. Отметьте все точки, которые могут быть образами точек A, B, C, D, E, F. С помощью каких известных вам перемещений треугольник ACE можно отобразить на треугольник KLM?

Пантограф



Мой приятель, которому подарили пантограф, обратился ко мне с вопросом:

Какому соотношению должны удовлетворять длины a, b, c, d в этом пантографе, чтобы траектория точки Y была подобна траектории точки X?

Мы нашли описание работы пантографа (правда, несколько иного вида) в п. 97 учебника «Геометрия 7». Оказалось, что *для того, чтобы пантограф работал нужным образом, достаточно, чтобы в исходном положении точки A, X и Y находились на одной прямой.* Тогда в любом другом положении они будут также находиться на одной прямой и траектория точки Y будет гомотетична траектории точки X. Поэтому, если обводить точкой X контур какой-нибудь фигуры, то точка Y будет вычерчивать контур подобной фигуры.

По-видимому, читателю нетрудно будет самому ответить на вопрос моего приятеля, сопоставить устройство его пантографа и пантографа, изображенного в учебнике, а также ответить на контрольные вопросы.

1. Будет ли траектория точки Y подобна траектории точки X, если

1°) $a=5$, $b=3$, $c=10$, $d=6$;

2°) $a=3$, $b=5$, $c=10$, $d=6$?

При исследовании работы пантографа естественно возникает вопрос: какого размера фигуры он может вычерчивать?

2. Художник, нарисовавший в учебнике рисунок 186, немного ошибся. Найдите ошибку художника (правильно ли расставлены булавки?).

3. Найдите множество точек X, если $b=3$, $c=5$.

4. Покажите, что если $b=5$, $c=3$, то множество точек X совпадает со множеством из задачи 2.

Занявшись исследованием работы пантографа, мы с приятелем навели справки и выяснили, что пантограф был описан, по-видимому, еще в 1635 году Христианом Шейнером в книге «Pantographia seu Ars delineandi res quaslibet», а слово «пантограф» в переводе означает примерно *«рисующий все»*.

В. Гутенмахер

Н. Андрианова,
Т. Шорыгина

Подготовительные курсы при МИСИ

В этом номере мы помещаем статью об очных и заочных курсах по подготовке в вуз при МИСИ. Подобные курсы созданы практически при всех вузах. Эти курсы особенно полезны тем, кто проживает вдали от крупных городов, давно окончил школу и хочет в течение оставшегося до экзаменов времени проверить свои знания, восполнить пробелы. Для поступления на подготовительные курсы надо послать в избранный вами вуз письмо (в адрес подготовительных курсов), вложив в него конверт со своим адресом, в котором вы получите подробную инструкцию.

Курсы по подготовке к поступлению в вузы при Московском инженерно-строительном институте им. В. В. Куйбышева функционируют около двадцати лет. Эти курсы дают возможность производственникам со стажем работы и демобилизованным воинам, имеющим значительный перерыв в учебе, повторить программу средней школы без отрыва от производства и подготовиться к сдаче вступительных экзаменов в вуз, помогают учащимся десятых классов более глубоко усвоить наиболее трудные вопросы школьной программы. Кроме того, подготовительные курсы являются переходной ступенькой от школы к вузу, занятия на подготовительных курсах приучают к новым формам обучения, с которыми сегодняшние абитуриенты, а завтрашние студенты столкнутся в вузе: лекциям, семинарским занятиям, коллоквиумам; приучают работать с книгой.

Занятия на курсах проводятся как по новой, так и по старой программам. Работа курсов проводится в несколько потоков с продолжительностью от 1 до 10 месяцев.

Занятия по математике и физике на очных подготовительных курсах проводятся следующим образом. Абитуриентам читаются лекции по основным разделам курса, при этом основное внимание уделяется вопросам, часто вызывающим затруднения при ответах на экзаменах. По каждой пройденной теме регулярно проводятся практические занятия, на которых рассматриваются типовые задачи по данному разделу, а затем сдается «домашнее задание», состоящее из 20—25 задач, которые следует решить, и списка теоретических вопросов, которым надо уделить особое внимание. «Прием домашнего задания» по форме близок к вузовскому коллоквиуму.

Два раза в год (в январе — феврале и в мае) слушатели подготовительных курсов сдают письменные и устные зачеты. Эти зачеты проходят в обстановке, близкой к экзаменационной. Билеты зачетов составлены по типу экзаменационных, принимают зачеты члены предметных комиссий. Все это является хорошей психологической подготовкой будущих абитуриентов, помогает им оценить уровень требований на вступительных экзаменах в вуз, выявить недостатки в своих знаниях и своевременно принять меры к их устранению. Варианты трех билетов весеннего письменного зачета по математике и задачи из билетов зачета по физике приводятся в конце статьи.

Прием на очные подготовительные курсы начинается 1 сентября и продолжается до 1 июля (на разные потоки). Поступающие на курсы предоставляют документ о среднем образовании или справку с места учебы, справку с места работы (для работающей молодежи), одну фотографию, квитанцию почтового отделения связи о перечислении 26 р. на расчетный счет института.

Поступившим на заочные курсы институт высылает методические пособия по математике, физике, русскому языку и литературе, а также контрольные работы. Контрольная работа состоит из ответов на теоретические вопросы и решения задач. Изучение каждой темы заканчивается контрольной работой, которую слушатель должен выслать в указанные графиком сроки в институт (две контрольные работы по математике и физике приведены в конце статьи).

В процессе выполнения контрольной работы слушатель может обращаться к преподавателям с вопросами теоретического и практического характера, а также посещать раз в месяц консультации (при наличии такой возможности).

Учащиеся заочных курсов, выполнившие контрольные работы, приглашаются перед экзаменами на очные курсы. Занятия проводятся ежедневно, кроме воскресенья, с 1-го по 31-е июля (абитуриенты обеспечиваются общежитием).

Для поступления на заочные курсы необходимо выслать в адрес курсов заявление на имя ректора. После этого вы получите подробную инструкцию о приеме на курсы. Наш адрес: *Москва, 113114, Шлюзовая набережная, дом 8, МИСИ, комн. 225^{а}, подготовительные курсы. Телефон: 235-25-17.*

Математика
Очный зачет

Вариант 1

1. Найти производную функции

$y = 3\log_6(2x+1) - \frac{1}{x^3}$ в точке $x = 1$.

2. На кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x$.

3. Найти промежутки монотонного возрастания и убывания функции $y = \frac{x}{x-2}$.

4. Найти для функции $y = \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^3$ первообразную, график которой проходит через точку $(-1;\ 1)$.

5. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Сторона основания равна l. Определить площадь боковой поверхности призмы.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Найти $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

Вариант 2

1. Найти производную функции

$$y = (4x^2 + 3)^3 - 2\ln x.$$

2. Определить, существует ли на графике функции $y = x^3 - x^2 + 3x - 2$ точка, в которой касательная параллельна прямой $y = x$.

3. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 3$ и параболой $y = x^2$.

5. Показать, что биссекторы трех двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

Вариант 3

1. Найти производную функции $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$.

2. Закон движения точки по оси Ox есть $x(t) = 3t - t^3$. Найти скорость $v(t)$ движения точки в момент $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ (x измеряется в сантиметрах, t в секундах).

3. Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$$

4. Найти для функции

$$y = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$$

первообразную, график которой проходит через точку $(0;\ 1)$.

5. Найти углы треугольника ABC, имеющего наибольшую возможную площадь, если даны основание $|BC| = a$ и величина противолежащего угла $\widehat{BAC} = \alpha$.

6. Даны три точки: $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ 1;\ 0)$. Найти величину угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Контрольная работа № 1

1. Найдите целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-4}{3} > 2x - 1, \\ 2x - \frac{x-5}{3} > x - 3. \end{cases}$$

2. В двузначном числе цифра единиц на 1 меньше цифры десятков. Если к этому числу прибавить 7, то полученная сумма будет больше 19, но меньше 51. Найдите это двузначное число.

3. Решите неравенства: а) $x^2 - 3x + 11 < 0$; б) $-16x^2 + 24x - 9 \geqslant 0$.

4. Покажите штриховкой множество точек $M(x;\ y)$ координатной плоскости, для которых $|x| + |y| \leqslant 2$.

5. Покажите штриховкой множество точек $M(x;\ y)$ координатной плоскости, для которых

$$\begin{cases} 3x - 4y + 12 > 0, \\ x + y - 2 < 0. \end{cases}$$

6. Найти производные следующих функций: а) $y = \operatorname{tg} x \cdot 4^x + \operatorname{ctg} 3x$; б) $y = \sqrt{2x + 3x^2} - 3\sin x$; в) $y = \frac{4\cos(3x+2)}{x^4}$.

7. Найти значение производной функции $y = \sin 2x + 4x^3$ в точке $x = \pi/3$.

8. Найти области возрастания и убывания следующих функций: а) $y = (x+4)^3$; б) $y = 1 - 4x - x^2$; в) $y = x/3 - \sqrt[3]{x}$.

9. Исследуйте функцию $y = (x-2)^2 \times (x+1)^3$ и постройте ее график.

10. Турист, поднимаясь в гору, за первый час достиг высоты 800 м, а за каждый следующий час проходил на 25 м меньше (по высоте), чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

11. Известно, что сумма первых n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Написать три первых члена этой прогрессии.

12. Найти число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены 3, 12 и 3072.

13. Упростить выражение $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 160° + \cos 180°$.

14. Доказать тождество

$$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1.$$

15. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

16. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

Контрольная работа № 2

1. Может ли функция, имеющая максимум (минимум), не иметь наибольшего (наименьшего) значения? Может ли функция, имеющая наибольшее (наименьшее) значение, не иметь максимума (минимума)?

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x$ на промежутке $[-3; 4]$.

3. Найти число, которое, будучи сложенным со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

4. Кусок проволоки длины a согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

5. Найдите первообразные следующих функций: а) $y = 1/x + x^3 + \cos 2x$; б) $y = 1/\cos^2 x - 5x - 2/3$; в) $y = \dfrac{1}{ax+b}$ (a и b — постоянные); г) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

6. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = e^x$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

8. Решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$

9. Найти множество решений следующих систем:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + y^2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1. \end{cases}$

10. Длина отрезка перпендикуляра, заключенного между двумя параллельными плоскостями, равна 4 м, наклонной — 6 м. Расстояние между их концами в каждой плоскости равно по 3 м. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

11. Расстояние от точки M, лежащей вне плоскости данного прямого угла, до его вершины B равно a, а до каждой из сторон — b. Чему равно расстояние от точки M до плоскости прямого угла?

12. Доказать, что если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла конгруэнтные углы, то проекция этой наклонной будет биссектрисой данного угла.

Физика

Задачи очного письменного зачета

1. Свободно падающее тело в последнюю секунду проходит половину всего пути. Определить время падения и высоту падения.

2. Груз массой 50 кг придавливается к вертикальной стенке силой 98 Н. Какая необходима сила, чтобы равномерно тянуть груз вертикально вверх и чтобы удержать его в покое, если коэффициент трения 0,3?

3. Тележка массой 120 кг движется по инерции по горизонтальной плоскости со скоростью 6 м/с. С тележки соскакивает человек массой 80 кг под углом $\alpha = 30°$ к направлению ее движения. Скорость тележки уменьшается при этом до 4 м/с. Какова была скорость прыжка?

4. Три однородных шара массой $m_1 = 0{,}1$ кг, $m_2 = 0{,}2$ кг и $m_3 = 0{,}3$ кг укреплены на невесомом стержне таким образом, что центры первого и второго, а также второго и третьего находятся на расстояниях $d = 0{,}3$ м друг от друга. На каком расстоянии от центра третьего шара находится центр тяжести системы?

5. Шар массой 5 кг висит на веревке, прикрепленной к гладкой стене (рис. 1). Определить силу натяжения веревки и силу давления шара на стену. Нить образует со стеной угол $\alpha = 15°$.

6. В цилиндрический сосуд налиты вода и ртуть в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкости 29 см. Определить давление жидкости на дно сосуда. Плотность ртути 13,6 г/см^3.

7. Пузырек воздуха поднимается с глубины 140 м до поверхности воды. Во сколько раз увеличится при этом его объем, если атмосферное давление 10^5 Н/м^2, температура у поверхности воды 23°С, а на глубине 140 м 7°С?

8. В лед при 0°С попадает пуля, летящая со скоростью 770 м/с. Масса пули 10 г. Считая, что 50% кинетической энергии пули идет на плавление льда, найти массу растаявшего льда. Удельная теплота плавления льда $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

9. Электрон, пролетая в электрическом поле из точки A в точку B, увеличил свою скорость с 800 км/с до 4000 км/с. Определить разность потенциалов между точками A и B электрического поля. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \times 10^{11}$ Кл/кг.

10. Большая шарообразная капля воды получена в результате слияния 125 одинаковых мелких шарообразных капелек. До какого потенциала были заряжены мелкие капельки, если потенциал большой капли оказался равным 2,5 В?

11. Определить сопротивление цепочки между точками A и B (рис. 2). Сопротивление каждого звена r.

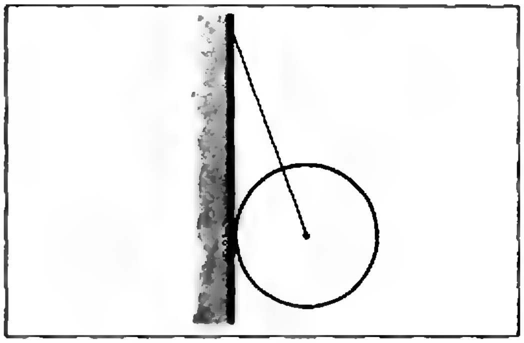


Рис. 1.

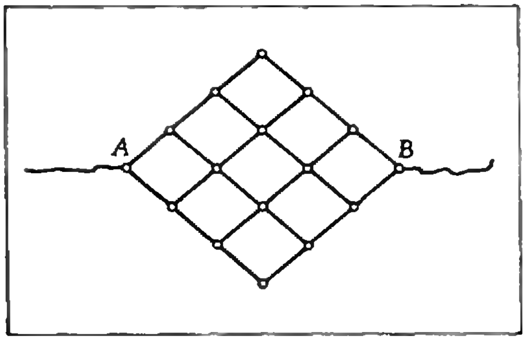


Рис. 2.

12. Электрический чайник, содержащий 1 л воды, подключен к генератору с э. д. с. 120 В и внутренним сопротивлением 4 Ом. На сколько градусов нагреется вода за 1 мин, если вольтметр, подключенный к клеммам генератора, показывает напряжение 110 В? К. п. д. чайника 70%. Током через вольтметр пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в=4190$ Дж/(кг·К).

13. Переменный ток возбуждается в рамке из 200 витков с площадью витка 300 см^2, вращающейся в магнитном поле с индукцией $1{,}5\cdot10^{-2}$ Т. Определить э. д. с. индукции через 0,01 с после начала движения рамки из нейтрального положения. Амплитудное значение э. д. с. равно 7,2 В.

14. Водолазу, находящемуся под водой, кажется, что Солнце находится на высоте $\alpha=60°$ над горизонтом. Определить действительную высоту β Солнца над горизонтом, если показатель преломления воды относительно воздуха $n = 4/3$.

15. Определить красную границу фотоэффекта для никеля, если для него работа выхода электрона равна 5 эВ. Указать, в какой области спектра лежит эта граница.

Заочные курсы

Контрольная работа № 1

1. Два автомобиля выходят из одного пункта и движутся в одном направлении. Второй автомобиль выходит на 20 с позже первого. Оба движутся равноускоренно с ускорением 0,4 м/с^2. Через какое время, считая от начала движения второго автомобиля, расстояние между ними окажется равным 240 м?

2. Свободно падающее тело проходит в последнюю секунду половину своего пути. Определить время падения и высоту падения.

3. Автомобиль массой 2 т движется в гору, уклон которой равен 1 м на длину 10 м. Коэффициент трения 0,08. Определить: а) работу, совершаемую двигателем автомобиля на пути 5 км; б) мощность, развиваемую двигателем, если этот путь пройден за 10 мин.

4. Подсчитать силу тяги локомотива, сообщающего составу массой 2500 т ускорение 5 см/с^2. Сила сопротивления движению составляет 0,005 веса состава.

5. Клетка подъемной машины массой 300 кг удерживается канатом. Найти силу натяжения каната, если клетка движется вертикально вверх: а) равноускоренно с ускорением 1,2 м/с^2; б) равномерно; в) равнозамедленно с ускорением — 1 м/с^2.

6. Подъемный кран в течение восьмичасового рабочего дня должен поднять 3000 т строительных материалов на высоту 9 м. Какова мощность двигателя крана, если коэффициент полезного действия установки 60%?

7. Конькобежец движется по окружности со скоростью 12 м/с. Радиус окружности 50 м. Под каким углом к горизонту он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие?

Контрольная работа № 2

1. Поле создано в воздухе двумя одноименными точечными зарядами, каждый из которых равен $4\cdot10^{-9}$ Кл. Расстояние между зарядами равно 8 см. Найти напряженность поля в точке, отстоящей от середины отрезка, соединяющего заряды (по перпендикуляру) на расстоянии 3 см.

2. Два одинаковых шарика подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того, как каждому из шариков был сообщен заряд $1\cdot10^{-7}$ Кл, шарики разошлись на угол $2\alpha=60°$. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра каждого шарика $l=0{,}2$ м.

3. Электронный луч, проходя между обкладками конденсатора путь 5 см, отклоняется на 1 мм. Определить среднюю скорость электронов в луче. Напряженность электрического поля между обкладками конденсатора 150 В/м. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

4. Точечный заряд в 15 ед. заряда СГСЭ находится на расстоянии 0,45 м от поверхности шара диаметром 10 см, заряженного до потенциала 2400 В. Какую работу надо совершить, чтобы уменьшить расстояние между ними на 40 см?

5. Колхозная гидроэлектростанция питает током электродвигатель, работающий при токе 12 А. Сколько (по массе) пойдет железного провода на оборудование линии, подводящей ток, если расстояние от станции до двигателя 0,5 км, а потеря напряжения в подводящих проводах не превышает 40 В?

6. Два элемента соединены параллельно. Первый элемент имеет э. д. с. 2 В, второй — 1,5 В. Внутреннее сопротивление каждого элемента равно 0,5 Ом. Сопротивление внешней части цепи 2 Ом. Найти ток в каждом элементе и во внешней части цепи. Какова будет величина тока во внешней части цепи, если второй элемент выключить?

7. Желая проверить показания амперметра, его включили последовательно с электролитической ванной. При постоянном режиме тока за 20 мин выделилось 1300 мг серебра. Амперметр показывал 0,8 А. Верно ли показание амперметра?

8. Электрическая печь в течение 1 мин выделяет 57,6 ккал тепла. Выразить ее мощность в киловаттах, подсчитать расход электрической энергии за 8 ч работы и стоимость израсходованной энергии при тарифе 4 коп. за 1 кВт·ч.

9. Полагая свободный пробег электрона в воздухе при нормальном давлении равным 0,005 мм, определить напряженность поля, при которой может произойти ионизация ударом. Для совершения ионизации электрон должен обладать энергией $24\cdot10^{-12}$ эрг.

Спрашивайте — отвечаем

Редакция «Кванта» получила письмо от читательницы Елены Гликиной из города Северодонецка Ворошиловградской области. Вот что она пишет:

«Мне случилось встретиться с таким интересным парадоксом. Беру уравнение

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2; \qquad (1)$$

его можно переписать в виде $x^2 = 2$, *откуда* $x = \sqrt{2}$, *а потому*

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2. \qquad (2)$$

Беру другое уравнение:

$$y^{y^{y^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4; \qquad (3)$$

его можно переписать в виде $y^4 = 4$, *откуда* $y = \sqrt{2}$, *и потому*

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что 2=4. Я прошу объяснить причину столь парадоксального равенства...»

Нам кажется, что подумать над этим письмом будет полезно всем нашим читателям. Именно поэтому мы помещаем на страницах журнала и само письмо, и ответ на поставленный в нем вопрос. Не спешите, однако, прочитать ответ — сначала попытайтесь разобраться в причинах появления «столь парадоксального равенства» самостоятельно.

Итак, цепочка рассуждений привела нас к равенству 2=4. Ложность полученного равенства не вызывает сомнений, а потому нужно искать ошибку. Проведем детальный логический анализ каждого сделанного шага, обращая особое внимание на законность каждого логического перехода. Одни из этих переходов основаны на общих законах логики или математики, другие связаны с конкретными особенностями рассматриваемой задачи.

Например, на последнем шаге нашего рассуждения мы из равенств (2) и (4) выводим, что 2=4. При этом мы опираемся, очевидно, на следующее свойство: *если $a=b$ и $a=c$ — истинные равенства, то и $b=c$ — истинное равенство.* Это свойство мы, естественно, подвергать сомнению не будем.

Но следствие 2=4 все-таки ложно, и поэтому неверно, по крайней мере, одно из равенств (2), (4).

Рассмотрим более внимательно равенство (2). Оно получилось в результате подстановки в уравнение (1) значения $x=\sqrt{2}$, найденного при решении этого уравнения. Однако, если $\sqrt{2}$ — корень уравнения (1), то равенство (2), конечно, справедливо — в силу самого определения корня. Таким образом, нужно проверить, действительно ли число $\sqrt{2}$ является корнем уравнения (1).

Решение уравнения (1), если говорить подробнее, проводилось так: пусть число a — корень уравнения (1), т. е. пусть

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2. \qquad (5)$$

Перепишем равенство (5) в виде

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2. \qquad (6)$$

Тогда в силу того же равенства (5) заключаем, что $a^2=2$. Это равенство выполняется при значении $a=\sqrt{2}$, которое и объявляется корнем уравнения (1).

Все ли удовлетворяет нас в таком решении? Очевидно, нет: уравнение $x^2=2$ есть следствие исходного уравнения (1), и потому нужно провести проверку с помощью, например, непосредственной подстановки значения $\sqrt{2}$ в уравнение (1) [отсутствие проверки является в приведенном решении существенным пробелом].

Для проведения проверки необходимо выяснить, действительно ли значение левой части уравнения (1) при $x=\sqrt{2}$ равно 2. Однако после подстановки мы приходим к левой части равенства (2), которая, с точки зрения школьных определений, не имеет смысла: в школе мы имеем дело лишь с результатом конечного числа операций возведения в степень, а потому равенство (2) просто бессмысленно. Равенство (4), конечно, столь же бессмысленно, и не удивительно, что использование этих двух «равенств» привело к неверному равенству $2=4$.

Возникших логических трудностей сразу можно было бы избежать, если бы с самого начала посмотреть на уравнение (1) внимательно. Действительно, подставляя в его левую часть любое число, например, $x=2$ или $x={}^1/_2$, мы получаем выражение, содержащее бесконечное число возведений в степень и потому не имеющее смысла. Попробуйте, например, ответить на вопрос, что такое

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Между тем примеры, содержащие бесконечное число операций, встречаются в некоторых задачниках для поступающих и, к сожалению, даже в вариантах вступительных экзаменов.

В математике часто встречаются выражения, содержащие бесконечное число операций. Но для таких выражений всегда предварительно даются четкие определения. Новая школьная программа дает возможность в некоторых случаях приписать смысл сумме бесконечного числа слагаемых *(бесконечного ряда)*

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$$

(см. учебник «Алгебра и начала анализа 9», с. 67—68), а также и многим другим бесконечным выражениям. С помощью понятия предела можно, например, естественным образом придать смысл выражению

$$A=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}} \qquad (7)$$

Именно, рассмотрим последовательность $\{x_n\}$

$$x_1=\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{3\sqrt{3}},$$

$$x_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ \ldots$$

и будем понимать выражение (7) как предел этой последовательности:

$$A=\lim_{n\to\infty}x_n$$

(если, конечно, этот предел существует). Покажем, что он действительно существует. Поскольку

$$x_n=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot 3^{\frac{1}{2^n}}=$$

$$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

в силу непрерывности показательной функции $y=3^x$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=$$

$$=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}=3.$$

Следовательно, выражение (7) имеет смысл и равно 3.

Попробуем теперь придать смысл выражению

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \qquad (8)$$

для чего, естественно, используем понятие предела. Рассмотрим последовательность

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ \ldots \qquad (9)$$

В статье А. Егорова «Уравнения и пределы» (с. 34) доказано, что уравнение

$$(\sqrt{2})^x=x \qquad (10)$$

имеет ровно два корня (поскольку $1<\sqrt{2}<1,42<e^{\frac{1}{e}}$) и последовательность (9) сходится к меньшему из этих корней. Корни уравнения (10) легко найти подбором: $x_1=2$, $x_2=4$. Следовательно, предел последовательности (9) равен 2, и если выражению (8) придать указанный выше смысл, то верно равенство (2), а (4) — неверно.

Г. Дорофеев, Н. Розов

Настольная книга по астрономии

Тридцать лет назад на прилавках книжных магазинов появилась книга известного советского астронома профессора Московского университета Бориса Александровича Воронцова-Вельяминова «Вселенная». Это первая обстоятельная советская научно-популярная книга о Вселенной. Она быстро исчезла с книжных прилавков и приобрела заслуженную любовь читателей. С тех пор книга неоднократно переиздавалась. В 1976 году издательство «Наука» выпустило седьмое, переработанное и дополненное, издание этой книги под названием «Очерки о Вселенной».

Тридцать лет, которые прошли с момента выхода первого издания книги, были периодом необычайного расцвета астрономической науки. В этот период родилась новая область астрономии — радиоастрономия, которая освоила второе «окно прозрачности» в спектре электромагнитных излучений и добавила к оптической информации о небесных телах и явлениях громадное количество сведений, доставленных радиоволнами в сантиметровом и дециметровом диапазонах.

Двадцать лет назад, с запуска первого советского искусственного спутника Земли, началась новая эра в изучении космического пространства. Подняв за пределы земной атмосферы сложную научную аппаратуру, астрономы получили возможность регистрировать все виды электромагнитных излучений и космических частиц, рождающихся в глубинах космоса.

Можно с уверенностью утверждать, что в эти три десятилетия наука узнала о космосе больше, чем за всю предыдущую историю астрономии. Квазары, пульсары и «черные дыры», ядра галактик и взрывающиеся галактики, реликтовое излучение и солнечный ветер — со множеством удивительных небесных объектов и явлений мы познакомились впервые. Рассказать обо всем этом одинаково подробно в одной книге практически невозможно. Это и заставило автора назвать последнее издание книги более скромно — «Очерки о Вселенной».

Правда, это вовсе не означает, что автор рассказывает только о каких-то отдельных интересных проблемах современной астрономии. По существу, книга Б. А. Воронцова-Вельяминова является своеобразной научно-популярной энциклопедией наших знаний о Вселенной. Она охватывает все разделы современной астрономической науки.

Во введении автор знакомит читателей с основными средствами астрономических наблюдений — оптическими телескопами, спектрографами, радиотелескопами и радиолокаторами, а также с методами регистрации частиц высоких энергий.

Первая часть книги посвящена миру твердого вещества. В ней рассказывается о больших и малых планетах Солнечной системы, о кометах, метеоритах и метеорных дождях. Во второй части, которую автор назвал «Мир газа», идет речь о Солнце,звездах и галактиках Особенно хороша глава о туманностях, изучению которых Б. А. Воронцов-Вельяминов посвятил многие годы своей жизни. Попутно автор сообщает множество интереснейших подробностей, связанных с открытием и исследованием этих небесных объектов.

В последних главах второй части рассматриваются рождение, эволюция и смерть звезд, а также происхождение Солнечной системы. Не обходит вниманием автор и сложные философские проблемы, касающиеся изучения Вселенной. Им посвящено несколько специальных параграфов («От атомного ядра до Метагалактики», «Есть ли граница мира и что за ней?», «Возможна ли связь с цивилизациями других планет?» и т. д.).

Книга «Очерки о Вселенной» во многом оригинальна. В нее, например, включены стихи друга автора поэта А. А. Коваленкова. В книге много юмора, шуток, образных сравнений, воспоминаний автора. Он часто ведет с читателями откровенный разговор, не скрывая своего личного отношения к обсуждаемым проблемам.

Книга Б. А. Воронцова-Вельяминова хорошо известна всем астрономам. У многих из них именно она, прочитанная в юные годы, пробудила интерес к серьезным занятиям астрономией.

Научный уровень книги очень высок — в ней нет каких-либо ошибок, устаревших или отвергнутых наукой взглядов и фактов. Она во всех своих частях представляет читателям действительно современную астрономию. Но стиль и характер изложения сложных научных достижений таковы, что книга вполне доступна школьникам старших классов. И если кто-то захочет поближе познакомиться с разгаданными и неразгаданными тайнами Вселенной, трудно найти для этого более подходящую книгу.

Чтобы дать читателям возможность самим убедиться в правоте сказанного выше, мы приводим здесь текст небольшого параграфа из рецензируемой книги. Он называется, казалось, бы, несколько странно — «Есть ли жизнь на Земле?». По этому поводу автор пишет: «Такой вопрос представляется не только излишним, но и странным. Мы-то знаем, что жизнь вокруг нас на Земле существует! Но такой вопрос могут задавать себе разумные жители других миров так же, как мы задаем вопрос, есть ли жизнь на Марсе или на других небесных телах.

А как они могут найти ответ на этот вопрос?

Конечно, мы выясняем физические условия на планетах, сравниваем их с земными и на основании этого заключаем, может ли быть на них жизнь, сходная с земной. Научное решение вопроса может опираться только на опыт наблюдения жизни на нашей Земле. Научно можно мыслить жизнь только на той же основе, какая известна на Земле. Например, мы знаем, что живой белок — основа развитой жизни — при высокой температуре свертывается. Но ...нельзя полностью поручиться за пределы возможного приспособления жизни и даже за возможность жизни на других основах. Мы будем говорить здесь о непосредственно видимых следах разумной деятельности. Их в принципе можно видеть с более далеких расстояний, чем сами разумные существа. Лучшие снимки поверхности Марса, полученные на последних космических аппаратах с высоты менее 2 000 километров и позволяющие различить образования размером от нескольких сотен метров, не показывают следов разумной деятельности. Пусть разумной жизни на Марсе нет, это почти несомненно. Но насколько видна издали разумная деятельность, заведомо существующая на Земле? Этот вопрос полезно выяснить, и им занялся американский ученый Саган.

В 1966 году он и его сотрудники просмотрели огромное число фотографий Земли, полученных с метеорологических спутников и дававших разрешение до 2—0,2 километра. Можно было ожидать, что наиболее заметными следами разумной деятельности при этом будут сезонные изменения вида больших, правильно ограниченных полей, засеянных сельскохозяйственными культурами. Но контрастность их изображений мала, а их сезонные изменения маскируются изменениями угла падения солнечного света и угла, под которым сделан снимок.

Более обещающими являются большие искусственные сооружения прямолинейного вида — дороги, мосты, плотины, следы за кормой кораблей в море или белые полосы, оставляемые самолетами. Их следы разыскивались на тысячах снимках, свободных от облаков.

Было найдено лишь одно четкое указание на техническую культуру: яркая линия только что законченного отрезка автострады. Более сомнительно изображение в районе узкого пролива между Канадой и Гренландией. Оно состояло из длинных полосок — белой и черной, тянущихся параллельно друг другу над покровом облаков. Возможно, что это был след самолета и его тени или облако, оставленное реактивным самолетом. Еще одним следом человеческой деятельности была белая сетка просек в лесу, на которые выпал свежий снег.

Авторы заключили, что если бы воображаемые марсиане имели снимки Земли в таком же количестве и такого качества, какие были получены «Маринером-4» — первой автоматической станцией, пролетевшей над поверхностью Марса на высоте 12 000 километров, то по ним нельзя было бы найти никаких признаков разумной жизни на нашей планете.»

Мы закончим нашу рецензию самым маленьким параграфом из этой книги. Он называется: «Ваш адрес в безграничной Вселенной». «Подведем итог развитию наших знаний о месте Человека во Вселенной, насколько мы представляем себе сейчас ее строение. Представим этот итог в виде вашего адреса, уважаемый Читатель:

Безграничная Вселенная
«Наша» Метагалактика
Местное скопление галактик
Наша Галактика
Зведное облако «Местная система»
«Наша» Солнечная система
Планета Земля
Советский Союз
РСФСР (или др.)
Город
Улица
дом №
Квартира №
Гр. ...»

Остается только добавить, что эта книга удостоена первой премии на проходившем в 1977 году Всесоюзном конкурсе Общества «Знание» на лучшую научно-популярную книгу.

В. Рудов

Задачи наших читателей

1. Решить уравнение

$$\sin^2 1917x + \frac{1}{4}\sin^2 1977x = \sin 1917x \cdot \sin^2 1977x.$$

А. Аляев (Пензенская обл.)

2. Пусть S — площадь треугольника ABC, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно, h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных на эти же стороны или их продолжения. Докажите, что

а) $$S = \frac{1}{2}\left(ab\,|G_aG_b|^2 + bc\,|G_bG_c|^2 + ac\,|G_aG_c|^2\right)^{1/2};$$

б) $$S = \frac{1}{2}\left(\frac{|G_aG_b|^2}{\sin\hat{C}} + \frac{|G_bG_c|^2}{\sin\hat{A}} + \frac{|G_aG_c|^2}{\sin\hat{B}}\right);$$

в) $$\frac{|G_aG_b|^2}{h_ah_b} + \frac{|G_bG_c|^2}{h_bh_c} + \frac{|G_aG_c|^2}{h_ah_c} = 1.$$

У. Алла (г. Выру)

3. Сумма двух двузначных чисел вдвое больше третьего, у которого число десятков равно числу десятков первого числа, а число единиц — числу единиц второго.

Доказать, что все эти числа равны друг другу.

М. Штеренберг (г. Саратов)

4. Найти однозначные числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{x^y} = \frac{x+y}{1000}.$$

И. Михалкович (Минская обл.)

5. Найти все натуральные n, при которых справедливо неравенство

$$9^n + 10^n > 12^n.$$

В. Федотов (г. Петрозаводск)

К статье «Подготовительные курсы при МИСИ»

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2}{\ln 5}+3$. 2. (1; 1). 3. Функция монотонно убывает на промежутках $]-\infty; 2[$ и $]2;\infty[$. 4. $\frac{x^7}{7}+\frac{3x^4}{4}+3x-\frac{1}{2x^2}+\frac{109}{28}$. 5. $3\sqrt{3}\,l^2$. 6. $\vec{0}$.

Вариант 2

1. $24x\cdot(4x^2+3)^2-\frac{2}{x}$. 2. Нет 3. $a = a/2 + a/2$. 4. 32/3. 6. $\overrightarrow{AB}=(\vec{a}-\vec{b})/2$, $\overrightarrow{BC}=(\vec{a}+\vec{b})/2$, $\overrightarrow{CD}=(\vec{b}-\vec{a})/2$, $\overrightarrow{DA}=-(\vec{a}+\vec{b})/2$.

Вариант 3

1. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cos\sqrt{1+x^2}$. 2. $v(0)=3$ см/сек, $v(1)=0$ см/сек. 3. $y_{\max}=25$, $y_{\min}=-2$. 4. $x-\cos x+2$. 5. $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=(\pi-\alpha)/2$. 6. $\varphi=\pi/3$.

Контрольная работа № 1

1. $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$. 2. 21, 32, 43. 3. а) $\varnothing$; б) $x=3/4$. 4. Квадрат с вершинами $A(0;\ 2)$, $B(-2;\ 0)$, $C(0;\ -2)$, $D(2;\ 0)$. 5. Угол с вершиной $A(-4/7;\ 18/7)$, содержащий начало координат. 6. а) $\frac{4^x}{\cos^2 x}+\operatorname{tg} x\cdot 4^x\cdot\ln 4-\frac{3}{\sin^2 x}$; б) $\frac{1+3x}{\sqrt{2x+3x^2}}-3\cos x$; в) $\frac{-16\cos(3x+2)-12x\sin(3x+2)}{x^5}$. 7. $-1+4\pi^2/3$. 8. а) функция возрастает на **R**; б) $]-\infty; -2]$ — возрастает, $[-2; \infty[$ — убывает; в) $]0; 1]$ — убывает, $[1;\infty[$ — возрастает. 10. 8 часов. 11. 1, 9, 17. 12. 6. 13. -1. 15. 3 : 1. 16. 25π см^2.

Контрольная работа № 2

1. Да. 2. $y(4)=40$, $y(-3)=-9$. 3. $-1/2$. 4. Квадрат со стороной $a/4$. 5. а) $\ln|x|+x^4/4+\sin 2x/2+C$; б) $\operatorname{tg} x+5x^2/2-2x/3+C$; в) $\ln|ax+b|/a+C$; г) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 6. $e-1$. 7. 32/3. 8. а) $x=1$, $y=2$, $z=3$; б) $x=2$, $y=-1$, $z=1$. 9. а) $x\in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]0;\infty[$, $y=x^2$; б) координаты точек кольца, ограниченного окружностями с центром в начале координат радиусов 1 и 2. 10. 2 м. 11. $\sqrt{2b^2-a^2}$.

Физика

Задачи очного письменного зачета

1. $t\approx 3{,}4$ с; $h\approx 57$ м. 2. $|\vec{F}_1|\approx 520$ Н; $|\vec{F}_2|\approx 460$ Н. 3. $|\vec{v}|=10{,}4$ м/с. 4. $x=0{,}2$ м. 5. $|\vec{F}_{н}|\approx 51$ Н; $|\vec{F}_g|\approx 13$ Н. 6. $p\approx 5{,}3\cdot 10^3$ Н/м^2. 7. ≈ в 15,8 раз. 8. ≈ 4 г. 9. $\Delta\varphi_{AB}\approx -43{,}6$ В. 10. $\varphi_0=0{,}1$ В. 11. $R_{AB}=13/7\ r$. 12. $\Delta T\approx 3$ К. 13. $\mathscr{E}=5{,}1$ В. 14. $\beta=48^\circ$. 15. $\lambda\approx 2{,}5\times 10^{-7}$ м; красная граница фотоэффекта лежит в ультрафиолетовой области спектра.

Заочные курсы

Контрольная работа № 1

1. $t=20$ с. 2. $t\approx 3{,}4$ с; $h\approx 57$ м. 3. $A\approx 2\cdot 10^7$ Дж; $N\approx 3{,}4$ кВт. 4. $|\vec{F}|=2{,}5\cdot 10^5$ Н. 5. а) $|\vec{F}|=3360$ Н; б) $|\vec{F}|=3000$ Н; в) $|\vec{F}|=2700$ Н. 6. $N\approx 15{,}6$ кВт. 7. $\alpha\approx 74^\circ$.

Контрольная работа № 2

1. $|\vec{E}|\approx 0{,}27$ В/м. 2. $m\approx 40$ г. 3. $|\vec{v}|\approx 5{,}7\cdot 10^6$ м/с. 4. $A=48$ эрг. 5. $m\approx 281$ кг. 6. $I_1\approx 0{,}89$ А; $I_2\approx 0{,}11$ А; $I\approx 0{,}78$ А; $I'=0{,}8$ А. 7. Амперметр показывал меньше. 8. $P=4$ кВт; $W=32$ квт·ч; 1 р. 28 коп. 9. $|\vec{E}|=3\cdot 10^6$ В/м.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 9*)

1. 4 рубля 26 копеек. 2. Порция Андрея на 1 копейку дороже (она получается из порции Виктора, если в ней заменить 25 г шоколадного мороженого пломбиром). 3. 5*S*. 4. Вспомните правило рычага.

Над номером работали:
А. Виленкин, Н. Клумова, Т. Петрова,
В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Г. Красиков, В. Машатин, Э. Назаров,
А. Пономарева, Н. Смирнова, Э. Смирнов

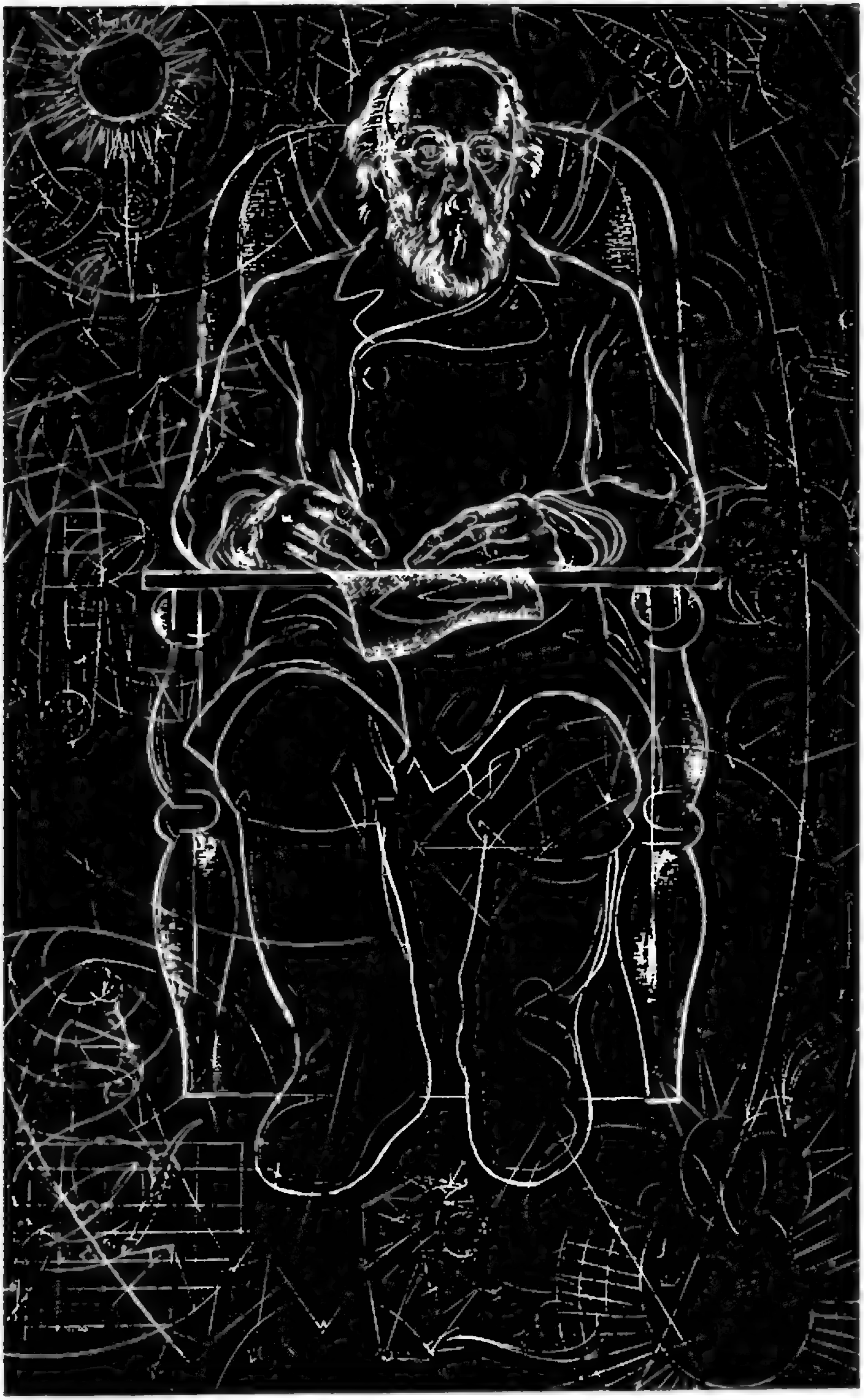
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Медведская М. Л.
113035, Москва, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/VII-77 г
Подписано в печать 7/IX-77 г
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 625 Т-16411
Цена 30 коп. Заказ 1641 Тираж 290 135

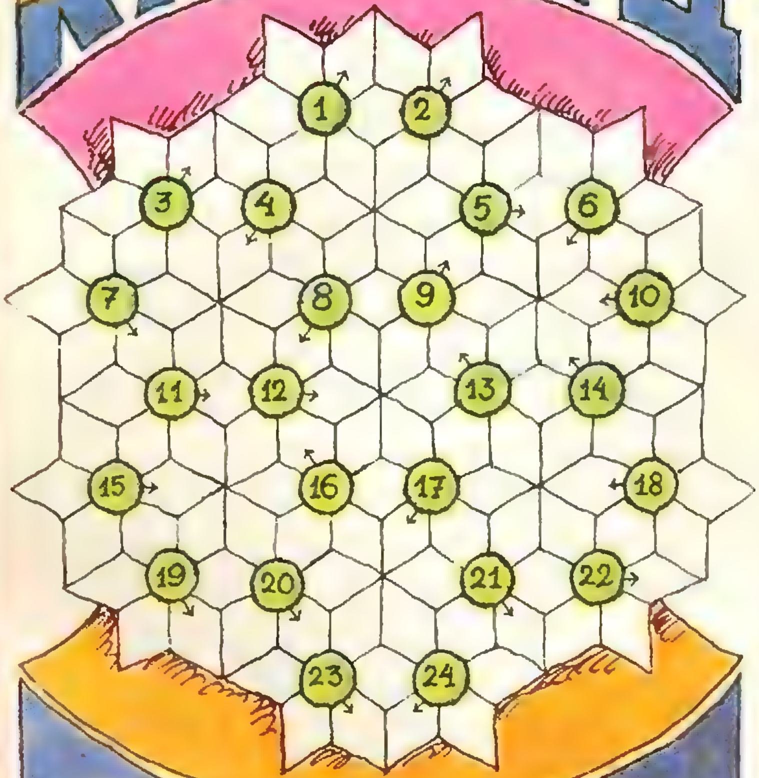
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Константин Эдуардович
Циолковский
(1857—1935)

КРОССВОРД



Каждое слово из шести букв вписывается по часовой стрелке вокруг номера, под которым оно стоит, начиная с клетки, отмеченной стрелкой.

1. Основа естествознания. 2. Наиболее распространенный изотоп водорода. 3. Летательный аппарат с реактивным двигателем. 4. Положительный ион. 5. Электронная лампа. 6. Раздел физики. 7. Наиболее удаленная от центра Земли точка орбиты искусственного спутника. 8. Вспомогательная шкала, по которой отсчитывают доли делений основной шкалы какого-либо средства измерения. 9. Планета Солнечной системы. 10. Греческая буква. 11. Советский физик — лауреат Нобелевской премии. 12. Общее название протона и нейтрона. 13. Четвертое состояние вещества. 14. Единица электрической емкости. 15. Единица силы. 16. Одновременное звучание нескольких звуков одной частоты. 17. Русский физик XVIII века. 18. Сильно разреженный газ. 19. Итальянский физик, создавший первый источник постоянного тока. 20. Неподвижная часть электрических машин. 21. Безмоторный летательный аппарат. 22. Сплав, который применяется для изготовления нагревательных элементов. 23. Астрономическая единица длины. 24. Часть оптического прибора.

Д. Ишонкулов

18 ГОЛОВОЛОМКА

Как разделить число 18 пополам, чтобы получилась единица?

И. Михалкович

КВАДРАТЫ ИЗ ПЕНТАМИНО

1. Любую из 12 фишек пентамино (см. рис. 1) кроме «креста» можно разрезать на квадрат 1×1 и два прямоугольника 2×1. Если эти прямоугольники разрезать по диагонали, то из полученных пяти кусков можно сложить квадрат (рис. 2).

На какое наименьшее число кусков и как надо разрезать «крест», чтобы из него можно было сделать квадрат?

Какие пентамино можно разрезать на 3 куска, из которых можно сделать квадрат?

2. Разбейте эти же 12 фишек пентамино на три группы по 4 фишки в каждой и сложите из каждой группы по квадрату, разрезая на части не более 2 фишек из каждой группы.

На какое (наименьшее) число частей придется для этого разрезать отобранные фишки?

Л. Мочалов

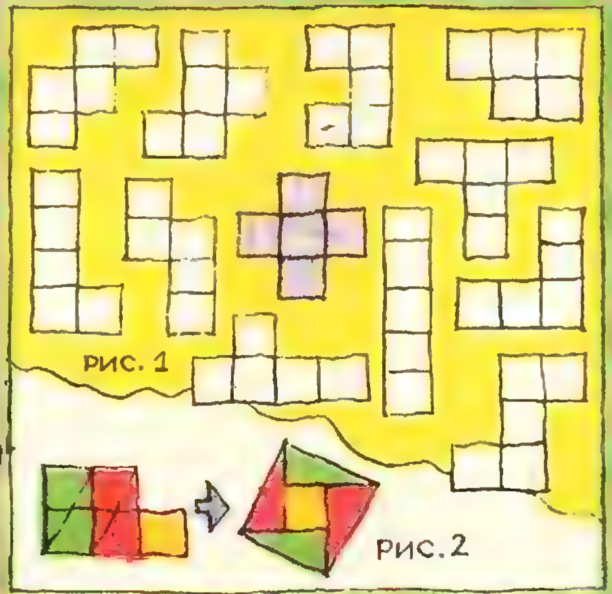
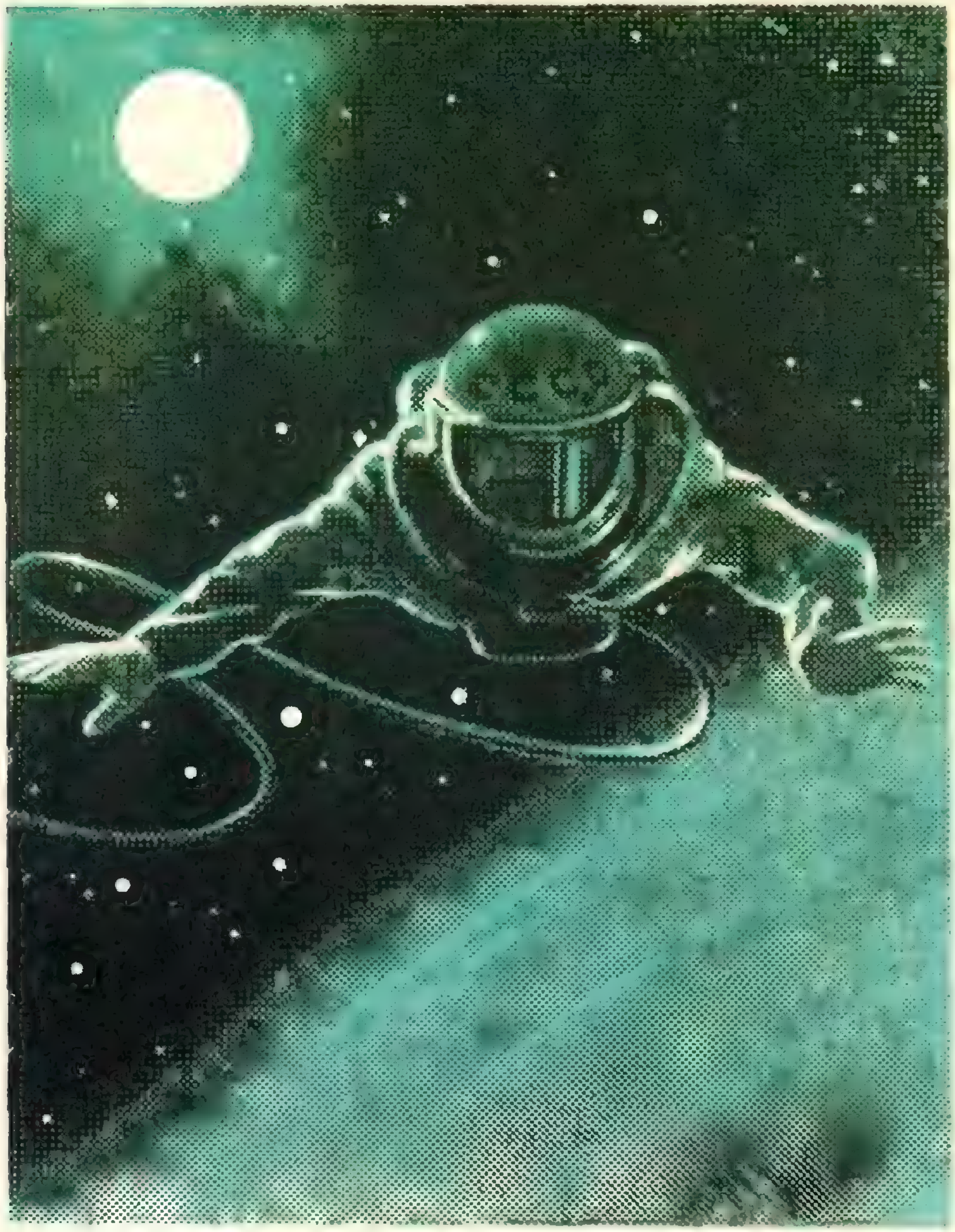


рис. 1

рис. 2

„Человечество не останется вечно на Земле, но, в погоне за светом и пространством, сначала робко проникнет за пределы атмосферы, а затем завоюет себе все околосолнечное пространство„

К. Э. Циолковский



Цена 30 коп.
Индекс 70465

НОМЕР
11

Основан в 1970 году

Квант

11
1977

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ

К 60-летию Великого Октября

2 Наука общества, строящего коммунизм
4 *И. Кикоин.* Как создавалась советская физика
18 *Б. Гнеденко.* О математике Страны Советов
27 *В. Лешковцев.* Достижения советских физиков
31 *С. Демидов.* Проблемы Гильберта и советская математика
38 *И. Тюлина.* Планета Жени Рудневой
▲
40 *В. Левитина.* Как Математик помог Бригадиру

Лаборатория «Кванта»

44 *В. Майер.* «Липкая» струя

Математический кружок

45 Повороты и пересечения многогранников

Задачник «Кванта»

47 Задачи М471—М475, Ф483—Ф487
49 Решения задач М431—М433; Ф442—Ф444

По страницам школьных учебников

53 *А. Савин.* Что значит «больше»?

«Квант» для младших школьников

55 Задачи
56 *Б. Коган.* Цветные тени

XI Всесоюзная олимпиада школьников

58 *Н. Клумова, М. Смолянский.* Олимпиада по математике
63 *Л. Лиманов.* Решение задач олимпиады
65 *Т. Петрова, Л. Чернова.* Олимпиада по физике
69 *П. Лик.* Экспериментальные задачи олимпиады по физике
72 Победители XI Всесоюзной олимпиады
▲
74 *М. Башмаков.* Ленинградская олимпиада средних профтехучилищ
75 *Н. Васильев.* Задачи республиканских олимпиад

Практикум абитуриента

77 *В. Грушин, А. Диденко, Г. Дубровский.* Задачи на законы динамики материальной точки
82 *Э. Шувалова.* Координатный метод

Рецензии, библиография

90 *Н. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
92 *В. Рудов.* Жизнь — научный подвиг
94 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 52, 91)*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». «Квант», 1977

> Статья 25. В СССР существует и совершенствуется единая система народного образования, которая обеспечивает общеобразовательную и профессиональную подготовку граждан, служит коммунистическому воспитанию, духовному и физическому развитию молодежи, готовит ее к труду и общественной деятельности.
>
> Статья 26. В соответствии с потребностями общества государство обеспечивает планомерное развитие науки и подготовку научных кадров, организует внедрение результатов научных исследований в народное хозяйство и другие сферы жизни.
>
> Конституция СССР

Наука общества, строящего коммунизм

60 лет отделяют нас от того знаменательного дня, когда рабочие и крестьяне России взяли власть в свои руки, создав первое в мире пролетарское государство. Великая Октябрьская социалистическая революция открыла человечеству путь к социализму. С тех пор на этот путь сознательно вступили десятки государств. Социализм с каждым годом становится все более могучей политической, экономической и социальной системой современного мира.

Год от года крепнет и развивается могущество Советского Союза. Наша страна — страна развитого социализма — приступила к созданию коммунистического общества. Выдающиеся достижения советского народа отражены в новой Конституции СССР, принятой недавно Верховным Советом СССР после поистине всенародного обсуждения. И каждая победа, каждый успех на пути к социализму и коммунизму неразрывно связаны с нашей наукой и школой.

Октябрьская революция коренным образом изменила роль и место науки в государстве. Еще Карл Маркс, разрабатывая идеи научного социализма, пришел к выводу, что социализм будет по-научному относиться к процессу своего развития и совершенствования. В. И. Ленин глубоко и всесторонне разработал вопрос о роли науки в строительстве социализма и коммунизма. В своей знаменитой речи на III Всероссийском съезде комсомола, произнесенной в 1920 году, он говорил: «Мы знаем, что коммунистическое общество нельзя построить, если не возродить промышленности и земледелия, причем надо возродить их не по-старому. Надо возродить их на современной, по последнему слову науки построенной, основе».

Несмотря на чрезвычайно неблагоприятные условия — гражданскую войну, разруху, чудовищную отсталость и нищету,— Ленин уделял огромное внимание развитию молодой советской науки. Она и сейчас опирается на принципы, завещанные Ильичом. Впервые в мировой истории организация и планирование науки стали осуществляться как одна из важнейших государственных задач. При этом большое внимание уделялось развитию физико-математических наук, которые всегда были основой техники и производства.

До революции в России существовал только один физический институт (в Москве), да и тот был построен без какой-либо поддержки со стороны царского правительства. Он возник по инициативе выдающегося русского физика П. Н. Лебедева на частные пожертвования. Но уже в 1918 году по указанию В. И. Ленина в Петрограде были созданы Физико-технический и Оптический институты, в Нижнем Новгороде (Горьком) — специальная радиолаборатория. Вскоре к ним присоединились Физико-математический институт Академии наук и Радиевый институт в Петрограде, Центральный аэрогидродинамический институт в Москве. Теперь в стране работают сотни научно-исследовательских институтов, специализирующихся в области физико-математических наук. Многие из них, такие, как Физико-технический институт АН СССР имени А. Ф. Иоффе, Физический институт АН СССР имени П. Н. Лебедева, Институт физических проблем АН СССР имени С. И. Вавилова, Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова, Математический институт АН СССР имени В. А. Стеклова, стали крупнейшими центрами мировой науки. Научно-исследовательские физико-математические институты имеются во всех республиках нашей страны. Успешно развивают советскую науку институты, принадлежащие и другим академиям, в том числе Академии педагогических наук СССР, а также высшие учебные заведения.

В 1910 году Министерство народного просвещения царской России отклонило просьбу Академии наук выделить ей 800 рублей для организации экспедиции по исследованию месторождений радиоактивных минералов. В наши дни государство ежегодно выделяет на развитие науки десятки миллиардов рублей.

Наши ученые внесли огромный вклад в создание тяжелой индустрии, в победу над гитлеровскими полчищами, в строительство развитого социалистического общества. В невиданно короткие сроки они ликвидировали монополию США на атомное оружие. Советская наука открыла человечеству путь к мирному использованию атомной энергии, проложила дорогу в Космос, первой осуществила управляемые термоядерные реакции в лабораторных условиях — предвестник энергетики будущего, заложила основы математической экономики, топологии и ряда других разделов современной математики.

Достижения советских ученых навсегда вошли в сокровищницу мировой науки. Эффекты Иоффе, Черенкова, Капицы, Кикоина, Келдыша—Франца, Шпольского, Серпуховской эффект, диамагнетизм Ландау, метод Хартри—Фока, теория Гинзбурга—Ландау—Абрикосова—Горькова, критерий Крускала—Шафранова — эти термины можно прочитать теперь в статьях и книгах на всех языках. Высшие международные научные награды — Нобелевские премии — присуждены советским ученым академикам Н. Н. Семенову, И. Е. Тамму, И. М. Франку, П. А. Черенкову, Л. Д. Ландау, А. М. Прохорову, Н. Г. Басову, Л. В. Канторовичу. Многие отечественные научные журналы регулярно переводятся и переиздаются за рубежом.

Читатели «Кванта» — современники научно-технической революции, ее активные участники в будущем. Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев в своей речи на XXIV съезде КПСС поставил перед всем нашим народом историческую задачу: «Органически соединить достижения научно-технической революции с преимуществами социалистической системы хозяйства, шире развивать свои, присущие социализму формы соединения науки с производством». Решение этой задачи связано с дальнейшим развитием и совершенствованием советской науки.

Октябрьская революция широко открыла молодежи доступ к образованию. В 1914 году в школах России обучалось 9,6 миллиона учащихся, из которых более 9 миллионов посещали начальную школу и лишь 625 тысяч (т. е. около 7% от общего числа учеников) имели возможность продолжать свое образование. В 1976 году в СССР было 46,5 миллиона учащихся средних школ; каждый из них должен получить среднее образование. На каждую тысячу жителей царской России приходилось 56 школьников; сейчас число школьников на тысячу жителей нашей страны составляет 181. В советских школах работает в 10 раз больше учителей, чем в школах дореволюционной России.

Достоинства советской школы широко известны всему миру. Недаром сразу же после запуска первого искусственного спутника Земли американцы приступили к реорганизации среднего образования в своей стране, публично признав превосходство нашей школы.

Партия и правительство уделяют большое внимание развитию интереса молодежи к науке. В нашей стране создано много специальных физико-математических школ, в том числе и заочных — доступных самым широким слоям учащихся. Ежегодно проводятся олимпиады школьников, в которых участвуют сотни тысяч учеников. Многие школы поддерживают тесную связь с научно-исследовательскими учреждениями. Весной 1977 года ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения СССР, Всесоюзный совет научно-технических обществ и Всесоюзное общество «Знание» приняли совместное постановление о создании в каждой республике специальных научных обществ учащихся. (О работе одного из таких обществ — Молдавского научного общества учащихся ВИИТОРУЛ (БУДУЩЕЕ) — рассказано в апрельском номере нашего журнала за этот год.)

Этим же целям — развитию интересов молодежи к науке и укреплению связи между наукой и школой — служит и журнал «Квант», родившийся по инициативе ученых, поддержанной руководителями нашего государства.

Молодые ученые внесли огромный вклад в развитие отечественной науки после победы Октября. На примере физико-математических наук об этом подробно рассказано в статьях о развитии советской физики и математики, публикация которых началась в 10 номере нашего журнала.

Советский Союз получает необходимые ему научные кадры из недр своего народа — бесконечно талантливого и неповторимо оригинального. Недаром еще в 1966 году один из крупнейших американских математиков, принимавших участие в работе Международного конгресса математиков в Москве, на вопрос журналистов: «Что произвело на Вас наибольшее впечатление в ходе работы конгресса!», — ответил так: «Больше всего меня поразило обилие талантливых молодых математиков в вашей стране».

Молодыми пришли в науку академики И. В. Курчатов, Н. Н. Семенов, П. Л. Капица, Л. Д. Ландау, Л. А. Арцимович, Ю. Б. Харитон, Я. Б. Зельдович, А. Н. Колмогоров, Н. Н. Боголюбов, С. Л. Соболев и тысячи других крупных советских ученых. Молодежь и сегодня составляет большую часть научных работников нашей страны. И в этом — залог дальнейшего расцвета советской науки.

И. Кикоин

Как создавалась советская физика

Мы продолжаем публикацию воспоминаний Героя Социалистического Труда, академика И. К. Кикоина, начатую в 10 номере.

В конце 30-х годов академик Абрам Федорович Иоффе поставил перед своими сотрудниками новую задачу: исследовать особый по своим электрическим свойствам класс веществ — полупроводники. Как известно, полупроводники — это вещества, проводимость которых слишком мала, чтобы считать их металлами, и слишком велика, чтобы относить их к диэлектрикам.

В то время полупроводники не имели широкого применения. И тем не менее, Иоффе, интуитивно понимая, что в будущем они приобретут большое практическое значение, с самого начала уделял много внимания работам по исследованию их свойств. А исследования эти были нелегкими. И вот почему. У разных образцов одного и того же по химическому составу полупроводника физические характеристики оказывались совершенно различными. Например, у разных образцов закиси меди (Cu_2O) проводимость оказывалась различной, так же как и зависимость проводимости от температуры. Полученные разными способами образцы вели себя одни как диэлектрики, другие — как проводники. Ясно, что выявить какие-то общие закономерности, исследуя столь «капризные» вещества, очень трудно. И связано это с тем, что, как оказалось, свойства полупроводников необычайно сильно зависят от ничтожных количеств примесей, имеющихся в образцах. Например, если в образце закиси меди атомов кислорода на стотысячную долю процента больше, чем в «чистой» закиси меди (то есть при точном химическом соотношении меди и кислорода), то он ведет себя как проводник, хотя чистая закись меди — диэлектрик.

Эта особенность полупроводников в каком-то смысле предопределила направление исследований. Прежде всего необходимо было установить, как зависят свойства полупроводников от количества содержащихся в них примесей. А для этого надо было иметь образцы с точно известным химическим составом и количеством примесей.

В эти работы очень активно включился Борис Васильевич Курчатов (брат И. В. Курчатова). Он нашел способ получения образцов закиси меди с заданным избыточным количеством кислорода. Создав несколько таких образцов, он исследовал, как меняется проводимость закиси меди в зависимости от примеси кислорода. Оказалось, что проводимость резко растет с увеличением количества примеси. Эта классическая работа положила начало созданию полупроводников с заданными свойствами введением определенного количества той или иной примеси. Сейчас они находят огромное практическое применение.

После того как Абрам Федорович Иоффе переключил наше внимание на полупроводники, я решил заняться исследованием так называемого внутреннего фотоэффекта. Явление это заключается в том, что под действием света в полупроводнике появляются дополнительные свободные электроны и проводимость образца увеличивается. Мне хотелось выяснить, обладают ли эти дополнительные электроны той же подвижностью, что и темновые электроны (то есть свободные электроны, которые имеются в неосвещенном образце). А получить такую характеристику, как подвижность электронов, можно было, измеряя эффект Холла и проводимость образца. Поэтому было решено исследовать этот эффект в полупроводниках. (Напомню, что эффект Холла заключается в том, что если поместить образец, по которому течет ток, в магнитное поле, то между точками образца, лежащими на прямой, перпендикулярной направлению поля и направлению тока, возникает разность потенциалов — э. д. с. Холла.

Начав исследования, мы столкнулись со странным явлением, которое мешало проводить измерения. Принципиальная схема эксперимента была приблизительно такой, как на рисунке 1. И мы с изумлением обнаружили, что при освещении образца в магнитном поле даже при отсутствии текущего через образец тока прибор регистрировал наличие разности потенциалов между точками *A* и *A'*, на которых мы собирались измерять э. д. с. Холла. Чтобы измерить «чистую» э. д. с. Холла, надо было как-то устранить этот побочный эффект. И мы его устранили. Оказалось, что если пластинку закиси меди, с которой мы проводили измерения, освещать не белым, а красным светом (а сама закись меди — это прозрачный кристалл красного цвета), то побочный эффект исчезает, и можно измерить «чистую» э. д. с. Холла, определить тот «вклад», который дают в нее фотоэлектроны, и вычислить их подвижность. Она оказалась такой же, как и у темновых электронов. (Сейчас я не стал бы проводить подобных исследований, потому что теперь хорошо известно, что рождающиеся под действием света фотоэлектроны тотчас же сталкиваются с атомами и в дальнейшем по своим свойствам ничем не отличаются от темновых электронов.)

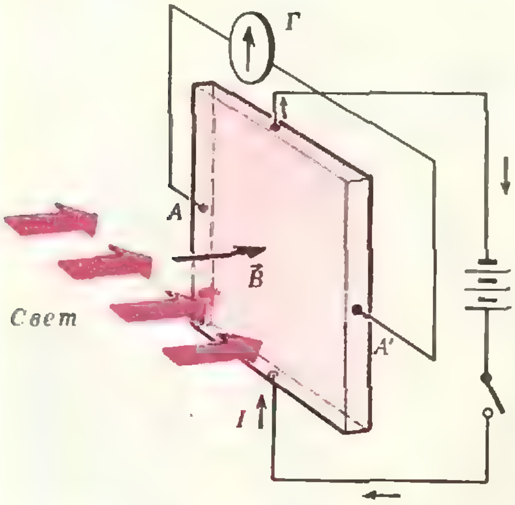


Рис. 1. По такой схеме мы ставили эксперимент, в котором хотели измерить э. д. с. Холла в полупроводнике. Пластинка, по которой течет ток, помещена в магнитное поле, индукция которого перпендикулярна поверхности пластинки. Эта поверхность освещается пучком света. В точках A и A', находящихся на одинаковых расстояниях от краев пластинки, измеряется э. д. с. Холла.

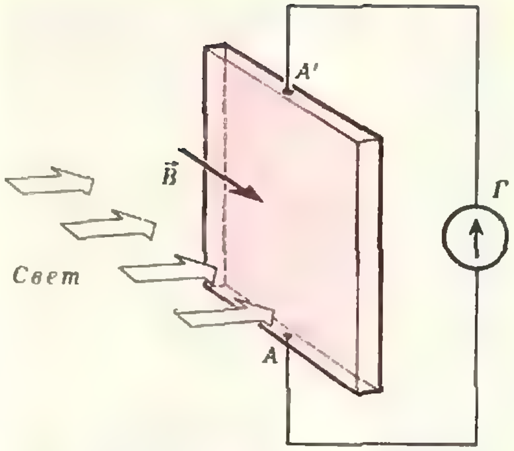


Рис. 2. Схема эксперимента, в котором был обнаружен фотоэлектромагнитный эффект. Здесь индукция магнитного поля направлена параллельно поверхности пластинки. В направлении, перпендикулярном поверхности, на пластинку падает свет. В точках A и A' измерялась э. д. с.

После этого надо было выяснить, с чем связан возникавший побочный эффект. Мы взяли в качестве образца пластинку из закиси меди длиной около двух сантиметров, присоединили к ней с помощью электродов измерительный прибор, поместили пластинку в магнитное поле, параллельное плоскости пластинки, и осветили ее светом от сильной лампы. Схема опыта была такая, как на рисунке 2. Оказалось, что при небольшом магнитном поле — порядка 1 Т — на-

И. К. Кикоин

пряжение на электродах достигало 20 В!

Явление было совершенно непонятным. И когда на одном из семинаров у нас в Физико-техническом институте я докладывал об этой работе, слушатели отнеслись к моему рассказу очень недоверчиво. Я тут же перед аудиторией продемонстрировал наш простой опыт. И хотя сомнения в существовании самого эффекта пропали, загадочность его не уменьшилась. Качественная и количественная теория этого эффекта (мы назвали его тогда фотомагнитным) была разработана позже. Не буду сейчас более подробно рассказывать об этом эффекте, потому что в одном из ближайших номеров журнала появится статья на эту тему. Скажу только, что, исследуя этот эффект в полупроводниках, можно выяснить целый ряд их свойств, которые важны в технике.

Описанными выше работами, конечно, не исчерпывается круг исследований полупроводников, проводившихся в Ленинградском физико-техническом институте. Под руководством А. Ф. Иоффе и при его непосредственном участии осуществлялась обширная программа работ по выяснению природы электрических и фотоэлектрических явлений в полупроводниках. Одновременно разрабатывались вопросы практического применения этих явлений.

Одним из основных направлений научной работы в Физико-техническом институте было также изучение электрических свойств диэлектриков. В числе сотрудников, занимавшихся этим вопросом, был Игорь Васильевич Курчатов. Лаборатория, которую он тогда возглавлял, занялась исследованием свойств так называемой сегнетовой соли (химическая формула $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$). Кристаллы сегнетовой соли очень красивы. Они достигают огромных размеров. Я с удовольствием наблюдал, как Игорь Васильевич выращивал их из растворов в больших стеклянных сосудах.

Сегнетова соль — типичный представитель диэлектриков с аномальной диэлектрической проницаемостью. (Напомним, что диэлектрическая проницаемость — это число, указывающее, во сколько раз электрическое поле внутри диэлектрика меньше того внешнего поля, в котором находится диэлектрик.) Так вот, у обычных диэлектриков проницаемость порядка нескольких единиц (у стекла—3÷5, у слюды—7÷8); диэлектрическая проницаемость воды, равная 80, считалась аномально большой. А у сегнетовой соли значение этой величины может достигать нескольких десятков тысяч единиц! И еще одна аномалия — необычное «поведение» этой проницаемости при изменении внешнего электрического поля: в сильных полях значение ее невелико, а в слабых полях она достигает огромных значений. Естественно, что исследование свойств сегнетовой соли представляло большой интерес. Используя ее как заполнитель, можно было создать конденсаторы небольших размеров с очень большой емкостью. Правда, аномальные свойства сегнетовой соли проявляются в довольно узкой области температур (примерно от —30°C до +30°C).

Подробными исследованиями Курчатов показал что поведение сегнетоэлектриков (так называют диэлектрики с такими же аномальными свойствами, как у сегнетовой соли) во многом аналогично поведению ферромагнетиков. Например, зависимость электрической индукции (так называют электрическое поле внутри вещества) в сегнетоэлектриках от величины внешнего электрического поля аналогична зависимости магнитной индукции в ферромагнетиках от внешнего магнитного поля. В кристаллических сегнетоэлектриках, так же как и в ферромагнетиках, наблюдается резкая анизотропия свойств: их электрические характеристики существенно зависят от ориентации внешнего поля относительно различных осей кристалла. Нагревая сегнетоэлектрики, наблюдают, что при переходе через «критическую» температуру (для сегнетовой соли, как мы уже говорили, это ~30°С) их электрические свойства скачком меняются — исчезает аномалия диэлектрической проницаемости и в дальнейшем они ведут себя как обычные диэлектрики. Это явление совершенно аналогично поведению ферромагнетиков при переходе через точку Кюри — когда они переходят из ферромагнитного состояния в парамагнитное. Исследуя переход сегнетоэлектриков через точку Кюри (так по аналогии называют критическую температуру для сегнетоэлектриков), Курчатов показал, что, так же как и в случае ферромагнетиков, этот переход сопровождается выделением тепла. Этот эффект теперь называется электрокалорическим эффектом (аналогичный эффект для ферромагнетиков называется магнетокалорическим). Сходство между сегнетоэлектричеством и ферромагнетизмом так велико, что зарубежные ученые называют явление сегнетоэлектричества ферроэлектричеством.

Результаты своих исследований И. В. Курчатов собрал в отдельную книгу, которая повсюду была признана как фундаментальное исследование явления сегнетоэлектричества.

Несколько позже в Физическом институте имени П. Н. Лебедева

А. Ф. Иоффе (слева) со своими учениками А. И. Алихановым и И. В. Курчатовым в одной из лабораторий физико-технического института.

Б. М. Вулл

АН СССР в лаборатории Бенциона Моисеевича Вула (ученика А. Ф. Иоффе, ныне — академика) были обнаружены сегнетоэлектрические свойства у целого ряда химических соединений, в частности, у метатитаната бария ($BaTiO_3$). Этот сегнетоэлектрик имеет важное практическое значение. Дело в том, что у него точка Кюри значительно выше, чем у сегнетовой соли — около 80°С. Поэтому область его практического применения гораздо шире.

Одной из проблем, которой особенно интересовался А. Ф. Иоффе и которой много занимались в лабораториях физико-технического института, было изучение электрического пробоя диэлектриков. Важно было сделать диэлектрики более надежными, то есть повысить напряженность электрического поля, при которой происходит пробой. Занимался этим в своей лаборатории и Николай Николаевич Семенов.

В то время существовало несколько теорий пробоя. Одна из них исходила из того, что под действием электрического тока диэлектрик разогревается. Это означает, что носители тока сталкиваются с атомами диэлектрика и отдают им свою энергию. При нагреве же диэлектрика в нем очень быстро увеличивается количество носителей тока. Растет ток, а это приводит к еще большему разогреву и лавинообразному увеличению количества носителей. Проводимость диэлектрика нарастает, и наконец, происходит пробой.

Н. Н. Семенов заинтересовался отдельным актом образования новых носителей тока. Его интересовал вопрос, каков механизм столкновения молекул или атомов и как, в частности, при столкновении молекул происходят химические реакции между ними. Семенов с сотрудниками начал изучать реакцию взаимодействия газообразного фосфора с кислородом, при которой образуется хорошо известное твердое соединение — пятнокись фосфора (P_2O_5). Так как образование пятиокиси фосфора связано с выделением энергии, газ начинает светиться. Это свечение и регистрировалось в лаборатории. Неожиданно оказалось, что при достаточно низких давлениях кислорода (несколько стотысячных долей атмосферы) свечение вообще не возникало — пары фосфора не вступали в реакцию с кислородом! Выяснилось также, что реакция снова начинается, если, не добавляя кислород, ввести в сосуд инертный газ аргон, который не способен ни к каким химическим реакциям, но зато повышает давление в сосуде. Это было удивительно и противоречило существовавшим представлениям о механизме химических реакций, из которых следовало, что фосфор должен вступать в реакцию с кислородом при любых парциальных давлениях газов.

Так было открыто существование критического давления для реакции соединения фосфора с кислородом.

Эта работа была опубликована в немецком физическом журнале, а вскоре появилась критическая заметка крупнейшего тогда специалиста по кинетике химических реакций немецкого химика Боденштейна. Он писал, что опыты Н. Н. Семенова неубедительны. Давление кислорода измерялось в них манометром, а чтобы пары фосфора не повредили его, между манометром и сосудом, в котором происходила реакция, помещали ловушку, охлаждаемую жидким воздухом. Пары фосфора конденсировались в ловушке, благодаря чему возникал поток паров фосфора, направленный к ловушке. Кислород же по пути в сосуд также проходил мимо ловушки, но в направлении, противоположном направлению потока паров фосфора. Боденштейн считал, что при небольших давлениях кислорода он просто «сдувался» парами фосфора и вовсе не попадал в сосуд, так что реакция не возникала, потому что в сосуде не оказывалось кислорода.

Ознакомившись с этой заметкой, Семенов решил повторить свои опыты. При этом он убедился, что критика Боденштейна частично верна — давление кислорода действительно измерялось не совсем точно. Но и после исключения возможных ошибок оказалось, что реакция взаимодействия фосфора с кислородом в газообразном состоянии все-таки начинается только при некотором минимальном давлении. При этом было обнаружено еще одно совершенно непонятное явление. Само критическое давление зависело от размеров сосуда, в котором происходила реакция. Если сосуд шарообразный, то критическое давление растет пропорционально диаметру сосуда. Чем больше сосуд, тем больше давление, при котором начинается реакция. Как писал позже Н. Н. Семенов, обнаружив это явление, он совсем перестал что-либо понимать.

Семенов рассказал о своей работе на семинаре в Физико-техническом институте. Все уже знали критику Боденштейна и снова стали придираться к опытам. Как ни убеждал Семенов присутствовавших в том, что никаких ошибок в его опытах больше нет, к этому отнеслись с недоверием, тем более что объяснить столь странные результаты Николай Николаевич в то время не мог.

Н. Н. Семенов

Будучи твердо уверенным в своей правоте, Н. Н. Семенов опубликовал несколько статей о полученных результатах. После этого пришло письмо от Боденштейна, в котором он полностью согласился с этими результатами, признал большое значение обнаруженных явлений и предложил Семенову дальнейшие работы печатать в журнале, который он сам редактировал. Вскоре после этого Н. Н. Семенов создал качественную теорию обнаруженных им явлений.

Это было крупнейшее открытие, которое получило всемирное признание. Оно послужило началом нового направления в науке — изучения разветвленных цепных химических реакций, которое успешно развивалось не только у нас, но и за рубежом. За эти работы Н. Н. Семенову, вместе с английским химиком Хиншельвудом, который занимался теми же вопросами, в 1956 году была присуждена Нобелевская премия.

Н. Н. Семенов — основатель целой школы по кинетике химических реакций. К ней принадлежит много ученых. Крупнейшими ее представителями являются академики Юлий

Борисович Харитон и Виктор Николаевич Кондратьев. Ю. Б. Харитон проделал много работ, связанных с химическими реакциями взрывного характера. Крупнейшим теоретиком в этой области является еще один ученик Семенова — академик Яков Борисович Зельдович. Он разработал и теорию цепных реакций, и теорию горения. Эти теории имеют большое значение для техники, в частности, для взрывной техники.

В 1928 году на одном из очередных семинаров Абрам Федорович Иоффе сказал: «Я должен вам прочитать небольшую заметку, оттиск которой мне прислал профессор Раман из Индии». Это был оттиск заметки, которую опубликовали в известном английском журнале «Nature» (по-русски — «Природа»). В нем есть раздел под названием «Письма к редактору», где ученые обычно кратко сообщают о своих новых работах. Журнал этот еженедельный, и поэтому можно быстро опубликовать необходимую информацию.

В заметке Рамана шла речь о том, что при рассеянии света в жидкости спектр рассеянного света отличается от спектра падающего света. Если жидкость освещается светом определенной длины волны, например, желтым, то в рассеянном свете содержится та же самая длина волны (тот же цвет), но, кроме того, появляются еще другие цвета, новые спектральные линии. В этом и заключается явление, о котором писал Раман, — появление дополнительных линий в спектре рассеянного жидкостью света.

Когда Иоффе прочитал эту заметку, сидевший рядом со мной профессор Рожанский, который обычно на семинарах внимательно слушал, но редко выступал, вдруг проявил необычайную взволнованность. Он встал и сказал: «Я ничего не понимаю. Я хорошо знаю, что работы, о которых рассказывается здесь, были проделаны Мандельштамом в Москве примерно два года тому назад. Мне точно известно, что это явление было открыто Мандельштамом на кристаллах, и в течение двух лет он тщательно его исследовал». Так мы — молодые физики — узнали, что в Москве существует крупная научная школа физиков, возглавляемая Леонидом Исааковичем Мандельштамом.

Л. И. Мандельштам

Из заметки Рамана следовало, что он только что сделал свое открытие. А Леонид Исаакович Мандельштам, как мы узнали, не только обнаружил это явление, но вместе с Григорием Самуиловичем Ландсбергом провел подробное исследование, нашел основные закономерности, дал полную теорию этому явлению и уже направил в печать обстоятельную статью. Но она была получена редакцией журнала, в который ее послал Мандельштам, на две недели позже, чем заметка Рамана в «Nature». Эта заметка была продиктована по радио, поскольку Раман очень торопился. К сожалению, эффект появления дополнительных спектральных линий в рассеянном свете теперь нередко называют эффектом Рамана. Правда, объективные зарубежные ученые, вскоре после того как это явление было открыто, в соответствующих обзорах и книгах называли его эффектом Мандельштама — Ландсберга — Рамана.

Г. С. Ландсберг

К концу 20-х годов Ленинградский физико-технический институт стал всемирно известным. А. Ф. Иоффе понимал, что в такой большой стране как Советский Союз нельзя концентрировать всю науку практически в двух городах — Ленинграде и Москве. Он неоднократно и настойчиво обсуждал этот вопрос как со своими сотрудниками, так и в руководящих инстанциях. И в конце концов выкристаллизовалась точка зрения, что необходимо создать еще несколько физико-технических институтов в крупных промышленных центрах СССР.

Крупнейшей республикой наряду с Россией была Украина, ее столицей тогда был Харьков. Абрам Федорович решил, что именно в Харькове надо организовать физико-технический институт. По его инициативе выделили из среды сотрудников Ленинградского физико-технического института группу молодых квалифицированных физиков и направили ее в Харьков. Директором Харьковского института был назначен Иван Васильевич Обреимов, а его заместителем — ученик Семенова Александр Ильич Лейпунский (оба они потом стали академиками). В эту группу входил также ученик А. Ф. Иоффе К. Д. Синельников, ученик Я. И. Френкеля теоретик Я. Горовец и другие. Приглашали туда и меня. Я был даже склонен поехать, потому что туда отправились многие друзья и товарищи, но завозражало начальство. Н. Н. Семенов, который замещал тогда бывшего за границей А. Ф. Иоффе, запротестовал, говоря, что институт и так сильно обескровлен и нельзя забирать еще совсем молодых людей. В результате я остался в Ленинграде.

Все это происходило в то время, когда XV съезд партии утвердил директивы первого пятилетнего плана развития народного хозяйства страны. Начался бурный рост промышленности, потребность в специалистах резко увеличилась. Молодые люди, еще не окончившие институт, уже зачислялись на постоянную работу в соответствующие учреждения.

Именно в это время и был организован Украинский физико-технический институт (УФТИ) в Харькове. Первой его лабораторией стала криогенная лаборатория, в которой имелась техника, позволяющая получать жидкий гелий и проводить исследования при температуре около 4 К. Ее создание было связано с тем, что незадолго до организации УФТИ И. В. Обреимов около года работал в Голландии в знаменитой Лейденской лаборатории — первой криогенной лаборатории мира. Там же работал еще один сотрудник нового института — Л. В. Шубников. Они сделали в Лейдене несколько превосходных исследований и заказали криогенное оборудование, что и позволило быстро создать лабораторию в Харькове. Украинский физико-технический институт был первой ласточкой, выпорхнувшей из стен Ленинградского физико-технического института. Достижения сотрудников УФТИ известны сейчас во всем мире.

А. Ф. Иоффе считал, что создание УФТИ не решает проблему рассредоточения науки. Вскоре по его инициативе такие же институты были созданы в Томске и Днепропетровске. В Томск поехала группа ленинград-

Г. В. Курдюмов

ских физиков во главе с Петром Саввичем Тартаковским, а в Днепропетровск — во главе с Георгием Вячеславовичем Курдюмовым, ныне академиком.

К сожалению, в Томске инициатива ленинградских физиков не встретила большой поддержки со стороны местных физиков, и этот институт практически распался. Зато институт, организованный в Днепропетровске, быстро окреп и прославился своими работами. В первую очередь это объясняется тем, что он находился в центре украинской металлургии, и сам директор института Г. В. Курдюмов был крупнейшим специалистом именно в этой области. Работы, которые он проделал еще в Ленинградском физико-техническом институте, относились к рентгенографическому исследованию одного из важнейших процессов металлургии — мартенситных превращений в сталях. Курдюмов впервые показал, в чем заключается природа мартенситных превращений, которые происходят при закалке стали. Эта классическая работа снискала ему всемирную известность. Она имеет важнейшее техническое значение.

В 1932 году из состава Ленинградского физико-технического института был выделен Уральский физико-технический институт (Урал ФТИ), обосновавшийся позднее в Свердловске — крупнейшем промышленном центре Урала. Туда был включен и я. Хотя мы и назывались Уральским физико-техническим институтом, но до постройки здания в Свердловске работали в Ленинграде и переехали в Свердловск только в 1936 году. Ныне этот институт называется институтом физики металлов; он стал одним из крупнейших физических институтов нашей страны. Сейчас им руководит известный физик-теоретик академик Сергей Васильевич Вонсовский, который в момент создания института был молодым сотрудником, только что окончившим университет.

В период первой пятилетки физика в нашей стране очень бурно развивалась, и количество научных сотрудников быстро росло. Я помню, что при мне за 1927—1930 годы Ленинградский физико-технический институт вырос раза в три. В конце концов из него выделились несколько самостоятельных институтов: Институт химической физики под руководством Н. Н. Семенова, который впоследствии переехал в Москву; Институт связи во главе с профессором Д. А. Рожанским; Высоковольтный институт под руководством А. А. Чернышева. Был организован также Агрофизический институт, который возглавил сам А. Ф. Иоффе. Он считал, что физику надо применять не только в промышленности, но и в сельском хозяйстве.

Таким образом, начиная с 1928 года, руководствуясь решениями партии и правительства и собственной инициативой, А. Ф. Иоффе сумел насадить физические институты в ряде промышленных центров Советского Союза, что немало способствовало развитию науки и промышленности в нашей стране. Ленинградский физико-технический институт стал своеобразным рассадником физики по всему Советскому Союзу.

В 1934 году в Советский Союз вернулся из Англии, из длительной научной командировки, известный физик Петр Леонидович Капица. Во время работы в Англии он прославился тем, что исследовал ряд свойств веществ в сильных магнитных полях. Обычные магнитные поля, которые создавали в лабораториях в то время, были порядка 1—2 Т. Для получения более сильных полей нужно было применять электромагниты больших размеров, которые стоили очень дорого. Можно, конечно, создать сильные магнитные поля внутри соленоида без железа. Но для этого необходимо питать соленоид очень сильным током, что связано с большим выделением тепла и перегревом обмотки соленоида.

Капица рассуждал так. Не обязательно иметь постоянное большое поле в течение длительного времени. Явления, происходящие в веществе, помещенном в магнитное поле, носят атомный характер. А подобные явления разыгрываются очень быстро — за миллионные и даже миллиардные доли секунды. Поэтому достаточно создать сильное магнитное поле, существующее в течение короткого промежутка времени, и за это время провести в нем необходимые исследования. Эту идею Капица осуществил следующим образом. Магнитное поле создавалось в соленоиде, через который пропускался большой ток от генератора переменного тока в течение одного полупериода (0,01 секунды).

Якорь генератора переменного тока раскручивали с помощью электродвигателя. При этом клеммы генератора были разомкнуты. Когда якорь раскручивался до расчетного (номинального) числа оборотов, двигатель отключали, и якорь продолжал вращаться по инерции. Напряжение на разомкнутых клеммах обмотки (э.д.с.) при этом менялось по синусоидальному закону. В тот момент, когда оно «проходило» через нуль, с помощью специального рубильника клеммы генератора замыкали на обмотку соленоида. А через половину периода, то есть через 0,01 секунды, когда напряжение снова падало до нуля, цепь размыкалась. Размыкание цепи необходимо проводить в момент, когда ток проходит через нуль, чтобы избежать возникновения электрической дуги. В течение полупериода по обмотке протекал ток большой силы (и следовательно, существовало большое магнитное поле), а катушка не успевала сильно нагреться. Но возникала еще одна трудность. Когда через соленоид протекает ток, на каждый его виток действуют радиальные силы, стремящиеся его разорвать. При достаточно большом токе эти силы могут превзойти предел прочности материала обмотки, и она разрушится. (Петр Леонидович рассказывал, что когда он в Англии в лаборатории впервые проводил этот эксперимент, катушка разорвалась, ее обломки разлетелись в разные стороны. И в тот же день сотрудники лаборатории поспешили застраховать свою жизнь.) Так что возможность получения сильных магнитных полей таким способом ограничивается прочностью материала, из которого сделана обмотка. Капица сделал обмотку из специальной высокопрочной бронзы. Катушка была небольшая — диаметр ее был около 25 мм, длина — около 100 мм. Через эту катушку пропускали в течение сотой доли секунды ток, который позволял получать поле около 30 Т.

В таких полях Капица исследовал ряд физических явлений. В частности, он очень подробно изучил влияние магнитного поля на сопротивление проводников. При малых полях изменение сопротивления проводников в магнитном поле растет примерно пропорционально квадрату магнитной индукции. Предполагалось, что и в сильных полях будет такая же зависимость. Но оказалось, что в сильных полях квадратичная зависимость изменения сопротивления от величины магнитной индукции нарушается. Была обнаружена совершенно иная закономерность — линейная зависимость изменения сопротивления проводника от величины индукции магнитного поля.

П. Л. Капица (слева) и И. В. Обреимов на семинаре в Институте физических проблем.

Большой интерес представляло исследование свойств различных веществ в условиях, когда сильные магнитные поля сочетаются с низкими температурами. И Капица занялся рассмотрением вопроса о способах получения низких температур, близких к абсолютному нулю. Известно, что самой низкотемпературной жидкостью является жидкий гелий. При нормальном давлении температура кипения жидкого гелия равна 4,2 К.

Впервые жидкий гелий был получен голландским ученым Камерлинг-Оннесом в 1908 году. Установка, которую он построил в своей лаборатории в Лейдене, позволяла получать небольшое количество жидкого гелия. Подобные установки были очень дороги. П. Л. Капица разработал более производительную и экономичную установку, на которой он мог получать достаточно большое количество жидкого гелия.

К тому времени физики заинтересовались свойствами самого жидкого гелия. Дело в том, что жидкий гелий — единственное вещество, которое, как говорят, претерпевает фазовое превращение, находясь в жидком состоянии: при температуре 2,19 К его физические свойства резко меняются. Выше этой температуры гелий ведет себя как обыкновенная жидкость, а при $T \leqslant 2{,}19$ К у него появляется ряд совершенно необычных свойств: теплопроводность его резко возрастает, а вязкость резко падает. Принято называть гелий при температуре выше 2,19 К гелием I, а при $T \leqslant 2{,}19$ К — гелием II.

Впервые гелий II обнаружил Камерлинг-Оннес. Потом его изучением занялся в Лейденской лаборатории Кеезом. Он обнаружил, что теплопроводность гелия II во много раз больше, чем у самых теплопроводных металлов. Поэтому Кеезом назвал гелий II сверхтеплопроводным веществом.

П. Л. Капица занялся исследованием свойств гелия II в 1937 году. Анализируя имевшиеся к тому времени экспериментальные данные, он пришел к выводу, что чрезвычайно высокую теплопроводность гелия II нельзя объяснить обычными процессами выравнивания температуры внутри вещества. Он предположил, что интенсивная передача тепла в гелии II может быть связана с конвекцией. Подсчеты показали, что конвекционные потоки должны осуществляться в гелии II с необычайной легкостью, без трения. Можно было предполагать, что гелий II является сверхтекучей жидкостью, то есть жидкостью, которая не имеет вязкости.

Чтобы проверить это предположение, Петр Леонидович в 1938 году поставил такой эксперимент. Он пропускал гелий II через зазор между двумя плоскими полированными стеклянными пластинками, прижатыми друг к другу. Пластинки были отполированы так тщательно, что зазор между ними был не более полумикрона. И через такой зазор под действием собственной тяжести гелий II протекал со скоростью, которая возможна только при почти полном отсутствии вязкости!

Так было открыто явление сверхтекучести в гелии II.

Оставалась нерешенной еще одна загадка, связанная с измерением вязкости гелия II. Дело в том, что вязкость можно определить двумя способами. Один из них — измерение скорости истечения жидкости из капиллярного сосуда (или через узкую щель, как это было в экспериментах П. Л. Капицы). При данной разности давлений на концах капилляра количество протекающей через него жидкости за данное время тем больше, чем меньше ее вязкость. Второй способ определения вязкости — исследование затухания крутильных колебаний твердого тела в жидкости. В жидкость на нити опускают тонкий диск так, чтобы плоскость его была горизонтальной, и наблюдают его собственные крутильные колебания вокруг оси, проходящей через нить. Естественно, что чем больше вязкость жидкости, тем быстрее затухают колебания. Для всех жидкостей значения вязкости, измеренные этими двумя способами, были одинаковыми. А для гелия II эти значения были различными. Первый способ давал исчезающе малое значение вязкости, демонстрируя сверхтекучесть гелия II, а второй приводил к малым, но вполне измеримым значениям.

Л. Д. Ландау

Ответ на все эти вопросы дала гидродинамическая теория сверхтекучести, созданная в 1941 году академиком Львом Давидовичем Ландау. Он показал, что обычный классический подход для объяснения свойств вещества при столь низких температурах, неверен. Ландау удалось разработать квантовую теорию сверхтекучести He II. Она блестяще объяснила результаты опытов Капицы и предсказала ряд новых явлений, которые вскоре были обнаружены экспериментаторами.

Сверхтекучесть жидкого гелия пока не нашла широкого применения. Но созданная Ландау теория сверхтекучести оказала большое влияние на развитие теоретической физики. Она явилась ключом к созданию теории другого замечательного явления, происходящего при низких температурах — сверхпроводимости. И хотя это произошло значительно позже, мне кажется, будет уместно рассказать об этом именно сейчас, нарушая хронологический порядок, которого я старался более или менее придерживаться.

Напомню, что явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Он обнаружил, что при температуре 4,15 К электрическое сопротивление ртути полностью исчезает, и назвал это явление сверхпроводимостью. После этого было обнаружено, что многие металлы и сплавы при низких температурах теряют электрическое сопротивление, становятся сверхпроводящими. Разумеется, существование проводников без сопротивления сулило заманчивые практические перспективы, и изучением сверхпроводимости физики занялись очень активно. Однако создать общую теорию явления не удавалось.

После создания квантовой механики была построена микроскопическая теория твердого тела, то есть теория, которая рассматривала свойства твердых тел с точки зрения поведения электронов и атомов. Она полностью качественно объясняла все свойства металлов, диэлектриков, полупроводников в различных условиях. А сверхпроводимость оставалась загадочным явлением. И только в 1957 году, то есть через 46 лет после открытия этого явления, оно получило свое объяснение в микроскопической теории, созданной советским ученым академиком Николаем Николаевичем Боголюбовым и, независимо от него, американскими физиками Бардином, Купером и Шриффером (БКШ, как называют эту группу).

К тому времени экспериментально были изучены многие свойства сверхпроводников. Было установлено, что под действием магнитного поля сверхпроводимость металлов разрушается — они становятся обычными проводниками. Значение магнитной индукции поля, при котором исчезает сверхпроводимость, называется критическим полем (критической индукцией). У разных металлов эта величина различна. Критическое поле зависит от температуры сверхпроводника. Чем выше температура, тем меньше критическое поле. При критической температуре критическое поле равно нулю.

Далее было также показано, что магнитное поле внутрь сверхпроводника не проникает, а если оно в металле уже было, то при его переходе в сверхпроводящее состояние (при понижении температуры) оно выталкивается наружу. Таковы самые фундаментальные свойства сверхпроводников.

Л. В. Шубников

Когда они были обнаружены, стало ясно, что возможности использования сверхпроводников для получения больших незатухающих токов и создания сильных магнитных полей ограничены. Действительно, ток, текущий по проводнику, сам создает магнитное поле. Чем больше ток, тем больше это поле. Но как только индукция этого поля достигнет критического значения, сверхпроводник перейдет в нормальное состояние. Опыты показали, что значения критических полей невелики — порядка 10^{-2}—10^{-1} Т.

Микроскопическая теория сверхпроводимости была создана в 1957 году. Но это не означает, что до тех пор не существовало никакой теории сверхпроводников. Многочисленные экспериментальные данные позволяли ученым устанавливать связь между различными величинами, характеризующими свойства и поведение сверхпроводников.

А. И. Шальников

Так, в 1937 году Л. Д. Ландау, анализируя имевшиеся к тому времени экспериментальные данные, теоретически предсказал новое явление, относящееся к процессу перехода металла из сверхпроводящего состояния в нормальное в магнитном поле. Согласно его теории, этот переход происходит постепенно. Начиная с некоторого значения индукции магнитного поля, еще не достигшего критического, поле частично проникает в сверхпроводник. При этом в нем образуются чередующиеся слои — сверхпроводящие и несверхпроводящие. При достижении критического значения индукции внешнего поля сверхпроводящее состояние полностью разрушается.

Опыты, которые в скором времени были проведены в Харьковском физико-техническом институте Львом Васильевичем Шубниковым и в Московском институте физических проблем членом-корреспондентом АН СССР Александром Иосифовичем Шальниковым, блестяще подтвердили предсказания теории Ландау. Мне довелось наблюдать эти эксперименты и в Москве, и в Харькове. Они наглядно продемонстрировали структуру «сложного» промежуточного состояния, так сказать, топографию чередующихся сверхпроводящих и нормальных слоев внутри сверхпроводящего шара. Такое состояние сверхпроводника за рубежом обычно называют «фазой Шубникова».

В 1950—1952 годах группа советских физиков — академики Виталий Лазаревич Гинзбург и Лев Давидович Ландау, члены-корреспонденты АН СССР Алексей Алексеевич Абрикосов и Лев Петрович Горьков — разработала теорию, из которой следовало, что должны существовать сверхпроводники с необычными свойствами. Теперь ее называют теорией ГЛАГ (Гинзбург, Ландау, Абрикосов, Горьков). Такие сверхпроводники назвали сверхпроводниками второго рода, в отличие от обычных сверхпроводников. Для них значения критического поля должны были быть значительно бо́льшими.

Очень скоро были проведены эксперименты, которые полностью оправдали эти предсказания. Как оказалось, к сверхпроводникам второго рода принадлежат металлический ниобий и целый ряд сплавов. Значения критических полей для таких сверхпроводников, действительно, оказались очень большими. Так, например, у сплава ниобия с оловом оно достигает 20—30 Т. Большое значение критического поля позволяет использовать сверхпроводники второго рода для создания сильных магнитных полей. При этом, несмотря на большие затраты, связанные с получением жидкого гелия, использование сверхпроводников оказывается значительно выгоднее, чем использование обычных электромагнитов. Уже существуют генераторы и электродвигатели со сверхпроводящими обмотками мощностью около 10 000 киловатт. В настоящее время рассматриваются проблемы передачи электроэнергии на большие расстояния по «сверхпроводящим» линиям передач.

Таким образом, теория советских физиков сыграла огромную роль в создании новой техники.

Б. Гнеденко

О математике Страны Советов

Дореволюционная Россия дала миру ряд выдающихся математиков, обогативших нашу науку первоклассными идеями и результатами. Достаточно вспомнить имена Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, чтобы понять, как много ценного внесла наша страна в развитие математики. И это было сделано в эпоху, когда редкостью были не только высшее и среднее, но даже начальное образование. Для прогресса же науки необходимы не только наличие потенциальных талантов, но и высокий уровень культуры больших масс населения, хорошо организованная школа, наличие развитой экономики и промышленности. Всего этого дореволюционная Россия была лишена. В обилии были лишь талантливые люди, как правило, не находившие себе места в жизни.

Великая Октябрьская революция вызвала огромный научный энтузиазм молодежи, стремление к таким же решительным переменам в науке, какие произошли в социальной жизни, веру в успех и необходимость научного поиска. Этому способствовало то, что наука и научные открытия перестали быть только личным делом ученого, приобрели общегосударственную значимость, необходимость для прогресса всей жизни народа и страны.

В первые же годы существования Советской власти, в годы разрухи, гражданской войны, интервенции, голода, эпидемий правительство оказывало действенную помощь существующим университетам, заботилось о создании новых университетов и специализированных научно-исследовательских институтов и лабораторий.

Так, в 1918 г. был издан декрет об организации ЦАГИ — Центрального аэрогидродинамического института и о назначении Н. Е. Жуковского его директором. В том же году была создана Нижегородская радиолаборатория. Оба эти учреждения оказали огромное влияние не только на развитие отечественного самолетостроения и радиотехники, но и на привлечение интересов советских математиков к новым прикладным проблемам большого общенаучного значения.

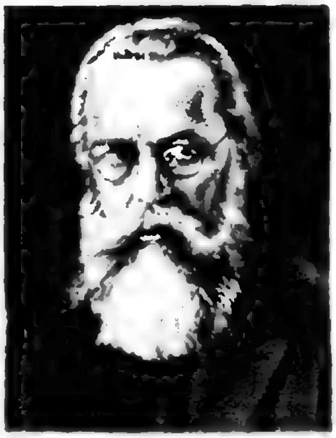
В 1921 г. — в разгар разрухи — по инициативе В. А. Стеклова был организован Физико-математический институт Академии наук. Впервые в истории нашей страны развитием теоретической и прикладной математики стало заниматься специальное научное учреждение. Уже одним этим подчеркивалось отношение нового государственного строя к науке и не только в прикладном, но и в теоретическом ее аспекте. В 1934 г. Физико-математический институт разделился на ряд самостоятельных научных учреждений, среди которых для нас особый интерес представляет Математический институт Академии наук СССР, носящий имя создателя — В. А. Стеклова. За более чем полувековой период своего существования Институт имени Стеклова внес большой вклад в развитие теоретической математики.

Позднее, по мере организации республиканских Академий наук, в каждой союзной республике начали работать специализированные математические институты. Создание широкой сети научно-исследовательских учреждений в нашей стране являлось новой формой организации научных исследований. Талантливые исследователи, увлеченные стоящими перед ними научными проблемами, получили возможность полностью отдаться любимому делу.

Мне не хотелось бы только что сказанным создать у читателей ложные представления о том, что в наши дни полноценно науку можно развивать лишь в стенах академических институтов. В действительности крупные научные открытия удается делать и в заводских лабораториях, и на кафедрах вузов, и в научно-исследовательских институтах прикладного профиля. Все дело в человеке, его таланте, увлеченности, окружающей его атмосфере. Если для него интересы науки стоят на первом плане, а проблемы личной карьеры его не волнуют; если он является генератором новых идей и способен находить подходы к их решению; если он способен критически относиться к своим результатам и выслушивать предложения других; если в учреждениях имеются здоровое научное соперничество и взаимопомощь, то успех обеспечен.

В связи с математизацией науки и ускоренным научно-техническим прогрессом фундаментальные научные проблемы возникают в наши дни и в учреждениях прикладного профиля.

Важно не пренебрегать задачами практики, поскольку из них вырастают постановки математических задач большой важности. Чтобы за частными задачами практики усмотреть общие проблемы, необходимо вникать в существо этих задач и на их базе строить математические модели реальных явлений. Важно также за общими математическими построениями видеть возможности отражения реальных явлений окружающего нас мира — биологических, физических, экономических, инженерных, организационных. В наше время, когда математические методы пронизывают буквально все науки, когда многие тысячи математиков работают в научных учреждениях прикладного профиля, особенно важно, чтобы возможности математики были видны достаточно широко как самим математикам, так и представителям других областей знания и деятельности.



В. А. Стеклов

Мы уже сказали, что Великая Октябрьская революция явилась мощным толчком к прогрессу математики в нашей стране, создала исключительно благоприятные условия для развития абстрактных ее направлений и применения математических методов в естествознании, инженерном деле, организации производства. Это обстоятельство вызвало огромный прилив способной молодежи в университеты, ее стремление испытать свои силы в научных исследованиях и внести свою лепту в прогресс математики. Поэтому за годы Советской власти были воспитаны многие сотни крупных исследователей-математиков, получивших в различных областях математической науки крупные результаты, проложивших в нашей науке собственные перспективные пути, создавших новые направления научных исследований.

Даже краткое описание того, что сделали советские математики за истекшие шестьдесят лет, потребовало бы многотомного сочинения и работы большой группы специалистов. Именно поэтому здесь мы вынуждены ограничиться лишь беглым обзором небольшой доли важных направлений научных исследований. При этом мы будем вынуждены упомянуть лишь небольшое число имен, хотя многие из тех, кто здесь не будет упомянут, заслуживают за свои научные открытия самых высоких похвал.

Пожалуй, самым крупным явлением в математической жизни нашей

И. Г. Петровский

Д. А. Граве

О. Ю. Шмидт

страны следует считать возникновение Московской математической школы теории функций и теории множеств. У ее истоков стояли два выдающихся математика и педагога — Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин. С их именами связано широкое привлечение студенческой молодежи к научным исследованиям.

Непосредственно перед Октябрьской революцией Н. Н. Лузин защитил свою докторскую диссертацию «Интеграл и тригонометрический ряд». Многочисленные результаты, красивые построения, постановка большого числа новых задач для дальнейших исследований, живое изложение — все это привлекло внимание математической молодежи к идеям Лузина. К тому же Лузин умел заинтересовывать своих слушателей, убеждать последователей в важности возникающих вопросов для науки, прививать веру в наличие творческих способностей. Эти качества еще в 1916—1917 гг. привлекли к нему первую группу учеников — Д. Е. Меньшова, П. С. Александрова и А. Я. Хинчина. Первые их самостоятельные работы были в кругу идей учителя — теория интеграла, сходимость тригонометрических рядов, строение так называемых борелевских множеств. Эти первые работы в значительной степени определили дальнейшие интересы названных исследователей. Д. Е. Меньшов основные свои работы посвятил теории тригонометрических рядов и рядов ортогональных функций; А. Я. Хинчин — метрической теории функций и ее применениям в теории чисел, теории вероятностей и статистической физике; П. С. Александров — теории множеств, а позднее — топологии.

Уже первые приемы студентов в Московский университет после 1917 года дали второе поколение активных учеников Лузина. Лузин организовал семинар, на котором каждому участнику предлагалось прореферировать определенную монографию; затем устраивалось обсуждение реферата с постановкой вопросов, с выявлением возможности упрощения и обобщения доказательств. Такие обсуждения прекрасно воспитывали начинающих математиков и приучали к самостоятельному мышлению.

В двадцатые годы ученики Лузина называли свой коллектив «*Лузитанией*». Этим подчеркивалось восхищение своим учителем, его научными идеями, лекциями. Ученики Лузина гордились своей причастностью к группе, разрабатывающей его идеи, и стремились дать максимум того, на что они способны в науке. Как вспоминает П. С. Александров, «своей идейной почвой этот научный энтузиазм имел великие патриотические идеи советской научной культуры, возбудившие в учащихся и ученых то подлинное научное горение, которое с такой силой никогда не проявлялось в стенах дореволюционного математического факультета Московского университета».

Конечно, каждое чрезмерное увлечение несет в себе и отрицательное начало. «Лузитанцы были чрезмерно

С. Н. Бернштейн

И. М. Виноградов

В. И. Романовский

увлечены лишь одним направлением математического развития и некоторые из них несколько свысока относились к классическим областям математики. Это нашло отражение в шуточных названиях ряда дисциплин: так, теория вероятностей называлась у них теорией неприятностей, уравнения в частных производных — уравнениями с несчастными производными, конечные разности — разными конечностями и т. д. Однако эта недооценка других областей математики продолжалась недолго, поскольку внутри самой Лузитании начался процесс расширения интересов. Так, П. С. Александров и П. С. Урысон увлеклись проблемами теоретико-множественной топологии и вскоре положили начало существованию Московской топологической школы, из которой вышли многочисленные первоклассные ученые и которая подарила миру большое число оригинальных идей, понятий и направлений исследований. А. Я. Хинчин в двадцатые годы начал интересоваться проблемами метрической теории чисел, от нее подошел к вопросам теории вероятностей и к концу двадцатых годов целиком направил свою энергию на эти два направления исследований. Теория вероятностей вскоре стала одной из существенных частей интересов Московской математической школы. Создание Московской школы теории вероятностей является заслугой двух выдающихся ученых — А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова. Далее интересы московских математиков обратились к классическому анализу. При этом выяснилось, что идеи теории функций дают возможность серьезного продвижения. Качественная теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных становятся объектом исследований москвичей. Среди представителей этого направления следует назвать В. В. Степанова и И. Г. Петровского.

Не следует думать, что только Москва была центром математической мысли того времени. Первоклассные исследования в это время проводились на Украине — в Киеве и Харькове. В Киеве следует отметить, в первую очередь, исследования по абстрактной алгебре, культивируемые Д. А. Граве и его учениками. В начале революции один из его учеников О. Ю. Шмидт — разносторонний ученый и превосходный лектор — начал пропаганду новых алгебраических идей в Москве. О. Ю. Шмидт явился создателем Московской алгебраической школы. В Харькове С. Н. Бернштейн развивал идеи П. Л. Чебышева в области наилучшего приближения функций полиномами и успешно работал в области теории вероятностей.

В Ленинграде успешно развивались исследования в области математической физики и теории чисел. Оба эти направления исследований были традиционными для ленинградцев и берут свое начало от Л. Эйлера, М. В. Остроградского и П. Л. Чебышева.

Грузинские математики (слева направо): А. М. Размадзе, А. К. Харадзе (стоит), Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили

По аналитической теории чисел замечательные результаты были получены И. М. Виноградовым. В 1924 г. он показал, что многие проблемы аналитической теории чисел допускают сведение к оценкам «тригонометрических сумм», т. е. сумм вида

$$\sum e^{2\pi i f(x)},$$

где f — некоторая функция, а x пробегает ту или иную последовательность целых чисел. В 1934 г. И. М. Виноградову удалось на этом пути почти полностью решить знаменитую задачу Гольдбаха: всякое нечетное натуральное число представимо в виде суммы не более трех простых чисел.

Новые университеты, образованные в ряде городов страны в первые годы революции, быстро превратились в значительные математические центры. В первую очередь мы должны назвать здесь Тбилиси и Ташкент, которые славились своими исследованиями по математической физике (Тбилиси), нелинейным дифференциальным уравнениям и математической статистике (Ташкент). Организаторами Грузинской математической школы были Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе, А. М. Размадзе и А. К. Харадзе*). Создателем Ташкентской математической школы был В. И. Романовский.

К началу Великой Отечественной войны советская математика завоевала огромный научный авторитет во всём мире. Своими исследованиями она охватила практически все направления математической мысли. Многие математики принимали участие в решении задач естествознания, техники и организации производства. Особенно значительными были результаты математиков в связи с проблемами, выдвигаемыми развитием авиации. Именно задачами полета в сжимаемой жидкости было вызвано построение теории квазиконформных отображений М. А. Лаврентьевым. Крупный успех накануне Великой Отечественной войны был достигнут в построении математической теории «шимми» и «штопора», явившихся причиной гибели многих самолетов. Как правило, попав в «штопор» или «шимми», самолет погибал вместе с находившимися в

---

*) См. «Квант», 1975, №9, с. 12

М. В. Келдыш

Ю. В. Линник

А. А. Ляпунов

нем людьми. Из математической теории, построенной М. В. Келдышем, удалось сделать практические выводы, которые позволили радикально бороться как с «шимми», так и со «штопором».

Великая Отечественная война не прошла мимо советских математиков: тысячи из них пошли на фронт, многие переключились на решение задач, необходимых для победы, остальные не переставали трудиться на своих постах, веря в победу и создавая для будущего новые научные ценности. На фронтах сражались такие крупные ученые, как Ю. В. Линник, А. А. Ляпунов, М. В. Бебутов. К сожалению, не все вернулись с полей войны, и советская математика потеряла многих талантливых ученых. Некоторые молодые математики, пройдя в рядах Армии все военные годы, навсегда связали с ней свою жизнь. Немало крупных военных специалистов, сделавших серьезный вклад в советскую военную науку, начинали перед войной свой путь как математики.

Уже первые дни войны показали, что советская наука может быть действенным орудием борьбы. Были созданы таблицы бомбометания с самолетов, обладавших малыми скоростями («кукурузников»). А. Н. Колмогоров создал теорию искусственного рассеивания для увеличения вероятности поражения цели. Эта теория нашла применение при минных атаках судов военного флота, а также при стрельбе зенитной артиллерии. М. А. Лаврентьев создал теорию действия кумулятивного заряда, идея которого была известна горнякам и использовалась при подрыве горных пород. Во время войны она была использована как нами, так и другими воюющими государствами. После войны эта теория широко используется в мирной практике при строительстве плотин, каналов, разного типа насыпей.

Огромной важности математические задачи возникли и в связи с обеспечением качества массовой промышленной продукции. Индивидуальная проверка качества каждого изготовленного изделия требовала огромного числа контролеров. На это идти было нельзя, поскольку и без того был катастрофический недостаток рабочей силы. К тому же в ряде случаев проверка каждого изделия недопустима, поскольку она приводит к непоправимой его порче. Например, чтобы проверить взрыватель, надо его взорвать. Именно в это время возникла идея построения теории статистического контроля качества продукции. В ее создании активное участие принял А. Н. Колмогоров. В настоящее время эта теория энергично развивается по двум путям: 1) проверка качества уже изготовленных партий (приемочный контроль) и 2) управление качеством изделий в процессе изготовления (текущий или оперативный контроль).

Я вспоминаю такой эпизод. На одном из крупных заводов, выпускавших приборы управления стрельбой с самолетов и бомбометанием,

С. Л. Соболев

И. М. Гельфанд

Л. В. Канторович

скопилось огромное количество нестандартной по размерам продукции. Дело в том, что на заводе работали преимущественно неквалифицированные мальчики и девочки, а квалифицированных рабочих не осталось — они были призваны в армию. Нужно было продумать возможность использования деталей, забракованных из-за размера. Решение удалось найти на следующем пути. Поскольку приборы можно было считать не подлежащими ремонту, было предложено разбить все детали на несколько групп по количественному признаку. Детали из соответствующих групп уже допускали сопряжение (сборку), и получившиеся приборы давали достаточную точность. В результате был получен огромный резерв для увеличения производства крайне необходимой для фронта продукции. Вдобавок на заводе удалось освободить большие площади для производственных целей.

Конечно, здесь указана лишь ничтожная доля того, что было сделано советскими математиками в помощь фронту и вошло весомой составной частью в завоевание победы.

В период Великой Отечественной войны не прекращались и теоретические исследования в области математики. В ту пору было выполнено много превосходных исследований в области алгебры, топологии, теории вероятностей, функционального анализа, теории функций и геометрии. Развитие теоретической математики было абсолютно необходимо для послевоенного развития как науки, так и всего народного хозяйства. Это создало прекрасную базу для послевоенного развития атомной физики, создания электронной вычислительной техники, первых побед в освоении космического пространства.

Послевоенные годы характерны стремительным процессом математизации знаний и практической деятельности. Математики потребовались для решения задач организации производства и для исследования биологических процессов, для продвижения в области физики и при создании технических систем, для изучения экономических вопросов и при рациональном размещении производственных предприятий. Но этого мало. Оказалось, что математические методы оказывают помощь археологу и историку, лингвисту и медику. Появились новые направления математической мысли. Математическая логика приобрела несравненно большее значение, чем до войны. В этом большую роль сыграли электронные вычислительные машины и вызванная ими потребность в тщательном логическом анализе процессов при программировании для ЭВМ, а также при составлении математических моделей явлений. В теории вероятностей появились новые ветви, тесно связанные с экономикой и организацией производства, а также с задачами физики.

Если прежде физика свободно обходилась привычным для математики общим понятием функции, то теоре-

Л. С. Понтрягин

Н. Н. Боголюбов

Н. М. Крылов

тическим построениям современной физики в этих рамках стало тесно. В конце сороковых годов физики все чаще и чаще стали допускать операции с объектами, которые не укладывались в классическое понятие функции. В самом начале пятидесятых годов появились работы С. Л. Соболева и французского математика Л. Шварца, в которых было положено начало широкому и продуктивному обобщению понятия функции — было введено понятие обобщенной функции и разработаны правила действий с этими функциями. Несколько позднее И. М. Гельфанд ввел в рассмотрение обобщенные случайные процессы, использовав для этой цели идеи обобщенных функций.

Это перечисление новых ветвей математики, в становлении и развитии которых деятельное участие приняли советские математики, можно продолжать и далее. Однако у нас нет возможностей коснуться всех их даже вкратце. Именно поэтому мы вынуждены остановиться лишь на нескольких направлениях мысли, которые по тем или иным причинам представляют особый интерес.

Прежде всего следует упомянуть большое направление исследований, связанное с отысканием экстремальных решений. Важность этого рода исследований выявилась в полной мере только в последнее время: при нынешних масштабах народного хозяйства неудачное использование материальных ресурсов приводит к огромному перерасходу, неудачный выбор направления движения замедляет доставку пассажиров и грузов; неудачное распределение работы между оборудованием влечет неполное использование станков и аппаратуры. Первые задачи такого рода появились давно и были известны еще в Древней Греции.

Непосредственно перед Великой Отечественной войной Л. В. Канторович рассмотрел ряд новых задач на разыскание максимального и минимального значений, связанных с распределением работ, раскроем материалов, организацией перевозок и т. п. Эти задачи послужили началом создания новой математической теории — *линейного программирования*, получившей после войны быстрое развитие. Теперь эти первичные постановки задач получили общие формулировки, для них предложены методы решения, построена интересная теория, эти результаты распространены на более общие случаи (*нелинейное программирование*).

Большое направление исследований, вызванное необходимостью поручать автоматам управление технологическими процессами, движением самолетов, космических аппаратов и т. д., было разработано Л. С. Понтрягиным и его учениками. Это направление получило наименование *теории оптимального управления*. Теория и выдвинутые в ней принципы немедленно получили многочисленные практические применения. Другой подход к решению тех же задач связан

А. Н. Тихонов

с именем крупного американского математика Р. Беллмана. Он получил название *динамического программирования*.

К новым задачам в теории случайных процессов привели такие задачи практики, как управление качеством продукции и определение момента наладки оборудования. На эти задачи обратил внимание А. Н. Колмогоров, направивший на них внимание ряда своих учеников.

Один из крупнейших математиков современности Н. Н. Боголюбов, начав работать под руководством академика Н. М. Крылова, свой первый результат опубликовал в семнадцатилетнем возрасте. Его научные интересы быстро расширялись, охватив математический анализ, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теорию функций, математическую физику, теорию вероятностей. Совместно с Н. М. Крыловым им были разработаны математические методы нелинейной механики. После Великой Отечественной войны Н. Н. Боголюбов перешел почти исключительно на решение задач современной физики и в этой области добился крупных успехов.

Нельзя не упомянуть о математике исключительно широкого профиля, результаты которого относятся к топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике, вычислительной математике, электродинамике — А. Н. Тихонове. В первую половину нашего столетия под влиянием взглядов замечательного французского математика Адамара сложилось убеждение, что для физики и практики интересны только так называемые *корректные задачи*, решения которых, полученные при близких начальных данных, не могут расходиться между собой слишком сильно. Постоянный интерес к задачам практики убедил А. Н. Тихонова в ошибочности этой точки зрения. Оказалось, что много естественных задач физики, экономики и других областей знания по своему существу являются некорректно поставленными. Тихоновым был разработан подход к решению такого типа задач.

В краткой статье нет возможности, да и необходимости, упомянуть имена всех, даже наиболее крупных математиков, сыгравших серьезную роль в развитии советской математики. Именно поэтому в настоящей статье дан только общий взгляд на прогресс математики в нашей стране за истекшие шестьдесят лет. Если у читателя создалось убеждение в том, что за этот короткий исторический срок в Советском Союзе произошли поистине революционные сдвиги в развитии математической науки, воспитаны многочисленные кадры активно работающих математиков, возникли многие новые направления математической мысли, то цель, которая была поставлена мною, достигнута.

Прогресс страны требует непрерывного развития науки как в теоретическом, так и прикладном плане. Важно подготовить себя психологически к тому, что основным источником математических теорий является практика и что задача математики состоит не только в доказательстве новых теорем, но и в изучении явлений окружающего нас мира. Как правило, случается так, что явления природы и процессы экономики шире уже имеющихся средств математики. Это является вечным стимулом для развития самой математики, ее понятий и теорий.

Достижения советских физиков

Краткая хроника выдающихся открытий советских физиков включает, в основном, «именные» открытия. Конечно, не каждое крупное открытие непременно приобретает впоследствии имена сделавших его ученых. Поэтому приведенный здесь список не охватывает даже самых крупных открытий, сделанных нашими учеными в области физики. Подробный рассказ о достижениях советских физиков, изданный к 50-летию Октября, с трудом уместился в двух обширных томах. Но мы надеемся, что даже краткий перечень «именных» открытий поможет нашим читателям почувствовать, как велик вклад советских ученых в сокровищницу мировой науки. Хроника подготовлена В. А. Лешковцевым.

Известно, что прочность твердого тела, определяемая на опыте, во много раз меньше ее значения, вычисленного теоретически. Причину этой разницы первым раскрыл академик Абрам Федорович Иоффе. Оказалось, что в преждевременном разрушении материалов повинны различные дефекты кристаллической структуры, например, микроскопические трещины на поверхности кристаллов. Погрузив кристалл каменной соли в воду и растворив поверхностный слой, Иоффе достиг увеличения прочности в сотни раз. Упрочнение кристаллов при растворении поверхностного слоя получило название **«эффекта Иоффе»**.

●

В 1919—1920 годах академик Леонид Исаакович Мандельштам теоретически показал, что микроскопические неоднородности плотности вещества, возникающие в результате тепловых колебаний молекул, изменяют спектр рассеянного света, добавляя в него новые спектральные линии, которые очень трудно наблюдать. (Эти линии впервые были обнаружены членом-корреспондентом АН СССР Евгением Федоровичем Гроссом.) Явление, в результате которого они возникают, было названо **«эффектом Мандельштама — Бриллюэна»**, так как несколько позднее аналогичное предсказание было сделано французским физиком Бриллюэном.

●

В 1922 году профессор Александр Александрович Фридман получил два новых решения основного уравнения общей теории относительности для всей Вселенной. Оба они описывали не стационарную Вселенную, как у Эйнштейна, а Вселенную, которая непрерывно развивается. В дальнейшем **«модель расширяющейся Вселенной Фридмана»** получила экспериментальное подтверждение и теперь является общепризнанной.

●

Академик Владимир Александрович Фок с момента возникновения квантовой механики работал над ее развитием. Уже в 1926 году он обобщил основное уравнение этой теории на случай наличия магнитного поля и получил релятивистское уравнение квантовой механики, известное физикам как **«уравнение Фока — Клейна»**. В дальнейшем академик В. А. Фок одновременно с английским физиком Хартри создал метод расчета спектров атомов, содержащих большое количество электронов, и даже спектров сложных молекул. Этот метод вошел в историю физики под именем **«метода Фока—Хартри»**. До создания этого метода расчет сложных атомов был совершенно недоступной задачей для квантовой механики.

●

В 1926 году академики Леонид Исаакович Мандельштам и Григорий

Самуилович Ландсберг, исследуя рассеяние света в кристаллах кварца, обнаружили в спектре рассеянного света дополнительные спектральные линии, не принадлежащие падающему на кристалл свету. Эти спектральные линии возникают в результате взаимодействия падающего света с отдельными молекулами, образующими кристаллическую решетку. Несколько позднее аналогичное явление было обнаружено индийским физиком Раманом при изучении рассеяния света в жидком бензоле. Оно получило название **«эффекта Мандельштама — Ландсберга — Рамана»** или «комбинационного рассеяния света». Комбинационное рассеяние стало мощным средством изучения строения молекул.

●

В 1928—1929 годах академик Петр Леонидович Капица с помощью сконструированной им оригинальной установки для создания сверхсильных магнитных полей установил, что в таких полях изменение электрического сопротивления металлов растет не пропорционально квадрату магнитной индукции, как ожидалось на основе существовавших тогда теорий, а является линейной функцией магнитной индукции. Это неожиданное явление, которое не удавалось объяснить около 30 лет, называют **«законом Капицы»**.

●

В начале 30-х годов профессор Лев Васильевич Шубников, работая в лаборатории голландского физика Де-Гааза, обнаружил, что электрическое сопротивление висмута, помещенного в магнитное поле, по мере увеличения магнитной индукции поля то возрастает, то убывает (как говорят, сопротивление висмута осциллирует). Этот **«эффект Шубникова — Де-Гааза»** широко используется для исследования энергетического спектра электронов в металле.

●

В 1930 году академик Лев Давидович Ландау теоретически показал, что свободные электроны в металле под действием внешнего магнитного поля могут двигаться только по строго определенным (как говорят физики — квантовым) траекториям. Это означает, что в магнитном поле возникают особые энергетические уровни, получившие наименование **«уровней Ландау»**.

Из этой же теории следовало, что действие магнитного поля на свободные электроны в металле приводит к возникновению дополнительного магнитного момента, направленного в сторону, противоположную внешнему магнитному полю. Такой момент называется диамагнитным, а описанное явление называют **«диамагнетизмом Ландау»**. Заметим, что эта же теория объяснила и эффект Шубникова — Де-Гааза.

В 1962 году за выдающиеся заслуги в области теоретической физики Л. Д. Ландау была присуждена Нобелевская премия.

●

Член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель первым ввел в 1931 году в обиход физиков особую квазичастицу, которую теперь называют **«экситоном Френкеля»**. Он обратил внимание на то, что в кристаллической решетке может существовать особое возбужденное состояние электронов. Возникнув в какой-либо ячейке кристалла, это возбуждение перемещается по кристаллу, подобно своеобразной частице. Существование экситонов было впервые доказано в экспериментах члена-корреспондента АН СССР Евгения Федоровича Гросса. Экситоны играют большую роль в физике твердого тела и в современной химии.

●

В 1933 году академик Игорь Евгеньевич Тамм теоретически предсказал существование на поверхности полупроводниковых кристаллов своеобразных энергетических состояний («ловушек»). Они вошли в науку под названием **«поверхностных уровней Тамма»**.

В 1934 году академик Исаак Константинович Кикоин открыл фотоэлектромагнитный эффект, показав в экспериментах, что при освещении полупроводника, находящегося в магнитном поле, в нем возникает электродвижущая сила. Кванты света создают носителей тока — свободные электроны и дырки, которые диффундируют вдоль направления падения света, а магнитное поле разводит их в противоположных направлениях. Это явление давно уже называют **«эффектом Кикоина»**.

●

Академик Павел Алексеевич Черенков вместе со своим учителем академиком Сергеем Ивановичем Вавиловым обнаружили в 1934 году эффект «сверхсветового электрона». Оказалось, что в жидких и твердых средах электроны могут двигаться со скоростью большей, чем скорость света в этих средах (но, конечно, не большей скорости света в пустоте!). Электроны могут обгонять испускаемый ими свет. Этот эффект, получивший название **«эффекта Черенкова»**, нашел ряд ценных практических применений, в частности, для регистрации быстрых заряженных частиц (так называемые черенковские счетчики частиц). Теория, объяснившая эффект Черенкова, была создана академиками Игорем Евгеньевичем Таммом и Ильей Михайловичем Франком. За открытие и объяснение этого явления П. А. Черенкову, И. Е. Тамму и И. М. Франку в 1958 году была присуждена Нобелевская премия.

●

В 1936 году член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель разработал электрокапиллярную теорию атомных ядер, в которой ядра рассматриваются как капли заряженной жидкости. Вслед за Френкелем эти же идеи развил датский физик Нильс Бор. В историю физики они вошли под названием **«капельной модели ядра Бора — Френкеля»**.

●

С именем академика Петра Леонидовича Капицы связано еще одно явление, открытое им в 1938 году. Изучая свойства жидкого гелия, он обнаружил, что при температуре ниже 2,19 К гелий течет сквозь узкую щель практически без всякой вязкости. В дальнейшем это явление было названо сверхтекучестью. Теорию этого явления создал в 1941 году академик Лев Давидович Ландау.

●

Профессор Московского университета Анатолий Александрович Власов в 1938 году первым вывел уравнение, описывающее поведение разреженной плазмы, в которой не происходит столкновений заряженных частиц. Оно вошло в науку под именем **«уравнения Власова»**.

●

В 1944 году академик Евгений Константинович Завойский открыл электронный парамагнитный резонанс, положив начало новой области физики твердого тела. Суть этого явления заключается в том, что вещества, находящиеся в постоянном магнитном поле, избирательно поглощают энергию перпендикулярного к нему высокочастотного магнитного поля.

●

В 1944 году академик Владимир Иосифович Векслер открыл носящий его имя принцип автофазировки частиц, ускоряемых в циклических ускорителях. На нем основана работа всех современных циклических ускорителей. Несколько позже, независимо от Векслера, этот же принцип открыл американский физик Макмиллан. За это открытие оба они были удостоены международной научной премии.

●

В 1947 году академик Лев Давидович Ландау показал, что даже при отсутствии столкновений частиц плазмы распространяющиеся в ней электромагнитные волны испытывают затухание. Это явление играет существенную роль в поведении плазмы. Физики всего мира называют его **«затуханием по Ландау»**.

Некоторые металлы и сплавы при охлаждении до очень низких температур полностью утрачивают сопротивление протекающему по ним току. Это явление названо сверхпроводимостью. В 1950 году академики Виталий Лазаревич Гинзбург и Лев Давидович Ландау построили теорию сверхпроводимости, учитывающую квантовые эффекты в сверхпроводниках. Пользуясь этой теорией, члены-корреспонденты АН СССР Алексей Алексеевич Абрикосов и Лев Петрович Горьков создали теорию сверхпроводящих сплавов, имеющую очень большое значение. Эта теория известна во всем мире как **«теория ГЛАГ»** (Гинзбург — Ландау — Абрикосов, — Горьков).

Микроскопическая теория сверхпроводимости, объяснившая механизм этого загадочного явления, была создана в 1957 году академиком Николаем Николаевичем Боголюбовым и американскими физиками Бардином, Купером и Шриффером. Она так и называется **«теорией сверхпроводимости Боголюбова — Бардина — Купера — Шриффера»**.

●

В начале 50-х годов академики Александр Михайлович Прохоров и Николай Геннадиевич Басов разработали основы новой области физики — квантовой электроники и создали первый квантовый молекулярный генератор на молекулах аммиака. За эти выдающиеся работы в 1964 году им, совместно с американским физиком Таунсом, была присуждена Нобелевская премия.

●

Сложные молекулы органических веществ имеют спектры, состоящие из широких сплошных спектральных полос. В 1952 году профессор Эдуард Владимирович Шпольский показал, что, растворяя органические вещества в специально подобранных растворителях и охлаждая полученные растворы до очень низких температур, можно получить спектры поглощения, состоящие из очень тонких спектральных линий, однозначно связанных со строением и свойствами молекул. Так была создана новая область молекулярной оптики. Это явление в научной литературе повсеместно называют **«эффектом Шпольского»**.

●

Полупроводники, так же как и другие вещества, могут поглощать свет, длины волн которого заключены в определенных пределах. Для света с бо́льшими длинами волн они прозрачны. Таким образом, существует граница для длин волн, при которой полупроводник перестает поглощать свет. В 1958 году академик Леонид Вениаминович Келдыш теоретически предсказал, что под действием внешнего электрического поля эта граница должна смещаться в сторону бо́льших длин волн. Аналогичное предсказание сделал немецкий физик Франц. В 1960 году профессор Виктор Сергеевич Вавилов получил экспериментальное подтверждение этого явления, известного теперь как **«эффект Келдыша — Франца»**.

●

В 1966 году в СССР вступил в строй самый мощный для того времени ускоритель заряженных частиц — синхрофазотрон, ускоряющий протоны до энергии в 70 миллиардов электрон-вольт. Он был построен вблизи города Серпухова. С помощью этого усилителя было показано, что вероятность столкновения заряженных частиц при энергии, большей 20 миллиардов электрон-вольт, не уменьшается и не остается постоянной с ростом энергии, как предсказывала теория, а продолжает расти. Это неожиданное явление было названо **«Серпуховским эффектом»**.

●

Ученые всего мира, исследующие физические процессы в горячей плазме, широко используют установки, названные необычным русским словом **«ТОКАМАК»**. Так сокращенно называют «тороидальные камеры в магнитном поле» — советские термоядерные установки, разработанные и построенные в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова под руководством академиков Льва Андреевича Арцимовича и Бориса Борисовича Кадомцева.

С. Демидов

Проблемы Гильберта и советская математика

Событием номер один на Международном математическом конгрессе, проходившем в августе 1970 года во всемирно известном французском курортном городе Ницце, было известие о решении десятой проблемы Гильберта. Героем дня стал двадцатилетний советский математик Ю. В. Матиясевич, доклад которого был включен в повестку дня конгресса сверх заранее составленной программы. Так закончилась длившаяся 70 лет история этой проблемы Гильберта.

Решение каждой из двадцати трех проблем Гильберта, даже каждый частичный успех в их решении принимаются всем математическим миром как крупное математическое достижение. В чем секрет такой популярности гильбертовских проблем, той значимости, которое придается их решению? Ведь число нерешенных задач, поставленных в математической литературе, огромно, и лишь некоторые из них (как, например, проблема Ферма) приобретают широкую известность. А здесь не одна, а целых двадцать три задачи, некоторые из которых — не просто задачи в узком смысле этого слова, а планы разработки целых математических направлений! Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется отступить в 1900 год и оказаться в Париже на заседании второго Международного конгресса математиков, на котором 8 августа выступил Д. Гильберт с докладом «Математические проблемы».

Д. Гильберт (1862—1943)

Давид Гильберт родился в 1862 году в Кенигсберге. В этом городе он закончил школу и университет, здесь он начал свой путь в науке, на котором с первых же шагов ему сопутствовал успех. Полученные им результаты получили широкую известность. В 1895 году знаменитый геометр Ф. Клейн приглашает его в Геттинген занять должность ординарного профессора местного университета, с которым оказалась связанной вся дальнейшая деятельность Гильберта. Ко времени своего выступления на конгрессе 1900 года Гильберт прославился замечательными результатами по теории инвариантов и теории алгебраических чисел. В 1899 году вышел в свет его труд «Основания геометрии», составивший эпоху в основаниях математики. В этих работах в полной мере проявились удивительная разносторонность и обобщающая сила его дарования, позволявшие ему легко ориентироваться в самых различных областях математики, необычайная сила его математической интуиции. За Гильбертом наряду с А. Пуанкаре утверждается слава крупнейшего математика своего времени. Понятен поэтому тот исключительный интерес, с которым встретили участники конгресса его доклад со столь многообещающим названием — «Математические проблемы».

«Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу, за которой скрыто наше будущее, чтобы хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие успехи нашего знания и тайны его развития в ближайшие столетия? Каковы будут те особенные цели, которые поставят себе ведущие математические умы ближайшего поколения? Какие новые методы и новые факты будут открыты в новом столетии на широком и богатом поле математической мысли? — такими словами Д. Гильберт начал свой доклад. Затем он продолжал. — История учит, что развитие науки протекает непрерывно. Мы знаем, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми. Чтобы представить себе возможный характер развития математики в ближайшем будущем, мы должны перебрать в нашем воображении вопросы, которые еще остаются открытыми, обозреть проблемы, которые ставит современная наука, и решения которых мы ждем от будущего. Такой обзор проблем кажется мне сегодня, на рубеже нового столетия, особенно своевременным». И Гильберт предлагает вниманию слушателей двадцать три проблемы из различных областей математики, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки».

Первые шесть проблем доклада Гильберта относятся к обоснованию различных математических дисциплин, следующие девять — к более специальным вопросам алгебры, алгебраической геометрии и теории чисел, остальные восемь — к теории функций, дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению.

Следует отметить, что некоторые из этих проблем были поставлены задолго до Гильберта. Так, первая в списке — *проблема континуума* — была поставлена Г. Кантором в 1878 году, вопросы, относящиеся к третьей проблеме, обсуждались еще К. Гауссом в его переписке с Герлингом. Что касается вопросов, составляющих содержание восьмой проблемы, то один из них — *гипотеза о нулях дзета-функции* — был поставлен Б. Риманом в 1859 году, другой, именуемый *гипотезой Гольдбаха*, — еще в 1742 году в письме последнего к Л. Эйлеру, наконец, 21-я проблема — задача, выдвинутая Б. Риманом в 1857 году. Остальные проблемы, автором которых был сам Гильберт, составляют лишь часть задач, поставленных им к тому времени. Эти обстоятельства подчеркивают особый характер выбора проблем, содержащихся в докладе,— здесь лишь те наиболее важные, по мнению Гильберта, задачи, которые стояли тогда перед математикой, размышления над которыми могли помочь «представить себе возможный характер развития математического знания в ближайшем будущем».

Дальнейший ход событий показал, что выбор проблем, сделанный Гильбертом, был в основном правильным: разработка идей, связанных с их содержанием, составила значительную часть математики XX века. В решении этих проблем принимали участие очень многие талантливые математики из различных стран мира, в том числе сам Гильберт и его многочисленные ученики. Замечательное место среди них принадлежит отечественным математикам. В то время Россия не была еще мощной математической державой, подобной Германии или Франции, хотя и обладала уже признанными математическими школами и дала миру ряд выдающихся математиков, среди них — величайших математических гениев — Н. И. Лобачевского, П. Л. Чебышева. Однако золотой век отечественной математики был еще впереди. На конгрессе в Париже русская делегация была сравнительно небольшой— 9 человек (сравните: Франция — 90, Германия — 25) и выступила всего с одним сообщением «Об исчезновении (мы бы сказали — о *нулях* — С. Д.) функции *H* нескольких переменных», которое сделал харьковский профессор М. А. Тихомандрицкий.

В дальнейшем мы в основном будем придерживаться хронологического принципа.

Первой работой в России, посвященной разработке гильбертовых проблем, было исследование В. Ф. Кагана 1903 года, который значительно сократил и упростил появившееся незадолго до этого доказательство М. Дена, дававшее положительное решение третьей проблемы Гильберта, относящейся к стереометрии. В 1904 году С. Н. Бернштейн, молодой ученый из России, впоследствии академик, прославившийся выдающимися результатами в теории дифференциальных уравнений, теории функций и теории вероятностей, дал решение девятнадцатой проблемы Гильберта — трудной задачи теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это решение составило содержание докторской диссертации Бернштейна, защищенной им в том же году в Париже. Им же в работах 1908—1909 годов были получены важные результаты, связанные с двадцатой проблемой, также относящейся к теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В дальнейшем развитие направлений, связанных с разработкой этих проблем, стало одним из основных для получившей всемирную известность советской школы теории дифференциальных уравнений, истоки которой мы находим в творчестве В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова. Блестящие результаты по девятнадцатой проблеме были получены в 1937 году И. Г. Петровским, впоследствии академиком, одним из крупнейших специалистов в области теории дифференциальных уравнений.

И. Г. Петровский занимался также шестнадцатой проблемой Гильберта, включавшей в себя ряд задач топологии алгебраических кривых и поверхностей. В 1933 году он решил одну из этих задач, а в работе 1949 года (совместно с О. А. Олейник) обобщил свой результат.

В 1960 году ленинградскими математиками О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой было получено «смыкание» результатов по девятнадцатой и двадцатой проблемам Гильберта. Исследования по ним оказались в тесной связи с вариационным исчислением, призыв к развитию которого составляет содержание последней, двадцать третьей проблемы Гильберта. Ответом на этот призыв служат успехи вариационного исчисления в XX веке. Большую роль здесь сыграли исследования советских авторов (С. Н. Бернштейна, Л. А. Люстерника, Л. Г. Шнирельмана, Л. С. Понтрягина, О. А. Ладыженской и др.).

Шестая проблема Гильберта озаглавлена так: «Математическое изложение аксиом физики» (при этом имелась в виду также теория вероятностей). Любопытно отметить, что для Гильберта, как и для многих математиков его времени, теория вероятностей представлялась разделом физики (подобным механике), в котором математические методы играют выдающуюся роль. Такая точка зрения в значительной мере объяснялась слабой разработкой аксиоматического фундамента теории вероятностей, что влекло за собой подчас слабую выявленность собственно математического ее содержания. Аксиоматическое построение теории вероятностей поэтому было справедливо сформулировано Гильбертом в виде одной из основных задач, стоящих перед математикой.

Такую аксиоматизацию дал впервые С. Н. Бернштейн в работе, появившейся в год Великой Октябрьской социалистической революции. В 1936 году выдающийся математик современности А. Н. Колмогоров, ныне академик, предложил другую аксиоматическую систему теории вероятностей, основанную на понятиях теории меры. Эта система, ставшая впоследствии общепринятой, знаменовала собой начало нового этапа в истории теории вероятностей и появилась как бы в фокусе идей, с одной стороны, московской школы теории функций действительного переменного, основанной Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным, с другой — знаменитой петербургской школы П. Л. Чебышева, являвшейся ведущей в области теории вероятностей в XX веке. Эти две школы послужили основанием, на котором выросла советская математическая школа.

Наряду с теорией вероятностей излюбленным направлением деятельности петербургской математической школы П. Л. Чебышева были теоретико-числовые исследования. Поэтому неудивительно, что особенно существен вклад советских ученых в разработку теоретико-числовых проблем Гильберта. В 1929 году молодой московский математик, впоследствии член-корреспондент АН СССР А. О. Гельфонд дал частичное решение седьмой проблемы Гильберта: *доказать, что числа вида* α^{β} *при алгебраическом* $\alpha\neq 0$, 1 *и алгебраическом иррациональном* β *всегда трансцендентны* (*или по крайней мере иррациональны*).

Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные числа. Примерами алгебраических чисел могут служить рациональные числа p/q, так как они являются корнями уравнения $qx - p = 0$, числа вида $\sqrt[n]{p/q}$, так как они удовлетворяют уравнению $qx^n - p = 0$, число $\sqrt{-1}$, так как оно представляет собой корень уравнения $x^2 + 1 = 0$. Число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным*.

Доказательство существования трансцендентных чисел дал в 1851 году Ж. Лиувилль. Тем не менее ни одного примера таких чисел не имелось до тех пор, пока в 1873 году Ш. Эрмит не доказал трансцендентности числа e (основания натуральных логарифмов). Вскоре вслед за этим немецкий математик Ф. Линдеман тем же методом доказал трансцендентность числа π, решив тем самым знаменитую проблему квадратуры круга. Таким образом, число примеров трансцендентных чисел было невелико, в то время как из доказательства существования трансцендентных чисел, данного в 1874 году Г. Кантором, следовало, что именно трансцендентные числа составляют подавляющую часть множества всех действительных чисел.

Седьмая проблема Гильберта предлагала математикам путь введения большого класса трансцендентных чисел. Технически эта проблема оказалась чрезвычайно трудной. В 1929 году А. О. Гельфонд доказал, что число $\alpha^{i\sqrt{p}}$ при алгебраическом $\alpha\neq 0$, 1 и целом $p \geqslant 1$ будет числом трансцендентным. В 1930 году Р. О. Кузьмин использовал метод А. О. Гельфонда для доказательства трансцендентности числа $\alpha^{\sqrt{p}}$ при тех же предположениях относительно α и p и иррациональном $\sqrt{p}$. Наконец, в 1934 году А. О. Гельфонд дал окончательное решение проблемы, подтвердив гипотезу Гильберта. Результат А. О. Гельфонда стал классическим результатом теории трансцендентных чисел.

Восьмая проблема Гильберта состоит из нескольких задач, относящихся к теории простых чисел,— раздела математики, не балующего нас результатами. Каждый полученный здесь новый факт — событие чрезвычайной значимости. Одна из этих задач — так называемая *проблема Гольдбаха* (названная так по имени петербургского академика Х. Гольдбаха, сформулировавшего ее в письме к Эйлеру от 7 июня 1742 года): *доказать, что всякое целое число, большее или равное шести, является суммой трех простых.*

Легко найти требуемые разложения для небольших чисел:

$$6=2+2+2,\ 7=3+2+2,\ 8=3+3+2,$$
$$9=3+3+3,\ \ 15=3+5+7.$$

Многие математики проверяли истинность гипотезы для бо́льших чисел, однако какие-либо конкретные сдвиги долгое время получить не удавалось, что дало повод известному немецкому специалисту по теории чисел Э. Ландау для пессимистических высказываний о проблеме Гольдбаха на Международном конгрессе математиков 1912 года. К решению проблемы не удавалось найти никаких подходов.

Тем более сенсационным стал результат замечательного советского математика академика И. М. Виноградова, сумевшего в 1937 году решить проблему для нечетных чисел. Этот результат, а также метод его получения относят к числу наиболее выдающихся математических достижений XX века. Метод этот успешно применялся в дальнейшем для решения многих задач теории чисел. В 1946 году академик Ю. В. Линник дал другое доказательство теоремы И. М. Виноградова с привлечением методов теории функций комплексного переменного.

Важным достижением советских ученых в решении теоретико-числовых проблем Гильберта стало также доказательство в 1948 году общего закона взаимности молодым московским математиком, впоследствии членом-корреспондентом АН СССР И. Р. Шафаревичем.

Этой работой завершилась длинная цепь исследований, отмеченная именами К. Гаусса, Г. Эйзенштейна, Э. Куммера, самого Д. Гильберта, Э. Артина, Г. Хассе.

Одной из проблем, долгое время не поддававшейся решению, была пятая, относящаяся к так называемой *теории непрерывных групп*. Ее окончательное решение было достигнуто лишь в 1952 году американцами Д. Монтгомери и Л. Циппином, но оно потребовало усилий многих выдающихся ученых и среди них известных советских математиков академиков Л. С. Понтрягина и А. И. Мальцева, доказавших проблему соответственно в 1934 и в 1946 годах для очень важных случаев.

Тринадцатая проблема относится к вопросу о представлении функции от нескольких переменных посредством суперпозиции функций от меньшего числа переменных. Пусть имеются три функции двух переменных u, v, w. Рассмотрим функцию $w(u(x, y), v(y, z))$. Она зависит уже от трех переменных: x, y, z. Эта функция трех переменных называется *однократной суперпозицией, составленной из трех функций двух переменных*. Например, функцию $w = xy + y^2z + x^2$ от переменных x, y, z можно рассматривать как однократную суперпозицию, составленную из функций $v = xy + x^2$, $u = y^2z$ и $w = u + v$, каждая из которых является функцией двух переменных.

Возникает вопрос: *а не являются ли все функции трех переменных многократными суперпозициями функций меньшего числа переменных?* Легко показать, что если рассматриваются не только непрерывные, но и разрывные функции, то на вопрос следует ответить утвердительно — всякая функция трех переменных может быть представлена в виде суперпозиции функций вида $f(x, y, z) = \psi(\varphi(x, y), z)$. Но Гильберта при постановке им тринадцатой проблемы интересовал вопрос о представлении функции трех переменных посредством суперпозиции функций достаточно гладких, например, аналитических (мы не имеем возможности дать здесь точное определение аналитической функции, скажем только, что непрерывные функции являются более «гладкими», чем разрывные, а аналитические более гладкими, чем непрерывные, и даже чем бесконечно дифференцируемые функции).

Рассмотрим квадратное уравнение относительно переменной f с коэффициентами x, y, z:

$$xf^2 + yf + z = 0.$$

Функцию

$$f = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4xz}}{2x},$$

являющуюся функцией коэффициентов, очевидным образом можно представить в виде суперпозиции элементарных функций не более чем двух переменных. Аналогично обстоит дело с корнями уравнений третьей и четвертой степени. Корни уравнений пятой и шестой степени также можно выразить через коэффициенты при помощи суперпозиции аналитических функций (правда, более сложных) не более двух переменных.

Однако для уравнения седьмой степени

$$f^7 + a_1f^6 + \ldots + a_7 = 0,$$

которое с помощью так называемого «преобразования Чиргаузена» сводится к виду

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf - 1 = 0,$$

такое представление получить не удавалось.

Гильберт выдвинул гипотезу, составившую содержание тринадцатой проблемы, что *решение* $f(x, y, z)$ *последнего уравнения нельзя представить как суперпозицию даже непрерывных функций только двух переменных*. Если бы эта гипотеза подтвердилась, то оказывалась бы решенной более сложная и важная задача о возможности представления аналитической функции трех переменных посредством суперпозиции достаточно гладких функций только двух переменных (оно оказывалось бы невозможным).

Немецкий математик Л. Бибербах называл тринадцатую проблему «самой несчастливой» — в данном случае число 13 оправдывало свою дурную славу, решение проблемы ускользало от исследователей, уводя их на зыбкие пути, приводившие к неверным заключениям. Так, некоторое время полагали, что Бибербаху удалось подтвердить гипотезу Гильберта, однако его построение оказалось ошибочным. Был получен целый ряд результатов, самым сильным из которых был результат молодого советского математика А. Г. Витушкина, косвенно вроде бы подтверждавших гипотезу Д. Гильберта.

Тем более неожиданным оказался результат, полученный в 1954 году академиком А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом, тогда еще студентом механико-математического факультета Московского университета, впоследствии профессором и лауреатом Ленинской премии. Они опровергли гипотезу Гильберта, показав, что *всякая непрерывная функция трех переменных представляет собой сумму девяти функций, каждая из которых является однократной суперпозицией функций двух переменных*.

Вторая проблема Гильберта состояла в доказательстве непротиворечивости арифметики. При этом Гильберт сильно ограничивал средства доказательства рамками подхода, получившего впоследствии название «финитизма Гильберта». Сам Гильберт совместно с учениками затратил много сил на решение этой проблемы и даже одно время испытывал уверенность, что такое доказательство им получено. Однако результаты К. Геделя 1931 года положили конец этой уверенности — выяснилось, что такое доказательство в рамках «финитизма Гильберта» принципиально не может быть получено. Начались поиски такого доказательства при отказе от некоторых ограничений, накладываемых «финитизмом Гильберта». Одно из самых замечательных доказательств такого рода получил в 1943 году академик П. С. Новиков.

Суть десятой проблемы, окончательно решенной Ю. В. Матиясевичем, состоит в следующем: *дано произвольное диофантово уравнение с целыми рациональными коэффициентами; указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное уравнение в целых рациональных числах*.

К примеру, целочисленными решениями уравнения

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

возникающего в связи со знаменитой теоремой Пифагора, являются наборы $(\alpha \in \mathbf{Z})$

$$x = \alpha^2 - 1,\quad y = 2\alpha,\quad z = \alpha^2 + 1.$$

Эти формулы приписываются Пифагору, однако они не охватывают всех целочисленных решений (пифагоровых троек) данного уравнения. Общее решение

$$x = \xi^2 - \eta^2,\quad y = 2\xi\eta,\quad z = \xi^2 + \eta^2$$

$(\xi, \eta \in \mathbf{Z})$ мы находим у Диофанта, хотя оно, без сомнения, было известно задолго до него. В работах Диофанта теория таких уравнений получила значительное развитие, поэтому впоследствии они были названы его именем.

Исследованием диофантовых уравнений, или диофантовым анализом, как нередко говорят сегодня, занимались П. Ферма, Л. Эйлер, Ж. Лагранж и К. Ф. Гаусс. Последние двое полностью решили вопрос об отыскании целочисленных решений уравнения второй степени с двумя неизвестными. Можно назвать еще целый ряд выдающихся математиков XIX столетия, пробовавших свои силы в диофантовом анализе, однако к 1900 году, времени постановки Гильбертом указанной задачи, успехи в решении уравнений высших степеней были довольно скромными. Ставя указанную выше проблему, Гильберт намеревался, по-видимому, привлечь внимание математиков к разработке проблем диофантового анализа.

В 1908 году А. Туэ получил один из самых замечательных результатов диофантового анализа: *уравнение $P(x, y) = c$, где c — целое число, а $P(x, y)$ — неприводимый многочлен, у которого все слагаемые имеют одинаковую степень, не меньшую трех, может иметь лишь конечное число целочисленных решений* (многочлен называется *неприводимым*, если он не разлагается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами).

Но ни метод Туэ, ни последующие методы не давали алгоритма для нахождения самих решений. Результаты, полученные для диофантовых уравнений степени выше двух (работы советского математика Б. Н. Делоне, немецкого математика К. Зигеля и др.), относились к поискам алгоритмов для отдельных классов диофантовых уравнений. И хотя успехи в поисках общего метода для произвольных диофантовых уравнений были в высшей степени незначительными, математики тем не менее полагали, что рано или поздно он будет найден.

Однако в середине тридцатых годов в математике сформировывается четкое понятие *алгоритма* и рождается представление о проблемах, для которых не существует алгоритма, задающего их решения, — об *алгоритмически неразрешимых проблемах*. Примеры таких проблем дали в 30—40-е годы А. Черч, А. Тьюринг, Э. Пост, А. А. Марков. В 1952 году П. С. Новиков доказывает алгоритмическую неразрешимость одной важной проблемы теории групп — проблемы тождества слов. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем, с одной стороны, и трудности, связанные с попытками нахождения искомого алгоритма, с другой, породили сомнение: а может быть, *алгоритма, решающего десятую проблему, не существует вовсе?* Результаты американских математиков (М. Дэвиса и др.), полученные в 50—60-е годы, давали косвенное подтверждение такому предположению. Им удалось показать, что для некоторого более общего класса уравнений, так называемых «показательно-диофантовых уравнений с целыми коэффициентами» такого алгоритма не существует. Но это для показательно-диофантовых уравнений, а для более специального случая — диофантовых уравнений — такой алгоритм мог и существовать. Так вот, Ю. В. Матиясевичем и было показано, что и для класса таких уравнений искомого алгоритма нет.

* * *

Мы рассказали здесь лишь о наиболее ярких достижениях советских математиков в решении проблем Гильберта. Более полный и подробный рассказ — тема не статьи, а книги. Такая книга, рассказывающая о достижениях ученых всего мира в решении проблем Гильберта, написанная крупными специалистами по соответствующим областям математики, вышла в нашей стране в 1969 году. Правда, говоря об этой книге, следует иметь в виду, что, во-первых, для чтения книги требуется значительная математическая подготовка — для понимания отдельных ее разделов не хватит даже знания университетского курса, а, во-вторых, за время, протекшее с момента ее опубликования, положение дел с изучением гильбертовых проблем сильно изменилось. Математика находится сейчас в стадии бурного развития, она постоянно ставит перед учеными новые и новые проблемы. Да и многие старые (в том числе некоторые из проблем Гильберта) до сих пор не нашли своего решения. Можно быть уверенным, что советские математики и в дальнейшем будут радовать нас замечательными успехами в решении наиболее трудных и важных задач современной математики.

Литература

1. Проблемы Гильберта. Сборник под редакцией П. С. Александрова. М., «Наука», 1969.

2. И. Г. Башмакова. Диофант и диофантовы уравнения. М., «Наука», 1972.

3. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры. М., Гостехиздат, 1956.

4. Ф. Кымпан. История числа π. М., «Наука», 1971.

5. С. Г. Гиндикин. К. Ф. Гаусс. «Квант», 1977, № 8.

6. В. И. Арнольд. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. «Математическое просвещение», 1958, № 3, 41—61.

И. Тюлина

Планета Жени Рудневой

В этом юбилейном году одной из малых планет Солнечной системы — астероиду 1907, открытому 11 сентября 1972 г. сотрудницей Крымской обсерватории Академии наук СССР Л. И. Черных, — присвоено наименование «Руднева» в честь студентки Московского государственного университета Евгении Рудневой. Что же сделала выдающегося студентка-астроном механико-математического факультета МГУ и почему ее имя присвоено планете?

И в школе, и в университете, и потом еще три жестоких года войны Женя страстно любила звездное небо, любила по-особому, как свое кровное, за что она несет ответственность. Вот запись в дневнике Жени-девятиклассницы:

«Темно. С реки дует легонький ветерок, приятный-приятный. Звезды горят в небе. Я еще не отказалась от мечтаний, и мне кажется, что не откажусь. Зачем отнимать у себя счастливые минуты? Вот я смотрю на звездное небо, на Орион, на Сириус и мечтаю о том, как я буду изучать их спектры, я вижу себя в обсерватории... А на самом деле? Ведь сколько мне еще учиться! Но так я уже сейчас смотрю на небо, как на свою будущую собственность.»

Способности у Жени были разносторонние. В школе все ей давалось легко. Она очень много читала сверх программы: по химии, по литературе, по истории, но больше всего по астрономии и математике. В МГУ она ездила на кружки и лекции. *«Когда я подумаю что я — я! — могу быть студенткой университета, мне что-то не верится, уж слишком большое уважение питаю к университету. Скорее всего меня туда и не примут.»* Она записывает в дневнике, что год назад было четыре отличника на одно место, а из года в год это число увеличивается.

Женя живо реагировала на все международные события и на успехи нашей страны: события в Испании, опубликование проекта Конституции, первые выборы в Верховный Совет СССР. После просмотра кинофильма «Ленин в Октябре» (я помню, как всех тогда волновал этот прекрасно поставленный фильм) Женя записывает в своем дневнике слова, которые оказались вещими:

«Когда смотришь эту картину, не можешь быть равнодушной: смотришь на экран, и думаешь о себе. О, я очень хорошо знаю, для чего я живу, но сейчас я это поняла, почувствовала так, как никогда раньше... Я очень хорошо знаю: настанет час, я смогу умереть за дело моего народа так, как умирали они, безвестные герои из этого чудного фильма. Я хочу посвятить свою жизнь науке, и я это сделаю: все условия создала Советская власть для того, чтобы каждый мог осуществить свою мечту, какой бы смелой она ни была. Но я комсомолка, и общее дело мне дороже, чем свое личное (именно так я рассматриваю свою профессию), и если партия, рабочий класс этого потребуют, я надолго забуду астрономию, сделаюсь бойцом, санитаром, противохимиком. Побольше таких фильмов: они надолго заряжают...»

На мехмат Женя поступила. Училась там она блестяще. Уже на втором курсе у нее появились печатные работы. Женя сделала несколько докладов в Отделе переменных звезд. Один из них был посвящен спектроскопически-двойным звездам. Помните, как она мечтала у реки, что будет изучать спектры звезд? Так все и получилось. Ее дарования заметили профессора и студенты. Известный астроном Павел Петрович Паре-

наго подарил ей свою книгу с дарственной надписью.

На фронт Женя с подругами пошли добровольцами. Чтобы попасть туда, им пришлось несколько раз ходить в ЦК ВЛКСМ. Штурманское дело, которое они изучали в ускоренном темпе в городе Энгельсе, давалось мехматовским комсомолкам легче, чем многим другим девушкам, отобранным Мариной Расковой для формирования летных частей. Задачки, теория, ориентирование по звездам не представляли для Жени труда. Но летная подготовка вызывала трудности: ее жестоко укачивало. Одна из подруг уехала домой — не выдержала. Жене грозило то же. Однако ее характер победил слабость организма — ее перестало укачивать.

Опытный еще с мирных дней летчик-аэроклубник Дина Никулина (ныне Герой Советского Союза) скажет потом о нашей Жене: «*С Женей Рудневой я много летала. Это была чистая, честная девушка. Большая умница, очень любознательная. Первое время я ей указывала на недостатки в полете. Ей нравилась моя требовательность, на мои выговоры она не обижалась. Была очень хорошим штурманом... Помню, как на станции Майская однажды очень удачно разбомбили мы эшелон. Долго не бомбили, выжидали. Сделали четыре захода и попали в эшелон. Летели обратно — пели*».

Женя стала штурманом звена, затем — эскадрильи. В 1943 г. она была уже штурманом 46-го гвардейского Таманского полка ночных бомбардировщиков. Женя организовала школу молодых штурманов, обучая их прямо в боевой обстановке. Новички охотно летали с Женей, чувствуя себя с ней уверенно.

Командование наградило Женю Рудневу тремя орденами: Красной Звезды, Красного Знамени, Отечественной войны I степени.

Весной 1944 г. женский авиационный полк участвовал в подготовке большого наступления наших войск под Керчью. Девушки летали бомбить укрепления гитлеровцев через Азовское море на Керченский полуостров, где у противника была очень сильная противовоздушная оборона. В ночь на 9 апреля девушки сделали много вылетов на цель, когда отбомбившийся экипаж Наташи Меклин увидел, как чей-то ПО-2 был пойман прожекторами в перекрест. Снаряды ложились все ближе и ближе к самолету. Вдруг эрликон выбросил горсть снарядов: облако взрывов окутало самолет. Он вырвался, маневрируя, весь объятый пламенем, и еще некоторое время упорно тянул на запад. Видимо, бомбы еще не были сброшены. И вот на земле показались разрывы. Вскоре самолет стал терять высоту, оттуда неслись ракеты, пылающие куски... Подавленные, возвращались на аэродром экипаж за экипажем; к ним бежали с тревогой: кто? Когда все приземлились, стало ясно — сгорел самолет молодой летчицы Прокофьевой, которую обучала в бою Женя. Это был 645-й боевой вылет Евгении Рудневой.

Посмертно ей было присвоено высокое звание Героя Советского Союза. Ее именем названа одна из улиц Москвы. А небо и впрямь стало собственностью Евгении Рудневой, как мечталось ей в детстве: ведь в этом прекрасном звездном мире она совершает свой вечный полет.

В. Левитина

Как Математик помог Бригадиру

Главная цель статьи — показать, что самые простые задачи, возникающие в практике, естественно приводят к фундаментальным понятиям математики.

1. Бригадир получает задачу

Наш Бригадир возглавляет бригаду из 10 человек, которая должна погрузить кирпич, находящийся на двух складах. На первом складе — 4 тысячи кирпичей, на втором — 8 тысяч. Склады устроены так, что на первом складе одновременно должны вести погрузку не менее шести рабочих, на втором могут работать от трех до шести человек. Бригадиру нужно распределить рабочих так, чтобы вся работа была выполнена за минимальное время.

Как может поступить Бригадир? Например, так: отправить сначала всех рабочих на первый склад, а после окончания его разгрузки шесть рабочих — максимально допустимое число — перевести на второй склад. *Предположим для простоты, что каждый рабочий за один час погружает тысячу кирпичей.* Тогда время, за которое бригада выполнит всю работу по этому расписанию, очевидно, равно $\frac{4}{10}+\frac{8}{6}=1\frac{11}{15}$ (часа).

Будет ли такая организация работы наилучшей? Если да, то почему? А если нет, то насколько она далека от оптимальной? Ответить на эти вопросы сам Бригадир не может. А вы? Попытайтесь — тогда вам будет значительно интереснее прочесть в следующих параграфах о встрече Бригадира с Математиком, к которому Бригадир обратился со своей задачей.

2. Математик создает модель задачи

Прежде чем взяться за решение задачи, Математик должен создать ее математическую модель.

Если обозначить через u и v количества грузчиков, работающих на первом и втором складах, то для каждого момента времени числа u и v удовлетворяют следующим условиям:

1) $u \in \mathbf{Z}$ и $v \in \mathbf{Z}$,
2) $6 \leqslant u \leqslant 10$ или $u=0$,
3) $3 \leqslant v \leqslant 6$ или $v=0$,
4) $u+v \leqslant 10$.

Этим условиям удовлетворяют такие тринадцать режимов работы: $\langle 6,4\rangle$ (на первом складе работает 6 человек, на втором — 4), $\langle 7,3\rangle$, $\langle 6,3\rangle$, $\langle 10,0\rangle$, $\langle 9,0\rangle$, $\langle 8,0\rangle$, $\langle 7,0\rangle$, $\langle 6,0\rangle$, $\langle 0,0\rangle$, $\langle 0,3\rangle$, $\langle 0,4\rangle$, $\langle 0,5\rangle$ и $\langle 0,6\rangle$. Изобразим их точками координатной плоскости (рис. 1).

Порядок, в котором применяются различные допустимые режимы работы, безразличен. Например, если бы Бригадир послал сначала шесть рабочих разгрузить второй склад, а затем всю бригаду направил на первый, работа была бы выполнена за те же $1\frac{11}{15}$ часа. Поэтому мы можем считать, что погрузка организована так: сначала t_1 часов применяется режим α_1, затем t_2 часов — режим α_2 и т. д. При этом t_i может равняться нулю, т. е. режим α_i может не использоваться. Например, при погрузке, рассмотренной в п. 1, нулю не равны только $t_4=\frac{4}{10}$ и $t_{13}=\frac{8}{6}$.

Пренебрежем временем переходов со склада на склад. Тогда общее время погрузки t будет равно

$$t=t_1+t_2+\ldots+t_{12}+t_{13}. \quad (1)$$

Поскольку каждый рабочий грузит в час тысячу кирпичей, количества кирпича, погруженного с первого склада (x тысяч штук) и со второго склада

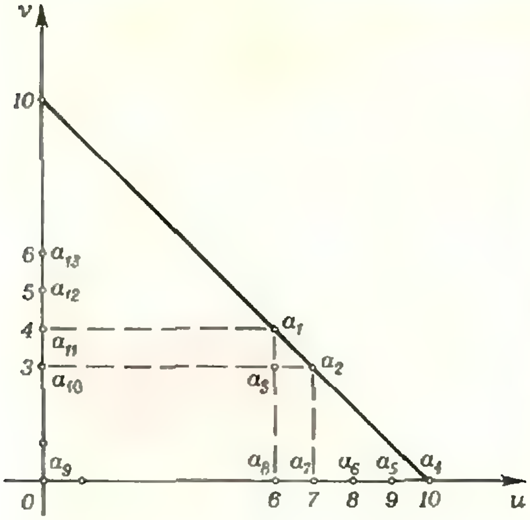


Рис. 1.

(y тысяч штук), выразятся равенствами

$$x = 6t_1 + 7t_2 + \ldots + 0t_{12} + 0t_{13}, \quad (2)$$

$$y = 4t_1 + 3t_2 + \ldots + 5t_{12} + 6t_{13}. \quad (3)$$

Фиксируем t. Подставляя в (2) и (3) различные неотрицательные числа $t_1, t_2, \ldots, t_{13}$, удовлетворяющие условию (1), мы будем получать, различные точки плоскости $\langle x, y\rangle$. Множество всех таких точек обозначим через A_t; назовем его *множеством достижимости за время t*. Это название естественно: A_t состоит из точек плоскости с координатами, равными количеству кирпича (в тысячах штук), который может погрузить бригада — соответственно, с первого и второго складов — за время t.

Теперь задача Бригадира может быть сформулирована следующим образом: составить такое расписание погрузки, при котором точка с координатами $\langle 4, 8\rangle$ (эта точка соответствует заданным количествам кирпича на складах) принадлежит множеству A_t и t минимально.

3. Математик решает задачу

Первым делом Математик упростит задачу: он ограничится отысканием множества A_1, поскольку любое множество A_t гомотетично множеству A_1 с коэффициентом гомотетии t и центром гомотетии — началом координат.

Покажем, что множество A_1 является выпуклой оболочкой точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}$.

Вспомним, что множество M точек на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любой парой своих точек оно содержит весь отрезок с концами в этих точках («Геометрия 6», п. 39). Примеры выпуклых множеств приведены на рисунке 2, множества на рисунке 3 не являются выпуклыми.

Выпуклая оболочка множества M — это наименьшее выпуклое множество, содержащее M (рис. 4). Поскольку пересечение произвольного числа выпуклых множеств выпукло (докажите!), выпуклая оболочка произвольного множества M совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих M (такие множества всегда — каково бы ни было M — существуют; почему?). Выпуклую оболочку множества M принято обозначать через conv M*).

Чтобы доказать, что множество достижимости A_1 является выпуклой оболочкой множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}\}$, дадим понятию выпуклой оболочки другое определение.

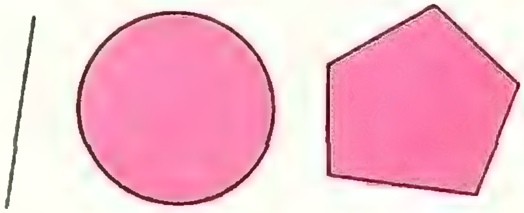


Рис. 2.

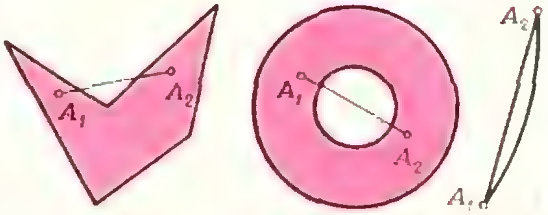


Рис. 3

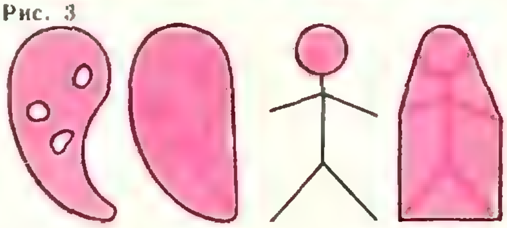


Рис. 4. В обеих парах правое множество есть выпуклая оболочка левого множества.

---

*) От латинского convexus («выпуклый»).

Для этого введем две операции с точками координатной плоскости. *Суммой* точек $\langle x_1, y_1\rangle$ и $\langle x_2, y_2\rangle$ мы будем называть точку $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$. *Произведением* точки $\langle x, y\rangle$ на число t назовем точку $\langle tx, ty\rangle$. Если каждой точке α сопоставить вектор, определяемый парой точек O, α (O — начало координат), то введенные операции с точками совпадут с обычными операциями над векторами.

Докажите, что если множество M выпукло, то и множество tM (т. е. множество точек $t\beta$, где $\beta \in M$) тоже выпукло.

Определение. Точка β называется *выпуклой комбинацией* точек $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, если существуют такие неотрицательные числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$, что $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ и $\beta = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \ldots + t_n\beta_n$.

Теорема. *Выпуклая оболочка множества M состоит из всевозможных выпуклых комбинаций точек из M.*

Доказательство. Обозначим множество выпуклых комбинаций точек из M через Q. Если γ и δ — произвольные точки, то множество точек вида $t\gamma + (1-t)\delta$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, совпадает с отрезком с концами γ, δ. Отсюда легко вывести, что Q — выпуклое множество (проделайте это!). Кроме того, очевидно, $M \subset Q$. Следовательно, $\operatorname{conv} M \subset Q$. Докажем теперь индукцией по n, что любая выпуклая комбинация $t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \ldots + t_n\beta_n$ $(t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1)$ точек из M принадлежит $\operatorname{conv} M$. Это будет означать, что $Q \subset \operatorname{conv} M$. При $n = 1$ соответствующее утверждение принимает вид: если $\beta \in M$, то $\beta \in \operatorname{conv} M$. Это верно по определению выпуклой оболочки. Пусть теперь все выпуклые комбинации n точек из M принадлежат $\operatorname{conv} M$. Докажем, что тогда и выпуклая комбинация $\delta = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \ldots + t_n\beta_n + t_{n+1}\beta_{n+1}$ (где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$ — точки из M) принадлежит M:

$$\delta = (1 - t_{n+1})\left[\frac{t_1}{1-t_{n+1}}\beta_1 + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}\beta_2 + \ldots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}\beta_n\right] + t_{n+1}\beta_{n+1}. \quad (4)$$

Из $t_1 + t_2 + \ldots + t_n + t_{n+1} = 1$ следует, что

$$\frac{t_1}{1-t_{n+1}} + \frac{t_2}{1-t_{n+1}} + \ldots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}} = 1.$$

По предположению индукции

$$\eta = \frac{t_1}{1-t_{n+1}}\beta_1 + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}\beta_2 + \ldots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}\beta_n \in \operatorname{conv} M.$$

Из (4) вытекает, что точка δ лежит на отрезке с концами η и β_{n+1}. Так как $\beta_{n+1} \in M \subset \operatorname{conv} M$, а $\operatorname{conv} M$ — выпуклое множество, получаем $\delta \in \operatorname{conv} M$. Теорема доказана.

Таким образом, каждая точка из $\operatorname{conv} M$ является выпуклой комбинацией некоторого конечного набора точек из M. Если множество M конечно, то можно считать, что каждая точка из $\operatorname{conv} M$ есть выпуклая комбинация всех точек из M.

Оказывается, для произвольного множества M на плоскости каждая точка β множества $\operatorname{conv} M$ может быть получена как выпуклая комбинация трех точек $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ из M (разумеется, для разных β точки $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, вообще говоря, разные). Эта теорема, вернее — ее n-мерный аналог, называется *теоремой Каратеодори*. Попробуйте доказать ее!

По определению множество достижимости A_1 состоит из всевозможных точек $t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_{13}\alpha_{13}$, для которых $t_1 + t_2 + \ldots + t_{13} = 1$ (п. 2). Другими словами, A_1 состоит из всевозможных выпуклых комбинаций точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}$. По доказанной теореме

$$A_1 = \operatorname{conv}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}\}.$$

Из рисунка 1 ясно, что A_1 — множество точек четырехугольника $\alpha_1\alpha_4\alpha_9\alpha_{13}$ (точка α_2 лежит на прямой $\alpha_1\alpha_4$).

Чтобы найти минимальное t, при котором множество $A_t = t \cdot A_1$ содержит точку $\beta\ \langle 4, 8\rangle$ (рис. 5), вычислим координаты точки γ пересечения прямых $\alpha_9\beta$ и $\alpha_1\alpha_{13}$. Уравнение прямой, проходящей через

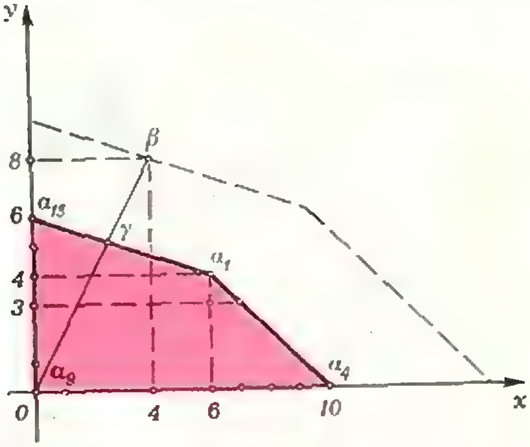


Рис. 5.

точки $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$, при $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ может быть записано в виде $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (почему?). Значит, координаты точки γ являются решением системы (см. рис. 5)

$$\begin{cases} \dfrac{y-0}{8-0}=\dfrac{x-0}{4-0}, \\ \dfrac{y-4}{6-4}=\dfrac{x-6}{0-6}. \end{cases}$$

Итак, $\gamma=\langle 2\frac{4}{7},\ 5\frac{1}{7}\rangle$. Следовательно, искомое минимальное t равно

$$t=\frac{|\alpha_9\beta|}{|\alpha_9\gamma|}=\frac{\sqrt{4^2+8^2}}{\sqrt{\left(2\frac{4}{7}\right)^2+\left(5\frac{1}{7}\right)^2}}=$$
$$=1\frac{5}{9}.$$

Найдем расписание, которое позволяет выполнить работу за $1\frac{5}{9}$ часа. Так как точка γ лежит на отрезке $\alpha_{13}\alpha_1$, то все $t_i=0$, за исключением t_1 и t_{13}, которые находятся из «векторного» уравнения $t_1\alpha_1+t_{13}\alpha_{13}=\gamma$ или из «координатной» системы

$$\begin{cases} 6t_1+0t_{13}=2\frac{4}{7}, \\ 4t_1+6t_{13}=5\frac{1}{7}, \end{cases}$$

откуда $t_1=\frac{4}{7}$, $t_{13}=\frac{3}{7}$. Итак, оптимальное расписание состоит из режима работы α_1 в течение $t\cdot t_1=\frac{8}{9}$ (часа) и режима работы α_{13} в течение $t\cdot t_{13}=\frac{2}{3}$ (часа). Время, которое заняла бы вся работа по расписанию, составленному Бригадиром в п. 1, было равно $1\frac{11}{15}$ часа, что больше найденного минимального времени в $1\frac{4}{35}$ раза.

Подведем итоги. Мы видим, что совсем не геометрическая задача Бригадира естественно привела нас к выпуклым фигурам на плоскости. Оказывается, понятие выпуклости может быть определено не только для геометрических — плоских или пространственных — объектов, но и в значительно более общей ситуации (например, в так называемых векторных пространствах — см. «Квант», 1976, № 4, с. 2). В таком обобщенном виде оно «работает» во многих областях математики (функциональный анализ, математическое программирование, теория игр).

С интересными задачами, решаемыми с помощью понятия выпуклости, вы можете познакомиться в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры» (М. — Л., Гостехиздат, 1951).

Задачу Бригадира можно решать и чисто алгебраически — методами линейного программирования. О том, как это делается, рассказывалось в «Кванте», 1976, № 7, с. 2. При таком подходе полезно заметить, что можно (см. рис. 1) рассматривать только те расписания, при которых

$$t_3=t_5=t_6=t_7=t_8=$$
$$=t_9=t_{10}=t_{11}=t_{12}=0.$$

Упражнения

1. Составить для Бригадира расписание, если

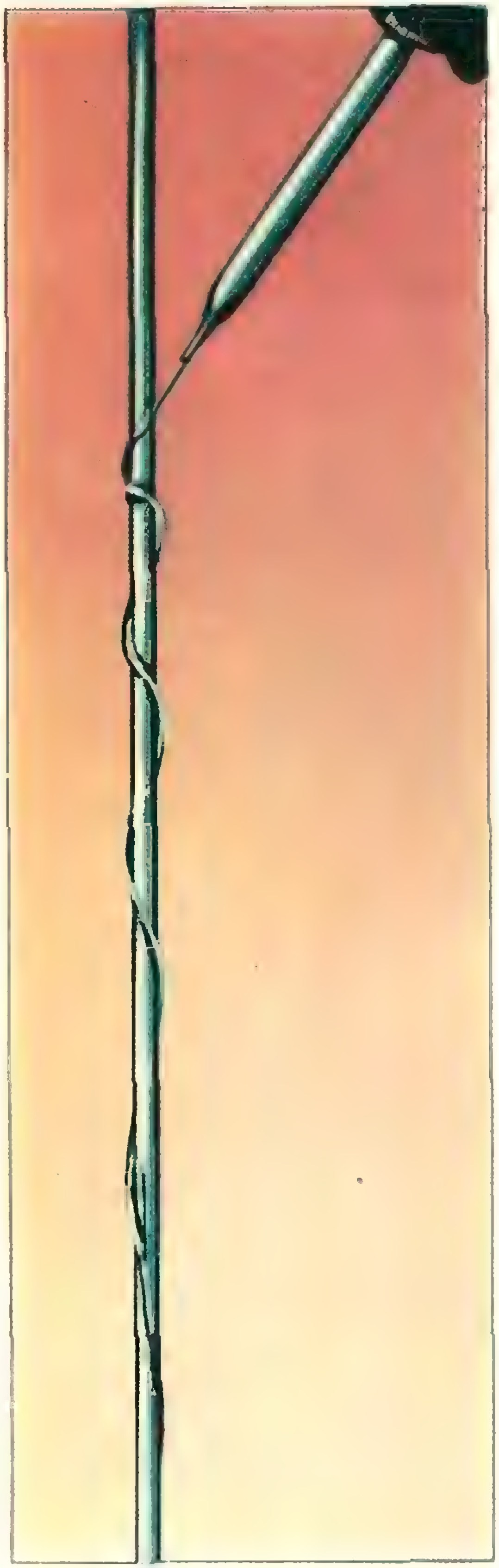
а) на первом складе — 16 тысяч кирпичей, на втором — 4 тысячи;

б) на первом складе одновременно должны работать не менее 7 человек.

2. Есть сковорода, на которой можно одновременно поджаривать две котлеты. Каждая котлета поджаривается с одной стороны одну минуту. За сколько времени удастся поджарить три котлеты?

В. Майер

«Липкая» струя



Объяснить теоретически результат эксперимента, который мы предлагаем вам проделать, довольно сложно. Но наблюдаемый эффект очень красив, а сам по себе опыт настолько прост, что вы без особого труда сумеете его выполнить.

Стеклянную трубку диаметром примерно 6 мм с оттянутым, как у пипетки, концом, отверстие которого имеет диаметр около 1 мм, резиновым шлангом соедините с краном водопровода. Пустив воду, получите струю и направьте ее на верхний конец стоящей вертикально чистой стеклянной трубки диаметром 4—6 мм и длиной около полуметра. При этом в зависимости от напора воды, расстояния и угла между трубками вы будете наблюдать замечательные явления: струя «прилипнет» к трубке, изменит направление своего движения, обогнет трубку и, наконец, несколько раз обовьет ее!

Интересно, что эффект прилипания струй жидкости или газа к твердой поверхности обратил на себя внимание молодого румынского авиатора Анри Коанда. В 1910 году, испытывая реактивный самолет, он обнаружил, что пламя двигателей «присасывается» к защитным плоскостям фюзеляжа. Эффект Коанда в настоящее время нашел и практическое применение.

А не встречались ли вы раньше с этим эффектом в быту?

Повороты и пересечения многогранников

Школьная программа уделяет большое внимание геометрическим преобразованиям и, в частности, повороту фигур. На заседаниях математического кружка мы рассматривали «нестандартные» задачи, когда поворачивают не плоскую фигуру, а пространственную. В таких задачах нужно хорошо представлять себе, как располагаются фигуры в пространстве после поворота, поэтому без геометрического воображения наметить путь решения трудно. А развить это воображение можно практикой. Думаем, что предложенные задачи помогут читателям в этом.

Задача 1. *Куб с ребром a повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины двух параллельных ребер, не принадлежащих одной грани куба. Найти объем общей части исходного и повернутого кубов.*

Наметим путь решения. Пусть M и N — середины двух параллельных и не принадлежащих одной грани ребер куба (рис. 1). Разрежем куб диагональной плоскостью, перпендикулярной отрезку MN. Получим две призмы. После поворота общая часть каждой призмы и ее образа будет состоять из прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат со стороной a, и правильной четырехугольной пирамиды с этим же основанием и вершиной в точке M или N (рис. 2), поэтому искомый объем V общей части кубов равен удвоенной сумме объемов параллелепипеда и пирамиды. Найдя длину высоты AA_1 параллелепипеда

$$|AA_1| = |EA_1| = a\sqrt{2}/2 - a/2 = a(\sqrt{2} - 1)/2$$

и высоту пирамиды

$$|MN|/2 - |AA_1| = a/2,$$

получаем:

$$V = 2\left(\frac{a^3(\sqrt{2} - 1)}{2} + a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = a^3\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Задача 2. *Две диагонали двух кубов с ребром a лежат на одной прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей части этих кубов.*

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, и второй куб получается из него параллельным переносом, переводящим вершину B в середину O диаго-

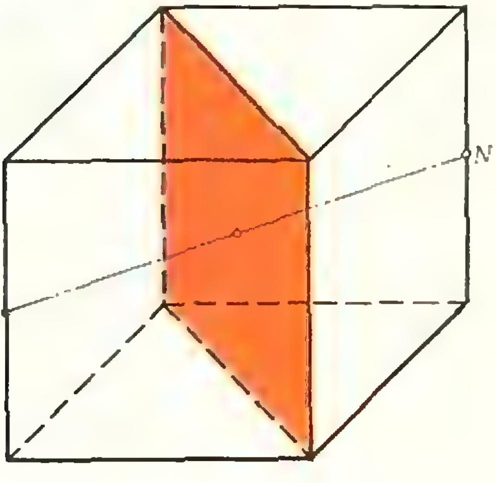


Рис. 1.

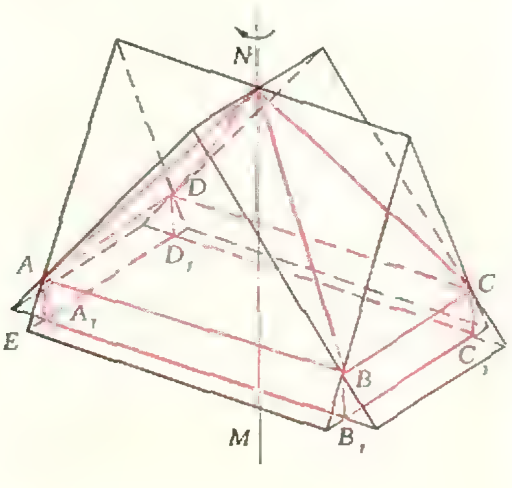


Рис. 2.

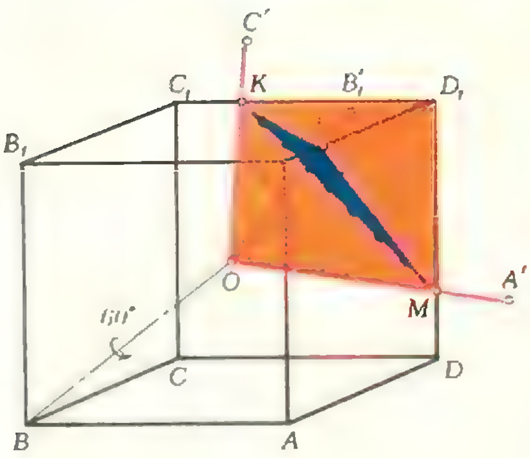


Рис. 3.

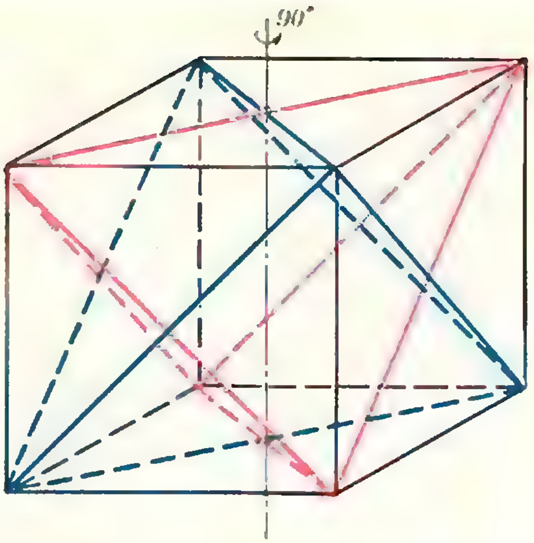


Рис. 4.

нали BD_1, и поворотом вокруг оси BD_1 на 60° (рис. 3). Можно сначала произвести поворот, а потом перенос. После поворота точка B_1 окажется в плоскости BA_1D_1 (докажите это самостоятельно), поэтому легко найти, что после переноса отрезок OB_1' (образ отрезка BB_1) пересечет отрезок A_1D_1 в точке L такой, что $|LD_1| = 3a/4$. Общая часть кубов будет составляться из двух треугольных пирамид D_1KLM и $OKLM$, боковые ребра каждой из которых попарно образуют прямые углы, а длины этих ребер равны $3a/4$. Отсюда получаем ответ:

$$V = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{4}a\right)^3 = \frac{9a^3}{64}.$$

Задача 3. *Доказать, что если правильный тетраэдр повернуть на 90° вокруг прямой, соединяющей середины любых двух его скрещивающихся ребер, и затем получившийся тетраэдр повернуть на 90° вокруг прямой, соединяющей середины двух любых его скрещивающихся ребер, то последний тетраэдр совпадает с исходным.*

Если через каждое ребро правильного тетраэдра провести плоскость, параллельную противоположному ребру, то эти плоскости ограничат куб (рис. 4). Соединяя отрезками «через одну» вершины куба, мы снова получим тетраэдр — исходный (на рисунке красный) или еще один (синий). Нетрудно убедиться, что при поворотах, описанных в задаче, красный тетраэдр переходит в синий, а синий — в красный. Поэтому после двух поворотов тетраэдр перейдет в себя.

Упражнения

1. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a повернута вокруг высоты на угол 60°. Определить объем общей части исходной и повернутой пирамид, если боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

2. Два куба с ребром a получаются один из другого поворотом на 60° вокруг общей диагонали. Найти объем их общей части.

3. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общую высоту, а вершина каждого из них лежит в центре основания другого. Основание второго тетраэдра повернуто на 60° по отношению к основанию первого. Найти объем их общей части.

4. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер, но один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найти объем их общей части.

Статья подготовлена математическим кружком 71 школы
им. Н. Островского
(г. Киев, староста С. Ефименко)

задачник Кванта

Задачи

М471—М475; Ф483—Ф487

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 января 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М471, М472» или «Ф483». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

М471. Две пересекающиеся окружности вырезают из плоскости три ограниченные непересекающиеся области. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих трех областей.

С. Фомин

М472. Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую из граней совпадает с этой гранью. Докажите, что объем многогранника не меньше 1/3 объема куба.

В. Прасолов

М473. Имеется две группы по n гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания их масс. Покажите, что

а) $2n-1$ взвешиваниями можно расположить и все $2n$ гирь в порядке возрастания их масс;

б) * меньшим $2n-1$ числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя.

(За одно взвешивание сравниваются массы двух гирь; массы всех $2n$ гирь попарно различны.)

В. Гринберг

М474. Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей (кроме самого себя); таковы, например, числа $6=1+2+3$ и $28=1+2+4+7+14$. Докажите, что число N несовершенно, если известно, что оно

а) при делении на 4 дает остаток 3;

б) при делении на 6 дает остаток 5.

(До сих пор вообще неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.)

К. Сатаркулов, С. Югай

М475. а) Докажите, что правильный треугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины попали точно в узлы (в вершины клеток).

б) * Докажите, что на клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, можно при любом $\varepsilon>0$ нарисовать правильный треугольник, вершины которого находились бы на расстояниях меньше ε от трех различных узлов.

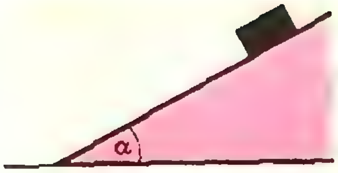


Рис. 1.

в) * Верно ли, что для любого многоугольника M и любого $\varepsilon > 0$ можно нарисовать на клетчатой бумаге подобный M многоугольник, все вершины которого находились бы на расстояниях меньше ε от различных узлов?

В. Калинников

Ф483. С каким горизонтальным ускорением должен двигаться клин с углом α (рис. 1), чтобы лежащий на нем груз поднимался вверх, если коэффициент трения между грузом и клином равен μ?

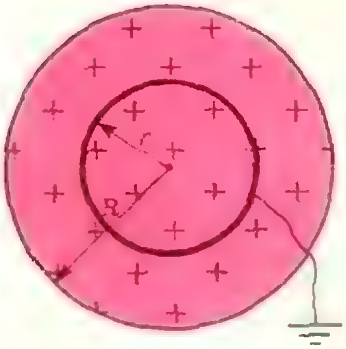


Рис. 2.

Ф484. Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ, находится заземленная металлическая сфера радиуса r (рис. 2). Найдите зависимость потенциала этой системы от расстояния до центра сферы.

Ф485. Чему равен период малых колебаний четырех одинаково заряженных тел, связанных одинаковыми нитями длины l так, как показано на рисунке 3? На рисунке стрелками указаны направления движения тел при колебаниях в один и тот же момент времени. Масса и заряд каждого тела равны соответственно m и q.

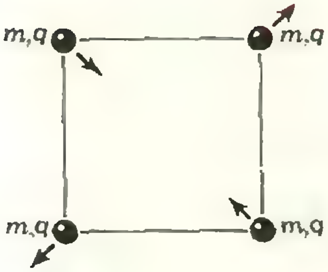


Рис. 3.

Ф486. На рисунке 4 изображена схема масс-спектрометра. В ионизаторе A образуются ионы, которые ускоряются напряжением $U = 10$ кВ и входят через щель C в магнитное поле с индукцией $|\vec{B}| = 0{,}1$ Т. После поворота ионы попадают на фотографическую пластинку D и вызывают ее почернение. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на фотопластинке полосы, ионов H^+, $^2H^+$, $^3H^+$, He^+? Какова должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов ^{16}O и ^{15}N разделились?

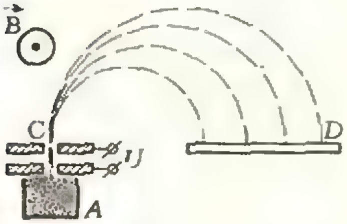


Рис. 4.

Ф487. Жука фотографируют в двух масштабах: с расстояния $l_1 = 3F$, где F — фокусное расстояние объектива, и с расстояния $l_2 = 5F$. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одной и той же? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше F.

Решения задач

М431—М433; Ф442—Ф444

М431. *В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки A в точку B расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели связисту достаточно иметь кусок провода длиной $1{,}6\,l$.*

Соединим точки A и B прямой. На участках, где нет деревьев, проведем провод по этой прямой. Там же, где прямая AB пересекает контур ствола, пустим провод по меньшей из двух дуг окружности, ограничивающей сечение ствола плоскостью, перпендикулярной к стволу (см. рис. 1). Покажем, что в этом случае длина провода не превосходит $\frac{\pi l}{2}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — длины прямолинейных участков провода, и $b_1, \ldots, b_k$ — длины участков прямой AB, находящихся внутри стволов. Поскольку каждое b_i ($i = 1, \ldots, k$) не превосходит диаметра соответствующей окружности, суммарная длина криволинейных участков провода не превосходит $\frac{\pi b_1}{2} + \ldots + \frac{\pi b_k}{2}$, а общая длина провода не превосходит

$$a_1 + \ldots + a_n + \frac{\pi b_1}{2} + \ldots + \frac{\pi b_k}{2} <$$

$$< \frac{\pi}{2}(a_1 + \ldots + a_n + b_1 + \ldots + b_k) = \frac{\pi l}{2} < 1{,}6\,l.$$

Величину $\frac{\pi l}{2}$ *нельзя заменить* в этом неравенстве меньшей, так как легко указать пример, когда потребуется провод длины ровно $\frac{\pi l}{2}$: в лесу растет единственное дерево диаметра l, а точки A и B — диаметрально противоположные точки окружности его ствола.

А. Альтшулер

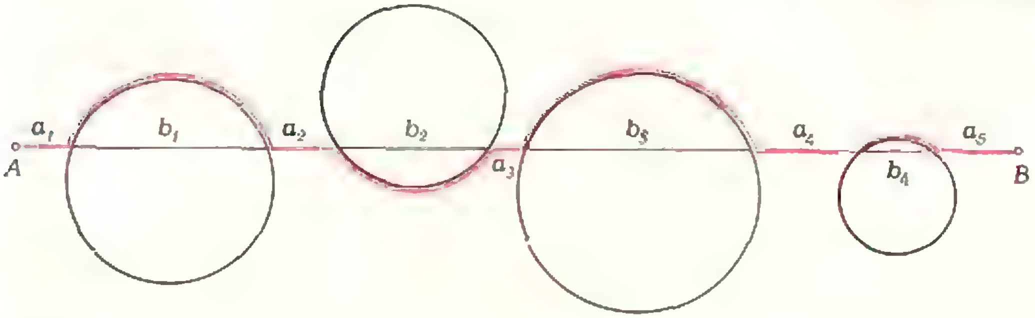


Рис. 1.

◆

М432. *Существует ли полный квадрат, сумма цифр которого равна*
а) 1977;
б) 1978?
в) Выясните, какие натуральные числа могут быть суммами цифр квадрата целого числа.

Решим сразу пункт в) задачи. Прежде всего заметим, что сумма цифр квадрата не может быть произвольной. Действительно, квадрат числа либо делится на 9, либо дает при делении на 9 остатки 1, 4, 7. По признаку деления на 9 то же верно и для суммы цифр квадрата, так что у квадрата сумма цифр может быть либо числом вида $9k$, либо $9k+1$, либо $9k+4$, либо $9k+7$. Покажем, что все такие числа действительно могут быть суммами.

В самом деле, число $9k$ — сумма цифр квадрата числа 10^k-1:

$$(10^k - 1)^2 = (10^k - 2)\,10^k + 1 = \underbrace{99\ldots98}_{k}\,\underbrace{00\ldots01}_{k};$$

число $9k+1$ $(k\neq 0)$ — сумма цифр квадрата числа 10^k-2:

$$(10^k-2)^2=(10^k-4)\,10^k+4=\underbrace{99\ldots96}_{k}\ \underbrace{00\ldots04}_{k}$$

(случай $k=0$ очевиден: $1=1^2$); число $9k+4$ $(k\neq 0)$ — сумма цифр квадрата числа 10^k-3:

$$(10^k-3)^2=(10^k-6)\,10^k+9=\underbrace{99\ldots94}_{k}\ \underbrace{00\ldots09}_{k}$$

(при $k=0$ получаем число 4, а $4=2^2$). Число $9k+7$ — сумма цифр квадрата числа $10^{k+1}-5$:

$$(10^{k+1}-5)^2=(10^{k+1}-10)\,10^{k+1}+25=\underbrace{99\ldots90}_{k+1}\ \underbrace{00\ldots025}_{k+1}.$$

Таким образом, число 1978 может быть суммой цифр квадрата, а 1977 — нет.

Л. Лиманов

◆

М433. *В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона BC параллельна диагонали AD, сторона CD — диагонали BE, сторона DE — диагонали AC и сторона AE — диагонали BD (рис. 2). Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE.*

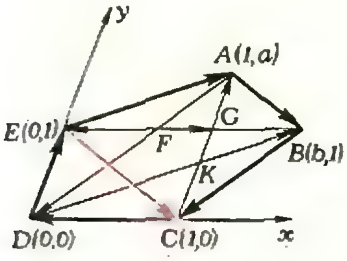


Рис. 2.

Пусть $F=[AD]\cap[BE]$, $G=[AC]\cap[BE]$ и $K=[BD]\cap[AC]$ (см. рис. 2).

Из подобия треугольников AEF и BCD следует, что $\frac{|AF|}{|EF|}=\frac{|BC|}{|CD|}$. Следовательно, $\frac{|AF|+|BC|}{|EF|+|CD|}=\frac{|BC|}{|CD|}$ и $\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{|BC|}{|CD|}$, поскольку $|BC|=|DF|$, $|BF|=|CD|$, то есть

$$\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{|CD|}{|BE|}. \qquad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников BKC и AED получаем, что

$$\frac{|AE|}{|BD|}=\frac{|DE|}{|AC|}. \qquad (2)$$

Наконец, из подобия треугольников BKG и AGE $\frac{|BG|}{|BK|}=\frac{|CD|}{|AE|}$, откуда $\frac{|BE|}{|BD|}=\frac{|CD|}{|AE|}$, или

$$\frac{|CD|}{|BE|}=\frac{|AE|}{|BD|}. \qquad (3)$$

Из соотношений (1) — (3) следует, что

$$\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{|CD|}{|BE|}=\frac{|AE|}{|BD|}=\frac{|DE|}{|AC|}=\lambda. \qquad (4)$$

Далее:

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0},$$
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0},$$

и $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{EA}=\lambda\overrightarrow{DB}$. Поэтому

$$\overrightarrow{0}=\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{AB}=-\lambda\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AB},$$

откуда $\overrightarrow{AB}=\lambda\,\overrightarrow{EC}$, что и означает параллельность стороны AB диагонали EC.

Более короткое решение получается с помощью косоугольной системы координат. Пусть точки D, C и E имеют координаты $D\ (0;\ 0)$, $C\ (1;\ 0)$, $E\ (0;\ 1)$ (рис. 2). Тогда A и B имеют координаты $(1;\ a)$ и $(b;\ 1)$, так как $(CD)\parallel(BE)$, $(DE)\parallel(AC)$.

Условия параллельности $(AE) \parallel (BD)$ и $(BC) \parallel (AD)$ записываются так:

$$\frac{a-1}{1-0} = \frac{1-0}{b-0} \text{ и } \frac{1-0}{b-1} = \frac{a-0}{1-0},$$

то есть $b(a-1) = 1$, $a(b-1) = 1$, откуда $a = b$ и $\frac{a-1}{1-b} = \frac{1-0}{0-1}$,

то есть $(AB) \parallel (EC)$.

Заметим, что пятиугольник $ABCDE$, о котором идет речь в этой задаче, можно аффинным преобразованием (или просто перекосом) превратить в правильный.

И. Клумова, Э. Туркевич

◆

Ф442. *Шарики с массами 1, 2, 3 и 4 кг соединены легкими стержнями длиной 1 м каждый. Стержни скреплены, так что они образуют крест (рис. 3). Система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка. Найти амплитуду колебаний системы, если в начальный момент стержень, соединяющий грузы с массами $m_2=2$ кг и $m_4=4$ кг, был вертикален и шары были неподвижны.*

Прежде всего найдем положение равновесия системы. В состоянии равновесия алгебраическая сумма моментов всех действующих на систему сил относительно оси вращения равна нулю (рис. 4):

$$m_1|\vec{g}|l\cos\alpha + m_4|\vec{g}|l\sin\alpha - m_3|\vec{g}|l\cos\alpha - m_2|\vec{g}|l\sin\alpha = 0,$$

где l — длина стержней, α — угол, образуемый стержнем AO с вертикалью. Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_3 - m_1}{m_4 - m_2} = 1, \text{ и } \alpha = 45^\circ.$$

Это означает, что центр тяжести системы лежит на биссектрисе угла, образуемого стержнями AO и OB. Тогда из закона сохранения энергии непосредственно следует, что угловая амплитуда колебаний системы составляет угол 45°.

И. Слободецкий

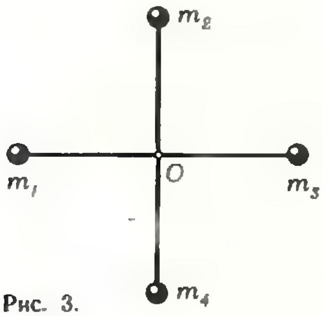


Рис. 3.

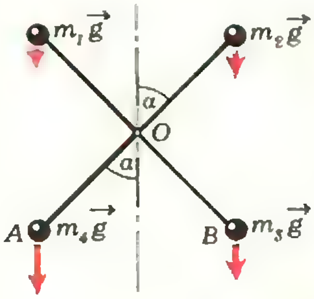


Рис. 4.

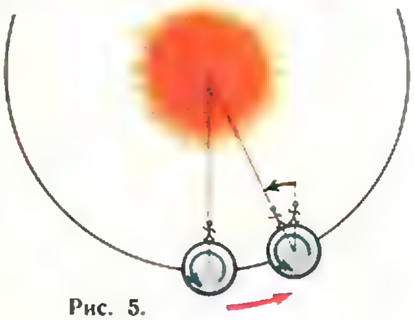


Рис. 5.

◆

Ф443. *Как известно, земной шар делает полный оборот вокруг своей оси за 23 часа 56 минут 4 секунды. Следовательно, за сутки все часы, циферблат которых разделен на 24 часа, должны отставать почти на 4 минуты. Это составляет почти полчаса в неделю. Почему же мы не замечаем этого отставания и не подводим все часы непрерывно?*

Земной шар совершает полный оборот вокруг своей оси за время $T=23$ ч 56 мин 4 с. Поэтому неподвижному наблюдателю на Земле кажется, что звезды на небосводе за время T совершают полный оборот вокруг некоторой точки небесной сферы и оказываются на прежних местах.

Однако ближайшая к Земле звезда — Солнце — снова пересекает плоскость, проходящую через меридиан наблюдателя, почти на 4 мин позже, а именно через 24 ч. Иными словами, хотя земной шар совершает полный оборот вокруг своей оси за 23 ч 56 мин 4 с, Солнце «обходит» Землю за 24 ч (и именно на 24 ч, в связи с этим, разделен циферблат всех земных часов).

Это происходит потому, что за время полного оборота вокруг собственной оси Земля в своем орбитальном движении вокруг Солнца успевает продвинуться приблизительно на 1/365 часть длины орбиты (рис. 5). Направление вращения Земли вокруг Солнца совпадает с направлением ее вращения вокруг собственной оси. Поэтому чтобы земной наблюдатель увидел Солнце, грубо говоря, на прежнем месте (и отметил, например, наступление полудня по своим часам), земной шар должен дополнительно совершить 1/365 часть оборота, что и занимает почти 4 минуты.

Б. Буховцев

Ф444. *Тяжелый ящик массы M скатывается по роликам, образующим наклонную плоскость (рис. 6). Расстояние между роликами l, их радиусы r и массы m. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Найти скорость движения ящика, если известно, что она постоянна. Считать, что ролики полые и толщина их стенок $d \ll r$.*

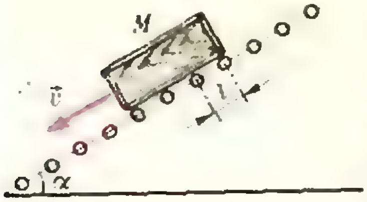


Рис. 6.

При движении ящика вниз по наклонной плоскости находящиеся под ним ролики приходят в движение — начинают раскручиваться. Тот факт, что ящик движется с постоянной скоростью, означает, что на него со стороны роликов действует сила сопротивления $\vec F = -M\vec g \sin\alpha$.

Предположим, что ящик движется со скоростью $\vec v$ и его длина достаточно велика, так что он успевает раскрутить ролики до линейной скорости $u = |\vec v|$. Ролик раскручивается благодаря силе трения $\vec f$, действующей на него со стороны ящика до тех пор, пока его линейная скорость не станет равной $|\vec v|$. После этого трение между этим роликом и ящиком исчезает.

Из соображений симметрии ясно, что действие силы трения на ролик равноценно действию такой же по абсолютному значению силы $|\vec f|$, приложенной к ролику в любой его точке по касательной к ободу ролика и «вращающейся» вместе с роликом. Так как действующая на ролик сила трения постоянна по абсолютному значению, линейная скорость вращения ролика под действием силы $|\vec f|$ изменяется со временем по линейному закону. Пусть ролик раскручивается за время τ до линейной скорости $u = |\vec v|$. Сила $\vec f$ совершает при этом работу $|\vec f||\vec v|\tau/2$ (средняя скорость ролика равна $|\vec v|/2$, путь, проходимый точкой приложения силы, равен $|\vec v|\tau/2$). Эта работа равна кинетической энергии ролика:

$$\frac{|\vec f||\vec v|\tau}{2} = \frac{m|\vec v|^2}{2}. \tag{1}$$

Поскольку ролик раскручивается до линейной скорости $|\vec v|$ за время τ, под ящиком все время находятся $N = |\vec v|\tau/l$ роликов, линейная скорость которых меньше $|\vec v|$. Сила трения, с которой эти ролики действуют на ящик, равна

$$|\vec F| = N|\vec f| = \frac{|\vec v|\tau}{l}|\vec f| = M|\vec g|\sin\alpha. \tag{2}$$

Из (1) имеем: $|\vec v|\tau|\vec f| = m|\vec v|^2$. Подставив это выражение в (2), получим:

$$\frac{m|\vec v|^2}{l} = M|\vec g|\sin\alpha.$$

Отсюда

$$|\vec v| = \sqrt{\frac{M}{m}|\vec g|\,l\sin\alpha}$$

Т. Петрова

Как решить кубическое уравнение?

Многие из нас читали о драматической истории, связанной с решением кубических уравнений (см. «Квант», 1976, № 9). Современная алгебраическая символика позволяет теперь справиться с этой задачей даже школьнику, а в XVI веке это было не по силам даже ведущим математикам. Вот какой изящный способ предлагает наш читатель В. Кривошеев (г. Черкассы).

Известно, что любое кубическое уравнение может быть приведено к виду

$$y^3 + by + c = 0.$$

Случайно я обнаружил следующие подстановки для его решения.

а) Пусть $b > 0$. Положим

$$y = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

получится (легко проверить) уравнение

$$\frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + c = 0.$$

Далее положим $z^3 = t$, после приведения к общему знаменателю получится квадратное относительно t уравнение.

б) Пусть $b < 0$. Положим

$$y = \sqrt{\frac{|b|}{3}}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

и далее аналогично п. а).

А.Савин

ЧТО ЗНАЧИТ „БОЛЬШЕ“?

Про любые два числа мы всегда можем сказать, какое из них больше; для этого достаточно сравнить их десятичные записи. Не вызывает кривотолков и вопрос «Какой из двух отрезков больше?» Очевидно, тот, у которого больше длина. Сравнить длины отрезков мы можем и не вычисляя их, а просто переместив их так, чтобы они оказались на одном и том же луче, и один из концов каждого отрезка совпал с началом луча. Так и в споре двух ребят — «Кто выше» — дело, как правило кончается тем, что они становятся спиной друг к другу и кто-то с помощью ладони разрешает этот спор.

А вот как понять такое утверждение: «Ребята в нашем классе выше чем в вашем!»? Можно его понимать так:

«Самый высокий ученик нашего класса выше, чем самый высокий ученик вашего класса», или — «Самый низкий ученик нашего класса выше самого низкого ученика вашего класса» или — «Любой ученик нашего класса выше любого ученика вашего класса». Можно предложить еще несколько способов сравнения, но очень трудно какому-либо из них отдать предпочтение.

Как мы увидим, подобная ситуация возникает при попытке решить задачу № 137 из учебника геометрии для 10 класса. Напомним ее формулировку.

137. В правильной шестиугольной пирамиде большее диагональное сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c. Найдите объем пирамиды.

Чтобы понять условие задачи, следует вспомнить, что такое диагональное сечение. В условии задачи № 89 было дано определение:

«Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется диагональным сечением».

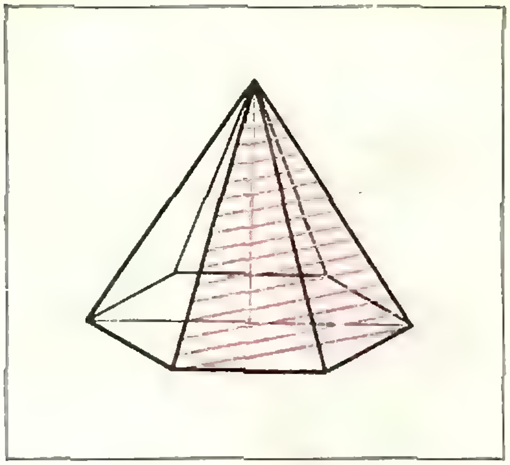
К сожалению, в учебнике не оказалось определения сечения пирамиды (и вообще тела) плоскостью, но из того, как это слово употреблялось, можно сделать вывод, что

«Сечение тела плоскостью — это геометрическая фигура, состоящая из всех точек, одновременно принадлежащих и телу и плоскости» (пересечение тела и плоскости).

Осталось понять, что значит «большее». Поскольку диагональными сечениями пирамиды, очевидно, являются треугольники, то осталось выяснить, что значит, что один треугольник больше, чем другой.

Вариантов ответа можно предложить очень много. Например, «Тот, у которого больше периметр», или «Тот, у которого больше площадь», или «Тот, у которого больше радиус вписанной окружности», или «Тот, у которого больше радиус описанной окружности», или «Тот, у которого больше бóльшая сторона»…

Нужно заметить, что в реальных ситуациях «величину» треугольника может характеризовать каждое из перечисленных выше чисел, связан-



ных с треугольником. Однако чаще всего в качестве числа, характеризующего величину плоской фигуры, берут площадь этой фигуры (а для пространственных фигур — их объем). Две плоские фигуры, имеющие одинаковые площади, принято называть *равновеликими*.

По-видимому, в задаче 137 имеется в виду, что «бо́льшее диагональное сечение» — это диагональное сечение, проходящее через большу́ю диагональ.

В этом случае решение задачи не сложно. Высота пирамиды совпадает с высотой треугольника, равной $\frac{c}{2}$, а длина стороны шестиугольника также равна $\frac{c}{2}$. Отсюда площадь основания пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2$, а объем $\frac{c^3\sqrt{3}}{16}$. Именно этот ответ и приведен в учебнике.

Ну, а если понимать под величиной треугольника его площадь? И в этом случае задача также не слишком сложно решается. Во-первых, заметим, что диагональные сечения правильной пирамиды являются треугольниками с двумя конгруэнтными сторонами, являющимися боковыми ребрами пирамиды. Если обозначить длину бокового ребра через l, то площадь рассматриваемого треугольника равна $\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$, где α — угол между указанными сторонами, и то из сечений больше, у которого больше синус этого угла.

Во-вторых, заметим, что если указанный угол — прямой, то из сказанного выше следует, что такое сечение и является наибольшим.

Случай, в котором наибольшее сечение проходит через большую диагональ, уже разобран. Осталось рассмотреть случай, когда оно проходит через другую диагональ. В этом случае длина этой диагонали равна c, длина большой диагонали $\frac{2c\sqrt{3}}{3}$, а стороны шестиугольника $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Длина бокового ребра равна $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, а высота пирамиды $h = \sqrt{\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{3}} = c\sqrt{\frac{1}{6}}$. Окончательно получаем, что площадь основания равна $\frac{c^2\sqrt{3}}{2}$, а объем пирамиды $\frac{c^3\sqrt{2}}{12}$.

В чем цель этой заметки? Конечно же, не в том, чтобы указать на неудачную задачу в учебнике, а в том, чтобы еще раз дать вам возможность убедиться, что математика — это наука, в которой все понятия и отношения между ними должны быть строго определены (конечно, за исключением основных, не определяемых понятий, таких, как точка, плоскость, прямая).

Хочется еще отметить и тот факт, что *один и тот же* термин может в разных книгах выступать в разных ролях. Естественно, что в соответствующей книге или статье дается строгое определение этому термину.

И в заключение — задача.

Про прямой круговой конус известно, что максимальная площадь сечения его плоскостью, проходящей через вершину, в два раза больше площади осевого сечения. Найти угол осевого сечения.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. а) На очередном занятии математического кружка, посвященном проблеме четырех красок, шесть участников кружка решили поэкспериментировать — чертить разные карты и пытаться их раскрашивать в четыре цвета так, чтобы соседние «страны» были раскрашены разными цветами. Для этого потребовались карандаши четырех разных цветов.

У учителя было много красных, синих, желтых и зеленых карандашей, но он не хотел, чтобы каждый школьник раскрашивал карты в одиночку. Он решил так раздать ребятам карандаши, чтобы никакие два школьника (из шести!) не имели карандашей всех четырех цветов, но любые три — имели.

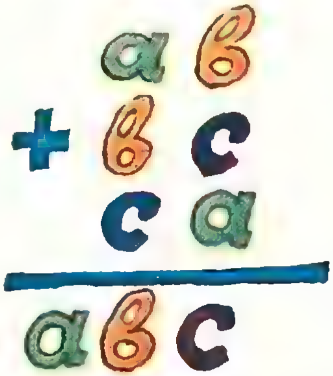
Сумеет ли он это сделать?

б)* Попробуйте выяснить, при каких n можно так раздать шести ребятам карандаши n цветов, чтобы каждые трое имели (вместе) карандаши всех n цветов, а никакие двое — не имели.

2. Какими цифрами нужно заменить буквы, чтобы равенство

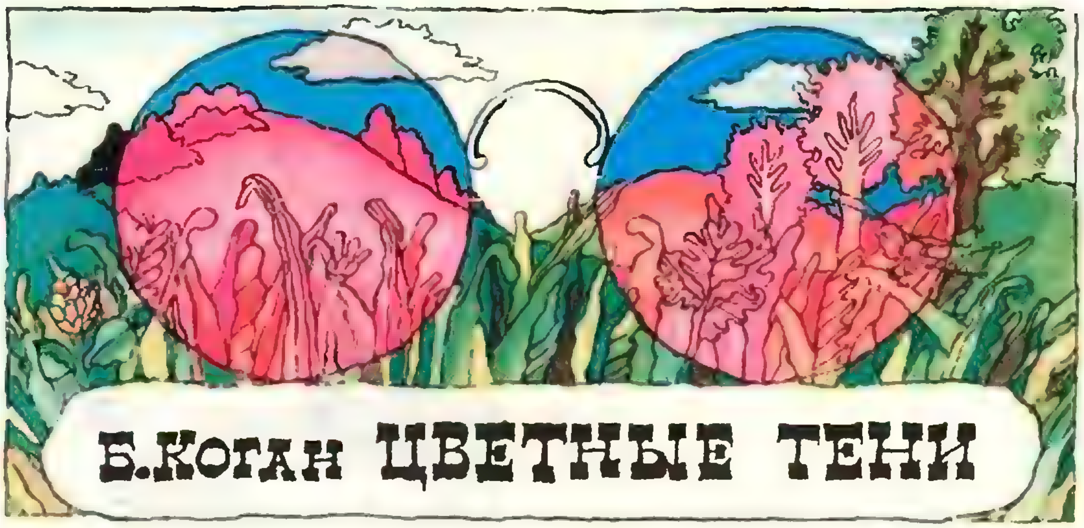
$$\begin{array}{r} ab\\ +\,bc\\ ca\\ \hline abc \end{array}$$

выполнялось?



3. Мне сейчас в 4 раза больше лет, чем было моей сестре, когда она была моложе меня в два раза. Сколько лет сейчас каждому из нас, если через 15 лет нам вместе будет 100 лет?

4. Найдите все целые числа m, n, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{m+\sqrt{m}}=n$.



Б. КОГАН

ЦВЕТНЫЕ ТЕНИ

В этой заметке рассказывается о двух простых опытах, в которых наблюдается интересное изменение цвета. Эти опыты вы, конечно, сможете проделать сами. Для их проведения требуется очень немного — лишь несколько цветных источников света. Например, красная лампочка (ее можно купить в магазине фототоваров) и синяя (такие лампочки продаются в магазинах электротоваров наряду с обычными).

Зеленая тень

В комнате, освещенной обычным белым светом, зажгите настольную лампу, предварительно ввернув в ее патрон красную лампочку. Положите на стол лист белой бумаги и поместите между ним и лампой какой-нибудь небольшой предмет, например, карандаш. На листе бумаги появится его тень, но она будет совершенно неожиданной по цвету — не черной и не серой, а ... *зеленой*.

Этот эффект, видимо, связан не только и не столько с физикой, сколько с физиологией и психологией. Тень от предмета кажется нам зеленой вследствие контраста с окружающим фоном, который, будучи на самом деле красноватым, ощущается нами как белый, ибо мы знаем, что бумага белая. Видимо, отсутствие красного цвета на участке, занятом тенью, наше сознание воспринимает как наличие зеленого цвета на этом участке. Но почему именно зеленого?

Дело в том, что красный и зеленый цвета являются *дополнительными*. Так называют цвета, дополняющие друг друга до белого. А что это означает? Еще в XVII веке Ньютон обнаружил, что белый солнечный свет является сложным, представляет собой совокупность простых цветов — фиолетового, синего, голубого, зеленого, желтого, оранжевого и красного. В этом можно убедиться, например, с помощью стеклянной призмы. Если солнечный свет пропустить через узкую щель и направить на призму, то получится *разноцветное изображение* этой щели. Ньютон проводил и другие опыты — «собирал» вместе все цвета (например, с помощью линзы) и в результате вновь получал белый цвет (рис. 1). При этом оказывается, что, если «задержать» какой-нибудь цвет, скажем, зеленый, то изображение щели становится цветным, и притом красным (рис. 2). Или, если «задержать» желтый цвет, изображение щели получится синим и т. д. Именно в этом смысле зеленый и красный, желтый и синий и т. п. цвета называются дополнительными (рис. 3).

Этот интересный опыт можно проводить и с лампочками других цветов. Так, если лампочка будет зеленой, то тень станет красной. Если лампочка будет синей, то тень получится желтой, а если лампочка будет желтой, тень окажется синей. Вообще цвет тени всегда получается дополнительным к цвету лампочки.

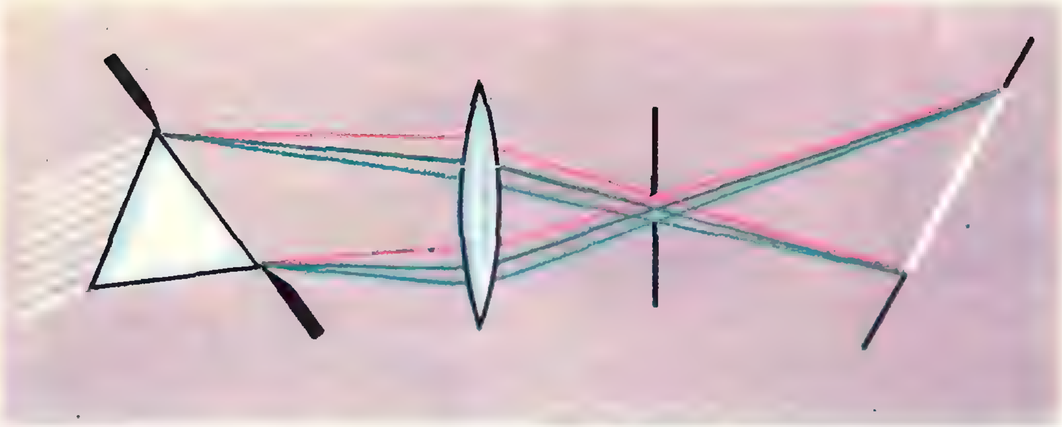


Рис. 1.

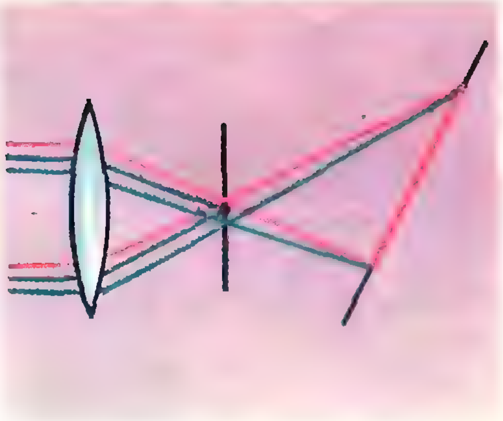


Рис. 2.

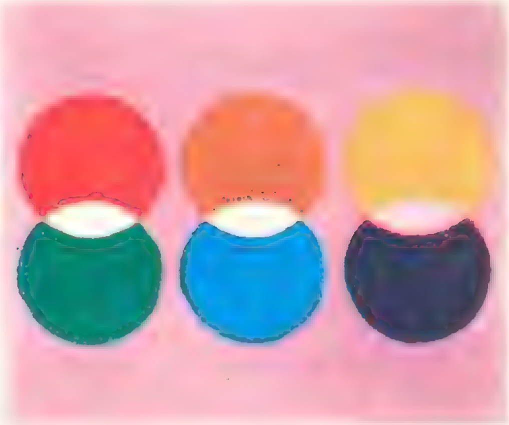


Рис. 3.

Описанное явление можно часто наблюдать зимой вблизи газосветных городских вывесок. Когда на земле лежит снег, на нем ясно видны тени, цвет которых дополнителен к цвету светящейся вывески.

Красные листья

Погасите в комнате свет и зажгите лампу, предварительно поменяв в ней обычную лампочку на синюю. Посмотрите при свете этой лампочки на листья растений: зеленые листья, освещенные синим светом, кажутся не зелеными и не синими, а ... *красными*. В чем же дело? Оказывается, стекло синей лампочки пропускает не только синий, но частично и красный свет. Вместе с тем, листья растений отражают не только зеленый свет, но отчасти и красный, поглощая другие цвета. Поэтому когда на листья падает свет от синей лампочки, они отражают *только красный свет* и, следовательно, кажутся нам красными.

Описанный эффект можно получить и иначе: посмотрите на листья растений через синие очки или через синий светофильтр. Рассказывая об опыте с такими очками, известный советский ученый К. А. Тимирязев писал: «Стоит их только надеть, и весь мир представляется в «розовом свете». Под ясным синим небом развертывается фантастический ландшафт с караллово-красными лугами и лесами...».

XI Всесоюзная олимпиада школьников

И. Клумова, М. Смолянский

Олимпиада по математике

В этом году XI Всесоюзная олимпиада школьников была посвящена 60-летию Великого Октября.

Заключительный тур по математике XI Всесоюзной олимпиады проходил в столице Эстонии — городе Таллине.

В Таллин приехали 153 школьника — победители республиканских олимпиад и ребята, занявшие I и II места на предыдущей олимпиаде. Впервые на олимпиаде была представлена команда (3 человека) учеников профессионально-технических училищ, победителей олимпиады ПТУ г. Ленинграда. Хозяева заключительного тура олимпиады — таллинцы — также выставили свою команду из 3-х человек.

В соревнованиях приняли участие 42 восьмиклассника, 56 девятиклассников и 55 десятиклассников.

Открытие заключительного этапа XI Всесоюзной олимпиады состоялось 14 апреля в актовом зале Таллинского политехнического института. Председатель Оргкомитета академик АН Эстонской ССР А. К. Хумал поздравил участников олимпиады с началом состязаний, пожелал им успехов и зачитал приветствие и поздравление министра просвещения СССР Прокофьева М. А.

Почти полгода жюри придирчиво отбирало задачи для олимпиады из большого списка задач-«кандидатов», представленных математиками из разных городов. Чтобы читатели смогли оценить эти задачи, мы полностью приводим их условия. Большинство из них уже было опубликовано в «Задачнике «Кванта» (см. №№7—9)*).

Как обычно, заключительный этап олимпиады проводился в два тура.

К решению задач первого тура школьники приступили 15 апреля. На решение задач каждому классу отводилось по 5 часов.

Ниже мы приводим список задач первого тура.

8 класс

1. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно. (M457)

2. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю. (M451)

3. Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки A, K, L и центр O вписанной окружности треугольника ABC — вершины ромба.

4. По окружности расположено несколько черных и белых фишек. Двое по очереди проделывают такую операцию: первый убирает все черные фишки, имеющие белого соседа (хотя бы с одной стороны), а второй

---

*) В скобках после условия мы приводим номер, под которым соответствующая задача помещена в «Задачнике».

после этого убирает все белые фишки, имеющие черного соседа. Так они делают до тех пор, пока не останутся все фишки одного цвета.

а) Пусть вначале было 40 фишек. Может ли случиться, что после того, как каждый сделает два хода, на окружности останется одна фишка?

б) На окружности сначала было 1000 фишек. Через какое наименьшее число ходов на окружности может остаться одна фишка?

9 класс

1. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке. (М452)

2. Дана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. См. задачу № 1 из 8-го класса.

4. В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту. (М459)

10 класс

1, 2. См. задачи № 1 и № 2 из девятого класса.

3. В каждой вершине выпуклого многогранника M сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу. (М456)

4. Написан многочлен $x^{10}+*x^9+*x^8+\ldots+*x^2+*x+1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает пер-

			Номера задач											
			1	2	3	4		5	6		7	8		
						а	б		а	б		а	б	в
8 класс (43 чел.)	число решивших	+	12	4	18	17	4	4	27	4	0	5	7	0
		±	4	0	0	3	10	5	7	1	0	1	0	2
		∓	2	1	8	3	6	6	5	0	1	0	2	0

			1	2	3	4	5	6	7	8
9 класс (56 чел.)	число решивших	+	14	18	19	0	16	3	4	3
		±	8	3	3	0	2	0	0	1
		∓	1	0	2	0	4	0	9	0

			1	2	3	4	5	6					7				8				
								а	б	в	г	д	а	б	в	г	а	б	в	г	д
10 класс (I тур— 54 чел II тур— 55 чел.)	число решивших	+	7	12	22	3	10	14	8	5	3	0	18	2	0	0	15	17	10	12	0
		±	9	5	10	0	2	4	3	1	0	0	8	0	0	0	0	2	2	0	1
		∓	3	5	2	10	10	10	5	3	2	2	1	7	0	0	11	5	5	2	9

вый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого? (М458)

5. См. задачу № 1 из 8-го класса.

Самой трудной для школьников восьмого класса оказалась задача № 2. После проверки работ выяснилось, что ее решили только четыре человека. Трудности вызвала и задача № 4, особенно пункт б).

У десятиклассников самой трудной оказалась задача № 4 — ее решили всего лишь три человека.

А девятиклассники решали свои задачи примерно одинаково. Как именно школьники справились с задачами, видно из приведенной таблицы. В ней для каждого класса показано, сколько человек решили ту или иную задачу полностью (оценка «+»), сколько — «почти» полностью, с небольшими недочетами (оценка «±»), сколько — в целом не решивших задачу, но высказавших существенные идеи по поводу ее решения (оценка «∓»). Вы, конечно, обратили внимание на то, что у десятых классов число участников в первом и во втором турах не одно и то же. Один из участников — С. Самигулин (из команды РСФСР) ехал в Таллин из Башкирии: он задержался из-за нелетной погоды и опоздал на первый тур. В Таллине пришлось специально для него срочно составить еще один вариант задач (утвержденные задачи I тура были уже известны). Во втором туре С. Самигулин решал уже одинаковые со всеми задачи: десятиклассников стало 55, как и должно было быть с самого начала.

16 апреля все школьники приняли участие в коммунистическом субботнике. А жюри олимпиады в это время проверяло работы.

Продолжение состязаний происходило 17 апреля. Школьники восьмых и девятых классов снова решали по 4 задачи, школьники десятых классов — три. Вот эти задачи.

8 класс

5. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того как последний, седьмой, гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке? (М454)

6. Будем называть $2n$-значное число *особым*, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Возможны ли шестизначные особые числа? (Докажите, что их нет, или приведите пример такого числа.)

7. Дано множество положительных чисел $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ..., n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2. (М453)

8. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

9 класс

5. Дан квадратный лист клетчатой бумаги 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что, кроме вершин квадрата, найдется узел (внутри или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

6. Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1+x_2+\ldots+x_m$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

7. На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.

8. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR\ldots$ Здесь буква L обозначает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б) Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний. (М461)

10 класс

6. Мы будем рассматривать многочлены от одного переменного со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q *коммутируют*, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (то есть после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x)=x^2-\alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены Q и R коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_k, \ldots$, где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x)=x^2-2$.

7. Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A *особым*, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число. (М460)

8. Марсианский алфавит состоит из 10 букв, и любое трехбуквенное слово образует марсианскую фамилию (то есть на Марсе ровно 1000 различных фамилий). По марсианским законам имя марсианина должно состоять из двух букв и получаться из его фамилии вычеркиванием одной буквы.

а) Докажите, что можно составить список из 50 имен так, чтобы марсианин с любой фамилией мог выбрать себе одно из этих имен.

б) Докажите, что нельзя составить такой список менее чем из 40 имен.

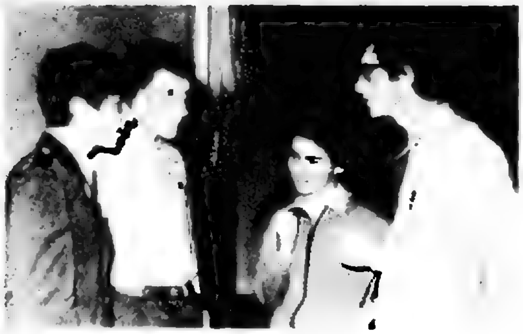
в) Докажите, что нельзя составить такой список менее чем из 50 имен.

г) В прошлом веке марсиане носили четырехбуквенные фамилии, и двубуквенное имя получалось из фамилии вычеркиванием любых двух букв. Докажите, что в прошлом веке можно было обойтись списком из 34 имен.

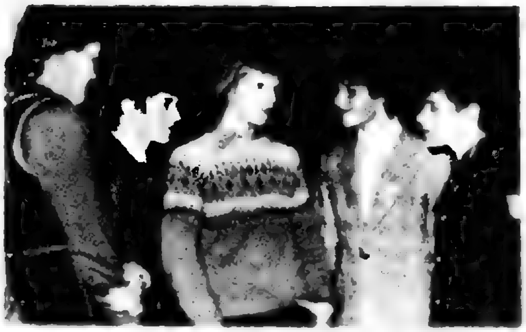
д) Найдите минимальный список имен (двубуквенных), который годился бы, если бы фамилии марсиан состояли из k букв. Попробуйте решить эту задачу для $k=4$, 5, 6 и так далее.

Пожалуй, второй день оказался для восьмиклассников более тяжелым (как, впрочем, и для других классов). А особенно сложной — последняя задача № 8 (конечно, если не принимать во внимание совсем уж «непосильную» задачу № 7, до которой школьники не дошли, потратив много времени на поиски ответов в других задачах). Последний пункт этой задачи решила всего одна участница — Гаянэ Шахбозян — ученица физико-математической школы № 45 при Ленинградском государственном университете, получившая в результате I премию. Лучшей же работой по итогам двух дней состязаний была признана работа ученика той же школы Ильи Захаревича. Вообще надо отметить, что ФМШ при ЛГУ добилась на олимпиаде прекрасных результатов: ее воспитанники получили 3 первых, 1 вторую и 2 третьих премии; эта школа была награждена специальным призом «За лучшие результаты».

Вторым днем в десятом классе был исследовательский тур (в прошлом году такой тур был в каждом классе). Десятиклассникам было предложено три сложных задачи, каждая из которых была разбита на несколько пунктов, расположенных в порядке возрастания трудности. Задача № 6 связана с алгеброй, № 8 — арифметическая, а задача № 7 — это развитие задачи № 6 для восьмого класса. Листки с условиями задач, розданные школьникам, начинались словами обращения жюри: «*Во второй день олимпиады мы предлагаем вам три трудные задачи. Рекомендуем выбрать одну из них и продвинуться в ее решении как можно дальше. Жюри будет значительно выше оценивать более глубокое исследование одной задачи, чем ответы на легкие вопросы в нескольких задачах*». К сожалению, значительного продвижения в каждой из



Восьмиклассники, награжденные дипломами I степени (слева направо): С. Хлебутин, А. Ляховец, Г. Шахбозян, И. Захаревич.



Девятиклассники, награжденные дипломами I степени (слева направо): Л. Лисничук, В. Бугаенко, В. Книжник, В. Гальперин, В. Нейман.

Десятиклассники, награжденные дипломами I степени (слева направо): Д. Флаасс, А. Чурбанов, Г. Рыбников, Л. Гандельсман.

предложенных задач ни у одного десятиклассника не оказалось. Так как исследовательский тур проводился в порядке эксперимента, жюри приняло решение считать основными результаты первого дня. Результаты второго дня могли их только улучшить.

В свободное от решения задач время ребята совершили несколько экскурсий по Таллину и его музеям (ведь Таллин — это город-музей средневековья, один из красивейших и интереснейших городов Советского Союза), побывали в лабораториях самого крупного в Таллине вуза — политехнического института, были в театре оперы и балета «Эстония», встречались с учеными, с таллинскими школьниками. 18-го и 19-го апреля для ребят было прочитано несколько интересных лекций: «Геометрия Лобачевского и небесная механика» (лектор — профессор МГУ В. А. Алексеев), «Как измеряют расстояния между кривыми» (лектор — доцент МГУ В. А. Скворцов), «Системы счисления» (лектор — профессор И. М. Яглом), «Теорема Абеля-Руффини» (лектор — кандидат физико-математических наук Д. Б. Фукс), «Теория групп и олимпиадные задачи» (лектор — кандидат физико-математических наук А. К. Толпыго). Председатель жюри по 8-му классу кандидат физико-математических наук Н. Н. Константинов провел со школьниками восьмых классов несколько занятий «Математического кружка». Была организована встреча жюри с учениками математических школ Таллина.

Пока мы все время говорили только о победителях (ведь все участники Всесоюзной олимпиады — это победители школьных, областных, и, наконец, республиканских олимпиад). А теперь мы обращаемся к любителям «царицы наук», не попавшим в число победителей. Не огорчайтесь! Неудача на олимпиаде — вовсе не показатель неспособности к математике. Многие математики не принадлежат к «спортивному» или «олимпиадному» типу. Они медленно решают трудные задачи и доказывают сложные теоремы. Важно быть усидчивым и трудолюбивым человеком, глубоко интересоваться наукой. Научиться математике можно лишь, постоянно решая задачи, обдумывая всевозможные обобщения, придумывая свои задачи и теоремы. В этом большую помощь может оказать вам «Квант».

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 19 апреля. Заместитель председателя жюри М. И. Башмаков зачитал решение жюри XI Всесоюзной математической олимпиады. Итак, по итогам двух дней состязаний было решено присудить 13 первых, 24 вторых, 24 третьих премии и отметить похвальными отзывами I степени 32 участника олимпиады и похвальными отзывами II степени — 36 участников. Имена победителей XI Всесоюзной олимпиады мы публикуем на с. 72.

Кроме того, различные организации и предприятия Эстонии учредили специальные призы (за лучший результат, за самое оригинальное решение, лучшему по республике, представителю самого отдаленного уголка Советского Союза и т. д.), которыми были награждены многие школьники. Специальный приз журнала «Квант» — подшивку журнала за 1976 год с автографом главного редактора академика И. К. Кикоина — получил школьник 8-го класса из г. Таллина Марк Левин (он участвовал в соревнованиях вне конкурса, и поэтому ему не было присуждено никакого официального места). Подпиской на журнал «Квант» на 1978 год были награждены также восьмиклассники: Ляховец Андрей (Краснодар), Хлебутин Сергей (Пермь), Бернотас Андрюс (Вильнюс), Власов Вячеслав (Киев), Ирматов Анвар (Наманган УзССР).

По итогам олимпиады была составлена команда для участия в XIX Международной олимпиаде школьников по математике. В состав команды вошли: А. Амбролавдзе (Тбилиси), А. Аузиньш (Рига), Я. Винницкин (Киев), В. Гальперин (Москва), А. Кодрян (Рыбница), Г. Рыбников (Москва), Д. Флаасс (Новосибирск) и А. Чурбанов (Москва). XIX Международная олимпиада проходила в Белграде (Югославия). Мы расскажем об этой олимпиаде в одном из следующих номеров журнала.

Л. Лиманов

Решение задач олимпиады

В этой статье разбираются три задачи заключительного тура XI Всесоюзной математической олимпиады, которые не вошли в «Задачник «Кванта». Решения задач, опубликованных в «Задачнике «Кванта», появятся в соответствующих номерах журнала в следующем году. (Условия задач см. на с. 58—61.)

8 класс. Задача 4.

Вместо того чтобы убирать фишки, будем ставить их, начав с одной черной фишки. Добавим к ней белые фишки так, чтобы у каждой из них был черный сосед (одну или две). Затем поставим несколько черных фишек так, чтобы у каждой из них был белый сосед и чтобы у «старой» черной фишки белых соседей не было Следующим ходом снова ставятся белые фишки с соблюдением этих двух условий и т. д.

Обозначим через b_i число черных фишек, выставленных после i ходов, а через w_i — число белых. Если на $i+1$-м ходу приставляются черные фишки (i четно), то $b_{i+1}=b_i+2w_i$, $w_{i+1}=w_i$. Если же — белые фишки (i нечетно), то $b_{i+1}=b_i$, $w_{i+1}=w_i+2b_i$; мы каждым ходом все фишки какого-нибудь одного цвета окружаем двумя фишками другого цвета. Ясно, что большего числа фишек приставить невозможно.

Условимся записывать положение фишек на окружности после i-го хода в виде вектора $\langle b_i; w_i \rangle$ и вычислим несколько первых векторов:

$$\langle 1;0\rangle\to\langle 1;2\rangle\to\langle 5;2\rangle\to\langle 5;12\rangle\to$$
$$\to\langle 29;12\rangle\to\langle 29;70\rangle\to\langle 169;70\rangle\to$$
$$\to\langle 169;408\rangle\to\langle 985;408\rangle.$$

Убедимся теперь, что в задаче а) ответ положительный, а в задаче б) наименьшее число ходов — восемь.

Действительно, после четвертого хода будет выставлено $29+12=41$ фишек. При переходе от $\langle 5; 12\rangle$ к $\langle 29, 12\rangle$ добавляются 24 фишки. Из них не больше $2\times 5=10$ отвечают за выполнение второго условия — отделяют старые черные фишки от белых. Назовем эти фишки *обязательными*. Пометим их

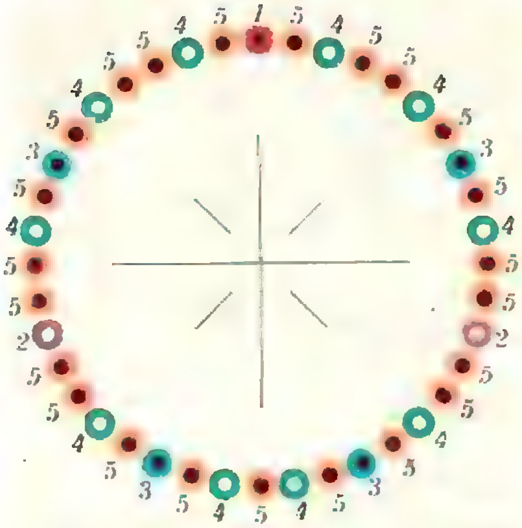


Рис. 1.

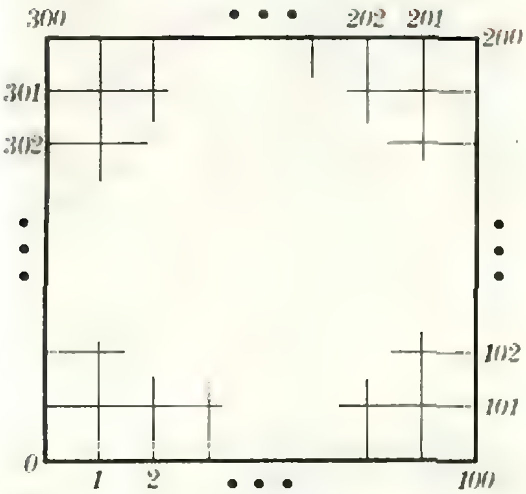


Рис. 2.

среди 24 добавленных и уберем любую не помеченную. Получим набор из 40 фишек, удовлетворяющий условиям задачи (на рисунке 1 показан один такой набор).

Аналогично следует действовать и в задаче 6). Семи ходов недостаточно, поскольку 169+408<1000. При переходе от ⟨169, 408⟩ к ⟨985, 408⟩ добавлено не больше 169×2=378 обязательных фишек, и не меньше 816—378=438 фишек можно убрать. Нам же нужно убрать 985+408—1000=393 фишки.

9 класс. Задача 2.

Чтобы решить эту задачу, нужно воспользоваться определением *предела последовательности*. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$, для любого положительного ε найдется такое m, что для всякого $n>m$

$$\frac{1}{2}a_n-\varepsilon<a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n+\varepsilon.$$

Докажем индукцией по i такое неравенство:

$$\frac{1}{2^i}a_n-2\varepsilon<a_{n+i}<\frac{1}{2^i}a_n+2\varepsilon,$$

где n — любое число, большее m. Действительно,

$$\frac{1}{2^{i+1}}a_n-2\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i}a_n-2\varepsilon\right)-$$

$$-\varepsilon<\frac{1}{2}a_{n+i}-\varepsilon<a_{n+i+1}<$$

$$<\frac{1}{2}a_{n+i}+\varepsilon<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i}a_n+2\varepsilon\right)+\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{2^{i+1}}a_n+2\varepsilon.$$

Но для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое i, что $\left|\frac{a_n}{2^i}\right|<\varepsilon$. Из этого следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ можно указать такое k, что для всех $l>k$ выполняется неравенство $-3\varepsilon<a_l<3\varepsilon$. По определению предела это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

9 класс. Задача 5.

Будем считать, что на границе квадрата свободных узлов нет. Докажем, что любая система ломаных, удовлетворяющих условиям задачи и этому условию, проходит через четное число узлов.

Занумеруем узлы на границе квадрата так, как это показано на рисунке 2. Легко сообразить, что ломаная, соединяющая точки с номерами i и j, проходит через $1+i-j+2l$ узлов, где значение l зависит от ломаной. Подсчитаем теперь удвоенное число узлов, через которое проходят наши ломаные. Поскольку из каждой точки границы квадрата, кроме вершин, выходит ломаная, это число равно $4\cdot 99+\Sigma i-\Sigma j+2\Sigma l\,(i,j)$, где $l(i,j)$ — значение l для ломаной с началом в точке i и концом в точке j. Легко заметить, что $\Sigma l(i,j)$ четна, поскольку каждое слагаемое встречается в ней дважды: $l(i,j)=l(j,i)$. Следовательно, наша система ломаных проходит через четное число узлов, а всего узлов, не лежащих на границе нашего листа, 99^2 — нечетное число. Таким образом, действительно останется непройденным хотя бы один узел.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный этап XI Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 14 по 19 апреля этого года в городе Фрунзе. Участниками этого этапа, как всегда, были победители республиканских олимпиад, зональных олимпиад, проходивших в РСФСР, олимпиад городов Москва и Ленинград и победители X Всесоюзной олимпиады, получившие Дипломы I и II степени. Всего во Фрунзе приехали 136 человек: 50 десятиклассников, 47 девятиклассников, 39 восьмиклассников.

Открытие заключительного этапа олимпиады состоялось 14 апреля. С приветственными словами и пожеланиями успехов к участникам обратились заместитель министра народного образования Киргизской ССР З. Д. Джантакова, председатель жюри олимпиады по физике профессор Киргизского государственного университета Л. В. Тузов и др.

15 апреля начался первый — теоретический — тур. Как всегда, он проходил по классам. Восьмиклассникам были предложены 4 задачи, девятиклассникам — 5 задач, десятиклассникам — 5 задач. В подготовке и составлении этих задач принимали участие преподаватели различных физических вузов страны и преподаватели школ: Л. Г. Асламазов, Л. П. Баканина, В. Е. Белонучкин, Ю. М. Брук, Е. И. Бутиков, Н. И. Гольдфарб, М. В. Грабиленков, А. Р. Зильберман, О. Ф. Кабардин, С. М. Козел, А. С. Кондратьев, С. С. Кротов, З. В. Оганесова, В. А. Орлов, Е. Л. Рамишевский, Н. А. Родина, О. Я. Савченко, В. Е. Скороваров, И. Ш. Слободецкий, А. Л. Стасенко, Е. Л. Сурков, В. Г. Харитонов и др.

Ниже мы приводим полные тексты задач теоретического тура заключительного этапа XI Всесоюзной олимпиады (все эти задачи вошли в «Задачник «Кванта» (см. «Квант», 1977, №№ 7, 8, 9)).

8 класс

1. Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимет реальный кран, изготовленный из тех же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели?

2. Две льдины движутся поступательно с одинаковыми по абсолютному значению скоростями: одна — на север, другая — на запад. Оказалось, что в любой момент времени на обеих льдинах можно так расположить часы, что скорости концов секундных стрелок относительно Земли будут равными, причем для каждого момента времени такое расположение единственно. Определить, на какое расстояние перемещаются льдины за сутки, если длина каждой секундной стрелки равна 1 см. Циферблаты часов расположены горизонтально.

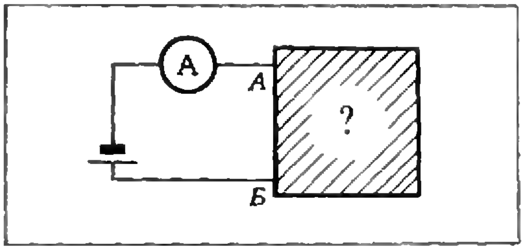


Рис. 1.

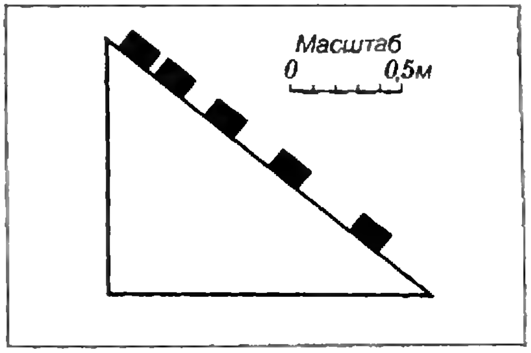


Рис. 2.

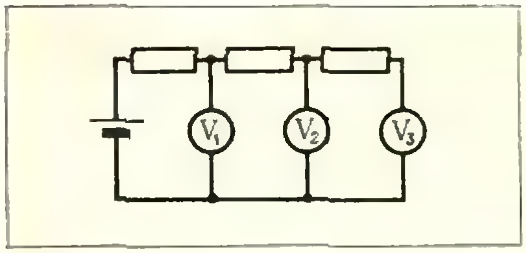


Рис. 3.

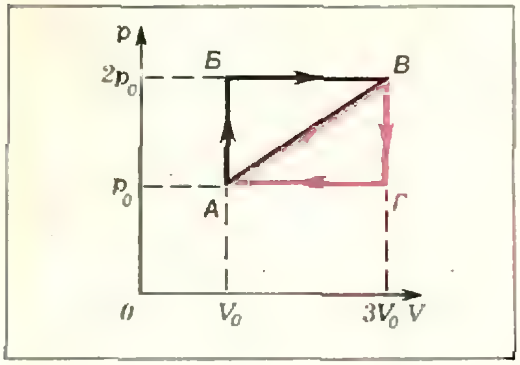


Рис. 4.

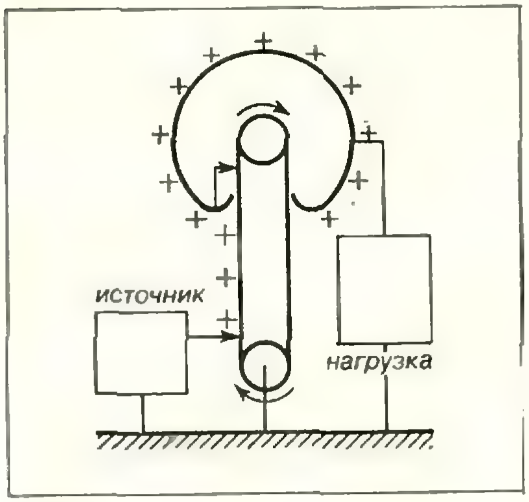


Рис. 5.

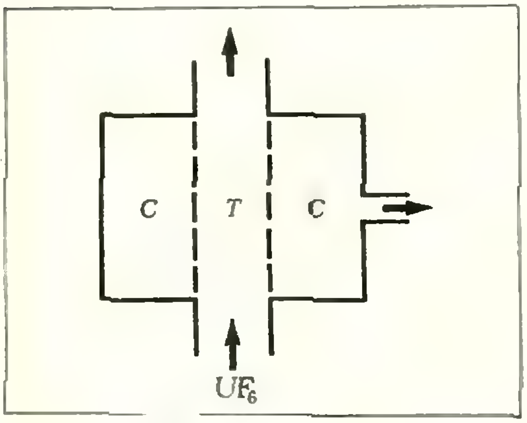


Рис. 6.

3. При подключении гальванического элемента напряжением 1,5 В к зажимам *А* и *Б* амперметр показал ток 1 А (рис. 1). Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток упал в 2 раза. Какая электрическая цепь находится внутри коробки?

4. Рисунок 2 сделан со стробоскопической фотографии кубика, движущегося вдоль наклонной плоскости. Промежутки времени между последовательными вспышками лампы равны 0,1 с. Определить коэффициент трения кубика о плоскость.

9 класс

1. Цепь, показанная на рисунке 3, собрана из одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1=10$ В, а третий — $U_3=8$ В. Каково показание второго вольтметра?

2. На рисунке 4 изображены два замкнутых цикла: *АБВА* и *АВГА*. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом. 1) Указать, на каких участках циклов газ получает и на каких участках отдает тепло. 2) У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?

3. В высоковольтном электростатическом генераторе заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод радиуса $R=1,5$ м (рис. 5). Оценить максимальные значения

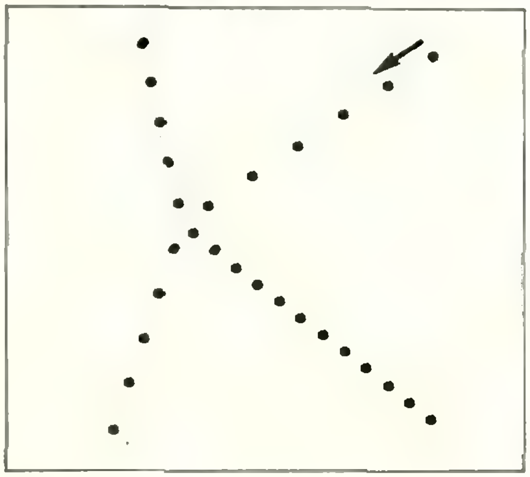


Рис. 7.

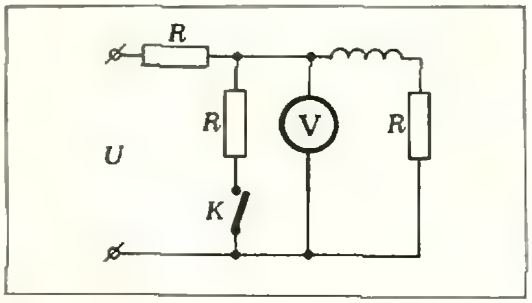


Рис. 8.

напряжения и тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты $v=20$ м/с, и ее ширина $l=1$ м. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля $|\vec{E}_0|=30$ кВ/см.

4. Природный уран состоит из смеси двух изотопов с относительными атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций 7:1000. Для увеличения концентрации ^{235}U, который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного соединения UF_6 (шестифтористый уран) в вакуум через маленькие отверстия. Газ пропускается через трубу T с пористыми стенками (рис. 6). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C. Найти отношение концентраций $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в откачиваемом газе. Относительная атомная масса фтора равна 19.

5. Рисунок 7 сделан со стробоскопической фотографии движения двух сталкивающихся шариков одинаковых диаметров, но разных масс. Стрелкой на рисунке показано направление движения одного из шариков до столкновения. 1) Определить отношение масс шариков. 2) Указать, в каком направлении двигался до столкновения второй шарик.

10 класс

1. Нарисовать примерный график зависимости от времени показаний вольтметра (рис. 8) после размыкания ключа K. Вольтметр и катушка индуктивности идеальные; $R=100$ Ом, $U=300$ В.

2. Луна одновременно фотографируется с одной и той же стороны с Земли и со спутника Луны. Орбита спутника круговая. Диаметр изображения Луны на фотографии, полученной на Земле, равен 4,5 мм, а на спутнике Луны — 250 мм. Найти период обращения спутника Луны по его орбите, если оба снимка сделаны с помощью одинаковых объективов с фокусным расстоянием 500 мм. Принять, что ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле, и расстояние от Земли до Луны равно 380 000 км.

3. Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий (рис. 9). Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным p, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости.

4. Рисунок 10 сделан с фотографии треков частиц в камере Вильсона. Распады ядер газа, наполняющего камеру Вильсона, вызваны в данном случае действием на них быстрых нейтронов. Камера Вильсона была заполнена смесью водорода (H_2), паров спирта (C_2H_5OH) и воды (H_2O) и помещена в магнитное поле с индукцией 1,3 Т. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно к плоскости рисунка. 1) Определить энергию протона, появившегося в точке A. Траектория

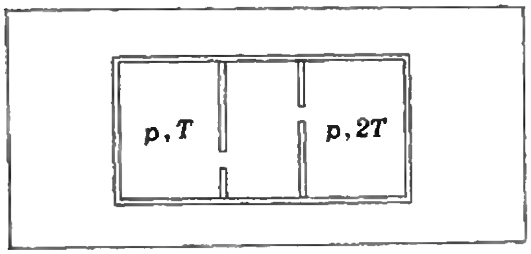


Рис. 9.

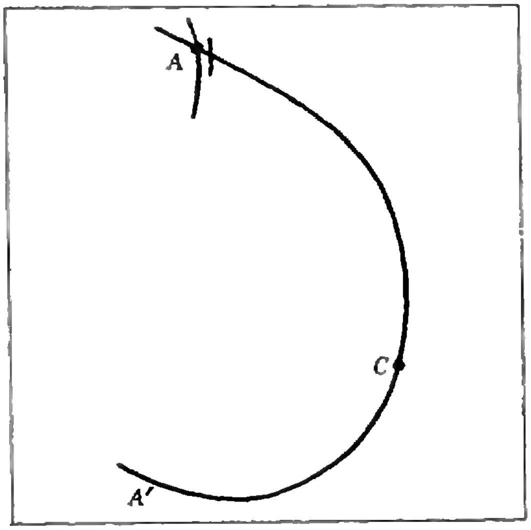


Рис. 10.

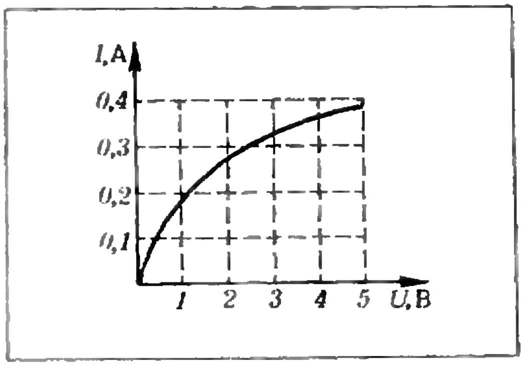


Рис. 11.

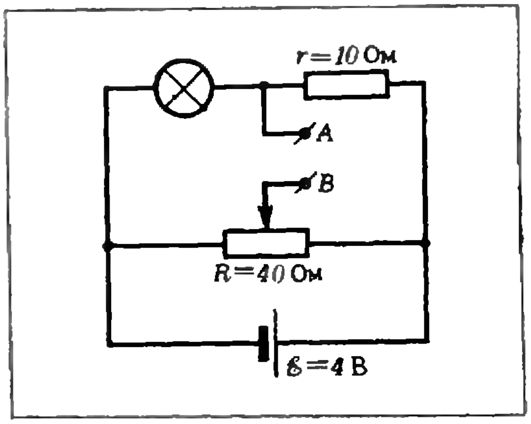


Рис. 12.

Победители XI Всесоюзной олимпиады школьников по физике, получившие Дипломы I степени. Внизу (слева направо): В. Решетов, В. Щукин, Д. Ковригин, К. Третьяченко, М. Цыпин; вверху (слева направо): Е. Зудин, А. Мирлин, С. Шпилькин, А. Ганопольский.

этого протона — кривая AA'. Почему меняется кривизна траектории протона? Определить энергию протона в точке C его траектории. Масса протона равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. 2) Определить, ядро какого элемента распалось в точке A, если треки частиц, начинающихся в этой точке, идентифицированы как следы двух протонов и двух α-частиц.

5. На рисунке 11 приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря. Лампочка включена в схему, показанную на рисунке 12. 1) Найти графически ток в лампочке. 2) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю? 3) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь

16 апреля все участники олимпиады приняли участие в Ленинском коммунистическом субботнике. Жюри олимпиады в этот день проверяло работы теоретического тура. Успешно справились с задачами многие участники. Наивысший балл, который давался за безукоризненно правильное решение задачи, был 1. Однако некоторые школьники привели такие оригинальные решения, что жюри присудило им дополнительно еще 0,25 балла. Это были *Л. Богданов* (Ленинград), *А. Забродин* (Московская обл.), *О. Лищенко* (Киев), *А. Моржиков* (Кемеровская обл.), *А. Морозов* (Москва), *А. Москалев* (Токмак), *И. Мошков* (Ленинград), *А. Потапов* (Московская обл.), *А. Шафаренко* (Караганда), *В. Щукин* (Ленинград), *О. Ющук* (Киев).

17 апреля проходил экспериментальный тур. Задачи этого тура и оборудование для его проведения подготовили сотрудники физического факультета Киргизского государственного университета. Подробный разбор этих задач вы найдете в помещенной в этом номере статье П. Дика — ответственного секретаря жюри XI Всесоюзной олимпиады по физике.

Наиболее успешно выполнили задание экспериментального тура *В. Бекташев* (Новосибирск), *Л. Богданов* (Ленинград), *А. Ганопольский* (Минск), *А. Дик* (Фрунзенская обл.), *Д. Ковригин* (Ленинградская обл.), *Т. Круузе* (Тарту), *А. Морозов* (Москва), *В. Решетов* (Московская обл.), *А. Сухинин* (Приморский кр.), *К. Третьяченко* (Киев), *С. Шпилькин* (Московская обл.), *А. Юргенсон* (Омск), *О. Ющук* (Киев).

18 апреля жюри олимпиады после тщательного анализа теоретических и экспериментальных работ участников определило лучших из них.

19 апреля на закрытии XI Всесоюзной олимпиады школьников по

физике было объявлено решение жюри. Имена победителей, получивших Дипломы I, II и III степени, приведены на 73 странице этого номера. Многие участники олимпиады награждены различными грамотами и призами. Специальный приз — подшивку журнала «Квант» за 1976 год с автографом главного редактора журнала академика И. К. Кикоина — получил *Б. Барпиев* (восьмиклассник из села Успеновка КиргССР). Подпиской на журнал «Квант» на 1978 год награждены *А. Аболтыньш* (Рига), *Г. Ваякас* (Тарту), *И. Гусев* (Воркута), *В. Пивоваров* (Красноярск) и *В. Таурайтис* (Вильнюс).

Согласно постановлению Министерства просвещения СССР о проведении Всесоюзной олимпиады школьников, победители XI Всесоюзной олимпиады, награжденные Дипломами I и II степени, получили право участвовать в заключительном этапе XII Всесоюзной олимпиады.

Десятиклассники *А. Гантопольский*, *В. Решетов*, *К. Третьяченко*, *Р. Шарипов* и *В. Щукин* стали участниками X Международной физической олимпиады школьников, которая проходила в этом году в городе Градец Кралóве (Чехословакия). Об этой олимпиаде мы расскажем в одном из следующих номеров нашего журнала.

Жюри заседает.

Идет эксперимент.

П. Дик

Экспериментальные задачи олимпиады по физике

17 апреля в лабораториях физического факультета Киргизского государственного университета проходил экспериментальный тур заключительного этапа XI Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Каждому участнику олимпиады предлагалось решить две экспериментальные задачи. Расскажем об этих задачах и их решениях.

8 класс

Задача 1. *Определите плотность металла, находящегося в одном из двух кусков пластилина, если известно, что массы пластилино в обоих кусках одинаковы. Оцените точность полученного результата. Извлекать металл из пластилина не разрешается.*

Оборудование: 1) *весы с разновесами*, 2) *стакан с водой*, 3) *штатив.*

Пользуясь весами с разновесами, можно определить массу куска пластилина с металлом ($m_{\text{пл}}+m_{\text{м}}$), массу чистого пластилина ($m_{\text{пл}}$) и по их разности — массу металла ($m_{\text{м}}$), находящегося в одном из кусков пластилина. Взвесив данные куски пластилина сначала в воздухе, а потом в воде, можно найти выталкивающую силу и, зная плотность воды, можно вычислить объемы кусков ($V_{\text{пл}}+V_{\text{м}}$ и $V_{\text{пл}}$). Объем металла ($V_{\text{м}}$) можно определить по разности этих объемов. Тогда плотность металла

$$\rho_{\text{м}}=\frac{m_{\text{м}}}{V_{\text{м}}}.$$

Было два варианта: в одних кусках пластилина находился кусок алюминия, в других — кусок железа.

Весьма интересным было бы решение этой задачи, если бы вместо определенного куска чистого пластилина массой, равной массе пластилина в составном куске, давался просто пластилин (в неопределенном количестве). В этом случае для решения задачи надо было бы взять кусок чистого пластилина, масса которого равна массе (m) составного куска (объема V), и определить его объем (V_0). Плотность металла можно найти, решив следующую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными ($\rho_м$, $\rho_{пл}$, $V_м$ и $V_{пл}$):

$$\begin{cases} m = \rho_{пл} V_{пл} + \rho_м V_м \\ V = V_{пл} + V_м \\ V_0 = V_{пл} + \dfrac{\rho_м}{\rho_{пл}} V_м \\ \rho_{пл} = \dfrac{m}{V_0}. \end{cases}$$

Задача 2 *С помощью двух динамометров и двух измерительных линеек определите возможную механическую схему и параметры составных элементов в коробочке (рис. 1), не вскрывая ее.*

Примечание. *Не разрешается изгибать выступающие проволочные концы и растягивать их с силой, превышающей предельные показания динамометра.*

Эту задачу с «черным ящиком» решили многие участники олимпиады. Внутри коробочки была механическая схема, состоящая из свободно перемещающегося рычажка, пружинки и четырех проволочных выводов с крючками на концах (рис. 2). Разгадать эту схему можно было, сравнивая поочередно смещения проволочных концов при неподвижном одном из них.

Пусть сначала остается неподвижным конец A, а конец D смещается, например, вправо на $\Delta x_D = 2$ см. При этом конец B смещается тоже вправо, но на величину $\Delta x_B = 3$ см, а конец C остается неподвижным. Если оставить неподвижным конец B, а конец D переместить на $\Delta x_D = 1$ см, то концы A и C переместятся в ту же сторону, но на $\Delta x_A = \Delta x_C = 3$ см. Если же оставить неподвижными сразу два конца: A и B (для чего между соответствующими крючками можно было зажать линейку), то концы D и C никуда не сместятся. Но если при этом к концу C прикладывать некоторую силу, то смещение этого конца будет пропорционально действующей силе

На основании проведенных опытов нетрудно сделать вывод, что концы A, B и D прикреплены к рычажку непосредственно, а конец C — через пружинку. Конкретные измерения дают возможность определить соотношение плеч рычажка, жесткость пружинки и ее предельно допустимое растяжение.

9 класс

Задача 1. *Определить объем воздуха, удаляемого насосом Комовского за один цикл, и атмосферное давление.*

Оборудование: *1) насос Комовского, 2) вакуумная тарелка с колпаком, 3) манометр, 4) линейка, 5) математические таблицы.*

С помощью линейки можно измерить внутренний диаметр и среднюю высоту колпака и определить объем V_0 воздуха под колпаком.

Обозначим атмосферное давление через p_0, давление под колпаком после первого оборота рукоятки насоса через p_1, объем удаленного за один оборот воздуха через ΔV. Тогда при медленном вращении рукоятки (когда температура воздуха не меняется) выполняется такое соотношение:

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + \Delta V).$$

После второго оборота можно записать аналогичное равенство:

$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + \Delta V).$$

В принципе из этих двух уравнений можно найти атмосферное давление p_0 и объем ΔV удаленного за один оборот воздуха. Однако практически неудобно измерять давления воздуха после каждого оборота (p_1 очень незначительно отличается от p_2). Лучше измерить давления после известных k и n оборотов и составить соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p_0 V_0^k = p_k (V_0 + \Delta V)^k \\ p_0 V_0^n = p_n (V_0 + \Delta V)^n. \end{cases}$$

Отсюда

$$V_0^{n-k} = \frac{p_n}{p_k} (V_0 + \Delta V)^{n-k}.$$

Прологарифмировав это уравнение, можно найти ΔV, а затем и p_0.

Задача 2. Второй задачей для девятиклассников, как и для восьмиклассников, была задача с «черным ящиком». Только в этом случае схема внутри была несколько иной (рис. 3), причем концы B и D были прикреплены к рычажку шарнирно.

10 класс

Задача 1. *Определите, как можно точнее, показатель преломления жидкости.*

Оборудование: *1) колба с исследуемой жидкостью, 2) стеклянная кювета,*

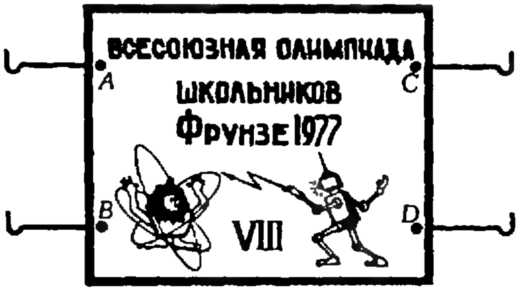


Рис. 1.

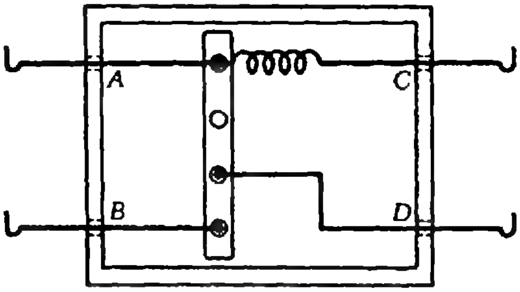


Рис. 2.

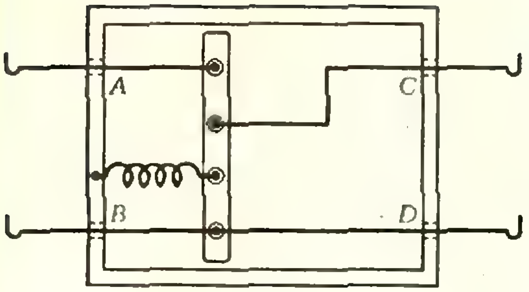


Рис. 3.

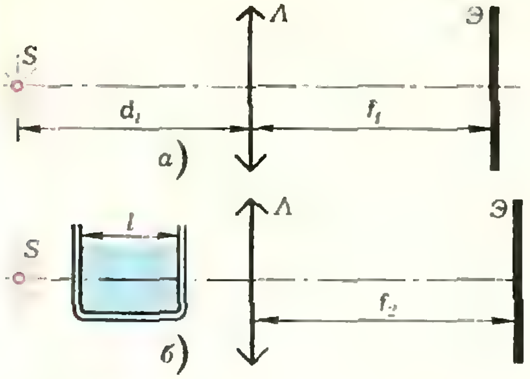


Рис. 4.

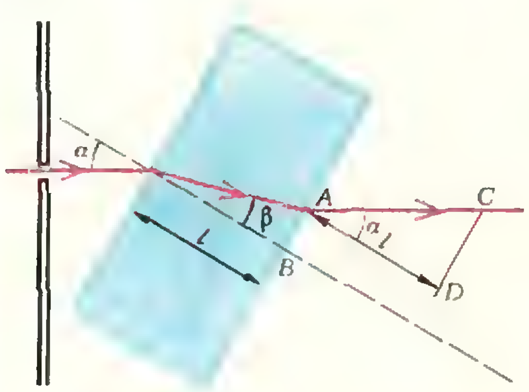


Рис. 5.

3) линза, 4) экран, 5) лампочка, 6) батарейка, 7) полоски миллиметровой бумаги.

Эту задачу можно решать разными способами. Рассмотрим два из них.

а) Собрав соответствующую установку (рис. 4, *а*) и получив четкое изображение нити лампочки на экране, можно определить фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1},$$

где d_1 — расстояние от лампочки до линзы, а f_1 — расстояние от линзы до экрана.

Затем, поместив между лампочкой и линзой кювету с исследуемой жидкостью (рис. 4, *б*), надо снова добиться четкого изображения нити лампочки на экране. Считая кювету с жидкостью плоскопараллельной пластинкой, расстояние d_2 от лампочки до линзы можно записать так:

$$d_2 = (d_1 - l) + \frac{l}{n},$$

где l — ширина кюветы, а n — искомый показатель преломления жидкости. Тогда из формулы линзы

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$$

(f_2 — новое расстояние от линзы до экрана) можно найти показатель преломления n.

б) Можно определить показатель преломления, собрав схему, показанную на рисунке 5. Луч света, прошедший через узкую щель в экране, падает под малым углом α на плоскопараллельную пластинку (кювету с исследуемой жидкостью) и преломляется соответствующим образом. Измерив $|AB|$ и $|CD|$, можно найти показатель преломления n:

$$n = \frac{|CD|}{|AB|}.$$

З а д а ч а 2. *Определите максимально возможное число параметров жидкости, используя следующее оборудование: 1) колба с жидкостью, 2) химический стакан, 3) батарейки, 4) амперметр, 5) вольтметр, 6) динамометр, 7) колодка с электродами, 8) выключатель, 9) резиновый жгутик, 10) линейка, 11) кусок проволоки, 12) груз.*

С помощью указанного оборудования можно определить плотность, коэффициент поверхностного натяжения и удельное сопротивление исследуемой жидкости. Для определения плотности понадобятся грузик и динамометр. Коэффициент поверхностного натяжения можно измерить, используя проволочный каркас и резиновый жгутик. Жесткость последнего легко найти с помощью динамометра и линейки. Остальное оборудование позволяет определить удельное сопротивление данного раствора.

В заключение хотелось бы отметить, что многие участники XI Всесоюзной олимпиады по физике при выполнении экспериментальных работ продемонстрировали хорошие умения и навыки, а некоторые даже проявили изобретательность и смекалку.

Победители
XI Всесоюзной олимпиады
школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Захаревич И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Ляховец А. (г. Краснодар, с. ш. № 47),
Хлебутин С. (Пермь, с. ш. № 6),
Шихбозян Г. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 9 классам —

Бугиенко В. (Киев, ФМШ № 145),
Гальперин В. (Москва, с. ш. № 57),
Книжник В. (Москва, с. ш. № 2),
Лисничук Л. (УССР, Васильевский р-н, с. ш. № 8),
Неймин В. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 10 классам —

Гандельсман Л. (Ленинград, с. ш. № 30),
Рыбников Г. (Москва, с. ш. № 42),
Флаасс Д. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Чурбанов А. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Бернотас А. (Вильнюс, с. ш. № 2),
Буякевич А. (Родниское, с. ш. № 8),
Власов В. (Киев, ФМШ № 145),
Ирматов А. (Наманган, с. ш. № 7),
Канепо Я. (Лиелвардеская с. ш.),
Лимонаускас В. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Новосельцева Т. (Москва, с. ш. № 7),
Рутковский И. (Киев, ФМШ № 145),
Сарчинелия А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Суворова Н. (Владивосток, с. ш. № 23),
Ясонов И. (Казань, с. ш. № 131);

по 9 классам —

Беспалов А. (Симферополь, с. ш. № 40),
Оревков С. (Москва, с. ш. № 57),
Остров Г. (Барановичи, с. ш. № 16),
Фомин А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Якубович Д. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 10 классам —

Амброладзе А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Аузиньш А. (Рига, с. ш. № 1),
Винншиин Я. (Киев, ФМШ № 145),
Димов А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Кодрян А. (Рыбница, школа-интернат),
Фоменко М. (Дальнегорск, с. ш. № 4),
Эйдельман З. (Минск, с. ш. № 10),
Энтин Л. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Волков А. (Оренбург, с. ш. № 2),
Мустяце И. (Кишинев, с. ш. № 1),
Перетрухин В. (Волгоград, с. ш. № 3),
Подругина В. (Ангарск, с. ш. № 10),
Свадеба С. (Ровно, с. ш. № 15),
Убайдуллаев Р. (Ташкент, с. ш. № 5);

по 9 классам —

Алексеев А. (Пермь, с. ш. № 11),
Арафаилов С. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Вялый М. (Енакиево, с. ш. № 37),
Жердев А. (Славянск, с. ш. № 5),
Лысенок И. (Нарочанская с. ш.),
Саблин А. (Москва, ФМШ № 18),
Шейдвассер О. (Оренбург, с. ш. № 2),
Шишкин С. (Ленинград, ФМШ № 45),
Шулембаев Д. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —

Арбузов Л. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Бушмелев А. (Ижевск, с. ш. № 30),
Воронович И. (Гродненский р-н, Сопоцкинская с. ш.),
Касянчук А. (Николаев, с. ш. № 22),
Мошонкин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Ослон В. (Киев, с. ш. № 173),
Петухов А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Сиденко С. (Александровская с. ш. Одесской обл.),
Фолиадова Е. (Ульяновск, с. ш. № 1).

Сухинин А. (п. Барабаш Приморского края),
Ющук О. (Киев, ФМШ № 145);

по 9 классам —

Бикташев В. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Дик А. (с. Лебединовка КиргССР, с. ш. № 1),
Забродин А. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Мичинский С. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Морозов А. (Москва, с. ш. № 179);

по 10 классам —

Богданов Л. (Ленинград, ФМШ № 45),
Григорьев Ю. (Чебоксары, с. ш. № 2),
Кондрашкин И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Моржаков А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Москалев А. (Токмак, с. ш. № 1),
Мухарский Ю. (Киев, ФМШ № 145),
Потапов А. (с. Б. Вяземы Московской обл.),
Шарипов Р. (Каракуль Бухарской обл., с. ш. № 18),
Юргенсов А. (Омск, с. ш. № 64).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Зудин Е. (Александров Владимирской обл., с. ш. № 4),
Мирлин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Цыпин М. (Москва, с. ш. № 2),
Шпилькин С. (п. Менделеево Московской обл., с. ш. № 2);

по 9 классам —

Ковригин Д. (Ломоносов, с. ш. № 1);

по 10 классам —

Ганопольский А. (Москва, с. ш. № 88),
Решетов В. (Москва, ФМШ № 18),
Третьяченко К. (Киев, ФМШ № 145),
Щукин В. (Ленинград, ФМШ № 45).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Васильев А. (Чебоксары, с. ш. № 2),
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Бараз Л. (Свердловск, с. ш. № 9),
Добриневский С. (Минск, с. ш. № 138),
Крууже Т. (Тарту, школа-интернат),
Мартиненас Л. (Вильнюс, с. ш. № 21),
Обляков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Радченко В. (Петрозаводск, Бесовецкая с. ш.),
Русаков Д. (Днепропетровск, с. ш. № 81);

по 9 классам —

Вайсбурд И. (Томск, с. ш. № 6),
Волков А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Макушок Ю. (Москва, с. ш. № 75),
Пикшрис Р. (Вильнюс, с. ш. № 22),
Пономарев Е. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Рылов С. (Москва, с. ш. № 2),
Ханелес А. (Самарканд, с. ш. № 67);

по 10 классам —

Грибов Б. (Воронеж, с. ш. № 66),
Дулатин С. (Сумгаит, с. ш. № 13),
Кулявцев А. (Саратов, с. ш. № 13),
Лищенко О. (Киев, ФМШ № 145),
Лобзин В. (Свердловск, с. ш. № 9),
Мидодашвили П. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Мошков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Налибодский Б. (Минск, с. ш. № 98),
Яненко Е. (Киев, ФМШ № 145).

М. Башмаков

Ленинградская олимпиада средних профтехучилищ

Подготовка квалифицированного пополнения рабочего класса привела к созданию учебного заведения нового типа — среднего профессионально-технического училища (ПТУ). Особенно большое развитие средние ПТУ получили в г. Ленинграде, где сейчас в ПТУ учится ребят больше, чем в старших классах средних школ. Вместе с рабочей специальностью учащиеся ПТУ за три года получают полноценное среднее образование. Перед ними открыты все пути. Многие выпускники ПТУ продолжают свое образование на вечерних и дневных отделениях вузов.

Среди учащихся ПТУ много таких, которые любят математику и физику. Для них созданы кружки и юношеские школы, читаются лекции, проводятся олимпиады. Большую помощь ПТУ оказывает Ленинградский университет. Буквально все преподаватели и студенты математико-механического факультета ЛГУ — инициаторы оказания шефской помощи ПТУ — участвуют в этом плодотворном деле. При активном содействии деканата оборудованы счетными машинами учебные кабинеты ПТУ-24. Профессора факультета читают лекции будущим токарям и слесарям, руководят математическими и астрономическими кружками.

При активном содействии факультета в этом году была проведена третья физико-математическая олимпиада учащихся ПТУ г. Ленинграда и области. В ней приняло участие около 75 тысяч учащихся из 136 ПТУ. В заключительном туре, который прошел в стенах Ленинградского университета, участвовало около 900 человек. Среди победителей олимпиады — будущие слесари и токари, строители и шоферы. Жюри олимпиады, в которое вошли профессора, преподаватели и студенты университета, с радостью отметило интерес к математике и физике, который проявили участники олимпиады. Из победителей олимпиады впервые была составлена команда в составе 3-х человек, которая приняла участие в заключительном туре XI Всесоюзной олимпиады школьников по математике. Команда учащихся ПТУ привезла с этой олимпиады Похвальные отзывы первой и второй степени.

К сожалению, олимпиады учащихся ПТУ проводятся пока только в Ленинграде. Было бы чрезвычайно полезно, чтобы проведение олимпиад учащихся ПТУ стало такой же традицией, как проведение Всесоюзных олимпиад школьников.

Ниже мы приводим тексты задач по математике Ленинградской олимпиады средних профтехучилищ.

I курс

1. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^3-3x=\sqrt{5}\ ?$$

2. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Через всякую ли точку пространства можно провести прямую, пересекающую прямые a и b?

3. Через точку M с координатами (0; 1) проведена прямая, пересекающая параболу $y=x^2$ в точках A и B. Доказать, что произведение расстояний от точек A и B до оси ординат равно единице.

4. Дано 25 чисел. Сумма любых четырех из них положительна. Доказать, что сумма всех чисел положительна.

II курс

1. Найти область значений функции

$$y=\sin^6 x+\cos^6 x.$$

2. В треугольной пирамиде $ABCD$ отмечены точки: K — середина AD, M — середина AC, P — середина BD, T — середина BC. Проведены плоскости APT и BKM, которые рассекли пирамиду на четыре части. Найти объем той из этих частей, которая примыкает к ребру AB, если объем всей пирамиды равен V.

3. Доказать, что четыре точки пересечения парабол

$$y=x^2+x-40,$$
$$x=y^2+y-41$$

лежат на одной окружности.

4. Дано 51 число. Произведение всех этих чисел, а также произведение любых четырех из них, положительно. Доказать, что каждое число положительно.

III курс

1. Найти наименьшее значение функции

$$y=\sin^{100}x+\cos^{100}x.$$

2. Даны две скрещивающиеся прямые. Какое множество образуют середины всех отрезков, концы которых лежат на данных прямых?

3. Дан квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$. Доказать, что хотя бы одно из трех чисел $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ по модулю не меньше половины.

4. Несколько городов попарно соединены дорогами. Из каждого города вышло по одному путнику, направившемуся в самый ближайший для него город. Доказать, что если число городов нечетно, то в какой-то из них никто не придет. (Считать, что расстояния между городами попарно различны.)

Н. Васильев

Задачи республиканских олимпиад

Мы думаем, что многим нашим читателям будет интересно узнать, какие задачи предлагались прошлой весной на различных олимпиадах. Некоторые задачи из числа предлагавшихся на областных, городских и республиканских олимпиадах включены в «Задачник «Кванта» по математике (М436, М441, М442, М446, М462, М464, М466—М469 и др.). Ниже мы публикуем еще 20 задач республиканских олимпиад.

Мы указываем фамилии авторов некоторых задач (как правило, авторы этих задач присылают их в редакцию журнала).

1. 10 векторов таковы, что длина суммы любых 9 из них меньше длины суммы всех 10 векторов. Доказать, что существует ось, на которую каждый из 10 векторов дает положительную проекцию. (*Ю. Ионин*)

2. Произведение двух натуральных чисел — трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами, а сумма — двузначное число, записываемое одинаковыми цифрами. Найти все такие пары чисел. (*А. Савин*)

3. Вершины выпуклого четырехугольника лежат на различных сторонах квадрата 1×1. Доказать, что периметр четырехугольника не меньше $2\sqrt{2}$.

4. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. В области, ограниченной отрезками AB, AC и (меньшей) дугой BC, расположен отрезок. Доказать, что его длина не больше $|AB|$.

5. Даны n вещественных чисел: x_1, x_2, …, x_n. Доказать, что модуль хотя бы одного из чисел

$$x_1+\ldots+x_k-x_{k+1}-\ldots-x_n$$

(где $k=1, 2, \ldots, n$; при $k=n$ получаем просто сумму всех n чисел $x_1, \ldots, x_n$) не превосходит наибольшего из модулей x_k. (*А. Плоткин*)

6. Конечно или бесконечно множество решений уравнения $x^2+y^3=z^2$ в целых числах?

7. Найти, какими тремя цифрами надо заменить буквы в слове *МЯУ*, чтобы равенство

$$\underbrace{\text{МЯЯ}\ldots\text{ЯУ}}_{n}:\text{МУ}=\underbrace{\text{ЯММ}\ldots\text{МУ}}_{n}\,\text{ЯУ}$$

выполнялось при любом n. (*М. Штеренберг*)

8. Доказать, что если $x^{1977}+y^{1977}>x^{1976}+y^{1976}$, то $x^{1978}+y^{1978}>x^{1977}+y^{1977}$. (*С. Конягин*)

9. При каком n квадрат можно разрезать на n конгруэнтных между собой многоугольников?

10. Может ли при некотором натуральном n число n^2+2^n оканчиваться цифрой 5? (*В. Федоров*)

11. Доказать, что при целом n и любом x выполнено неравенство $|\sin nx|\leqslant|n\sin x|$.

12. Пусть $x_0=1000$ и для каждого n

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}+30}.$$

Существует ли предел последовательности x_n? Если да, то чему он равен?

13. Точки K и H, лежащие соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, таковы, что $|AK|=|HC|$, $|AH|=|KB|$. Доказать, что площадь четырехугольника $BKHC$ по крайней мере втрое больше площади треугольника AKH.

14. Найти все натуральные n, для которых 9^n+10^n больше 12^n. (*В. Федотов*)

15. Доказать, что при $n>4$ не существует множества из n точек таких, что для каждых трех точек из этого множества найдется четвертая точка из этого множества, образующая с этими тремя четверку вершин параллелограмма. (*Д. Григорьев*)

16. Двое играющих по очереди выписывают цифры в строчку в 12 идущих подряд клеток. Может ли второй добиться того, чтобы полученное в итоге число из 12 цифр делилось на 77? (Разрешается вписывать в любую клетку любую цифру, в том числе и 0.)

17. 100-значное число равно сумме своих цифр, плюс сумма попарных произведений своих цифр, плюс сумма произведений по три цифры, плюс и т. д., плюс произведение всех 100 цифр. Найти все такие 100-значные числа. (*А. Савин*)

18. В четырехугольнике длина каждой стороны — целое число, являющееся делителем периметра. Доказать, что в этом четырехугольнике хотя бы две стороны конгруэнтны.

19. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки M, лежащей на продолжении диаметра, соединяющего концы полуокружности, проводится луч, касающийся этой полуокружности, и на нем откладывается отрезок MX, конгруэнтный отрезку MO. Найти множество точек X. (*С. Алейнов*)

20. Проекция плоской фигуры на любую прямую имеет длину меньше 1 см. Верно ли, что эту фигуру можно поместить в окружность радиуса а) 1 см? б) 1,5 см? (*А. Слинько*)

Каппа

Кривая, называемая *Каппой* (см. третью страницу обложки) обладает центром симметрии O и двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Есть у каппы и две горизонтальные асимптоты. Прямая, проведенная в плоскости каппы, пересекает ее, самое большее, в четырех точках.

Идея построения Слюза, первооткрывателя каппы, состоит в следующем. Рассмотрим (рис. 1) конгруэнтные окружности, центры которых лежат на прямой l, не содержащие точку O внутри. К каждой такой окружности из точки O проводим пару касательных. Множество $\{M\}$ этих точек касания и представляет собой каппу. Этот способ, по существу, эквивалентен способу И. Ньютона (роль радиусов конгруэнтных окружностей исполняет у Ньютона катет угольника MB).

Способ И. Ньютона имеет, однако, то преимущество, что с его помощью можно графически построить касательную к каппе в любой ее точке. Для этого достаточно построить *нормаль* (перпендикуляр к касательной). Покажем, как это сделать.

Движение угольника *в каждый момент времени* можно представить как вращение около некоторой точки N. Как найти положение этой точки для произвольного момента времени? Точки B и O угольника (рис. 2) вместе с другими его точками вращаются относительно N, и нам известны направления скоростей в этих точках (B движется по l, а O — по AM). Следовательно, N находится в пересечении прямых, перпендикулярных AM и l. Тогда MN — нормаль к каппе в точке M.

С помощью рисунка 3 легко вывести полярное уравнение каппы $\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$ (a — величина радиуса конгруэнтных окружностей).

Покажем способ построения каппы, принадлежащий И. Барроу. Проведем из точки O «вертикальный» луч; через точку A на нем проведем прямую m, перпендикулярную OA (рис. 4). Рассмотрим произвольный луч OA_1, пересекающийся с m. Отложим на OA_1 отрезок $OM_1 \cong AA_1$. Множество $\{M\}$ таких точек образует две верхние ветви каппы. (В том, что это действительно каппа, вам поможет убедиться ее полярное уравнение.)

Еще один способ построения каппы, принадлежащий И. Бернулли, приведем без чертежа. Проведем окружность $(L, |LO|)$ с центром $L \in l$. Отложим на этой окружности две конгруэнтные дуги $OP < \frac{\pi}{2}$ и PQ. Соединим точки O и Q хордой. В пересечении этой хорды или ее продолжения с прямой, проходящей через точку P параллельно l, получаем точку M. Множество таких точек $\{M\}$ для всевозможных положений точки P также представляет собой две ветви каппы. Докажите это.

В. Березин

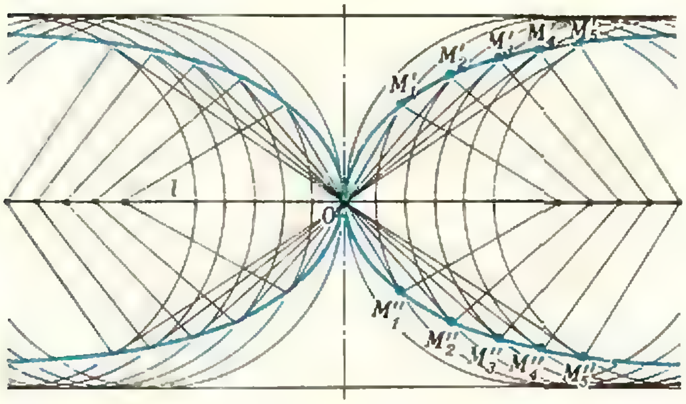


Рис. 1.

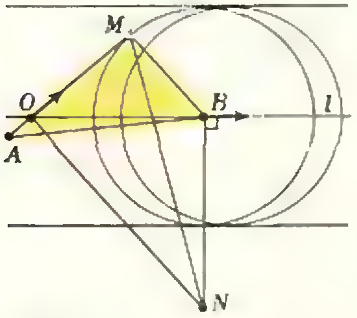


Рис. 2.

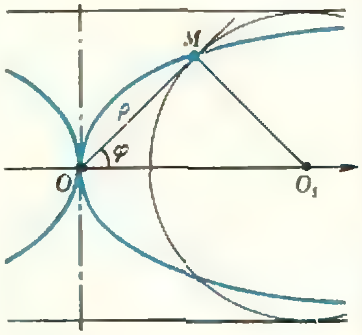


Рис. 3.

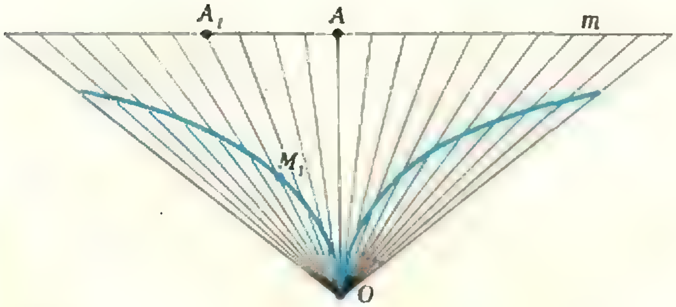


Рис. 4.

В. Грушин, А. Диденко, Г. Дубровский

Задачи на законы динамики материальной точки

Основу динамики материальной точки составляют три закона Ньютона. Они позволяют выбрать наиболее удобную для описания движения систему отсчета, связывают ускорение тела с действующими на это тело силами и устанавливают некоторые важные закономерности взаимодействия тел. Напомним эти законы.

Первый закон Ньютона: *существуют такие системы отсчета, относительно которых движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действия других тел компенсируются**).

Эти системы отсчета называются *инерциальными*. Существуют и такие системы отсчета, в которых утверждение, высказанное в первом законе Ньютона, не выполняется. Подобные системы отсчета называются *неинерциальными*.

После того как сделан выбор какой-либо инерциальной системы отсчета, можно приступить к изучению и описанию взаимодействия тел и характера их движения.

Многочисленные эксперименты показали, что единственной причиной изменения скорости данного тела в инерциальных системах отсчета является взаимодействие его с другими телами (или с полем), то есть действие на тело силы.

Второй закон Ньютона выражает связь между силой и ускорением тела, которое сообщается этой силой — *сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение*:

$$\vec F = m\vec a. \qquad (1)$$

Второй закон Ньютона можно сформулировать и иначе — *изменение импульса тела равно импульсу силы, действующей на это тело*:

$$\Delta(m\vec v) = \vec F\Delta t \qquad (2)$$

(здесь $\Delta(m\vec v)$ — изменение импульса тела за промежуток времени Δt).

Заметим, что соотношение (2) допускает изменение импульса как за счет изменения скорости, так и за счет изменения массы тела*).

Третий закон Ньютона гласит, что *тела действуют друг на друга с силами, направленными вдоль одной и той же прямой, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению*.

Например, при столкновении двух тел (рис. 1) возникают две силы упругости, связанные соотношением:

$$\vec F_{12} = -\vec F_{21}, \qquad (3)$$

где $\vec F_{12}$ — сила, действующая на первое тело со стороны второго, и $\vec F_{21}$ — сила, с которой первое тело действует на второе. Силы всегда появляются парами.

Довольно часто абитуриенты дают неправильный ответ на вопрос: находятся ли тела системы, изображен-

---

*) Обратите внимание на то, что в законах Ньютона не затрагивается возможность вращательного движения тел, поэтому они применимы лишь для описания движения материальной точки или для поступательного движения протяженных тел.

*) Как известно, масса любого тела является функцией скорости движения: чем больше скорость, тем больше масса. Характер этой зависимости такой, что она заметно проявляет себя лишь при скоростях, соизмеримых со скоростью света. При таких скоростях движения формулу (1) применять нельзя. А вот формула (2) остается справедливой для любых скоростей. При малых скоростях движения обе формулы эквивалентны.

стержень движется с ускорением $\vec{a}$, которое легко найти, используя второй закон Ньютона. Направим координатную ось X вдоль оси стержня в сторону движения стержня (см. рис. 3). В проекциях на эту ось второй закон Ньютона имеет вид:

$$F_x = ma_x,$$

или в данном случае

$$|\vec{F}| = m\,|\vec{a}|.$$

Мысленно отсечем от стержня переднюю часть длиной l_0. Оставшаяся часть имеет длину $l - l_0$ и массу $\frac{m}{l}(l - l_0)$ (так как стержень однороден). Эта часть стержня движется с тем же ускорением $\vec{a}$, что и весь стержень, под действием силы натяжения $\vec{T}$. Запишем для нее второй закон Ньютона в проекциях на ось X:

$$|\vec{T}| = \frac{m}{l}(l - l_0)\,|\vec{a}| = |\vec{F}|\left(1 - \frac{l_0}{l}\right).$$

Анализ полученного выражения показывает, что натяжение стержня линейно убывает от максимального значения $|\vec{F}|$ до нуля с увеличением расстояния l_0 от нуля до l (рис. 4).

Таким образом, ясно, что если речь будет идти о нити или тросе, масса которых не является пренебрежимо малой, то необходимо учитывать изменение натяжения при переходе от одного сечения к другому.

Рассмотрим теперь несколько задач, в которых требуется определить максимальное или минимальное значения некоторых физических величин.

Задача 2. *Груз массой m, подвешенный на нерастяжимой нити длиной l, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают (рис. 5). Определить максимальное натяжение нити при движении груза.*

Найдем зависимость абсолютной величины силы натяжения $\vec{T}$ нити от угла α, образуемого нитью с вертикалью. На груз, кроме силы натяжения, действует еще сила тяжести $m\vec{g}$, направленная под углом α к нити.

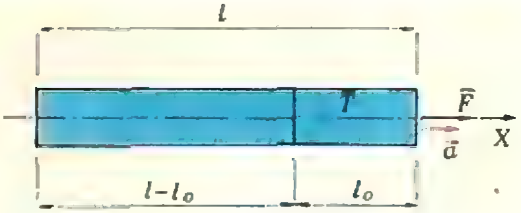


Рис. 3.

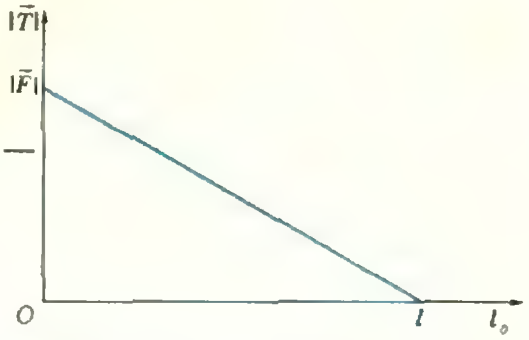


Рис. 4.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на неподвижную ось X, составляющую угол α с вертикалью, в тот момент, когда нить совпадает с этой осью:

$$|\vec{T}| - m\,|\vec{g}|\cos\alpha = ma_x.$$

Так как нить нерастяжима, груз движется по окружности радиуса l и a_x представляет собой центростремительное ускорение:

$$a_x = \frac{v^2}{l}.$$

Здесь v — линейная скорость груза, которая тоже зависит от угла α. Однако ее нетрудно найти, исходя из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = m\,|\vec{g}|\,h.$$

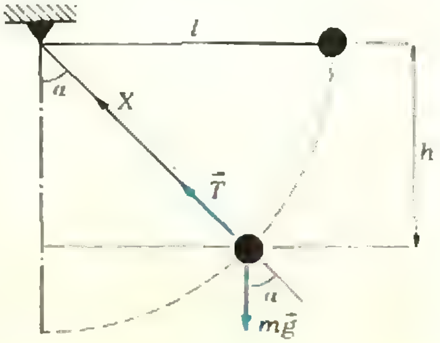


Рис. 5.

где $h = l\cos\alpha$.

Учитывая все записанные соотношения, получаем

$$|\vec{T}| = 3m|\vec{g}|\cos\alpha.$$

Максимальное значение силы натяжения соответствует условию $\cos\alpha = 1$ и составляет величину

$$|\vec{T}_{\max}| = 3m|\vec{g}|.$$

Это значение силы натяжения достигается при $\alpha = 0$, то есть в тот момент, когда нить вертикальна. Центростремительное ускорение груза при этом равно $2|\vec{g}|$ и направлено вертикально вверх.

З а д а ч а 3. *В условиях предыдущей задачи определить, какой угол с вертикалью образует нить в тот момент, когда проекция скорости груза на вертикальное направление наибольшая?*

В начальный момент, когда груз находится в положении *1*, его скорость равна нулю. Разумеется, равна нулю и проекция скорости на вертикальную ось Y (рис. 6). В положении *2* вертикальная проекция скорости опять равна нулю, так как скорость направлена горизонтально. Значит, при движении груза из положения *1* в положение *2* эта проекция сначала увеличивается, потом уменьшается, и где-то она максимальна. Найдем условие максимума вертикальной проекции скорости груза.

При движении груза его ускорение тоже непрерывно изменяется: в положении *1* оно равно $\vec{g}$ и направлено вертикально вниз, а в положении *2* ускорение по абсолютной величине равно $2|\vec{g}|$ и направлено вертикально вверх. Следовательно, в какой-то момент (в точке *3* на рисунке 6) вертикальная проекция ускорения обращается в нуль, при этом вертикальная проекция скорости принимает максимальное значение. Это и есть условие, которое позволяет найти ответ на вопрос задачи.

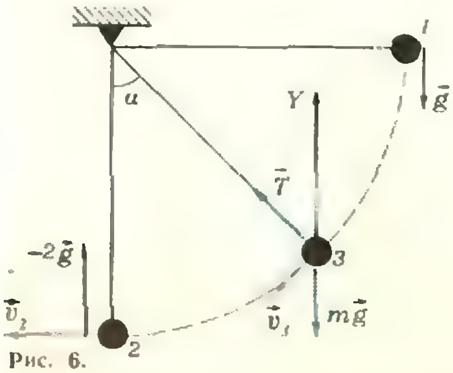


Рис. 6.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось Y для момента, когда тело находится в точке *3*:

$$|\vec{T}|\cos\alpha - m|\vec{g}| = 0,$$

где α — угол между нитью и вертикалью. Из решения предыдущей задачи

$$|\vec{T}| = 3m|\vec{g}|\cos\alpha.$$

Тогда получаем

$$3m|\vec{g}|\cos^2\alpha - m|\vec{g}| = 0, \quad (*)$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ и } \alpha\approx 54 .$$

Можно получить ответ более коротким путем. Как известно, в точках экстремума функции ее производная обращается в нуль. Вертикальная проекция скорости в произвольном положении груза определяется соотношением

$$v_y = v\sin\alpha = \sqrt{2|\vec{g}|\,l\cos\alpha}\,\sin\alpha.$$

Найдем производную по α и приравняем ее нулю:

$$\sqrt{\frac{|\vec{g}|\,l}{2\cos\alpha}}\,(3\cos^2\alpha - 1) = 0.$$

Условие $3\cos^2\alpha - 1 = 0$ совпадает с условием максимума (*), найденным выше.

З а д а ч а 4. *Тело массой m движется равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$ (рис. 7). Коэффициент трения равен μ. При каком значении угла α сила $\vec{F}$ имеет наименьшую абсолютную величину?*

На тело действуют четыре силы: сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции поверхности $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Под действием этих сил тело движется равномерно и прямолинейно.

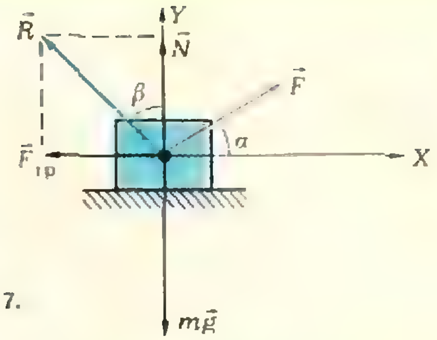


Рис. 7.

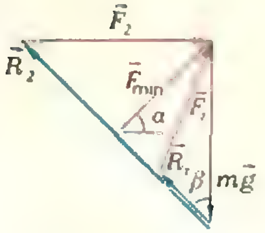


Рис. 8.

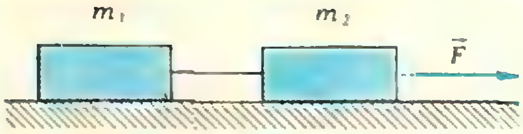


Рис. 9.

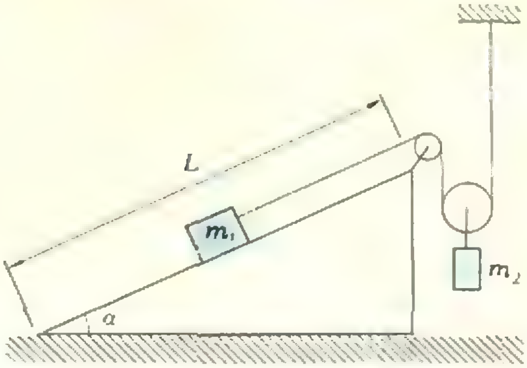


Рис. 10.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси (см. рис. 7):

$$|\vec{F}|\cos\alpha - |\vec{F}|_{тр} = 0,$$

$$|\vec{N}| + |\vec{F}|\sin\alpha - m|\vec{g}| = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec{F}_{тр}| = \mu\,|\vec{N}|.$$

Из этих трех уравнений находим

$$|\vec{F}| = \frac{\mu m|\vec{g}|}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Мы видим, что абсолютная величина силы $\vec{F}$ является функцией угла α. Чтобы найти экстремум этой функции, вычислим ее производную и приравняем нулю:

$$-\frac{\mu m|\vec{g}|(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \mu, \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg}\mu.$$

Задача может быть решена и другим способом. Заменим действия сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ действием одной силы — силы реакции опоры $\vec{R}$ (см. рис. 7). Так как тело движется равномерно, векторная сумма всех сил равна нулю, то есть силы $m\vec{g}$, $\vec{R}$ и $\vec{F}$ образуют замкнутый треугольник. Одной из его сторон является сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Другая сторона треугольника — реакция опоры $\vec{R}$. Величина этой силы зависит от направления силы $\vec{F}$, но направление ее неизменно и определяется лишь величиной коэффициента трения (см. рис. 7):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|\vec{F}_{тр}|}{|\vec{N}|} = \mu.$$

Сила $\vec{F}$, вообще говоря, может быть направлена под любым углом α к горизонту. Но тело движется равномерно, и треугольник сил должен быть замкнут. Это достигается тем, что одновременно с изменением направления силы $\vec{F}$ изменяется ее величина и величина силы $\vec{R}$. На рисунке 8 изображены два треугольника, определяемые соотношениями

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{F}_1 = 0$$

и

$$m\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{F}_2 = 0.$$

Из этого рисунка видно, что сила $\vec{F}$ будет минимальной по абсолютной величине в том случае, если она перпендикулярна к линии действия силы $\vec{R}$. Очевидно, что при этом угол ее

(Окончание см. с. 82—83.)

Э. Шувалова

Координатный метод

Векторная алгебра и координатный метод, содержащиеся в новой программе школьного курса математики, являются мощным аппаратом для решения многих геометрических задач, и прежде всего потому, что они не требуют рассмотрения сложных геометрических конфигураций. Эти методы сводят геометрическую задачу к алгебраической, решить которую обычно легче, чем исходную геометрическую. Координатным методом обязан владеть каждый инженер, и поэтому на знание координатного метода обращается особое внимание на вступительных экзаменах в технические вузы.

Программой вступительных экзаменов в вузы по математике (см. «Квант», 1977, № 2) предусматривается, что «экзаменующийся должен уметь... использовать методы алгебры и начал анализа при решении геометрических задач» (п. 8 раздела «Основные умения»).

Этим вопросам и посвящена настоящая статья.

1. Вычисление углов

Задача 1. *Даны величины двух плоских углов трехгранного угла: $\widehat{AOB}=\alpha$, $\widehat{AOC}=\beta$. Найти третий плоский угол, если противолежащий ему двугранный угол — прямой ($\alpha<\pi/2$, $\beta<\pi/2$).*

Построим прямоугольную систему координат. Ее начало совместим с вершиной O данного трехгранного угла, ось Oz направим вдоль ребра OA прямого двугранного угла, ось Ox поместим в плоскости AOC, ось Oy — в плоскости AOB (рис. 1). Требуется найти $\widehat{BOC}$. Отложим на ребрах OA, OB и OC единичные векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1}=(0;\ 0;\ 1),$$

$$\overrightarrow{OB_1}=(0;\ \sin\alpha;\ \cos\alpha),$$

$$\overrightarrow{OC_1}=(\sin\beta;\ 0;\ \cos\beta).$$

Так как

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OC_1}}{|\overrightarrow{OB_1}|\cdot|\overrightarrow{OC_1}|},$$

то

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{0\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot\cos\beta}{1\cdot 1}$$

и $\widehat{BOC}=\arccos\,(\cos\alpha\cos\beta)$.

Задача 2. *Найти угол между диагональю BD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагональю A_1D его грани, если $|AD|=a$, $|DC|=b$, $|DD_1|=c$.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 2. В этой системе координат

$$\overrightarrow{AD}=(a;\ 0;\ 0),$$

$$\overrightarrow{AB}=(0;\ b;\ 0),$$

$$\overrightarrow{AA_1}=(0;\ 0;\ c).$$

(Окончание. Начало см. с. 77—81.)

наклона к горизонту

$$\alpha=\beta=\operatorname{arctg}\mu.$$

В заключение предлагаем читателям в качестве упражнений решить самостоятельно пять задач. Советуем обратить особое внимание на смысл тех или иных упрощений, содержащихся в условии задачи.

Упражнения

1. Барон Мюнхаузен при полете на Луну использовал пушку с длиной ствола $L=600$ м. Чтобы отправить снаряд в межпланетное пространство, ему нужно было сообщить скорость $|\vec{v}|=12$ км/с. Определить, с какой силой давил на дно снаряда барон Мюнхаузен, находящийся внутри снаряда, если его масса $m=80$ кг. Считать, что снаряд в стволе пушки двигался равноускоренно в направлении по вертикали вверх.

2. Два тела массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью пренебрежимо малой массы, движутся под действием силы $\vec{F}$ по горизонтальной поверхности (рис. 9). Коэффициент трения грузов о поверхность равен

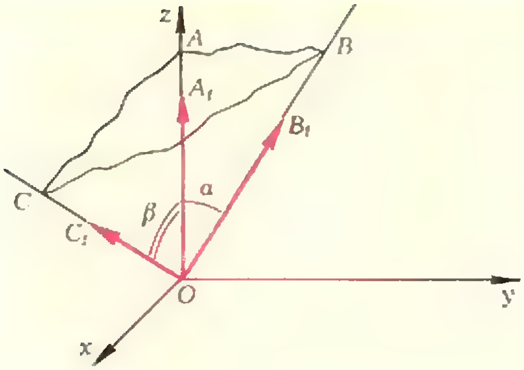


Рис. 1.

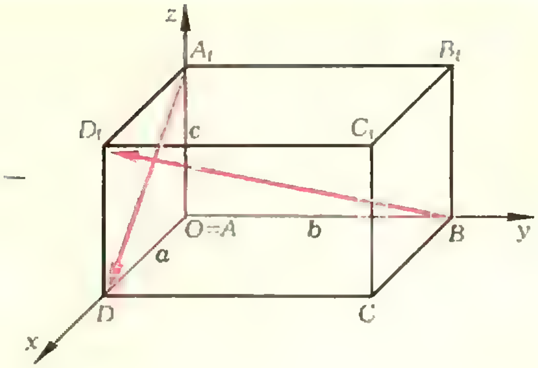


Рис. 2.

$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = (a; -b; c),$$

$$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = (a; 0; -c).$$

Отсюда получаем:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1D}}\right) = \frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Поскольку углом между двумя прямыми называется величина меньшего из углов, определяемых этими прямыми (см. «Геометрия 9», § 24), то при $a^2-c^2 \geqslant 0$ искомый угол равен

$$\arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}},$$

а при $a^2-c^2<0$ он равен

$$\pi - \arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

С учетом формулы

$$\pi - \arccos t = \arccos(-t)$$

ответ можно записать в таком виде:

$$\left(\widehat{BD_1, A_1D}\right) = \arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Задача 3. *Найти расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 двух смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 3. В этой системе

$\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$,
$\overrightarrow{AD} = (0; a; 0)$,
$\overrightarrow{AA_1} = (0; 0; a)$,
$\overrightarrow{AD_1} = (0; a; a)$,
$\overrightarrow{DC_1} = (a; 0; a)$.

Искомое расстояние равно длине общего перпендикуляра MN прямых AD_1 и DC_1. Можно действовать следующим образом. Обозначим через α и β числа, которые определяют положение точек M и N:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\cdot\overrightarrow{AD_1},\quad \overrightarrow{DN} = \beta\cdot\overrightarrow{DC_1}$$

μ. Во сколько раз изменится натяжение нити, если коэффициент трения уменьшится в два раза?

3. Ракета взлетает вертикально вверх под действием газов, образующихся при сгорании топлива и вылетающих со скоростью $|\vec{v}| = 1000$ м/с относительно Земли. На какую максимальную высоту поднимется ракета, если двигатель работал $\Delta t = 2$ с, а отношение массы сгоревшего газа к массе ракеты $m/M = 0{,}1$? Изменением массы ракеты при взлете и сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Пожарный держит шланг под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Расход воды из шланга равен $G = 50$ кг/с. Скорость вылетающей воды $|\vec{v}| = 20$ м/с. На сколько увеличивается сила давления пожарного на пол?

5. На рисунке 10 изображена система двух тел массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг, соединенных нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный и подвижный блоки. В начальный момент первое тело находится посередине наклонной плоскости длиной $L = 3$ м, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Через какое время это тело достигнет края наклонной плоскости, если коэффициент трения о наклонную плоскость $\mu = 0{,}25$? Трением в блоках, а также массой блоков и нити пренебречь.

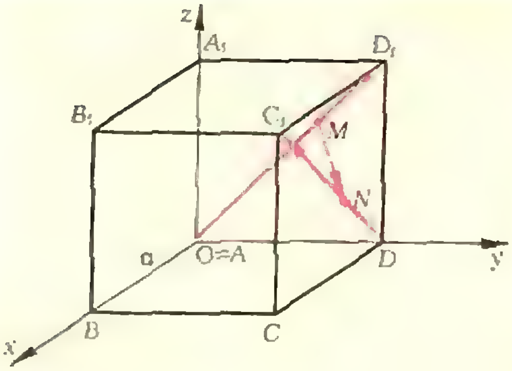


Рис. 3.

(поскольку точка M лежит на прямой AD_1 тогда и только тогда, когда векторы $\vec{AM}$ и $\vec{AD_1}$ коллинеарны, и аналогично для точки N). Теперь найдем

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN}$$

и запишем условия перпендикулярности векторов $\vec{MN}$, $\vec{AD_1}$ и $\vec{MN}$, $\vec{DC_1}$; это даст нам два уравнения, из которых мы найдем α и β, а потом и длину вектора $\vec{MN}$.

Проведем необходимые вычисления:

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN} = -\vec{AM} + \vec{AD} + \vec{DN} = -\alpha\cdot\vec{AD_1} + \vec{AD} + \beta\cdot\vec{DC_1} = (\beta a;\ a(1-\alpha);\ a(\beta-\alpha))$.

Записывая скалярные произведения $\vec{MN}\cdot\vec{AD_1}$ и $\vec{MN}\cdot\vec{DC_1}$ в координатах и приравнивая их нулю (условие перпендикулярности двух векторов), получаем систему

$$\begin{cases} a^2(1-\alpha) + a^2(\beta-\alpha) = 0, \\ a^2\beta + a^2(\beta-\alpha) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 1+\beta-2\alpha = 0, \\ 2\beta-\alpha = 0, \end{cases}$$

$\alpha = {}^2/_3$, $\beta = {}^1/_3$. Теперь

$$\vec{MN} = \left(\frac{a}{3};\ \frac{a}{3};\ -\frac{a}{3}\right).$$

$$|\vec{MN}| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

З а д а ч а 4. *В пространстве даны два луча AM и BK, не лежащие в одной плоскости и образующие между собой угол $\pi/2$; отрезок AB — их общий перпендикуляр. На лучах AM и BK взяты точки E и F так, что*

$$2\,|AE|\cdot|BF| = |AB|^2.$$

Доказать, что расстояние от середины C отрезка AB до прямой EF равно $|AB|/2$.

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 4. Искомое расстояние равно длине высоты CD треугольника CEF. Найти ее можно из треугольника CDE, если знать длину стороны EC и величину угла CED. Положим $\varphi = \widehat{CED}$, $|AB| = a$, $|BF| = p$, $|AE| = m$, тогда по условию $2mp = a^2$. Запишем координаты некоторых точек и векторов:

$C(0;\ 0;\ a/2)$, $E\ (m;\ 0;\ 0)$, $F\ (0;\ p;\ a)$;
$\vec{EC} = (-m;\ 0;\ a/2)$, $\vec{EF} = (-m;\ p;\ a)$.
Имеем:

$$\cos\varphi = \cos\left(\vec{EF}\,\widehat{\ }\,\vec{EC}\right) = \frac{m^2 + \frac{a^2}{2}}{\sqrt{m^2+p^2+a^2}\,\sqrt{m^2+\frac{a^2}{4}}}.$$

Подставляя вместо a^2 его выражение через m и p и учитывая, что $m>0$ и $p>0$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{m^2+mp}{(m+p)\sqrt{m^2+\frac{mp}{2}}} = \frac{m}{|\vec{EC}|}.$$

Уже отсюда видно, что $\widehat{AEC} = \varphi$ (из

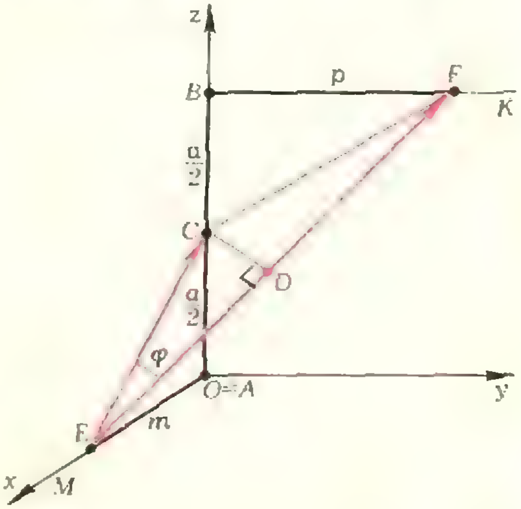


Рис. 4.

ΔAEC), поэтому $|CD| = |CA| = a/2$. Можно также (чисто формально) найти $|ED| = |EC| \cos \varphi = m$, а потом по теореме Пифагора $|CD|$, или

$$|CD| = |CE| \sin\varphi = |CE| \sqrt{1 - \cos^2\varphi}.$$

3. Задачи на сечения

Обычно в таких задачах требуется найти сечение многогранника плоскостью (то есть его форму и площадь). В сечении получается многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника, а сторонами — отрезки прямых, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника.

Стоит напомнить, что секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым — это часто помогает при решении задач, например, на сечение куба. При вычислении площади сечения бывает полезна формула, связывающая площадь фигуры с площадью ее проекции $S_{\text{пр}} = S_{\text{фиг}} \cdot \cos\varphi$ (см. «Геометрия 10», § 50). Нередко эта формула позволяет вообще не находить само сечение, а сразу дает его площадь.

Задача 5. *Найти форму и площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани CDD_1C_1.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 5. Уравнение секущей плоскости как общее уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Соотношение между коэффициентами a, b, c, d можно найти из условия, что точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $E(1;\ {}^1/_2;\ 0)$ (середина ребра BC) и $M\ ({}^1/_2;\ 1;\ {}^1/_2)$ (центр грани CDD_1C_1) лежат в этой плоскости, то есть координаты этих точек должны удовлетворять уравнению плоскости. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0, \\ a\cdot 1 + b\cdot \dfrac{1}{2} + c\cdot 0 + d = 0, \\ a\cdot \dfrac{1}{2} + b\cdot 1 + c\cdot \dfrac{1}{2} + d = 0. \end{cases}$$

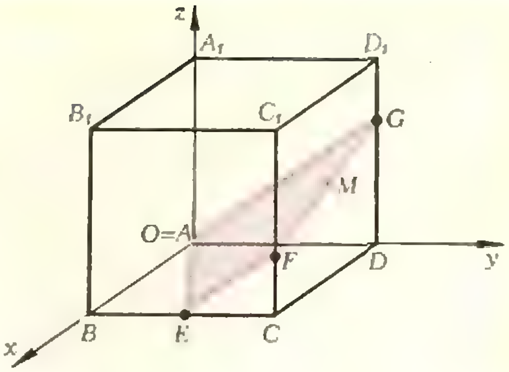


Рис. 5.

Из этой системы получаем $d = 0$, $b = -2a$, $c = 3a$, то есть уравнение секущей плоскости имеет вид

$$ax - 2ay + 3az = 0.$$

При разных a (не равных нулю) получается уравнение одной и той же плоскости (почему?), поэтому положим $a = 1$. Тогда уравнение секущей плоскости запишется так:

$$x - 2y + 3z = 0.$$

Теперь легко найти координаты точек пересечения секущей плоскости с ребрами куба. Координаты точки F должны иметь вид $F\ (1;\ 1;\ f)$, поскольку точка F лежит на прямой CC_1; кроме того, точка F лежит в секущей плоскости, это дает уравнение

$$1 - 2\cdot 1 + 3\cdot f = 0,$$

откуда $f = {}^1/_3$. Итак, $F\ (1;\ 1;\ {}^1/_3)$. Аналогично находим $G\ (0;\ 1;\ {}^2/_3)$, откуда ясно, что сечение — четырехугольник, причем трапеция ($|AG| \parallel |EF|$). Можно было бы найти ее основания и высоту, а по ним — и площадь трапеции, но проще поступить иначе. Проекцией сечения $AEFG$ на плоскость $ABCD$ является четырехугольник $AECD$, площадь которого равна ${}^3/_4$. Косинус угла между плоскостями $AEFG$ и $ABCD$ равен абсолютной величине косинуса угла между векторами, перпендикулярными этим плоскостям, например $\vec{n_1} = (1;\ -2;\ 3)$ и $\vec{n_2} = \overrightarrow{AA_1} = (0;\ 0;\ 1)$ (см. «Геометрия 10», § 46, зад. 43), поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{|1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 3\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Следовательно,

$$S_{AEFG} = \frac{3/4}{3/\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Задача 6. *Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения была наименьшей?*

Пусть секущая плоскость проходит через диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пересекает ребро CD в точке E (случай, когда секущая плоскость пересекает другое ребро, сводится к этому поворотом куба вокруг диагонали AC_1 и переменой обозначений). Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 6, ребро куба положим равным 1 (почему это можно сделать?). Сечением куба является параллелограмм AEC_1F (сечению принадлежат точки A, E, C_1, а потому и точка F, определяемая условиями $[C_1F] \parallel [EA]$, $[AF] \parallel [EC_1]$). Его проекцией на плоскость грани ADD_1A_1 является сама эта грань, поэтому

$$S_{AEC_1F} = \frac{S_{ADD_1A_1}}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

где φ — величина двугранного угла между плоскостями AEC_1F и ADD_1A_1. Нас интересует наибольшее значение $\cos\varphi$. Дальше можно действовать как в предыдущей задаче. Найдем координаты некоторых точек:

$A(0;\ 0;\ 0)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $E\ (e;\ 1;\ 0)$

(абсцисса точки E пока не известна); затем уравнения плоскостей:

AEC_1F: $1\cdot x - e\cdot y + (e-1)z = 0$,

ADD_1A_1: $1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0$;

затем перпендикулярные этим плоскостям векторы:

$\vec{n}_1 = (1;\ -e,\ e-1)$,

$\vec{n}_2 = (1;\ 0;\ 0)$

и косинус угла между ними:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+(e-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e^2-e+1}}.$$

Наибольшее значение $\cos\varphi$ достигается при наименьшем значении e^2-e+1, которое в свою очередь достигается при $e = 1/2$ (проверьте!). Итак, точка E должна быть серединой ребра CD.

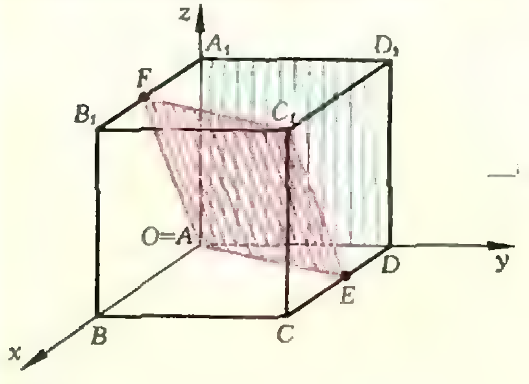


Рис. 6.

4. Пирамида и шар

Задача 7. *Пирамида, основанием которой служит правильный треугольник со стороной a, вписана в сферу. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, третья грань образует с плоскостью основания двугранный угол φ. Найти площадь сферы.*

Если две боковые грани перпендикулярны плоскости основания пирамиды, то и боковое ребро, являющееся пересечением этих граней, перпендикулярно основанию. Обозначим вершину пирамиды через S, второй конец рассматриваемого ребра через O, две другие вершины основания через A и B и построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 7. Как известно, центр O_1 сферы, описанной около пирамиды, проектируется в центр O_2 окружности, описанной около основания пирамиды. Найдем координаты некоторых точек (рис. 7):

$O\ (0;\ 0;\ 0)$, $A\ (0;\ a,\ 0)$,

$$B\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right),$$

$$O_2\left(\frac{a}{2\sqrt{3}};\ \frac{a}{2};\ 0\right).$$

Обозначим через s и h числа, описывающие положения точек S и O_1: $S\,(0;\ 0;\ s)$, $O_1\ \left(\frac{a}{2\sqrt{3}};\ \frac{a}{2};\ h\right)$.

Тогда мы можем написать два уравнения: первое—равенство расстояний $|O_1S|$ и $|OO_1|$ (равенство расстояний

$|OO_1|$, $|O_1A|$ и $|O_1B|$ будет выполняться автоматически, поскольку $|O_1O_2| \perp (OAB)$ и O_2—центр треугольника OAB), второе—условие, что $\cos((SAB), \widehat{\ }(OAB)) = \cos\varphi$ в координатной форме.

Легко найти, что уравнение плоскости SAB имеет вид

$$\frac{s}{\sqrt{3}}\cdot x + s\cdot y + a\cdot z - a\cdot s = 0,$$

причем вектор $\vec{n}_1 = \left(\frac{s}{\sqrt{3}};\ s;\ a\right)$ перпендикулярен этой плоскости, а плоскости OAB перпендикулярен вектор $\vec{n}_2 = (0;\ 0;\ 1)$. Теперь получаем два уравнения:

$$\sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + (h - s)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + h^2},$$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{s^2}{3} + s^2 + a^2}} = \cos\varphi.$$

Из второго уравнения находим

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2} a \operatorname{tg}\varphi,$$

а после этого из первого

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4} a \operatorname{tg}\varphi.$$

Теперь

$$R^2 = |OO_1|^2 = \frac{a^2(16 + 9\operatorname{tg}^2\varphi)}{48}$$

и

$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2(16 + 9\operatorname{tg}^2\varphi)}{12}.$$

Задача 8. *Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Два двугранных угла при ребрах основания — прямые, а два других равны φ. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 8. Центр O_1 сферы должен быть удален от всех граней пирамиды, в частности, и от координатных плоскостей, на расстояние r — радиус сферы, поэтому его координаты имеют вид $O_1(r;\ r;\ r)$. Плоскость SBC содержит точки $B(a;\ a;\ 0)$, $C(0;\ a;\ 0)$ и $S(0;\ 0;\ a\operatorname{tg}\varphi)$, отсюда находим ее уравнение:

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot y - z - a\operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Расстояние от точки O_1 до плоскости SBC, с одной стороны, должно быть равно r; с другой стороны, его можно выразить через координаты точек S, B, C: вектор $\overrightarrow{O_1Q}$, перпендикулярный плоскости SBC ($Q \in (SBC)$), коллинеарен вектору $\vec{n} = (0; \operatorname{tg}\varphi;\ 1)$ (координаты вектора $\vec{n}$ найдены из уравнения плоскости SBC), поэтому

$$\overrightarrow{O_1Q} = h\cdot\vec{n} = (0;\ h\operatorname{tg}\varphi;\ h).$$

Теперь, зная координаты точки O_1, находим координаты точки Q

$$Q(r;\ h\operatorname{tg}\varphi - r;\ h + r)$$

и значение h из условия, что точка Q принадлежит плоскости SBC (то есть координаты точки Q удовлетворяют уравнению плоскости SBC):

$$\operatorname{tg}\varphi\,(h\operatorname{tg}\varphi + r) + h - r - a\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

откуда

$$h = (a\operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi,$$

$$|\overrightarrow{O_1Q}| = |h|\cdot|\vec{n}| = (a\operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = (a\operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi$$

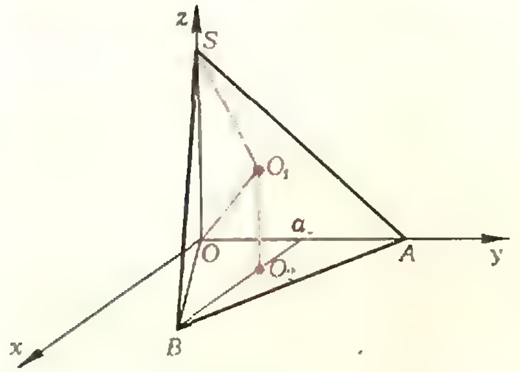


Рис. 7.

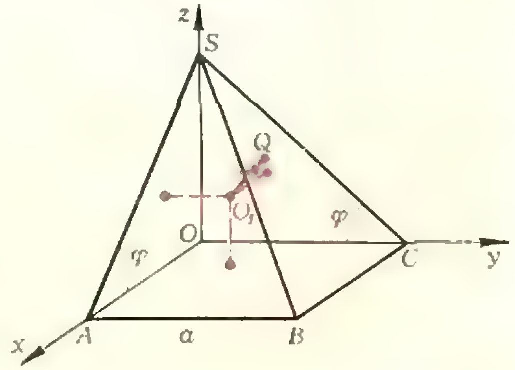


Рис. 8.

(легко видеть, что $h>0$). Поскольку должно быть $|\overrightarrow{O_1Q}| = r$, получаем уравнение

$$(a \operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi = r,$$

из которого находим r:

$$r = \frac{a\sin\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

Упражнения

1. Докажите, что площадь произвольного треугольника ABC можно вычислять по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2\cdot|AC|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

2. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a, высота h. Найти расстояние между прямыми BD и SA.

4. Ребра тетраэдра равны l. Найти расстояния между скрещивающимися высотами граней тетраэдра.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом α. Под каким углом к плоскости основания наклонена плоскость, рассекающая этот параллелепипед по квадрату?

6 (МГУ, мехмат, 1970). Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, точка D — основание высоты BD треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

7 (МГУ, физфак, 1976). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка E — середина ребра A_1D_1, точка F — середина ребра AA_1. Найти радиус меньшей сферы, проходящей через точки E и F и касающейся граней двугранного угла, образованного плоскостями BB_1C_1C и DD_1C_1C.

Приложение

Основные формулы метода координат

Координаты вектора $\vec a$	$\vec a = x\vec i + y\vec j + z\vec k = (x; y; z)$ $x = \vec a\cdot\vec i,\ y = \vec a\cdot\vec j,\ z = \vec a\cdot\vec k$
Координаты точки M	Если $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, то $M(x; y; z)$
Связь координат вектора $\overrightarrow{AB}$ с координатами его начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$	$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$
Формулы параллельного переноса $\vec p = (a; b; c)$, $M(x; y; z)$	$\vec p\,(M) = M_1(a+x;\ b+y;\ c+z)$
Сумма и разность векторов $\vec a = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec b = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec a + \vec b = (x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$ $\vec a - \vec b = (x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$
Произведение вектора $\vec a = (x; y; z)$ на число p	$p\vec a = (px; py; pz)$
Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec a = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec b = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec a\cdot\vec b = \lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert\cdot\cos(\widehat{\vec a, \vec b})$ $\vec a\cdot\vec b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Продолжение

Длина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	
Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$	
Угол между векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$	$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$	
Формулы гомотетии с центром $O(0; 0; 0)$ и коэффициентом k, $M(x; y; z)$	$H_O^k(M) = M_1(kx; ky, kz)$	
Уравнение плоскости	$ax+by+cz+d=0$	
Уравнения полупространств с границей α: $ax+by+cz+d=0$	открытые	содержат точку $O(0; 0; 0)$ при
	$ax+by+cz+d>0$ $ax+by+cz+d<0$	$d>0$ $d<0$
	замкнутые	
	$ax+by+cz+d\geqslant 0$ $ax+by+cz+d\leqslant 0$	$d\geqslant 0$ $d\leqslant 0$
Вектор, перпендикулярный плоскости α: $ax+by+cz+d=0$	$\vec{n}_\alpha = (a; b; c)$	
Уравнение плоскости, содержащей точку $A(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (a; b; c)$	$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$	
Угол между плоскостями α: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, β: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ $\vec{n}_\alpha = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n}_\beta = (a_2; b_2; c_2)$	$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \lvert\cos(\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta})\rvert = \dfrac{\lvert a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$	
Площадь $S_{\text{пр}}$ ортогональной проекции на плоскость β многоугольника площади S, лежащего в плоскости α	$S_{\text{пр}} = S\cdot\cos(\widehat{\alpha, \beta})$	
Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $S(a; b; c)$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	
Уравнение плоскости, касающейся сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ в точке $A(m; p; q)$	$(m-a)(x-a)+(p-b)(y-b)+(q-c)(z-c)=R^2.$ $(a-m)(x-m)+(b-p)(y-p)+(c-q)(z-q)=0.$	

А. Виленкин

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в IV квартале этого года и представляющие интерес для наших читателей.

Большинство из них можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Волынский Б. А. *Сферическая тригонометрия.* Объем 6 л., тираж 15 000 экз., цена 20 к.

В книге рассматриваются вопросы геометрии на поверхности сферы, сферические двуугольники и треугольники, а также соотношения между основными элементами сферических треугольников. Выводятся формулы, связывающие стороны и углы сферических треугольников.

Книга предназначена для людей, интересующихся астрономией. Она может быть использована на занятиях астрономического кружка.

2. Погорелов А. В. *Элементарная геометрия.* Издание 3-е, доп. Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 43 к.

Эта книга, написанная крупным ученым-геометром, содержит материал, несколько выходящий за рамки школьной программы. Однако она может служить хорошим пособием для лиц, интересующихся геометрией, и для преподавателей математики в средних школах.

Издательство «Просвещение»

3. Воротников И. А. *Занимательное черчение.* Издание 3-е, перераб. Объем 13 л., тираж 80 000 экз., цена 55 к.

Занимательная форма задач и упражнений, помещенных в книге, хорошо сочетается с их ярко выраженным практическим содержанием. Предлагаемые графические задачи опираются на широкий круг явлений и фактов повседневной жизни. Решаются они с помощью тех знаний, которые ученики получают из школьного курса черчения.

Издательство «Знание»

4. *«Число и мысль».* Сборник статей. Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 27 к.

Сборник подготовлен группой ведущих советских ученых — членами-корреспондентами АН СССР Н. Н. Моисеевым, А. А. Ляпуновым, академиком А. А. Дородницыным и др.

Авторы в научно-популярной форме рассказывают о том, что нового принесли математические методы моделирования в решение биологических, социологических, экономических и других проблем.

Сборник рассчитан на широкий круг читателей.

Книги серии «Математика и кибернетика»

5. Вентцель Е. С. *Теория вероятностей* (первые шаги).

Автор брошюры — видный советский ученый — популярно рассказывает о теории вероятностей, о том, как сложилась эта дисциплина, как нашла широчайшее применение почти во всех отраслях современной науки, а также о том, как начать ее изучение.

Брошюра является своеобразным предисловием к углубленному изучению теории вероятностей.

6. Гнеденко Б. В., Канторович Л. В. и др. *Математика — народному хозяйству.*

Сборник включает статьи крупнейших советских ученых,—академиков Л. В. Канторовича, В. П. Тихонова, академика АН УССР Б. В. Гнеденко и др. Интересно и доступно авторы рассказывают о важнейших научных проблемах, поставленных всем ходом развития народного хозяйства и успешно решенных при участии математики; о теории линейного программирования, теории очередей, оптимального планирования, исследований операций и других важнейших приложениях математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. Смородинский Я. А. *Тяготение.* (Библиотечка физико-математической школы.) Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 17 к.

Основная часть книги посвящена применению закона всемирного тяготения к решению простых задач, связанных с падением тел, движением планет и космических аппаратов. Решение задач не требует знания высшей математики. Используются лишь формулы векторной алгебры, краткие сведения о которой помещены в приложении. В книге изложена история науки о тяготении, о законах движения тел в поле тяжести и о тех изменениях, которые принесла с собой общая теория относительности.

Книга предназначена для школьников старших классов и учащихся техникумов.

2. Гладкова Р. А. и др. *Сборник задач и вопросов по физике.* Объем 20 л., тираж 30 000 экз., цена 64 к.

Материал, помещенный в книге, полностью охватывает всю школьную программу по курсу физики. Приведенные задачи для отдельных тем расположены в порядке возрастания трудности. В начале каждого параграфа приведены примеры решения типичных задач с подробными объяснениями.

Книга рассчитана на школьников старших классов и учащихся техникумов, а также на лиц, готовящихся самостоятельно к поступлению в институт.

3. Шаскольская М. П. *Кристаллы.* Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 90 к.

В книге в простой и доступной форме рассказывается о том, как возникают и растут кристаллы в природе, как выращивают кристаллы в лабораториях и на заводах, о закономерностях в структуре кристаллов и об их удивительных свойствах, о широком применении кристаллов в самых различных областях техники.

Хотя книга рассчитана на преподавателей, школьников старших классов, инженеров и техников, но и специалист почерпнет из нее много нового для себя.

4. **Хургин Я. И.** *Да, нет или может быть...* Объем 10 л., тираж 75 000 экз., цена 33 к.

При управлении технологическими процессами, летательными аппаратами, экономическими и социальными системами весьма часто приходится принимать решения в обстановке случайности, при наличии ошибок и помех. Тогда на первый план выступают вероятностно-статистические методы. Изучение функционирования живых организмов с позиций теории управления опирается на те же методы. В занимательной форме, без применения сложного математического аппарата, на простых примерах из области естествознания и техники в книге рассказывается о современной математической статистике, о теории статистических выводов и принятия решений, о построении математических моделей реальных явлений и о статистической теории эксперимента.

Книга рассчитана на школьников старших классов и всех, интересующихся современной теорией управлений.

5. **Ефремов Ю. Н.** *В глубины Вселенной.* Издание 2-е, перераб. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

Книга посвящена строению окружающего нас мира звезд и галактик, истории его изучения и методам определения расстояний во Вселенной. Именно развитие методов нахождения расстояний и позволило узнать Вселенную: только зная расстояние небесного объекта, можно что-то сказать о его природе. История астрономии — это история споров о расстояниях: сначала Солнца и Луны, затем звезд и, уже в начале нашего века, галактик.

Книга написана живо и хорошо иллюстрирована. Рассчитана на широкий круг лиц со средним образованием и школьников старших классов, интересующихся проблемами астрономии.

Издательство «Знание»

6. *Физика наших дней.* Сборник статей. Объем 8 л. тираж 100 000 экз., цена 24 к.

В книге в научно-популярной форме изложены основные фундаментальные и прикладные направления современной физики, играющие важную роль в научно-технической революции.

Теория относительности, проблемы и перспективы термоядерного синтеза, квантовая электроника, физика лазеров — этим и другим вопросам посвящена книга.

Она предназначена для самого широкого круга читателей.

7. **Фабрикант В. А., Глазунов А. Г.** *Достижения физики — народному хозяйству.* Объем 7 л., тираж 100 000 экз., цена 21 к.

Книга посвящена современным достижениям физики, поставленным на службы народному хозяйству.

Авторы рассказывают об использовании новых методов в технологии производства, о применении новейших физических данных в технике связи, в энергетике. В книге также нашел отражение вопрос: какой вклад вносит физика наших дней в проблему оздоровления среды обитания человека?

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

И. Клумова, М. Смолянский

Конкурс художников

Это соревнование началось в «Кванте» № 4 за 1976 год. Напоминаем, что точки в декартовой системе координат нужно ставить по очереди и соединять каждую точку отрезком с предыдущей точкой. Если вы все сделаете без ошибки, то у вас получатся... Впрочем, что у вас получится увидите сами!

1. (6; 1), (6; —1), (7; —3), (7; —6), (6; —7), (5; —7), (6; —6), (6; —4), (5; —6), (4; —7), (3;—7), (4; —6), (5; —3), (4; —1), (1; —2), (—2; —2), (—2; —3), (—1; —6), (—2; —7), (—3; —7), (—2; —6), (—3; —3), (—3; —6), (—4; —7), (—5; —7), (—4; —6), (—4; —3), (—5; —1), (—5; 0), (—6; 3), (—7; 3), (—9; 1), (—10; 2), (—9; 4), (—9; 5), (—8; 6), (—8; 7), (—7; 6), (—7; 7), (—6; 6), (—4; 5), (—2; 3), (2; 2), (5; 3), (7; 2), (8; —3), (7; —4), и (—8,5; (4,5).

2. (—3; —5), (—4; —7), (—8; —12), (—10; —12), (—8; —11), (—6; —6), (—7; —4), (—12; 2), (—13; 6), (—12; 9), (—13; 10), (—15; 9), (—15; 10), (—14; 11), (—12), 12), (—11; 13), (—9; 12), (—8; 13), (—8; 12), (—7; 10) (—7; 7), (—5; 5), (—3; 8), (—2; 9), (—2; 10), (—1; 11), (0; 11), (1; 10), (2; 8), (3; 8), (5; 10), (6; 12), (8; 13), (11; 9), (11; 8), (13; 4), (15; 2), (15; 0), (14; 2), (13; 3), (12; —2), (12; —3), (13; —6), (10; —12), (8; —12), (10; —11), (11; —6), (10; —3), (3; —12), (1; —12), (3; —11), (5; —8), (6; —6), (6; —4), (8; 2), (4; 0), (2; —2), (—1; —4) (—2; —6), (—5; —12), (—7; —12), (—5; —11), (—4; —7), и (—11,5; 11,5).

3. (0; —2), (2; —3), (3; —4), (7; —6), (9; —8), (9; —10), (10; —12), (8; —11), (9; —12), (7; —11), (6; —10), (3; —10), (4; —9), (0; —7), (—1; —7), (—4; —8), (—7; —10), (—8; —12), (—8; —10), (—10; —9), (—8; —9), (—4; —5), (—1; —4), (1; —4), (1; —3), (0; —2), и (8,5; —9).

Жизнь — научный подвиг

У знаменитой польской ученой Марии Склодовской-Кюри (или, как чаще ее именуют, Марии Кюри) было две дочери. Старшая из них — Ирэн — также стала всемирно известным физиком. Вместе со своим мужем Фредериком Жолио-Кюри она открыла искусственную радиоактивность и была удостоена за это открытие Нобелевской премии. Младшая дочь Ева стала журналисткой. Она-то и написала великолепную книгу о своей матери. Эта книга называется «Мария Кюри». Ее впервые издали в 1937 году во Франции, где она выдержала потом более сотни переизданий. Книга Евы Кюри переведена на двадцать пять языков. В 1959 году вышло первое советское издание этой книги. А в 1976 году издательство «Атомиздат» выпустило тиражом в 200 000 экземпляров четвертое издание*).

История науки знает не так уж много имен выдающихся женщин-ученых. И среди них на первом месте, безусловно, стоит имя Марии Кюри. За выдающиеся научные заслуги она была избрана почетным членом ста шести академий, научных учреждений и обществ, в том числе в 1926 году — почетным членом Академии наук СССР. А Нобелевская премия — высшая международная научная награда — присуждалась ей дважды.

Вся жизнь Марии Кюри была отдана науке. Вместе со своим мужем знаменитым французским физиком Пьером Кюри она заложила фундамент современных представлений о радиоактивном распаде природных элементов. Рентген, Беккерель, Пьер и Мария Кюри, Резерфорд, Бор — таковы имена основоположников наших знаний о природе атомов и атомных ядер.

В учебнике по физике для десятого класса среди портретов выдающихся ученых есть и портрет Марии Кюри. Рядом с ним помещены две даты: 1867—1934 — годы рождения и смерти. Вот и все, что о ней, как о человеке, можно узнать из учебника. А ведь она прожила удивительную и неповторимую жизнь! Конечно, учебник не может вдаваться в такие подробности. Рассказывая о жизни науки, он ничего не рассказывает о жизни ее творцов.

Книга Евы Кюри прослеживает весь жизненный путь ее матери, от первых шагов в здании мужской гимназии на Новолипской улице в Варшаве, где жили ее родители, до последних минут в лучшей палате санатория в Санселльмозе, где она умерла. Именно жизнь Марии Кюри, а не пересказ ее выдающихся научных достижений, заполняет страницы этой книги. Читая ее, шаг за шагом знакомишься не только с событиями этой необычайно трудной, полной суровых испытаний жизни, но и с мыслями и чувствами ее героев. В книгу включено много писем и других документов, принадлежащих самой Марии Кюри и ее близким. А читается она как увлекательная художественная повесть.

Бóльшая часть жизни Марии Кюри была пронизана упорной борьбой за самые скромные средства существования. Она рано лишилась матери. После блестящего окончания гимназии ей пришлось давать частные уроки, работать гувернанткой в провинциальных городках, чтобы накопить немного денег для дальнейшей учебы. Но в Польше того времени университеты не принимали на учебу женщин. Марии Склодовской пришлось ехать в Париж и жить там, вдали от родных, на такие скромные средства, что нередко дело доходило до голодных обмороков.

Неожиданная встреча с молодым необычайно талантливым французским физиком Пьером Кюри преобразила всю ее жизнь. Супруги Кюри начинают совместную работу по изучению явления радиоактивности, открытого Анри Беккерелем незадолго до их свадьбы. Потребовалось четыре года непрерывного, изнуряющего и, как позднее выяснилось, чрезвычайно опасного для здоровья труда в старом сарае с дырявой стеклянной крышей, чтобы из нескольких тонн урановой руды выделить ничтожное количество новых элементов, которые Мария Кюри назвала «полонием» (в честь своей родины Польши) и «радием». Не имея никакой государственной помощи, расходуя свои скромные средства на приобретение сырья, оборудования, реактивов, супруги Кюри выполняли работу грузчиков, кочегаров, лаборантов, химиков-аналитиков и физиков-исследователей. И все эти годы Мария Кюри даже не состояла в штате Школы физики, которой принадлежал сарай. Там преподавал Пьер, а ей милостиво разрешали работать бесплатно.

Это был беспримерный научный подвиг. Вот как писала об этом мадам Кюри в одном из своих писем: «В ту пору мы с головой ушли в новую область, которая раскрылась перед нами благодаря неожиданному открытию. Несмотря на трудные условия работы, мы чувствовали себя вполне счастливыми. Все дни мы проводили в лаборатории. В жалком сарае царил полный мир и тишина; бывало, что приходилось только следить за ходом той или другой операции, тогда мы прогуливались взад и вперед по сараю, беседуя о нашей теперешней и будущей работе; озябнув, подкреплялись чашкой чаю тут же у печки. В нашем общем, едином увлечении мы жили как во сне...»

За исследования радиоактивности в декабре 1903 года супругам Кюри совместно с Беккерелем присуждают Нобелевскую премию. К ним приходит всемирная известность. Но у них очень странное отношение к славе —

---

*) Е. Кюри. Мария Кюри. М., «Атомиздат», 1976.

они видят в ней прежде всего неприятную обузу, преграду для дальнейших исследований. В разное время сначала Пьер, а затем и Мария Кюри отказались от ордена Почетного легиона — одного из высших орденов Французской республики. В письме на имя декана Института физики, химии и естественных наук Пьер Кюри высказался по этому поводу кратко, но весьма выразительно: «Прошу Вас, будьте любезны передать господину министру мою благодарность и уведомить его, что не имею никакой нужды в ордене, но весьма нуждаюсь в лаборатории». (Он так и не получил желанной лаборатории до последних дней жизни.)

А вот и другие свидетельства их отвращения к славе: «Нас завалили письмами, и нет отбоя от журналистов и фотографов. Хочется провалиться сквозь землю, чтобы иметь покой...» (из письма Марии Кюри брату Юзефу Склодовскому). «Вы сами явились свидетелем внезапного увлечения радием. Это наградило нас всеми прелестями популярности: нас преследовали журналисты и фотографы со всех стран света; они доходили до того, что передавали разговор моей дочери с няней и описывали нашего тигрового кота. Кроме того, нам писали письма и посещали лично всякие эксцентричные личности и безвестные изобретатели... Наконец, коллекционеры автографов, снобы, светские люди. . А со всем тем ни одной минуты покоя в лаборатории, ... Я чувствую, как тупею от такого образа жизни...» (из письма Пьера Кюри Жоржу Гуи).

Но не только отношение к славе являлось своеобразием их личностей. Они проявили также поразительную бескорыстность, отказавшись запатентовать технологию получения радия. А ведь такой патент принес бы им огромные богатства. «По соглашению со мной — пишет Мария Кюри в своих воспоминаниях — Пьер отказался извлечь материальную выгоду из нашего открытия; мы не взяли никакого патента и, ничего не скрывая, обнародовали результаты наших исследований, а также способы извлечения чистого радия. Более того, всем заинтересованным лицам мы давали требуемые разъяснения. Это пошло на благо производства радия, которое могло свободно развиваться, сначала во Франции, потом за границей, поставляя ученым и врачам продукты, в которых они нуждались...

Подавляющее большинство моих друзей утверждают, и не без оснований, что если бы Пьер Кюри и я узаконили наши права, мы приобрели бы средства, достаточные для того, чтобы самим построить Институт радия, а не преодолевать бесконечные препятствия и трудности, которые ложились тяжким бременем на нас обоих, а теперь лежат на мне. И все-таки я думаю, что мы были правы, ... человечеству необходимы и мечтатели, для которых бескорыстное служение какому-нибудь делу настолько увлекательно, что им и в голову не приходит заботиться о личных материальных благах».

Бескорыстность неразрывно сочеталась у них с самоотверженностью, готовностью к самопожертвованию во имя интересов науки, интересов человечества. На страницах 165—166 мы читаем: «Немецкие ученые Вальхов и Гизель заявили в 1900 году, что новое вещество действует физиологически, и Пьер, пренебрегая опасностью, тотчас подверг свое предплечье действию радия. К его радости, участок кожи оказался поврежденным! В заметке для Академии наук он спокойно описывает наблюдаемые симптомы: «Кожа покраснела на поверхности в шесть квадратных сантиметров; имеет вид ожога, но не болит или болезненна чуть-чуть. Через некоторое время краснота, не распространяясь, начинает становиться интенсивнее; на двадцатый день образовались струпья, затем рана, которую лечили перевязками; на сорок второй день стала перестраиваться эпидерма от краев к центру, а на пятьдесят второй день остается еще ранка в квадратный сантиметр, имеющая сероватый цвет, что указывает на более глубокое омертвление тканей.

Добавим, что мадам Кюри, перенося в запаянной стеклянной трубочке несколько сантиграммов очень активного вещества, получила ожоги такого же характера, хотя маленькая пробирка находилась в тонком металлическом футляре

Кроме таких резких воздействий мы за время наших работ с очень активными веществами испытали на себе различные виды их воздействия. Руки вообще имеют склонность к шелушению; концы пальцев, державших пробирки или капсулы с сильно радиоактивными веществами, становятся затверделыми, а иногда очень болезненными; у одного из нас воспаление оконечностей пальцев длилось две недели и кончилось тем, что сошла кожа, но болезненная чувствительность исчезла только через два месяца».

Эти эксперименты проложили путь к лечению раковых опухолей при помощи радиоактивных излучений. Все дело заключалось в дозе полученного облучения. Радий продлил жизнь многим тяжело и безнадежно больным людям, но он же убил Марию Кюри; она умерла от острой злокачественной анемии, вызванной длительным воздействием больших доз радиоактивного облучения.

И все-таки она была необычайно счастливой. Незадолго до смерти она писала: «Я принадлежу к числу людей, которые думают, что наука — это великая красота. Ученый у себя в лаборатории не просто техник; это ребенок лицом к лицу с явлениями природы, действующими на него, как волшебная сказка...»

Трудно без волнения читать эту превосходную книгу, с которой, безусловно, следует познакомиться каждому, кто любит науку.

В. Рудов

К статье «Повороты и пересечения многогранников»

1. $a^3\sqrt{2}/36$. 2. $3a^3/4$. 3. $a^3\sqrt{2}/54$.
4. $a^3\sqrt{2}/24$.

К статье «Задачи на законы динамики материальной точки»

1. $|\vec{F}_Д| = m\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2L} + |\vec{g}|\right) \approx 9{,}6\cdot10^6$ Н.

2. Не изменится $\left(|\vec{T}| = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{F}|\right)$.

3. $H = \frac{1}{2}\frac{m|\vec{v}|}{M}\left(M + \frac{m|\vec{v}|}{M|\vec{g}|}\right) = 600$ м

4. $|\Delta\vec{F}_Д| = G|\vec{v}|\sin\alpha = 5\cdot10^2$ Н.

5. $t = \sqrt{L/2|\vec{g}|}\ \times$
$\times\sqrt{\frac{4m_1+m_2}{m_2-2m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}} \approx 3{,}6$ с.

К статье «Координатный метод»

1. Воспользоваться формулами

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{BAC},$$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|AB|\cdot|AC|}.$$

2. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

3. $\frac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$.

4. $l\sqrt{10}$, $l\sqrt{2}$, $\sqrt{35}$.

5. $\arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

6. $|SE| = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}}{2}$.

Указание. Поместить начало координат в точку D, в качестве осей абсцисс и ординат выбрать (DB) и (DC); заметить, что $((AC),(BDE)) = ((DCB),\widehat{\ }(BDE))$, и найти координаты точек S и E.

7. $\frac{5-\sqrt{7}}{4}a$.

К статье «Гомотетия и замечательные точки в треугольнике»

(см. «Квант» № 10)

1. Если данные отрезки не конгруэнтны, то существуют две гомотетии, переводящие один из них в другой (см. рисунок 1 и 2; на рисунке 2 изображен случай, когда отрезки принадлежат одной прямой).

Если данные отрезки конгруэнтны, то существует одна гомотетия, переводящая один из них в другой.

2. Искомым множеством точек M является окружность, в которую переходит данная окружность при гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{3}$, но без образов точек A и B (рис. 3).

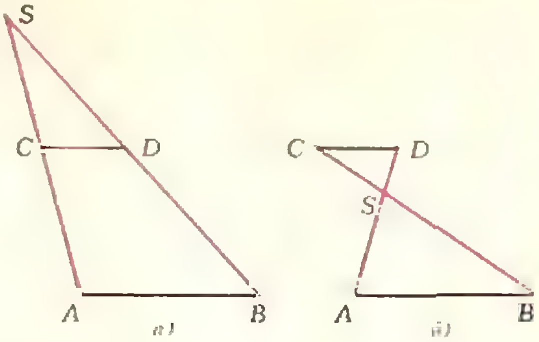


Рис. 1.

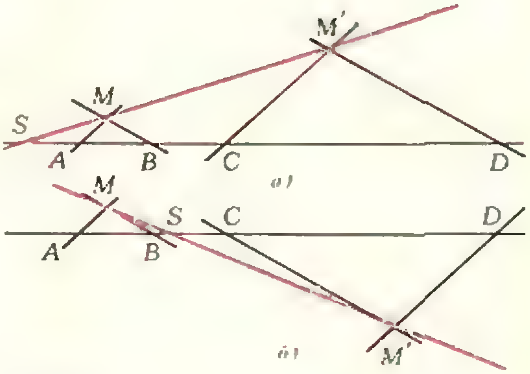


Рис. 2.

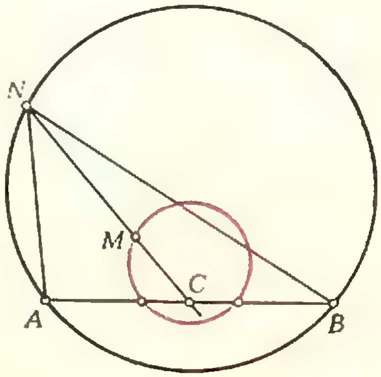


Рис. 3.

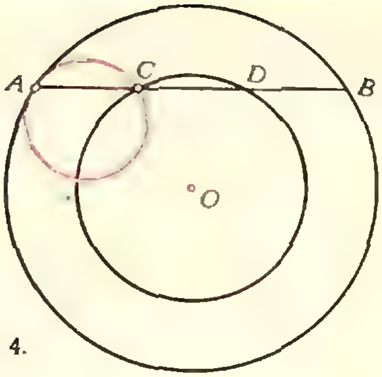


Рис. 4.

3. Пусть $(O;\ R)$ и $(O;\ r)$ — данные концентрические окружности: $|AB|$ — искомая хорда; $\{C,\ D\}$ $|AB|\cap(O;\ r)$. (Точку A можно выбрать на большей окружности произвольно.)

По условию $[AC]\cong[CD]\cong[DB]\Rightarrow$

$$\Rightarrow C= H_A^{\frac{1}{3}}(B).$$

Но

$$B\in(O;\ R)\Rightarrow C\in H_A^{\frac{1}{3}}((O;\ R)).$$

$$\left.\begin{array}{l} C\in(O;\ r) \\ C\in H_A^{\frac{1}{3}}((O;\ R))\end{array}\right\}\Rightarrow C\in(O;\ r)\cap H_A^{\frac{1}{3}}((O;\ R)).$$

Итак, задача имеет решение, если меньшая окружность пересекается с образом большей окружности в гомотетии $H_A^{\frac{1}{3}}$. Последнее произойдет, когда $R > r \geqslant \frac{R}{3}$ (см. рис. 4).

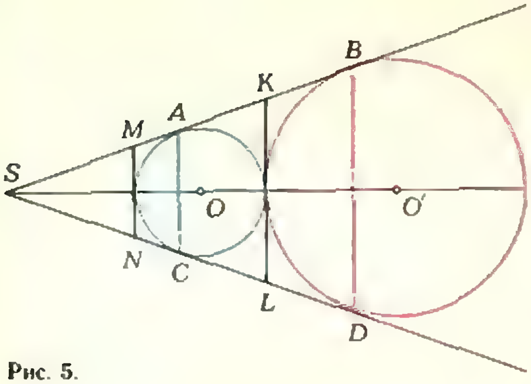


Рис. 5.

4. Пусть AB и CD — общие внешние касательные к двум данным окружностям $(O;\ r)$ и $(O';\ r')$, касающимся внешним образом (A, B, C и D — точки касания).

Если $r = r'$, то $ABCD$ — квадрат, и в него можно вписать окружность.

Если $r\neq r'$, то $(AB)\cap(CD)=S$. Проведем касательные MN и KL к окружности $(O;\ r)$ в точках пересечения ее с прямой SO (рис. 5).

Пусть H — гомотетия, переводящая окружность $(O;\ r)$ в окружность $(O';\ r')$:

$$\left.\begin{array}{l} H_S([MN])=[KL] \\ H_S([AC])=[BD]\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|KL|}{|MN|}=\frac{|BD|}{|AC|}\Rightarrow\frac{|AC|}{|MN|}=\frac{|BD|}{|KL|}=k;$$

и гомотетия H_S^k переводит четырехугольник $MKLN$ в четырехугольник $ABDC$. Но в четырехугольник $MKLN$ вписана окружность $(O;\ r)$: следовательно, в гомотетичный ему четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

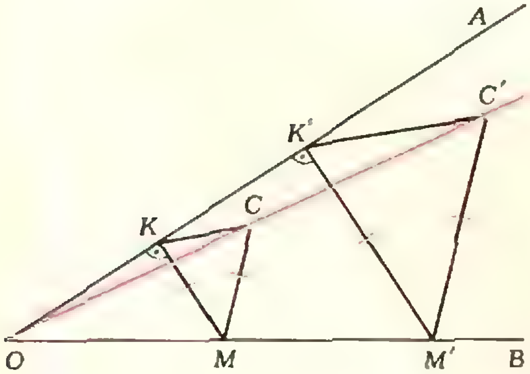


Рис. 6.

5. См. рисунок 6.

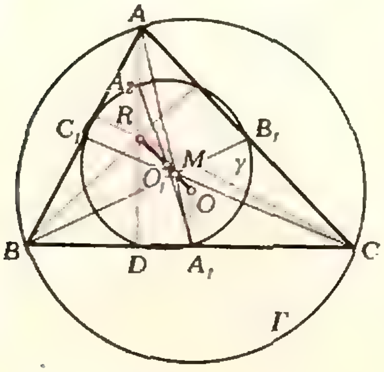


Рис. 7.

6. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC, R — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — середины сторон (рис. 7).

Гомотетия $H_M^{-\frac{1}{2}}$ переводит окружность Γ, описанную около треугольника ABC, в окружность γ с центром O_1, проходящую через середины сторон A_1, B_1 и C_1. При этом $H_M^{-\frac{1}{2}}(R)=O$, $|RM|=2|OM|$; $H_M^{-\frac{1}{2}}(O)=O_1$, $|O_1M|=\frac{1}{2}|OM|$, так что центр O_1 окружности γ является серединой отрезка RO (см. рис. 7).

Покажем, что окружность γ проходит через середину A_2 отрезка RA (для отрезков RB и RC доказательство аналогично).

Заметим, что $\overline{H}_M^{-\frac{1}{2}}([RA))=[OA_1)$, так что $|OA_1|=\frac{1}{2}|RA|$. Симметрия S_{O_1} с центром в O_1 переводит противоположно направленные лучи OA_1 и RA друг в друга, а потому $A_2 = S_{O_1}(A_1) \in [RA)$ и $|RA_2|=|OA_1|=\frac{1}{2}|RA|$. Поскольку симметрия S_{O_1} переводит окружность γ в себя, получаем, что $A_2 \in \gamma$.

Далее, пусть D — основание высоты, опущенной из вершины A. Поскольку A_1A_2 — диаметр окружности γ, а D — вершина прямоугольного треугольника A_1DA_2 с гипотенузой A_1A_2, получаем, что основание высоты D также принадлежит γ. То же справедливо и для других высот треугольника ABC.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 10)

1. а) 350; б) 108; в) 105; 135, 225, 315, 405. **2.** На столе лежат: желтый квадрат, зеленый ромб, красный треугольник, синий круг. **3.** В 1956 году.

К статье «Степа Мошкин повторяет геометрию»

(см. «Квант» № 10)

1. а) Красные окружности сдвинуты; б) рука у «человека» повернута не в ту сторону; в) красная окружность должна быть большего радиуса; г) красная линия должна быть симметрично отражена в l и уменьшена.

2. Если $(AF) \parallel (A'E)$, то $(A'B) \parallel (AB)$ и либо $A = A' \in (MK)$, и тогда решить задачу невозможно (если $B \notin (MK)$), либо $A \neq A'$ и тогда $B \in (AA')$. Во втором случае надо построить сначала образ вспомогательной точки C, для которой прямые AC, $A'C$ и BC пересекают прямую MK в пределах чертежа.

3. Решается аналогично задаче 2.

5. Указание. Оси симметрии принадлежит точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции.

6. а) Постройте равносторонний треугольник AOA_1.

б) Дважды произведите поворот на 60°.

7. Указание. Произвести три поворота на 60° с центром O.

8. Дважды воспользуйтесь предыдущей задачей.

9. а) $A \to D$, $B \to F$, $C \to E$.

б) С помощью осевой и центральной симметрий.

К задачам

(см. «Квант» № 10, с. 63)

1. $x = \pi m/3$ $(m \in \mathbf{Z})$. Указание. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно $\sin 1917x$, найдите x из полученных значений $\sin 1977x$ и $\sin 1917x$ и сравните их. **4.** $x = 5$, $y = 3$. **5.** $n = 1, 2, 3$. Указание. Функция $f(n) = (9/12)^n + (10/12)^n$ монотонно убывает.

К заметке «Вот это близнецы!»

(см. «Квант» № 10, с. 39)

В обоих примерах $\overline{\text{икс}} = 305$, $\overline{\text{зет}} = 124$

К задаче «Турнирная таблица»

(см. «Квант» № 9, с. 10)

	10а	10б	10в	10д	10г
10а	—	1:0	0:0	1:0	0:3
10б	0:1	—	1:0	0:1	5:0
10в	0:0	0:1	—	5:0	0:0
10д	0:1	1:0	0:5	—	2:1
10г	3:0	0:5	0:0	1:2	—

К кроссамберу «Ребята с нашего двора»

(см. «Квант» № 9, 3-ю с. обл.)

Симе 12 лет, Римме 10 лет, Фиме 9 лет, Диме 8 лет и Тиме 7 лет.

Номер готовили:
А. Виленкин, Н. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович.

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

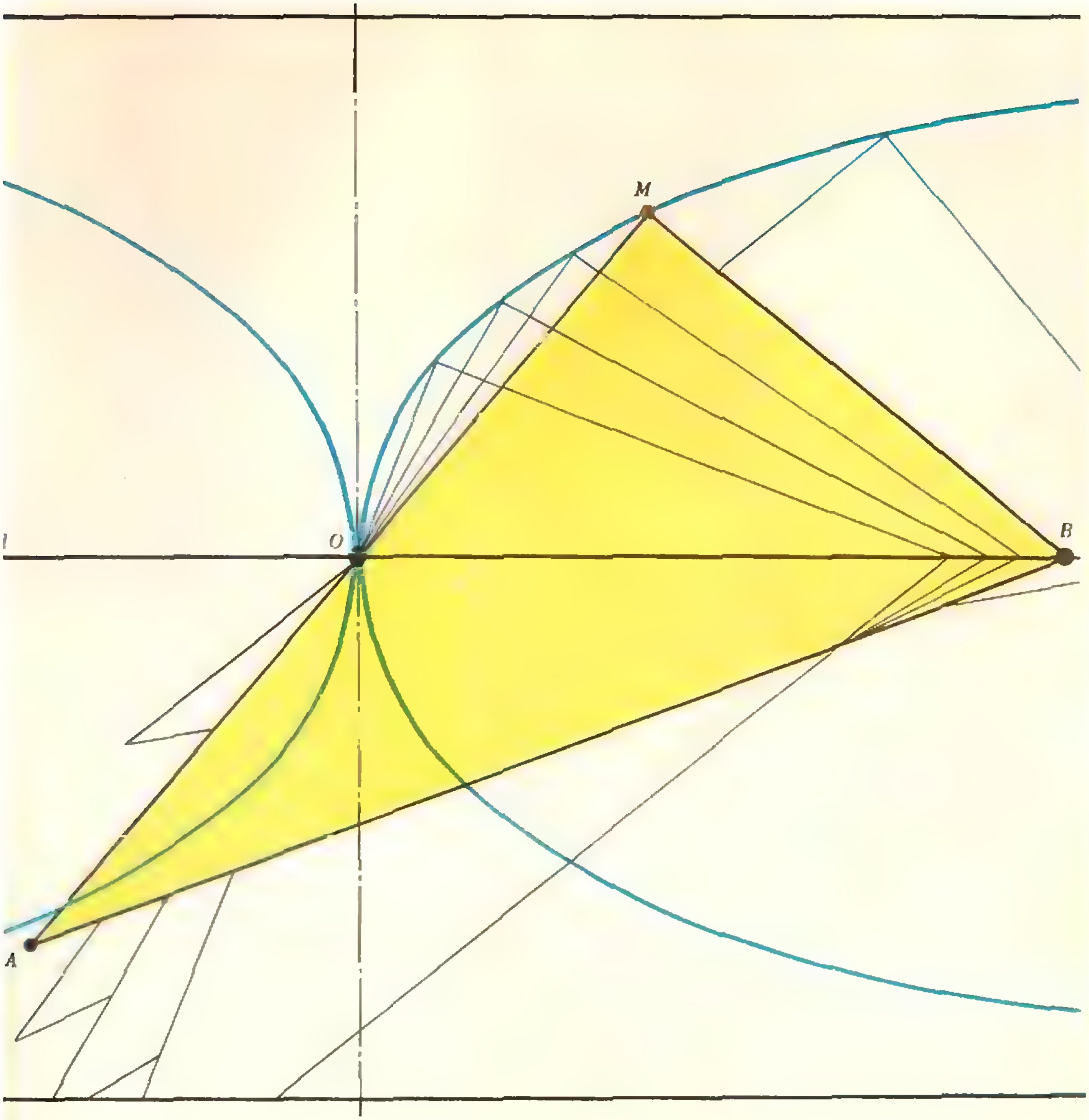
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Бутусова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 26/VIII 1977 г.
Подписано в печать 10/X 1977 г.
Бумага $70\times108^1/_{16}$ Физ. печ. л. 6.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 9,44. Т-16464
Цена 30 коп. Заказ 1919 Тираж 290 157 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

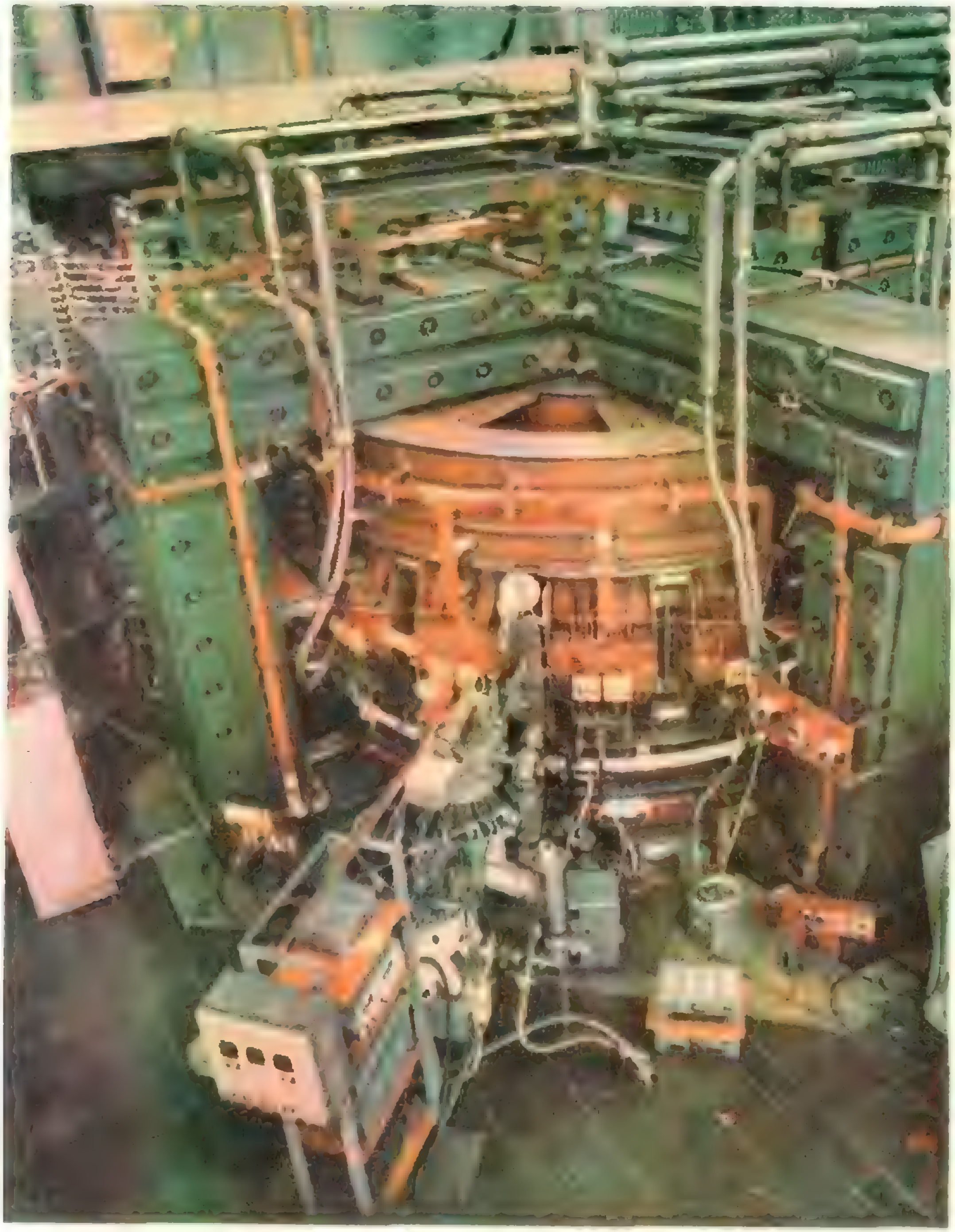
Рукописи не возвращаются



Кривая, которая здесь изображена, называется «каппа» из-за сходства с одноименной буквой ϰ греческого алфавита. Эту кривую впервые построил в 1662 году бельгийский математик Рене Франсуа де Слюз (1622—1685), когда вел переписку с Христианом Гюйгенсом.

Приведенный здесь способ построения дуги каппы принадлежит И. Ньютону. Пусть на прямой l отмечена точка O. Возьмем угольник AMB (M — вершина прямого угла). Правая верхняя ветвь каппы описывается вершиной M, когда угольник перемещается так, что вершина B скользит по правому лучу прямой l, M находится над прямой l и катет AM проходит через O. Три остальные ветви каппы строятся аналогично.

Удлиняя катет AM угольника AMB, мы можем получить сколь угодно далекие точки каппы.



Советские физики лидируют в области исследований проблемы управляемых термоядерных реакций и возможности использования термоядерной энергии в мирных целях. Особенно важные результаты получены на экспериментальных термоядерных установках «ТОКАМАК», созданных в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова.

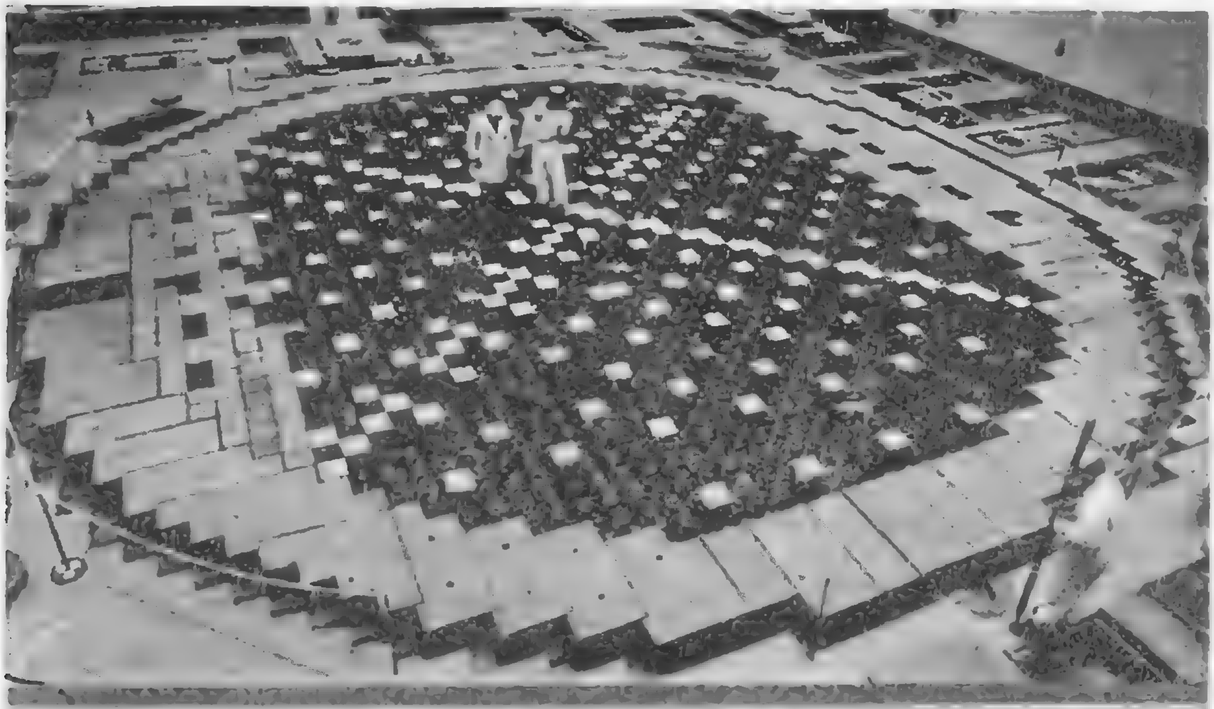
На помещенной здесь фотографии изображена самая мощная установка этого типа — «ТОКАМАК-10». Полученная в ней водородная плазма имеет рекордные характеристики. На этой установке мы уже имеем развитую термоядерную реакцию в лабораторных условиях.

По образу и подобию советских токамаков созданы термоядерные установки во многих странах мира. «ТОКАМАК-10» послужит прообразом будущих термоядерных электростанций.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Выполняя решения XXIV и XXV съездов КПСС наша страна в больших масштабах развивает атомную энергетику. На европейской территории Советского Союза строятся мощные атомные электростанции различных типов. Успешно работают могучие атомные ледоколы «Ленин» и «Арктика». Готовится к первому рейсу атомный ледокол «Сибирь». В десятой пятилетке суммарная мощность советских атомных электростанций увеличится на 12—15 миллионов киловатт.

На фотографиях ТАСС показаны один из реакторов Ленинградской атомной электростанции (мощность станции равна 2 миллиона киловатт) и советский атомный ледокол «Арктика», который впервые достиг Северного Полюса.



НОМЕР
12

Основан в 1970 году

Квант

12
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство „Наука“
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

3 *И. Кикоин.* Как создавалась советская физика
12 *С. Гиндикин.* Пьер-Симон Лаплас
22 *М. Мамикон.* Задача о ферзях

Лаборатория «Кванта»

28 *М. Голубев, А. Кагаленко.* Капля на горячей поверхности

Математический кружок

30 *В. Войскунский.* Сегодня — фигурное катание

Задачник «Кванта»

34 Задачи М476—М480; Ф488—Ф492
36 Решения задач М434, М435; Ф445, Ф446

По страницам школьных учебников

40 *А. Бендукидзе.* Производная показательной функции

«Квант» для младших школьников

44 Задачи
45 *И. Щепочкина.* Дважды об одном

Практикум абитуриента

48 *Я. Суконник, П. Горнштейн.* Задачи на площади и двугранные углы
52 $\boxed{\text{Н. Гольдфарб}}$, *В. Новиков.* Импульс тела и системы тел

Ответы, указания, решения

60 Список читателей, приславших правильные решения задач из задачника «Кванта» *(с. 32, 43, 51, 59)*
62 Напечатано в 1977 году
Смесь *(с. 27, 29, 33)*

Во Всесоюзном заочном электротехническом институте связи создан оригинальный прибор — цветной телевизионный экспандер. Он позволяет оперативно оценивать яркость отдельных участков рассматриваемых объектов. Каждый уровень яркости отображается на экране цветного телевизора заранее определенным цветом (см. заметку на с. 29). На первой странице обложки приведено фото изображения, полученного при помощи этого прибора.

Фото Б. Раскина

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1977

Исполнилось 70 лет члену редколлегии нашего журнала, действительному члену Академии педагогических наук СССР, доктору физико-математических наук, профессору Валентину Александровичу Фабриканту.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Валентина Александровича с его семидесятилетием и желают ему здоровья, долгих лет жизни и новых больших успехов в его благородной деятельности ученого и педагога.

И. Кикоин

Как создавалась советская физика

Мы заканчиваем публикацию воспоминаний академика И. К. Кикоина. Начало см. «Квант» №№ 10, 11.

До конца двадцатых годов нашего столетия основные усилия физиков мира, в том числе и советских, были направлены на решение проблемы строения атома, его электронной оболочки и физики металлов.

Что же касается проблемы строения атомного ядра, то ею занимались немногие физики. В основном это были физики школы Резерфорда в Англии и Марии Кюри во Франции. В Советском Союзе ядерной физикой занимались ленинградские ученые Л. В. Мысовский в Государственном радиевом институте, Д. В. Скобельцын в Ленинградском политехническом и Ленинградском физико-техническом институтах.

В то время нас обучали, и потом мы сами обучали тому, что ядро состоит из протонов и электронов, что число протонов равно атомному весу элемента, а число электронов в ядре равно разности атомного веса и порядкового номера элемента.

В начале 30-х годов в ядерной физике произошел информационный взрыв — в течение двух-трех лет на нас буквально обрушился поток новых фундаментальных открытий. В 1931 году в лаборатории Резерфорда Кокрофт и Уолтон впервые осуществили расщепление ядер лития путем бомбардировки их протонами с энергией в несколько сот кэВ. При этом из лития вылетали α-частицы с энергией около 8 МэВ. Сообщение об этих опытах оживленно обсуждалось нами в лабораториях, в коридорах и даже за обедом. Это был первый случай, когда энергия образовавшихся частиц значительно превышала энергию бомбардирующих частиц. Несколько позже эти опыты были повторены во многих лабораториях мира и, в частности, у нас харьковскими физиками под руководством К. Д. Синельникова.

В 1932 году английский физик Чэдвик (ученик Резерфорда) открыл нейтрон — частицу, масса которой близка к массе протона, но не имеющую электрического заряда. Это было настоящей сенсацией. Тем более, что незадолго до этого аналогичные опыты были проведены немецкими и французскими физиками, которые так же как и Чэдвик наблюдали проникающее излучение, испускаемое легкими элементами (например, бериллием) при бомбардировке их α-частицами. Это излучение легко проникало сквозь толстый слой свинца и при попадании на парафин выбивало из него протоны. Эти физики считали, что проникающее через свинец излучение представляет собой γ-лучи, но не стали измерять их энергию. Чэдвик же провел такие измерения и убедился, что такой энергией γ-лучи не могут обладать. Он убедительно показал, что сквозь свинец проникают незаряженные частицы, которыми оказались нейтроны. Для нас это было дополнительной иллюстрацией того, как важны количественные опыты в физике.

В том же 1932 году появилось сообщение об открытии в космических лучах новой элементарной частицы — позитрона, которая представляла собой положительно заряженный электрон.

Все эти сообщения публиковались краткими заметками, без подробностей, в научно-популярных журналах, и мы с нетерпением ждали появления подробных статей уже в серьезных научных физических журналах.

Для быстрого введения советских ученых в русло современных идей физики атомного ядра А. Ф. Иоффе решил организовать Всесоюзную конференцию по физике атомного ядра с участием крупнейших зарубежных ученых. Эта конференция состоялась в конце сентября 1933 года. Она проходила в актовом зале Академии наук в Ленинграде. По составу участников и по широте программы конференция имела международный характер. В ней приняли участие английский физик Паули, французские физики Перрен, супруги Жолио-Кюри и другие всемирно известные ученые.

Уже после первых опытов по расщеплению ядра лития А. Ф. Иоффе понял, что физика атомного ядра вступает в новую эру, и приступил к организации исследований в этой области в нашем физико-техническом институте. Поначалу был организован постоянно действующий семинар по ядерной физике (отдельно от общефизического традиционного семинара, о котором я уже рассказывал).

На этом семинаре (насколько я помню, он собирался по средам) детально обсуждались все новые работы по ядерной физике. Хотя я не собирался стать «ядерщиком», потому что был увлечен своими исследованиями полупроводников и металлов, но аккуратно посещал эти семинары, чтобы быть в курсе новых событий в физике. Когда на семинаре обсуждалось очередное сенсационное сообщение, зал бывал переполнен. Довольно скоро в институте организовались две группы «ядерщиков». Одна под руководством И. В. Курчатова, другая под руководством А. И. Алиханова. Обе эти группы занялись созданием новой для них экспериментальной техники. Надо было обзавестись источниками α-частиц, β-частиц (электронов), γ-лучей и нейтронов. Такими источниками были продукты радиоактивного распада радия, запасы которого были сосредоточены в Ленинградском радиевом институте. Источником нейтронов служили ампулы, содержащие газообразный радон (продукт распада радия), излучающий α-частицы, и порошок бериллия (бериллий, облучаемый α-частицами, испускает нейтроны). Одновременно готовились приборы для регистрации частиц — счетчики, камеры Вильсона, ионизационные камеры и многие другие виды техники, без которых нельзя было начинать экспериментов по ядерной физике. Все это было сравнительно быстро разработано, изготовлено собственными руками, и экспериментальная работа закипела.

Вскоре после открытия позитрона в космических лучах многие физики стали искать возможности получения позитронов в лабораторных условиях. Эти попытки не только увенчались успехом, но и привели к открытию искусственной радиоактивности. Ирэн и Фредерик Жолио-Кюри обнаружили, что во время облучения α-частицами легких элементов, например, алюминия или магния, они испускают позитроны. Исследуя это явление, они неожиданно обнаружили, что после прекращения облучения алюминиевой фольги, т. е. после того, как убирался источник α-частиц, испускание позитронов продолжалось с ослабевающей по экспоненциальному закону интенсивностью. Так супруги Кюри сделали двойное открытие. Они впервые обнаружили искусственную радиоактивность и открыли новый вид радиоактивного распада — позитронный распад.

Сообщение об этих опытах было для нас не меньшей сенсацией, чем открытие нейтрона. Искусственная радиоактивность при облучении α-частицами наблюдается только у легких элементов. У тяжелых элементов ее не обнаружили. Это объяснялось тем, что вероятность проникновения заряженных частиц (например, α-частиц) внутрь тяжелых ядер ничтожно мала. Именно по этим причинам итальянский физик Ферми попытался вызвать искусственную радиоактивность путем облучения тяжелых элементов нейтронами. Эта попытка увенчалась блестящим успехом. В журнале «Nature» появилась статья Ферми под названием «Радиоактивность, наведенная бомбардировкой нейтронами», в которой он сообщал об искусственной радиоактивности при облучении нейтронами ряда элементов.

К этому времени в ЛФТИ заканчивался «инкубационный период» — период подготовки экспериментальной техники для исследований по ядерной физике в лабораториях И. В. Курчатова и А. И. Алиханова. Довольно скоро определились и интересы этих групп: Курчатов посвятил себя нейтронной физике, которой он не изменил до конца своей жизни; группа Алиханова занялась исследованием проблем β-распада.

Насколько наши физики были подготовлены к активным исследованиям в области ядерной физики, видно из того, что уже через несколько недель (!) после опубликования статьи Ферми И. В. Курчатов с сотрудниками представили для опубликования работу под названием «Эффект Ферми в фосфоре». В этой работе авторы сообщали о полученном ими новом результате: оказалось, что фосфор, облученный нейтронами, «дает радиоактивность с еще одним периодом полураспада в 3 минуты», кроме обнаруженного Ферми периода в 3 часа.

В 1934 году И. В. Курчатов со своими сотрудниками начинает большой цикл работ в связи с открытием явления замедления нейтронов при их прохождении через водородосодержащие вещества, в частности, через воду. В это время во многих лабораториях института и даже в коридорах появились большие сосуды различной формы, наполненные водой, в которой помещались исследуемые вещества. Вода служила замедлителем нейтронов. При помощи медленных нейтронов Курчатов впервые получил искусственно-радиоактивный рутений и новые радиоактивные изотопы палладия и рения.

Исследования искусственной радиоактивности при облучении элементов замедленными нейтронами показали, что вероятность осуществления ядерных реакций необычайно сильно зависит от энергии бомбардирующих нейтронов. Это привело Курчатова к необходимости исследовать влияние энергии нейтронов на ход ядерных реакций. Для этого надо было точно знать, какими энергиями обладают бомбардирующие нейтроны, — знать их энергетический спектр. Теперь хорошо известно, насколько сложна эта область физики (нейтронная спектроскопия). Но в 1935—36 годах физики только начинали проникать в нее, и советские ученые были в числе первопроходцев.

К 1935 году относится открытие группой Курчатова так называемой ядерной изомерии. До этого было известно, что в природе встречаются вещества, ядра которых, имея одинаковые заряды, отличаются массами. Это — изотопы. Встречаются также вещества, ядра которых, обладая одинаковыми массами, имеют разные заряды. Они называются изобарами.

И. В. Курчатов, исследуя со своими сотрудниками искусственную радиоактивность брома, облученного нейтронами, обнаружил, что после облучения образуются ядра брома, которые, имея одинаковые массы и заряды, различаются лишь периодом полураспада. Такие вещества назвали изомерами.

Открытие группой Курчатова изомерии брома было настолько неожиданным, что физики отнеслись к нему сначала с некоторым недоверием, но вскоре оно нашло всеобщее признание, а исследование изомерии стало одним из эффективных средств изучения строения ядра.

Параллельно с развитием исследований в области физики нейтронов успешно развивалась и другая ветвь физики атомного ядра — исследование механизма радиоактивного β-распада. Объяснение закономерностей, обнаруженных при изучении β-распада естественных радиоактив-

Чествование лауреатов Нобелевской премии И. Е. Тамма, И. М. Франка, П. А. Черенкова (Стокгольм, 18 декабря 1958 г.).

ных элементов, натолкнулось на трудности. Известно, что электроны, испускаемые при β-распаде, имеют различные кинетические энергии, значения которых лежат в пределах от нуля до некоторого максимального значения, которое характерно для каждого ядра. Между тем, очевидно, что при радиоактивном превращении ядра оно переходит из определенного начального состояния в конечное состояние, тоже совершенно определенное. При этом должна выделяться вполне определенная энергия, которая и передается вылетевшему из ядра электрону. Почему же вылетающие электроны имеют различные энергии? Например, ядра $^{210}_{83}Bi$ в результате β-распада превращаются в ядра $^{210}_{84}Po$. Максимальная энергия вылетевших электронов для этой реакции — $1{,}05 \cdot 10^6$ эВ. Иными словами, энергия каждого ядра $^{210}_{83}Bi$ уменьшается на $1{,}05 \cdot 10^6$ эВ. Средняя же энергия, приходящаяся на каждый вылетающий электрон, оказывается равной $0{,}39 \cdot 10^6$ эВ. Следовательно, у некоторых из вылетевших электронов энергия меньше чем энергия, «потерянная» ядром. Куда же девается остальная часть энергии?

Этот вопрос в начале тридцатых годов был одним из наиболее животрепещущих. Нильс Бор решился даже предположить, что в элементарных ядерных процессах может нарушаться закон сохранения энергии.

«Выход» из создавшегося положения предложил швейцарский физик Паули. Он предположил, что при распаде ядра вместе с электроном вылетает еще одна частица ничтожно малой массы, не имеющая заряда, которая и «уносит» с собой «недостающую» энергию. Этой частице дали название нейтрино (по-русски «нейтришка»). Однако все попытки обнаружить нейтрино на опыте успеха не имели. Нейтрино оставалась «частицей секретной, фигуры не имеющей», как мы ее в шутку называли, перефразируя соответствующее место из повести Тынянова «Поручик Киже».

Первый опыт, результаты которого явились косвенным подтверждением существования нейтрино, принадлежит А. И. Лейпунскому, который провел его в лаборатории Резерфорда, где он некоторое время работал. Идея опыта заключалась в наблюдении «отдачи» атома, когда из его распадающегося ядра вылетают электрон или позитрон. Очевидно, что когда β-распад ядра сопровождается вылетом двух частиц (нейтрино плюс электрон или позитрон), энергия отдачи должна быть больше, чем при вылете только одного электрона или позитрона.

Позднее А. И. Алиханян предложил весьма остроумную идею опыта с отдачей атома при таком распаде ядра, когда из атома ничего не вылетает, кроме нейтрино, если оно существует (электрон, вылетевший из ядра, «застревает» в электронной оболочке атома). Поэтому сам факт наличия отдачи уже свидетельствовал бы о существовании нейтрино. Задуманный опыт был начат до начала Великой Отечественной войны, которая помешала полному его завершению. Идея опыта А. И. Алиханова была в точности осуществлена в 1942 году американским физиком Алленом и дала положительный результат.

Развитие экспериментальных исследований по ядерной физике как за рубежом, так и в СССР, стимулировало и наших физиков-теоретиков. Почти все ведущие советские теоретики стали активно заниматься вопросами теории атомного ядра. Всеобщее признание получили работы И. Е. Тамма, Я. И. Френкеля, Л. Д. Ландау. Их доклады на нашем ядерном семинаре вызывали жаркие дискуссии.

В сентябре 1936 года в Москве была созвана вторая Всесоюзная конференция по ядерной физике. В ее работе участвовало свыше ста советских физиков. В ней приняли участие и некоторые крупные зарубежные физики: швейцарский физик Паули, французский физик Оже, английский физик Пайерлс и другие.

Особо следует отметить доклад об эффекте Черенкова, прочитанный на конференции И. М. Франком. Этот эффект был открыт П. А. Черенковым, работавшим под руководством Вавилова. Заключается он в том, что электроны, движущиеся в жидкости со скоростью, большей скорости света в этой жидкости (но, конечно, меньшей скорости света в пустоте), вызывают свечение жидкости. Теперь эффект Черенкова широко используется физиками во всем мире в счетчиках заряженных частиц. За открытие эффекта и его теоретическое объяснение П. А. Черенков, И. Е. Тамм и И. М. Франк были удостоены Нобелевской премии.

А. Ф. Иоффе, закрывая конференцию, отметил важность создания новой мощной техники исследований, прежде всего—ускорителей заряженных частиц.

Постепенно советская ядерная физика оснащалась мощной экспериментальной техникой. В 1937 году при совместном усилии физиков группы Курчатова и Радиевого института был пущен первый советский циклотрон. На нем были получены α-частицы с энергией около 1,2 МэВ. Через год был запущен большой электростатический генератор в Харькове. Соответственно расширился и фронт экспериментальных исследований. И к 1939 году, когда наступила «эра деления ядра», советские физики пришли во всеоружии.

В 1939 году было сделано очень важное открытие, которое сыграло решающую роль в развитии не только ядерной физики, но и ядерной техники. Было обнаружено, что нейтроны, бомбардирующие урановую мишень, вызывают совершенно необычные ядерные превращения. Обычно при бомбардировке нейтронами ядер элементов их заряд изменяется на одну-две единицы. При попадании же нейтрона в ядро урана ($Z=92$) наблюдалось появление ядер с зарядами, много меньшими заряда ядра урана. Это означает, что ядро урана делится почти пополам, образуя так называемые осколки. Суммарный заряд ядер-осколков равен заряду ядра урана. Этот новый вид ядерного превращения получил название реакции деления урана.

Деление ядер урана было открыто в Германии и тотчас же подтверждено опытами американских, английских и советских ученых. Вскоре выяснились два очень важных обстоятельства. Во-первых, при делении ядра урана осколки вылетают с огромной кинетической энергией. Она равна, примерно, 200 МэВ, в то время как энергия нейтрона, вызвавшего деление, составляет всего несколько электронвольт. Выигрыш в энергии колоссальный, и одновременное деление всех ядер в куске урана весом даже в несколько сотен граммов неизбежно привело бы к чудовищному взрыву. Но попадая в небольшой кусок урана, бо́льшая часть нейтронов пронизывает его насквозь, не производя никакого деления.

Весьма важным было также и второе обстоятельство. Оказалось, что при делении ядра урана не только образуются тяжелые осколки, но и возникают новые свободные нейтроны, которые сами могут вызвать процесс деления. Их не так уж много — два-три на каждое разделившееся ядро. Но если бы они попадали в новые ядра урана и делили их, а не вылетали бесполезно за пределы куска урана, то процесс деления приобрел бы лавинообразный характер: нейтрон делит ядро, и возникают два нейтрона; они делят два ядра, и возникают четыре нейтрона; эти нейтроны делят четыре ядра, возникают восемь нейтронов и т. д.

Установив факт возникновения новых нейтронов при делении ядер урана, физики подсчитали, что даже небольшое число первичных нейтронов, попадающих в кусок урана достаточно большого объема, может вызвать грандиозный взрыв. В Советском Союзе такие расчеты первыми опубликовали Я. Б. Зельдович и Ю. Б. Харитон. Они же показали, что при определенных условиях можно надеяться и на медленное высвобождение энергии в процессе деления, которая может быть в этом случае использована в мирных целях. В связи с этим в лаборатории Курчатова была намечена обширная программа исследований процессов деления ядер урана.

Вскоре (это было перед самым началом войны) ученики Курчатова Г. Н. Флеров и К. А. Петржак обнаружили новое очень важное явление. Оказалось, что ядра урана делятся самопроизвольно, сами по себе, без всякого обстрела их нейтронами. Такое деление — событие очень редкое, но и оно приводит к появлению свободных нейтронов.

Война помешала Курчатову осуществить намеченные планы. Многие физики ушли на фронт, многие научные учреждения были эвакуированы в глубь страны. Ленинград оказался в длительной блокаде. Сам Игорь Васильевич вместе с нынешним Президентом Академии Наук СССР Анатолием Петровичем Александровым занялись очень важной для фронта проблемой защиты кораблей от магнитных мин. Надо было размагничивать корабли, так чтобы их появление «не замечали» немецкие магнитные мины, находящиеся на дне или плавающие в море. И наши ученые спасли немало моряков и судов Черноморского и Северного флота от гибели.

В 1941 году в научной литературе исчезли работы по делению урана, которые до этого публиковались почти в каждом номере физических журналов многих стран. Нетрудно было догадаться, что в Америке, в Германии и в других странах эти работы засекретили, учитывая, что они, по крайней мере принципиально, позволяют создать чрезвычайно мощное взрывчатое вещество. В связи с этим в конце 1942 года наше правительство приняло решение возобновить эти работы.

Общее руководство всей этой проблемой (она называлась урановой проблемой) было возложено на И. В. Курчатова.

Для участия в разработке этой проблемы Игорь Васильевич пригласил А. И. Алиханова, своего ученика Г. Н. Флерова и меня. Наш коллектив именовался лабораторией № 2 Академии наук СССР, а между собой мы называли нашу лабораторию просто «двойкой». Нам подыскали небольшое временное помещение в центре Москвы. Потом мы перебрались в недостроенные здания, нам сначала не предназначавшиеся, но ставшие со временем нашим «домом» — Институтом атомной энергии, который носит теперь имя И. В. Курчатова.

К тому времени о делении урана было известно следующее. Уран состоит практически из двух изотопов; их атомные массы равны 238 и 235. Доля легкого урана ^{235}U в природном уране очень мала, она равна 1/140, и именно этот уран делится медленными нейтронами. Но ядро урана 238 поглощает медленные нейтроны и превращается сначала в 93-й элемент (нептуний 238), затем в 94-й элемент, который потом получил название плутоний. Ядра плутония 239 делятся нейтронами так же хорошо, как и ядра урана 235.

Перед нами было два пути к атомному оружию — один состоял в том, чтобы отделить уран 235 от урана 238, или хотя бы резко повысить его концентрацию, то есть обогатить уран легким изотопом 235, второй — в том, чтобы производить плутоний. И каждый из них таил в себе множество трудностей.

Мы все понимали, что работать надо с предельным напряжением, так как шла война и были серьезные опасения, что фашистская Германия работает над созданием атомного оружия. И мы фактически круглые сутки не выходили из лабораторий.

Для производства плутония необходимы были атомные реакторы. Для создания атомных реакторов понадобилось провести невероятно большое количество сложных физических исследований и инженерных разработок.

Не легче был и второй путь — обогащение изотопов. Известные тогда лабораторные методы обогащения позволяли получить микрограммы чистых изотопов. Нам же нужны были килограммы урана 235. Пришлось искать более производительные способы разделения изотопов урана, которые можно было бы осуществить в промышленном масштабе. А когда такие способы были найдены, пришлось создавать новую промышленность — заводы, производящие небывалую продукцию. Обычно новая промышленность рождается в течение десятилетий, нам же на все это было отпущено всего 2—3 года. И тем не менее, эта задача была решена.

6 августа 1945 года американцы сбросили атомную бомбу на японский город Хиросиму; 9 августа вторая американская атомная бомба была сброшена на город Нагасаки. Они погубили сотни тысяч человеческих жизней. Япония к этому времени была уже практически побеждена, и чудовищная атомная бомбардировка ее городов не вызывалась никакой военной необходимостью. Руководители США преследовали иные цели. Им казалось, что монопольное владение таким разрушительным оружием поможет им навязывать свою волю всему миру и, прежде всего, Советскому Союзу.

Атомная бомба разрабатывалась в Америке в строжайшей тайне, в ее создании принимали участие многие выдающиеся европейские физики, бежавшие в США от фашистского нашествия. Решение этой проблемы стоило огромных трудов и средств. Американцы были убеждены, что о создании подобного оружия в Советском Союзе, в стране, только что пережившей опустошительную войну, нечего и думать. Американские эксперты Д. Хогертон и Э. Рэймонд, в статье под названием «Когда Россия будет иметь атомную бомбу?», опубликованной в 1948 году, предсказывали, что нам не удастся добиться этого ранее 1954 года. Другие американские специалисты называли еще более поздние сроки. Но уже в 1949 году Советский Союз успешно испытал свое атомное оружие, навсегда похоронив тщеславные надежды американских империалистов.

В своей речи на торжественном заседании Академии наук, посвященном 250-летию АН СССР, Леонид Ильич Брежнев сказал: «Создание советскими учеными могучего современного оружия в ответ на происки поджигателей войны покончило с ядерной монополией империализма, сделало несокрушимой оборону нашей страны. В то же время оно помогло укрепить позиции сил мира во всем мире и значительно умножи-

П. Жолио-Кюри, И. В. Курчатов, Д. В. Скольбельцын. Л. А. Арцимович и А. И. Алиханов.

ло возможности нашего мирного строительства».

С начала 50-х годов в нашем институте началась интенсивная разработка проблем, связанных с мирным использованием атомной энергии. Первым итогом этих работ был пуск в 1954 году в подмосковном городе Обнинске первой в мире атомной электростанции. Она имеет небольшую мощность, всего 5000 кВт. Но сегодня у нас в стране работают атомные электростанции различных типов и среди них — гигант атомной энергетики Ленинградская АЭС мощностью в 2 000 000 кВт. В X пятилетке мощность советских АЭС значительно вырастет.

Более 10 лет успешно трудится построенный под научным руководством физиков нашего института первый в мире атомный ледокол «Ленин», немало способствовавший развитию навигации в полярных широтах. Недавно построенный атомный ледокол «Арктика» уже совершил плавание к Северному полюсу. Готовится вступить в строй еще более мощный атомный ледокол «Сибирь».

В начале 50-х годов у физиков возникла идея использовать энергию, выделяющуюся в так называемых термоядерных реакциях. Еще до войны появилась теория немецкого физика Бёте и других физиков, согласно которой огромная энергия, излучаемая Солнцем, обеспечивается термоядерной реакцией, протекающей следующим образом. При чудовищно высоких солнечных температурах легкие ядра, обладающие громадной кинетической энергией, способны преодолевать кулоновские силы отталкивания и могут сливаться в более тяжелые ядра. Этот процесс сопровождается выделением огромной энергии, значительно превышающей энергию сливающихся ядер.

В «земных» условиях термоядерная реакция впервые была использована для получения взрыва громадной мощности — была создана термоядерная бомба. После этого встал вопрос о возможности использования термоядерной энергии в мирных целях. Природные запасы урана, используемого в атомных реакторах, ограничены. Запасы же такого элемента как дейтерий (тяжелый водород ^{3}H), который может быть использован для термоядерных реакций, огромны — дейтерий входит в состав тяжелой воды, которая составляет 1/6000 долю всей воды, имеющейся на земном шаре. А при слиянии двух ядер дейтерия выделяется энергия около 13 МэВ, что намного превышает первоначальную энергию сливающихся ядер. Так что эта кладовая энергии практически неисчерпаема.

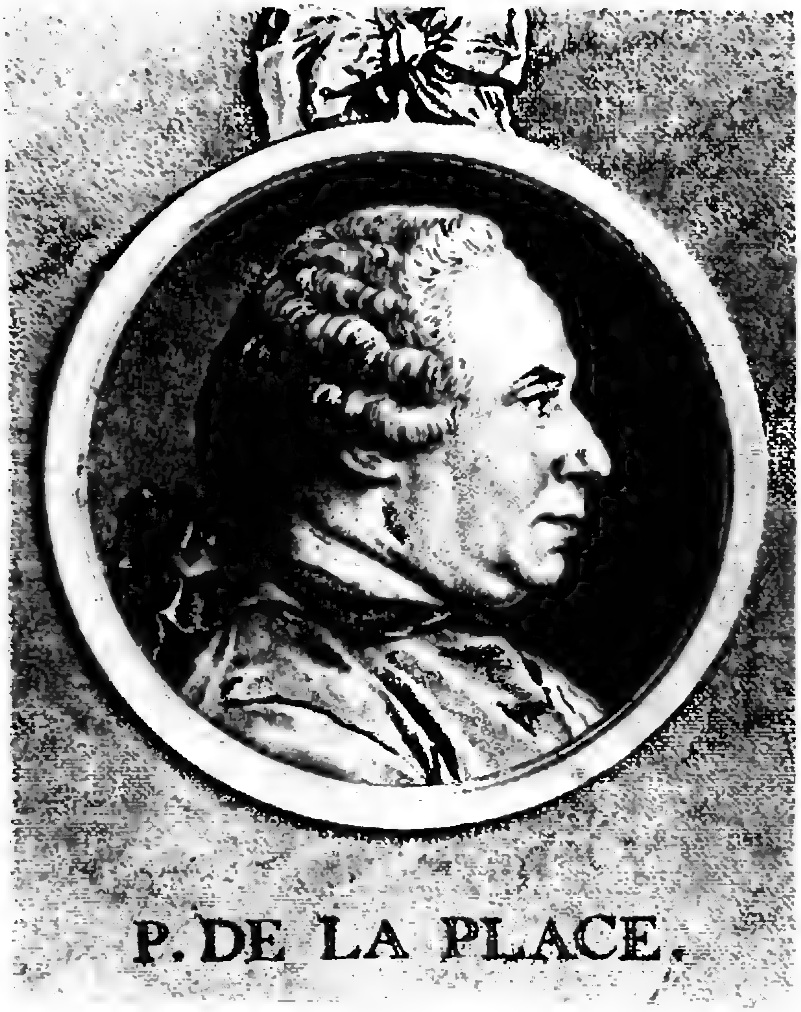
Но для того чтобы использовать эту энергию в мирных целях, необходимо, прежде всего, научиться управлять термоядерной реакцией. Задача эта чрезвычайно сложная, но принципиально она может быть решена. И начиная с 1952 года в Институте атомной энергии начались исследования в этом направлении.

Прежде всего необходимо было научиться нагреть водород до высокой температуры, при которой ядра способны вступать в термоядерную реакцию. Самое простое — нагревать газ электрическим током. Для этого создают в газе разряд, и при больших значениях силы тока газ нагревается за счет джоулева тепла. При этом газ полностью *ионизируется*, превращаясь в плазму. При очень высоких температурах водородная плазма представляет собой «смесь» электронов и ядер, которые могут вступать в термоядерную реакцию. Однако высокотемпературная плазма очень неустойчива — при огромных токах, протекающих через разряд, одноименно заряженные слои плазмы расталкиваются, попадая на стенки газоразрядной трубки и быстро охлаждаясь.

Проблема «удержания» плазмы — одна из самых сложных проблем, которую необходимо решить на пути осуществления управляемой термоядерной реакции. И советские физики внесли неоценимый вклад в решение этой проблемы. Под руководством академиков Л. А. Арцимовича и М. А. Леонтовича в Институте атомной энергии была сконструирована установка, в которой специальным образом подобранное и ориентированное магнитное поле позволяет удерживать высокотемпературную плазму. Это — так называемый ТОКАМАК — «тороидальная камера в магнитном поле». Сейчас во всем мире опыты по удержанию плазмы осуществляют в основном на установках подобного типа. И называют их во всем мире ТОКАМАК.

В настоящее время исследования по проблеме управляемой термоядерной реакции находятся на таком уровне, что уже инженеры и конструкторы приступают к рассмотрению чисто инженерных, технических вопросов, связанных с осуществлением прототипа будущей термоядерной станции. Можно надеяться, что к концу века или немного раньше такой прототип будет построен, испытан, и тогда можно будет решить вопрос о промышленном использовании термоядерной энергии.

Конечно, я не могу дать исчерпывающую картину развития советской физики. Я рассказывал, в основном, лишь о тех работах, с которыми мне, так или иначе, пришлось сталкиваться. Поэтому я не рассказал о многих выдающихся достижениях советских физиков — таких как рождение квантовой электроники в работах лауреатов Нобелевской премии академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова, открытие электронного парамагнитного резонанса академиком Е. К. Завойским, открытие принципа автофазировки в ускорителях заряженных частиц академиком В. И. Векслером и многое другое. Однако я надеюсь, что мой рассказ помог читателям «Кванта» представить себе, какой огромный вклад внесли советские физики в развитие науки и техники за 60 лет Советской власти.


P. DE LA PLACE.

С. Гиндикин

Пьер-Симон Лаплас

> *Канцлер императорского Сената, получавший более 100 тысяч ливров годовой ренты, с неменьшим усердием, чем простой академик, Лаплас стремился увязать все неправильности и возмущения в движении светил с принципом всемирного тяготения, распространить метод математического анализа на явления земной физики и подчинить своим формулам явления общественной жизни, в которых обыватель видит тайну или слепой случай.*
>
> Араго

5 марта 1827 года в 9 часов утра умер маркиз Лаплас, пэр Франции, один из первых кавалеров ордена Почетного Легиона, удостоенный высшего отличия ордена — Большого Креста. «*То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, чего мы не знаем*» — были последние его слова. Лапласа называли «французским Ньютоном»; умер он ровно через сто лет после смерти Ньютона, бывшего его кумиром.

Посмертные почести Лапласу отдавались с некоторой растерянностью. В речи Фурье говорилось: «*Может быть, мне следовало бы упомянуть об успехах Лапласа на поприще политической деятельности, но все это не существенно: мы чествуем великого математика. Мы должны отделить бессмертного творца «Небесной механики» от министра и сенатора*». Окружающих смущало, что Лаплас успел побыть республиканцем и монархистом, атеистом и католиком, получать почести при Империи и после Реставрации. (Впрочем, бывший якобинец Фурье тоже впоследствии стал бароном.)

Бомон — Париж, 1749—1789

Будущий маркиз родился 23 марта 1749 года в семье крестьянина в маленьком Бомоне (Нормандия). Позднее он неохотно говорил о своем детстве и после 21 года никогда не виделся с родителями. Благодаря неизвестным покровителям Лаплас заканчивает колледж Ордена бенедиктинцев. В 17 лет он уже преподает математику в военной школе.

Лаплас начинает интенсивно заниматься математикой и механикой. В 1770 году, запасшись рекомендательным письмом к великому Даламберу, он отправляется в Париж. Ему долго не удается пустить в ход рекомендации, пока не приходит в голову счастливая идея — изложить свои соображения по механике письменно. Оригинальность мыслей юноши произвела сильное впечатление на Даламбера: *«Вы зарекомендовали себя сами и этого мне совершенно достаточно. Моя помощь к Вашим услугам»*.

При помощи Даламбера Лаплас устраивается преподавателем военной школы, а потом занимает освободившееся после смерти Безу место экзаменатора в королевском корпусе артиллеристов. В 1784 году ему блестяще сдал экзамен молодой Бонапарт, о чем Лаплас имел возможность вспомнить в 1804 году: *«Я хочу к приветствиям народа присоединить и свое приветствие императору Франции, герою, которому двадцать лет тому назад я имел счастливую привилегию открыть карьеру, осуществленную им с такой славой и с таким счастием для Франции»*.

В 1772 году Лаплас баллотируется в Академии наук *) на место адъюнкта (младшая должность) по геометрии *), но его не выбирают. По-видимому, одной из причин этого было не слишком благоприятное мнение французских ученых о молодом коллеге. Лагранж занимает более снисходительную и оптимистическую позицию: *«Меня несколько удивляет то, что Вы мне пишете о Лапласе: кичиться первыми успехами — недостаток, свойственный, главным образом, очень молодым людям. Однако при увеличении знаний самонадеянность обычно уменьшается»* (письмо непременному секретарю Академии наук Кондорсе). Лаплас уже подумывает о переезде в Берлин, к Лагранжу, но в 1774 году получает место адъюнкта по механике.

Почти вся научная деятельность Лапласа была посвящена небесной механике (см. ниже). Но его интересы значительно шире. Так, в 1779—1784 годах он сотрудничает с Лавуазье по самым разным вопросам (определение теплоемкости, проблема флогистона, атмосферное электричество): *«Я, право, не знаю, каким образом я дал себя увлечь в работу по физике, и Вы найдете, быть может, что лучше бы сделал, если бы воздержался от этого; но я не мог устоять против настояний моего друга Лавуазье, который вкладывает в эту совместную работу столько приятности и ума, сколько лишь я мог бы пожелать. Кроме того, так как он очень богат, он не жалеет ничего, чтобы придать опытам точность, необходимую при таких тонких исследованиях»*. Принимает Лаплас участие и в общественной жизни: он входит в комиссию Академии наук, обследующую больницы для бедных, санитарное состояние городских боен.

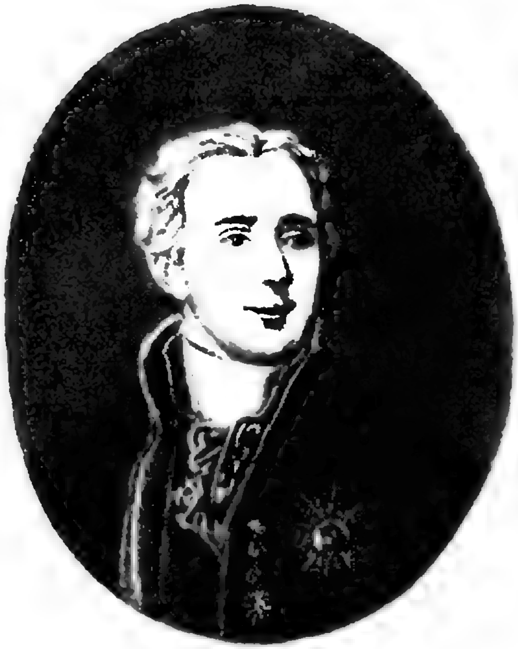
Авторитет Лапласа растет. В 1784 году он становится академиком (по механике).

Путь бомонского крестьянина не был уникален. К концу XVIII века во Франции почти половина членов Академии наук были простого происхождения. Например, Монж был сыном деревенского точильщика, Фурье—

---

*) В то время во Франции существовало пять академий. Отметим среди них Французскую академию, основанную в 1635 году кардиналом Ришелье для совершенствования французского языка и составления словаря, и Академию наук, созданную в 1666 году. Французская академия состоит из 40 пожизненных членов. Новых членов выбирают на место умерших. Членов Французской академии часто называют «бессмертными». Академию наук (L'Académie des Sciences) точнее было бы называть по-русски Академией естественных наук, потому что французское «science» применяется только к таким наукам.—*Прим. ред.*

*) *Геометрией* в XVIII веке называли всю математику. До сих пор во Франции математическое отделение Академии наук называют отделением геометрии.



Пьер-Симон Лаплас.
(портрет начала XIX века).

сын портного, Пуассон — сын солдата. Участие высшего сословия в науке обычно ограничивалось меценатством и почетным членством в Академии. Даламбер жалуется: *«Меценатов в наше время развелось так много, что нет возможности всех их должным образом восхвалять и благодарить»*.

В 1788 году Лаплас женился. Через год у него родился сын. Размеренная, благополучная жизнь была прервана событиями, решительно изменившими жизнь страны.

Революция, Империя, Реставрация

Революционные события захватили значительную часть французских ученых. Друг Лапласа астроном Байи был первым мэром Парижа, Кондорсе — членом муниципалитета, выдающийся математик Монж — морским министром. В 1791 году ряд академиков выдвинули свои кандидатуры в Законодательное собрание (Кондорсе, Лавуазье). В связи с этим со страстным памфлетом «Современные шарлатаны» выступил Марат. Заодно досталось и Лапласу: *«К числу лучших математиков-академиков относятся Лаплас, Монж и Кузень: род автоматов, привыкших следовать известным формулам и прилагать их вслепую, как мельничная лошадь, которая привыкла делать определенное число кругов, прежде чем остановиться»*.

Лапласа вместе с Лагранжем, Монжем, Лавуазье привлекли к работе в Метрической комиссии, целью которой было создание единой системы мер. В период якобинской диктатуры Лапласа отозвали из комиссии ввиду «недостаточности республиканских добродетелей и слишком слабой ненависти к тиранам». В 1799 году он вернулся в комиссию и под его наблюдением были изготовлены эталоны метра и килограмма.

Летом 1793 года по призыву Комитета общественного спасения большая группа ученых занялась научными исследованиями для организации обороны от ожидавшейся агрессии. Лапласа среди них не было. Он удалился в тихий Мелен, где приступил к работе над многотомной «Небесной механикой» — главным делом своей жизни.

В 1793 году Конвент упразднил существовавшие академии. В 1793—1794 годах некоторые бывшие академики кончили свои дни на гильотине. Вместе с депутатами жирондистами был приговорен к смерти, но скрылся Кондорсе. По «Закону о подозрительных» был казнен как откупщик Лавуазье. На эшафоте погиб и Байи, которого Лаплас пытался спрятать у себя в доме в Мелене.

Лаплас вернулся в Париж после термидорианского переворота осенью 1794 года. Наряду с Лагранжем и другими крупнейшими учеными он занял место профессора в Нормальной школе. Это учебное заведение нового типа было задумано еще при Конвенте; оно было призвано готовить преподавателей и ученых для всей Франции. Привлечение крупных ученых в качестве преподавателей было новинкой. Позднее для подготовки инженеров на столь же высоком уровне была создана Политехническая школа. Лаплас читал лекции и здесь. Он становится президентом Палаты мер и весов, активно сотрудничает в Бюро долгот, созданном для упорядочения астрономо-геодезических измерений и службы времени.

В 1795 году Директория учредила Национальный институт наук и искусств (во Франции его часто называют просто «Институт»). Институт делился на разряды. Первым был назван разряд физических и математических наук.

Генерал Бонапарт всячески поддерживал контакты с Институтом, принимал активное участие в работе отделения геометрии. Во время Египетского похода свои прокламации он подписывал: «Бонапарт, главнокомандующий, член Института».

В 1799 году вышли два первых тома «Небесной механики» и Лаплас — буквально за несколько дней до переворота 18 брюмера (12 ноября) — подарил I том Наполеону. В ответе генерала сказано: «*С благодарностью принимаю, гражданин, присланный Вами экземпляр Вашего прекрасного труда. Первые же шесть месяцев, которыми я буду иметь возможность располагать, пойдут на то, чтобы прочесть Ваше прекрасное произведение*».

После установления консулата Наполеон решает предоставить пост министра внутренних дел ученому. Выбор пал на Лапласа, вероятно — ввиду его большой известности и личного знакомства с Наполеоном. Однако деятельность Лапласа на посту министра была малоуспешной. В отличие от своих коллег по кабинету Талейрана и Фуше, Лаплас не сумел вовремя сориентироваться, куда направлены помыслы консула, покровительствовавшего наукам. Не без наивности преследует он роялизм и религию: «*Не упускайте ни одного случая доказать вашим согражданам, что суеверие не больше роялизма выиграет от перемен, происшедших 18 брюмера*» (из циркуляра министра Лапласа). Прошло не многим более месяца, и Наполеон заменил Лапласа своим братом Люсьеном. В воспоминаниях Наполеона, написанных на острове св. Елены, сказано: «*Первоклассный геометр вскоре заявил себя администратором более чем посредственным; первые его шаги на этом поприще убедили нас в том, что мы в нем обманулись. Замечательно, что ни один из вопросов практической жизни не представлялся Лапласу в его истинном свете. Он везде искал субтильности, мелочи; идеи его отличались загадочностью; наконец, он весь был проникнут духом «бесконечно малых», который он вносил и в администрацию*».

Тем не менее обмен любезностями между Бонапартом и Лапласом не прекратился. Став Первым консулом, Наполеон назначает Лапласа пожизненным членом «Охранительного сената». (Впрочем, никакой роли в политической жизни этот сенат не играл.) С 1803 года Лаплас — канцлер сената. В числе немногих актов сената была отмена — по докладу Лапласа — революционного календаря. Учреждается орден Почетного Легиона, и Лаплас — в числе первых его кавалеров. В 1808 году он — граф империи.

Тем временем Лаплас продолжает работать над «Небесной механикой». В 1802 году выходит третий том, посвященный Наполеону — «*герою, умиротворителю Европы, которому Франция обязана своим процветанием, своим величием и самой блестящей эпохой своей славы*». В ответе Наполеона говорится: «*Истинно сожалею, что сила обстоятельств удалила меня от ученого поприща*». Несколько позже, уже император, Наполеон напишет: «*Мне кажется, что «Небесная механика» возвышает блеск нашего века*». 12 августа 1812 года, находясь под Смоленском, Наполеон получает «Аналитическую теорию вероятностей» и вновь сожалеет: «*В иное время, располагая досугом, я с интересом прочитал бы Вашу «Теорию вероятностей»*... И далее: «*Распространение, усовершенствование математических наук тесно соединены с благоденствием государства*».

Наполеон активно вмешивается в деятельность Института. В 1801 году для членов Института ввели обязательную форму. Члены Института выстраивались после мессы в шеренгу в гостиной Тюильри для представления императору. В это время императору можно было передать научные труды и получить его «отеческие» наставления. Покровительствуя точным наукам, он с недоверием относился к гуманитарным. В 1803 году Наполеон ликвидировал в Институте разряд моральных и политических наук. Когда до него дошли слухи, что в разряде французского языка и словесности ведутся разговоры о политике, он заявил Сегюру: «*Вы председательствуете во втором разряде Института. Я приказываю Вам передать ему, что* *я не желаю, чтобы на заседаниях говорили о политике. Если разряд не будет повиноваться, я сломаю его, как негодную тросточку».*

В 1814 году перед падением Парижа сенат проявил неожиданную активность: по инициативе Талейрана он призвал Бурбонов. Лаплас подписался под этим решением одним из первых. Во время Ста дней он не покидал провинции.

После Реставрации разряды Института снова получили наименование академий. Академия наук безропотно удалила из своих рядов неугодных монархии Монжа и Карно. На Лапласа же посыпались почести. В первый год правления Людовика XVIII он становится маркизом и пэром Франции, получает Большой Крест Почетного Легиона. В 1816 году он — президент Бюро долгот и председатель комиссии по реорганизации Политехнической школы, его выбирают в «Академию бессмертных» — редкое отличие для представителя точных наук. Выступления Лапласа в палате пэров были редкими, бесцветными и бескомпромиссно монархическими. Когда часть Института протестовала против введения Карлом X цензуры, Лаплас в печати открестился от этого протеста. Сен-Симон негодовал: *«Господа, изучающие неорганизованную материю, бесконечно малые величины, алгебру и арифметику! Кто дал вам право занимать теперь передовые позиции?... Вы вынесли из науки только одно наблюдение, именно, что тот, кто льстит великим мира, пользуется их благосклонностью и щедротами».*

Сохранилось много рассказов о поведении Лапласа в Академии наук. Вот два из них.

Араго и Пуассон претендовали на одно место в Академии. Лаплас заявил, что надо отдать предпочтение более старшему Пуассону. Произошел резкий обмен мнениями.

Лагранж. Но Вы сами, господин де Лаплас, были избраны в члены Академии, когда не сделали еще ничего выдающегося, подавали только надежды и все Ваши великие открытия были сделаны уже позднее.

Лаплас. А я все-таки считаю, что на звание академика нужно указывать молодым людям, как на будущую награду, чтобы поощрять их усилия.

Галле. Вы похожи на кучера, который привязывает клок сена к концу дышла своей повозки для приманки лошадей. Такая хитрость кончается тем, что лошади выбиваются из сил и околевают.

Лапласу пришлось уступить.

В другой раз, в 1822 году, Фурье и Био баллотировались на должность непременного секретаря. Лаплас взял два бюллетеня вместо одного. Его сосед увидел, что он на обоих написал имя Фурье. После этого Лаплас положил бюллетени в шляпу, попросил соседа выбрать один из них, другой разорвал и громко заявил, что он не знает, кому из кандидатов отдал свой голос.

После смерти Лагранжа в 1813 году влияние Лапласа в Академии наук сделалось особенно сильным. В 1826 году, за год до смерти Лапласа, в Париже появился юный Абель. Он пишет: *«Итак, «Небесная механика» закончена. Автор такого труда может с удовлетворением оглянуться на путь, который он прошел в науке».* В другом месте: *«Очевидно, что любая теория Лапласа гораздо выше всего, что может создать какой-либо математик меньшего масштаба. Мне кажется, что, если желаешь чего-нибудь достигнуть в математике, нужно изучать мастеров, а не подмастерьев».*

Небесная механика

Начало научной деятельности Лапласа приходится на сложное время. Завершился большой этап в построении анализа бесконечно малых. Задач, вокруг которых концентрировались бы усилия крупнейших математиков, не было. Многим казалось, что дни чистой математики сочтены. Даже разносторонний Лагранж, алгебраические работы которого опередили свое время, в какой-то момент прекратил занятия математикой. *«Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку? Ее поддерживаете только Вы и Эйлер»,* — писал он Даламберу в 1772 году.

В этих условиях центр интересов переместился в сторону прикладной математики, где бесспорное первенство было за проблемой построения теории движения небесных тел на основе закона всемирного тяготения.

Предыстория этой проблемы такова. В начале XVIII века Кеплер, продумывая с точки зрения теории Коперника скрупулезные наблюдения Тихо де Браге, сформулировал три закона, которым подчиняется движение планет вокруг Солнца. Гениальная догадка Ньютона заключалась в том, что эти законы являются следствием единого универсального закона всемирного тяготения, который управляет и взаимодействием небесных тел, и земным притяжением. Земная и небесная механика объединились. В рамках закона тяготения удалось объяснить движение Луны, приливы и отливы, предварение равноденствия и другие эффекты. Но теория Ньютона нелегко завоевывала признание. В нее не верили Гюйгенс и Лейбниц. Иоганн Бернулли потратил много сил на объяснение эллиптичности орбит, не использующее закона тяготения. Во Франции Ньютону противостояли последователи Декарта, имевшие противоположную точку зрения по большинству вопросов. Например, в рассмотрениях Ньютона было важно, что Земля сплющена, а измерения французских геодезистов (оказавшиеся ошибочными) показывали, что она вытянута у полюсов. Вольтер шутил в 1727 году: «...*в Париже Землю считают вытянутой у полюсов, как яйцо, а в Лондоне она сжата, как тыква*...»

В одном отношении позиция противников Ньютона была сильной. Тщательный анализ наблюдений показывал, что законы Кеплера выполняются лишь приближенно, а небольшие отклонения могут с течением времени накопиться и резко нарушить устойчивость Солнечной системы. Ньютон не видит возможности разобраться в этих «вековых» возмущениях: «...*едва заметные неравенства, могущие происходить от взаимодействия планет и комет*..., *вероятно, будут увеличиваться в течение весьма долгого времени, до тех пор, пока, наконец, система не будет нуждаться в приведении ее в порядок руками Творца*». В ответ на это Лейбниц заметил: «*Ньютон и его приверженцы имеют чрезвычайно забавное представление о божественном творении. С их точки зрения Бог должен время от времени заводить свои мировые часы*... *Бог создал такую несовершенную машину, что он должен по временам очищать ее от грязи и даже чинить, как часовщик исправляет свою работу*». Математические трудности состояли в том, что при выводе законов Кеплера из закона Ньютона имеют дело с задачей двух тел (Солнце и планета). Желание учесть влияние хотя бы еще одного объекта приводит к задаче трех тел, решить которую в общей ситуации не удается по сей день.

Деятельность Ньютона продолжили Эйлер, Клеро, Даламбер. Эйлер занимался возмущениями в движении Юпитера и Сатурна. Все трое дали свой вариант движения Луны. Клеро вывел уравнения для задачи трех тел, но отступил со словами: «*Пусть интегрирует, кто сможет*». Наиболее эффектным результатом было предсказание Клеро точного времени возвращения кометы Галлея. Ее ждали в 1758 году, но вычисления Клеро показывали, что под влиянием притяжения Юпитера она «задержится» более чем на год. Эйлер и Клеро построили теорию движения Земли с учетом возмущающего действия других планет.

С 70-х годов XVIII века задачами об аномалиях в Солнечной системе начинает интересоваться Лагранж. С них же начинает молодой Лаплас. Эйлер и Даламбер разобрались с рядом эффектов, связанных с взаимным притяжением Юпитера и Сатурна, но одно явление оставалось необъясненным. Это так называемые «большие неравенства», открытые в 1676 году Галлеем из сопоставления современных наблюдений с наблюдениями древних. Оказалось, что движение Юпитера медленно, но систематически ускоряется, а Сатурна — замедляется.

Лаплас, как до него Эйлер и Лагранж, ищет приближенное решение задачи трех тел, рассматривая бесконечный ряд возмущающих членов. Для получения приближенной формулы надо решить, сколько членов в этом ряду оставить и какова погрешность от отбрасывания остальных членов. Для простых рядов такие упражнения проделывают студенты. К ряду для возмущений непонятно было как и подойти. Лаплас рассчитывает, что можно достигнуть успеха, подбирая нужное число членов и постоянно сопоставляя полученный результат с данными наблюдений: «*Чрезвычайная трудность задач, относящихся к системе мира, принудила геометров прибегнуть к приближениям, при которых всегда можно опасаться, как бы отбрасываемые величины не оказали заметного влияния. Когда наблюдения указывали им на такое влияние, они снова обращались к их анализу; при проверке они всегда находили причину замеченных отклонений; они определяли их закон, открывая неравенства, которые еще не были указаны наблюдениями. Таким образом, можно сказать, что сама природа содействует аналитическому совершенствованию теорий, основанных на принципе всемирного тяготения*». В случае Юпитера и Сатурна заметные аномалии возникают из-за того, что через каждые 5 полных оборотов Юпитера и 3 оборота Сатурна планеты занимают почти то же самое положение и возмущения накапливаются. Все же, как показывают вычисления Лапласа, возмущения не накапливаются неограниченно; они являются не «вековыми», а периодическими с огромным периодом (913 лет). Итак, хотя компенсация происходит крайне медленно, наступит время, когда движение Юпитера начнет замедляться, а Сатурна — ускоряться.

С загадкой Галлея о «больших неравенствах» удалось покончить к 1784 году. *«Когда я выяснил эти неравенства и определил с бо́льшим вниманием, чем это делалось до сих пор, те, которые были уже вычислены, я убедился, что все наблюдения, древние и современные, представлены моей теорией во всей их точности. Прежде они казались необъяснимыми при помощи закона всемирного тяготения; теперь же они служат одним из наиболее ярких его подтверждений. Такова судьба этого блестящего открытия: всякое затруднение, которое возникало тут, превращалось в его торжество, и это является вернейшим признаком его соответствия истинной системе природы».*

Много усилий потребовалось от Эйлера, Даламбера, Клеро для построения теории движения Луны, согласующейся с наблюдениями. Главный эффект, который требовалось объяснить, — это быстрое (на 41° в год) перемещение эллиптической орбиты. Вычисления всех троих давали перемещение, не превышающее 20°. Лишь в 1849 году Клеро удалось уточнить вычисления настолько, что получилось нужное перемещение (а уже всерьез думали о поправочных членах в законе Ньютона!). Однако оставалась еще одна «мелочь», замеченная все тем же Галлеем в 1693 году. Анализируя «Альмагест» Птолемея и средневековые сведения о затмениях, он достоверно показал, что движение Луны ускоряется; более поздние вычисления показали, что ускорение равно 11″ в 100 лет!

Эту загадку Лаплас разрешил в 1787 году. В ускорении оказалось повинно ранее обнаруженное долгопериодическое колебание эксцентриситета *) земной орбиты: когда эксцентриситет уменьшается (орбита становится более похожей на окружность), средняя скорость движения Луны увеличивается. Еще одно возмущение, казавшееся «вековым», оказалось долгопериодическим!

Лаплас не пропускает ни одной загадки астрономии. Он имел право сказать: *«Потомство, вероятно, с благодарностью увидит, что новейшие геометры не передали ему ни одного астрономического явления, не определив его законов и причины».* Он показывает, что кольца Сатурна не могут быть сплошными, а сама планета сильно сжата (Гершель подтверждает это наблюдениями еще при жизни Лапласа). Лаплас существенно уточняет теорию приливов, показывает при помощи теории возмущений, как наблюдения над Луной можно использовать для определения астрономической единицы (расстояния от Земли до Солнца), для уточнения формы Земли.

Разумеется, Лаплас не прошел мимо задачи о спутниках Юпитера, которая была традиционной для всех великих астрономов с тех пор, как эти спутники были открыты Галилеем. В 1774 году эта задача была выбрана Академией наук в качестве темы для премии. В 1789 году Лаплас строит теорию движения спутников Юпитера, учитывающую влияние Солнца и их взаимодействия. Он, в частности, показывает, что время обращения первого спутника плюс удвоенное время обращения третьего равно утроенному времени обращения второго.

Главной задачей, волновавшей Лагранжа и Лапласа в 1773—1784 годах, была задача устойчивости Солнечной системы в целом. Были систематически исследованы возмущения для всех планет, и, хотя строгого доказательства устойчивости не было получено, согласование всех кажущихся аномалий с теорией тяготения было бесспорным. Доверие к теории возмущений было таково, что, когда обнаружились необъяснимые отклонения в движении Урана, Леверрье решился объяснить их существованием новой планеты.

«Пять геометров: Клеро, Эйлер, Даламбер, Лагранж и Лаплас — разделили между собой тот мир, сущест-

---

*) «Квант», 1975, № 5, с. 34 или 1977, № 2, с. 10.

вование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые еще не были открыты наблюдением, и, наконец, — в этом их вечная сила — они охватили с помощью одного принципа, одного-единственного закона самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом, геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих событий подтвердит во всех подробностях заключения науки». (Араго)

Публикации Лапласа делятся на два этапа: непосредственные сообщения о полученных результатах в 70—80-е годы и их систематизация и дополнение в пятитомной «Небесной механике». Для Лапласа характерно, что он с невероятной силой пробивался к решению конкретной задачи, не отвлекаясь на формирование и систематизацию аппарата. Противоположностью ему был Лагранж, который тратил много сил на доведение метода до формализма, пригодного для решения широкого круга задач. Поэтому современный учебник теоретической механики пестрит именем Лагранжа, а имя Лапласа можно найти лишь в историческом очерке.

«Был ли то вопрос либрации Луны или проблема теории чисел, Лагранж, по большей части, видел лишь математическую сторону дела; поэтому он придавал большое значение элегантности формул и обобщенности методов. Для Лапласа, наоборот, математический анализ был орудием, которое он приспособлял к самым разнообразным задачам, всегда подчиняя данный специальный метод сущности вопроса. Быть может, потомство скажет, что один был великим геометром, а второй — великим философом, который стремился познать природу, заставляя служить ей самую высокую геометрию». (Пуассон)

Отношения между Лапласом и Лагранжем были непростые. Честолюбивое желание Лапласа быть первым математиком Франции постоянно наталкивалось на высочайший авторитет Лагранжа, переехавшего в Париж в 1789 году. По многочисленным свидетельствам современников Лаплас болезненно воспринимал похвалы Лагранжу. Поведение Лагранжа в самых трудных ситуациях было безупречным, в то время как многие поступки Лапласа вызывали нарекания. Сохранение корректных отношений между Лапласом и Лагранжем — в большой степени плод терпимости Лагранжа. Характерно, что в посмертной речи Фурье о Лапласе ничего не говорится о моральных качествах Лапласа; в то же время в ней, как ни странно, много говорится о высочайших человеческих качествах Лагранжа.

Торопливый, без попыток выделить внутренние пружины стиль мог обмануть даже специалиста. В качестве курьеза можно привести мнение Пуансо, ученика Лапласа: *«Лаплас никогда не видел истину, разве только случайно. Она прячется от этого тщеславного человека, который говорит о ней только в неясных выражениях. Однако он пытается превратить эту неясность в глубокомыслие, и своим затруднениям он придает благородный вид вынужденной заботы, как человек, который боится сказать слишком много и разгласить секрет, которого у него никогда не было».* Про то, как часто у Лапласа встречается «легко видеть», ходили легенды. Био, читавший корректуры «Небесной механики», и Боудич (переводчик на английский язык) рассказывают о часах и днях, требовавшихся для заполнения пробелов. Самому Лапласу это тоже не всегда удавалось без напряженных размышлений (свидетельство Био).

Система мира

В Мелене Лаплас написал популярную книгу «Изложение системы Мира», вышедшую в 1796 году. В этой книге излагалась гипотеза Лапласа о происхождении Солнечной системы. Лаплас, последователь Ньютона, «не измышлявшего гипотез», предлагает свои соображения *«с осторожностью, подобающей всему, что не представляет результата наблюдений или вычислений»*. Лаплас описывает развитие Солнечной системы как замкнутый процесс, не требующий вмешательства внешних сил.

Известна легенда о разговоре, состоявшемся между Наполеоном и Лапласом, дарящим свою книгу:

Наполеон. Гражданин Лаплас, Ньютон в своей книге говорил о Боге. В вашей же книге, которую я уже просмотрел, я не встретил имени Бога ни разу.

Лаплас. Гражданин Первый консул, я не нуждался в этой гипотезе.

Слова Лапласа часто воспринимаются как демонстрация атеизма, хотя, по-видимому, здесь речь идет и о том конкретном обстоятельстве, что ни в гипотезе о возникновении Солнечной системы, ни в вопросе об ее устойчивости построения Лапласа не нуждаются во внешних факторах (ср. слова Ньютона на с. 17).

По гипотезе Лапласа все начинается с газовой туманности, вращающейся вокруг оси; туманность, остывая, сначала сплющивается вдоль экваториальной плоскости, а затем рассыпается на кольца на месте нынешних орбит планет (за счет уравновешивания центробежной силы и силы тяготения). Разнообразные неустойчивости в движении частичек кольца, их взаимное притяжение приводят к слипанию частиц в планеты. Аналогично происходит образование системы спутников планет, причем пример Сатурна показывает, что иногда слипание частиц кольца могло не произойти. Основные моменты модели Лапласа: все вращения происходят в одну сторону (отвечающую направлению первоначального вращения туманности), траектории близки к круговым, а их плоскости близки к экваториальной плоскости туманности, по мере удаления от центра период вращения увеличивается.

Первые удары по гипотезе Лапласа были нанесены Гершелем еще при жизни Лапласа: у Урана обнаружились спутники с «обратным» направлением вращения и с плоскостями орбит, почти перпендикулярными плоскости орбиты планеты. Далее число противоречий стало быстро расти. Гипотезу многократно пытались поправить, включить в более сложные построения.

Гипотеза Лапласа сыграла огромную роль в истории космогонии как первая гипотеза, опирающаяся на большой объем точных фактов механики и астрономии (предшествовавшие ей гипотезы Бюффона и Канта этим требованиям не удовлетворяли, хотя имеется много точек соприкосновения между гипотезой Лапласа и неизвестной ему гипотезой Канта). Еще в начале нашего века Пуанкаре писал о гипотезе Лапласа: *«Для ее возраста на ней не так уж много морщин».*

«Уточненный здравый смысл»

Так образно назвал Лаплас теорию вероятностей. Это вторая научная любовь Лапласа, которой он оставался верен в течение всей своей научной деятельности, начиная с первых работ 1774 года.

Стиль занятий Лапласа в этой области отличен от того, который был характерен для автора «Небесной механики». Здесь нет одной большой задачи и много времени уделяется осмысливанию того, что было сделано прежде, начиная с задачи о дележе ставок, стоявшей у истоков теории вероятностей.

В центре внимания находится *закон больших чисел* Я. Бернулли, состоящий в том, что при большом числе испытаний частота события в некотором смысле приближается к его вероятности. Отправляясь от результата Муавра, Лаплас получает оценку вероятности того, что это отклонение велико. Это одна из центральных теорем теории вероятностей — *теорема Муавра — Лапласа.* Ее доказательство использует средства математического анализа, что было новинкой для теории вероятностей.

Лаплас оценил и сделал достоянием науки результаты английского священника Байеса об оценке вероятности конкурирующих гипотез, если известны результаты их проверок.

Результаты деятельности Лапласа были подытожены в его «Аналитической теории вероятностей», вышедшей при его жизни тремя изданиями (первое — в 1812 году). Здесь уделяется много места созданию аппарата, прежде всего — методу производящих функций, применяющемуся ныне далеко за пределами теории вероятностей. От Лапласа идет «классическое определение» вероятности, при котором события определяются как множества равновероятных случаев: *«Теория вероятностей состоит в сведении всех событий одного и того же рода к некоторому числу равновероятных случаев, то есть случаев, относительно осуществления которых мы в равной мере не осведомлены, и в определении числа тех случаев, которые благоприятны для события, вероятность которого мы ищем».*

Наряду с книгой для «знатоков» Лаплас пишет книгу для широкой публики. Это его «Опыт философии теории вероятностей», выросший из лекций, читанных в Нормальной школе в 1795 году, и помещенный во 2-е издание «Аналитической теории вероятностей» (1814 год).

Лаплас был одним из первых авторов, который в книге по теории вероятностей приводил примеры не только из азартных игр, но и из реальной статистики. Так, он приводит цифры, показывающие, что число писем во Франции, не доставленных из-за отсутствия на них адреса, практически не меняется год от года.

Точка зрения Лапласа состоит в том, что вероятностные рассмотрения нужны только там, где часть информации не известна: «... *мы должны рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего. Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наравне с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором. Ум человеческий в совершенстве, которое он сумел придать астрономии, дает нам представление о слабом наброске того разума...*» Гипотетическое существо, о котором говорится в цитате, называют сейчас демоном Лапласа.

Размышления Лапласа по теории вероятностей в значительной степени стимулировались его занятиями астрономией и космогонией. Но его волновала также роль случая в общественной жизни. Чаще всего его высказывания по этому поводу не содержат конкретных вычислений. Вот пример: «*Не будем противопολагать бесполезного и часто опасного сопротивления неизбежным следствиям прогресса просвещения, но будем лишь крайне осторожно менять наши учреждения и обычаи, к которым мы давно уже применились. Мы хорошо знаем по опыту прошлого те неудобства, которые они представляют, но мы не знаем, как велико будет зло, которое может причинить их изменение. При такой неизвестности теория вероятностей предписывает избегать всякого изменения; особенно следует избегать внезапных изменений, которые в нравственном порядке, как и в физическом, никогда не происходят без большой потери живой силы*».

Был один вопрос, на формализацию которого Лаплас рассчитывал,— применение теории вероятностей к судопроизводству. Отправной является точка зрения, что абсолютно достоверное решение в суде невозможно, а нужно заботиться лишь о том, чтобы решение было правильным с наибольшей вероятностью. Она восходит к Кондорсе и тесно связана с практикой судопроизводства при революции. Позиция Лапласа более осторожна, и все же он считает, что нужно вычислять вероятность «*того, что решение суда, который может осудить только при данном большинстве, будет справедливо, то есть будет соответствовать истинному решению поставленного вопроса*», и поскольку «*большая часть наших суждений основана на вероятности свидетельских показаний, очень важным является подчинить их исчислению*». Предполагалось включать в оценки политические симпатии судей, степень запутанности дела, интеллектуальные характеристики судей и т. д. Жизнь показала ошибочность и общественную опасность таких исчислений.

* * *

Мы имели возможность остановиться лишь на важнейших направлениях научной деятельности Лапласа. Многое осталось за пределами нашего рассказа: работы по капиллярности, звуку и свету, математические результаты, следы которых сохранились в названиях «преобразование Лапласа», «уравнение Лапласа» и т. д.

Жизнь Лапласа в значительной степени отражает сложность эпохи, в которую он жил. Однако через всю свою жизнь он пронес верность науке, ни при каких обстоятельствах не прерывая занятий. Роль Лапласа в истории науки трудно переоценить.

«...*Лаплас был рожден для того, чтобы все углублять, отодвигать все границы, чтобы решать то, что казалось неразрешимым. Он кончил бы науку о небе, если бы эта наука могла быть окончена*». (Фурье)

М. Мамикон

Задача о ферзях

1. Постановка задачи

На обычной шахматной доске 8×8 пять ферзей можно расставить так, чтобы они били все поля доски. Четырех же ферзей для этого недостаточно (докажите!). Доска 3×3 бьется одним ферзем, находящимся на центральной клетке. Для доски 6×6 достаточно трех ферзей (рис. 1), двух мало.

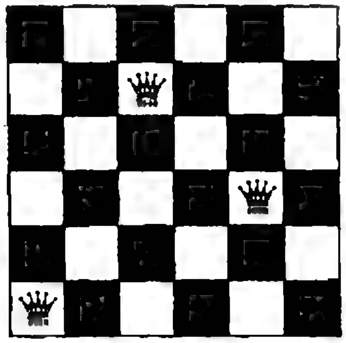


Рис. 1.

Обозначим через $F(n)$ минимальное число ферзей, при надлежащей расстановке которых на доске $n\times n$ каждое ее поле находится под ударом (поле, занятое ферзем, считается битым). Для $3\leqslant n\leqslant 8$ число $F(n)$ известно:

n	3	4	5	6	7	8
$F(n)$	1	2	3	3	4	5

На рисунке 2 изображена доска 11×11 и 5 ферзей на ней, бьющие каждое ее поле. Значит, $F(11)\leqslant 5$. Из рисунка 2 можно усмотреть, что $F(10)\leqslant 5$ и $F(9)\leqslant 5$.

Найти точно $F(n)$ при больших n довольно сложно. Даже современная быстродействующая вычислительная машина не сможет за разумное время перебрать все варианты расстановки, скажем, десяти ферзей на доске 20×20.

Поэтому представляется интересным найти хотя бы оценки — верхнюю и нижнюю — для $F(n)$. В этом и будет состоять наше постановка *задачи о ферзях*.

2. Оценка снизу

Если на доске $n\times n$ расставить n ферзей вдоль одной из главных диагоналей, а потом убрать два крайних ферзя, то оставшиеся $n-2$ ферзя тоже будут бить все поля доски. Значит,

$$F(n)\leqslant n-2. \qquad (1)$$

Если при расстановке $F(n)$ ферзей, при которой каждое поле бито, на краю доски нет ни одного ферзя, то $4(n-1)$ краевых клеток, обрамляющих доску, должны биться ферзями изнутри этой рамки. Так как каждый ферзь бьет в восьми направлениях, то он бьет ровно 8 клеток этой рамки. Если бы даже все ферзи били разные клетки рамки, то необходимо было бы иметь $\frac{4(n-1)}{8}=\frac{n-1}{2}=$

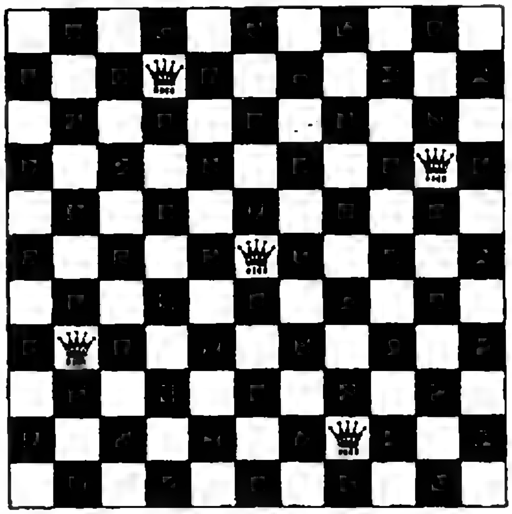


Рис. 2.

$=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ ферзей. Итак, в этом случае

$$F(n) \geqslant \frac{1}{2}n-\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Оценка (2) верна и в общем случае. Докажите ее. (Указание. Из (1) вытекает, что при любой расстановке $F(n)$ ферзей на доске останутся, по крайней мере, две свободные от ферзей вертикали и две свободные горизонтали.)

Из (2) $F(11) \geqslant 5$. В п. 1 мы указывали, что $F(11) \leqslant 5$. Значит, $F(11)=5$. Аналогично получается $F(10)=5$. Любопытно, что равенство $F(9)=5$ таким путем не получается. Докажите его самостоятельно!

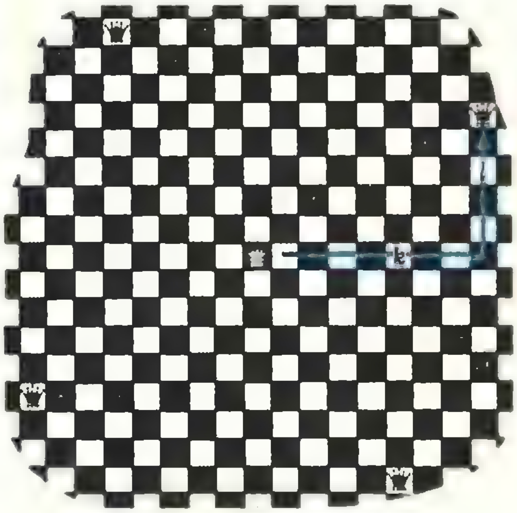


Рис. 3.

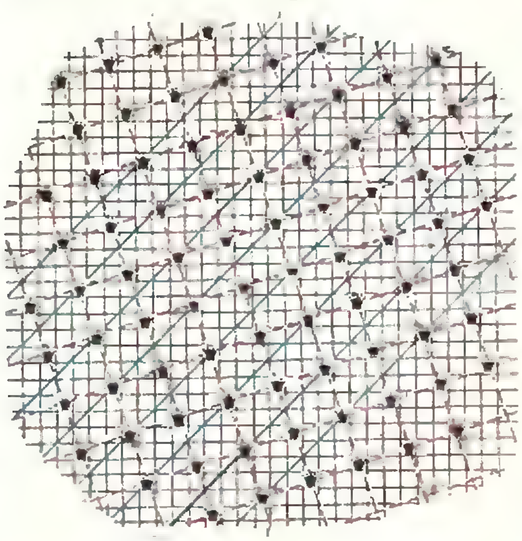


Рис. 4. $k=3$, $l=1$.

Займемся теперь улучшением верхней оценки (1).

3. $\langle k, l \rangle$ — решетка

Расставим ферзей на бесконечной шахматной доске *левым ходом $\langle k, l \rangle$-коня* (обычный шахматный конь —это $\langle 2, 1 \rangle$-конь), а именно: поставим сначала ферзя на произвольную клетку; затем поставим еще четырех ферзей так, как показано на рисунке 3; с каждым из поставленных ферзей поступим таким же образом, и т. д. Полученную расстановку бесконечного числа ферзей назовем *ферзевой $\langle k, l \rangle$-решеткой*. Каждая $\langle k, l \rangle$-решетка является квадратной решеткой, повернутой относительно шахматной доски (рис. 4).

Двигаясь вдоль ряда*), мы периодически будем встречать ферзей. Обозначим длину *периода решетки по ряду* через W_p. Например, для $\langle 3,1 \rangle$-решетки $W_p=10$ (рис. 4).

Двигаясь вдоль диагонали, мы также будем встречать ферзей периодически. Обозначим длину *периода решетки по диагонали* через W_∂. Для $\langle 3,1 \rangle$-решетки $W_\partial=5$ (рис. 4).

Упражнения

1. Для $\langle k, l \rangle$-решетки $W_p=\frac{k^2+l^2}{d}$, где d — наибольший общий делитель чисел k и l.

2. Для $\langle k, l \rangle$-решетки $W_\partial=\frac{k^2+l^2}{c}$, где c — наибольший общий делитель чисел $k+l$ и $k-l$.

3. Если k и l — взаимно простые числа разной четности, то $W_p=W_\partial=k^2+l^2$.

4. Периоды W' $\langle tk, tl \rangle$-решетки и периоды W $\langle k, l \rangle$-решетки связаны соотношениями $W'_p=tW_p$ и $W'_\partial=tW_\partial$.

4. Фундаментальная расстановка ферзей

Пусть k и l — взаимно простые числа разной четности. Рассмотрим $\langle k, l \rangle$-решетку. Для нее оба периода W_p, W_∂ равны $W_0=k^2+l^2$ (упражнение 3).

Вырежем из нашей бесконечной доски квадратную доску $W_0 \times W_0$ так, чтобы один ферзь попал в централь-

---

*) *Ряд*—это вертикаль или горизонталь.

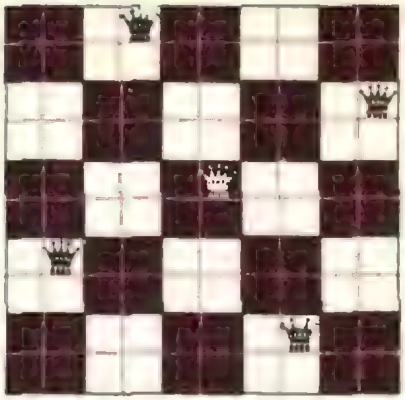


Рис. 5. $k = 2$, $l = 1$.

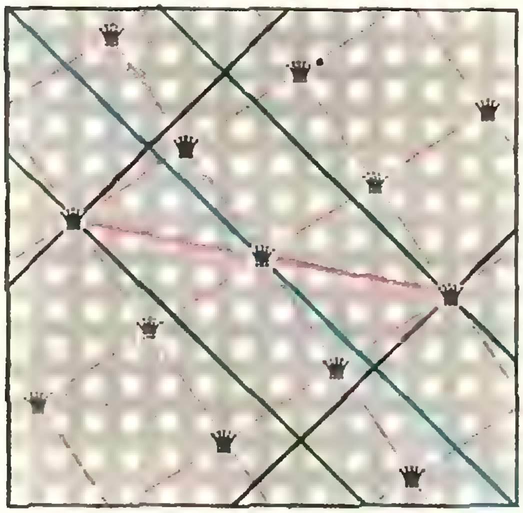
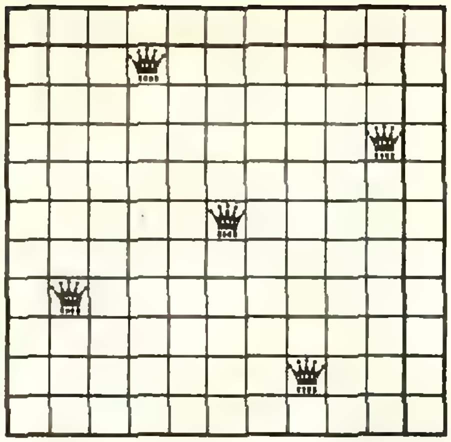


Рис. 6. $k = 3$, $l = 2$.

ную клетку доски (это возможно, поскольку W_0 нечетно).

Так как $W_0 = W_p = W_д$, никакие два ферзя на вырезанной доске не будут бить друг друга. На этой доске находится ровно W_0 ферзей — по одному на каждой вертикали (а также по одному на каждой горизонтали).

Разделим теперь каждую клетку этой шахматной доски на четыре одинаковые клеточки 2×2. Предварительно каждого ферзя подвинем ближе к правому верхнему углу старой клетки, чтобы после дробления он оказался в верхней правой клеточке. Добавим, наконец, к «размельченной» доске (со стороной в $2W_0$ клеточек) сверху и справа полоски шириной в одну новую клеточку. Мы получили квадратную доску со стороной в $2W_0+1$ клеточек.



Назовем полученную таким образом расстановку ферзей на доске $(2W_0+1)\times(2W_0+1)$ *фундаментальной*. Фундаментальная расстановка может быть получена из ферзя, стоящего в центральной клетке, левым ходом $\langle 2k, 2l\rangle$-коня.

На рисунке 5 изображена фундаментальная расстановка ферзей на доске 11×11, полученная из доски 5×5.

Число ферзей в фундаментальной расстановке равно W_0. Никакие два ферзя не бьют друг друга. Все ферзи находятся на вертикалях и горизонталях с четными номерами, причем в каждом четном ряду стоит по одному ферзю.

Таким образом, все клетки четных рядов являются битыми. Отметим для дальнейшего, что каждая клетка любой четной диагонали, параллельной одной из главных диагоналей, также является битой, поскольку находится либо на четной горизонтали, либо на четной вертикали (рис. 6).

5. Симметрия фундаментальной расстановки

При повороте фундаментальной расстановки на 90° вокруг центра доски ферзь (то есть клетка, занятая ферзем) переходит в ферзя. Значит, ферзи расположены симметрично относительно центра. Аналогичные утверждения верны для битых и небитых клеток: множество битых (небитых) клеток при повороте на 90° переходит в себя и симметрично относительно центра.

Докажем, что битые клетки симметричны относительно любой главной диагонали.

Если битая клетка — серая (рис. 6), то симметричная (относительно рассматриваемой главной диагонали) клетка — тоже серая, а все серые клетки биты. Если же битая клетка — белая, то на одной из проходящих через нее диагоналей стоит ферзь. Если эта диагональ перпендикулярна рассматриваемой главной диагонали, то интересующая нас симметричная клетка бьется тем же ферзем. Если же она параллельна — центрально-симметричным ферзем (см. зеленые диагонали на рисунке 6).

Из того, что при симметрии относительно главной диагонали и повороте на 90° битые клетки переходят в битые, легко следуют симметрии множества битых клеток относительно центральной вертикали и центральной горизонтали (почему?).

Значит, с точки зрения битых-небитых клеток все восемь октантов, на которые доска делится центральными рядами и главными диагоналями, равноправны (на рисунке 7 один из таких октантов обозначен буквой *O*).

6. Дополнительные ферзи

В конце п. 4 мы отметили, что все четные диагонали доски бьются ферзями фундаментальной расстановки. Поэтому остается рассмотреть лишь диагонали с нечетными номерами.

Число нечетных диагоналей одного направления на всей доске без главной диагонали и угловых «одноклеточных» диагоналей (бьющихся центральным ферзем) равно $2(W_0-1)$; по одну сторону от главной диагонали их будет W_0-1, а в одном октанте — еще в два раза меньше: $\frac{W_0-1}{2}$.

Это число совпадает с числом ферзей фундаментальной расстановки, находящихся по одну сторону от главной диагонали выделенного направления. Каждый ферзь из заштрихованной на рисунке 7 полосы стоит на одной из нечетных диагоналей, проходящих через октант *O*. Поэтому среди нечетных диагоналей октанта «пустых» диагоналей (на которых нет ферзей), очевидно, столько, сколько ферзей в угловом треугольнике *T*. Обозначим это число через $\varphi(n)$.

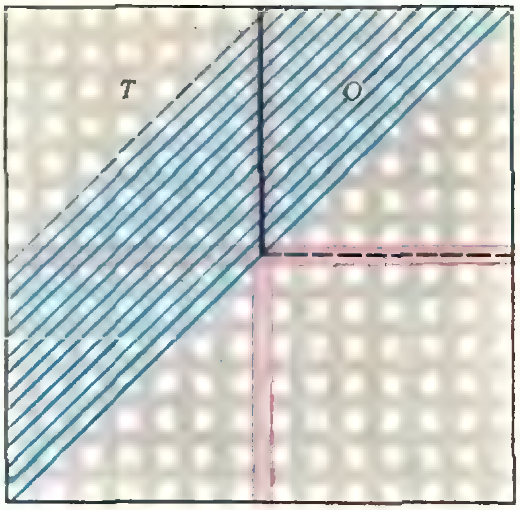


Рис. 7.

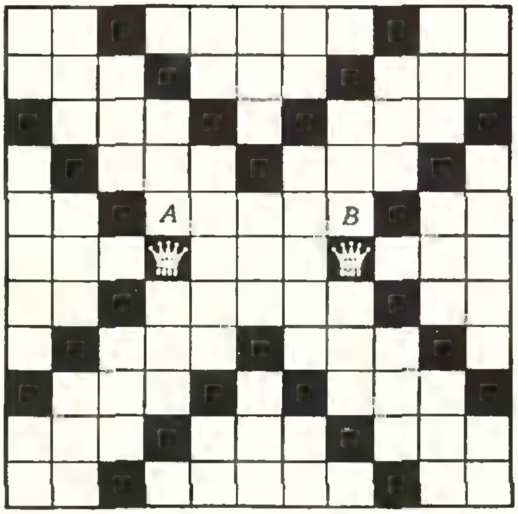


Рис. 8.

Рассмотрим одну из пустых диагоналей октанта *O*. Дополним ее до симметричной крестообразной фигуры (рис. 8). В силу симметрии битых-небитых клеток на остальных трех диагоналях этой фигуры тоже нет ферзей. Чтобы побить клетки этой фигуры, достаточно расположить два дополнительных ферзя в симметричных клетках *A* и *B* центральной горизонтали (рис. 8).

Поскольку в одном октанте число пустых диагоналей равно $\varphi(n)$, то всего достаточно расставить $2\varphi(n)$ дополнительных ферзей.

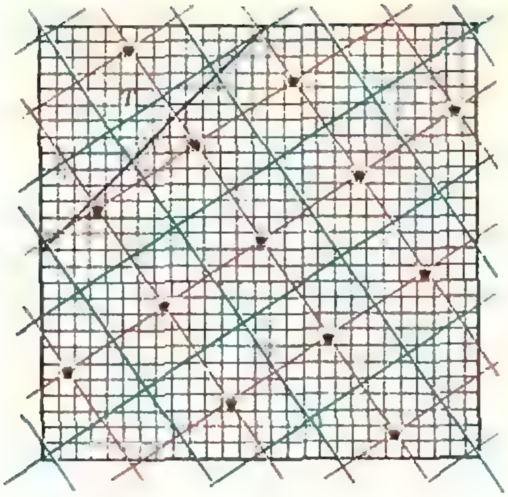


Рис. 9. $k = 3$, $l = 2$.

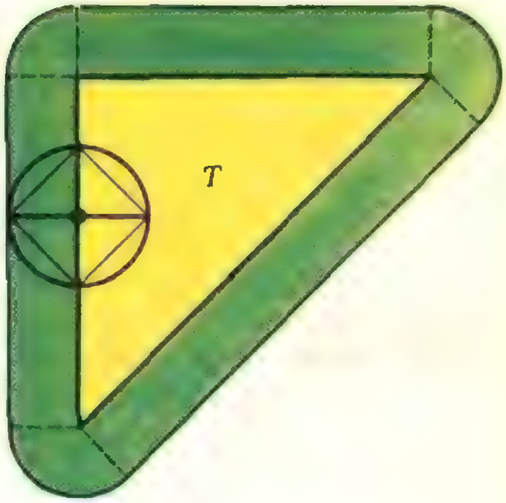


Рис. 10.

Итак,

$$F(n) \leqslant W_0 + 2\varphi(n). \qquad (3)$$

7. Ферзи и площади

Чтобы оценить сверху число $\varphi(n)$ ферзей в угловом треугольнике T (рис. 7), вспомним, что ферзи фундаментальной расстановки расположены в узлах решетки со стороной длины $\sqrt{(2k)^2+(2l)^2} = 2\sqrt{k^2+l^2}$ (длина клетки доски принята за единицу), повернутой относительно шахматной доски (рис. 4, 6).

Сдвинем эту решетку так, чтобы ферзи оказались в центрах квадратов (рис. 9). Тогда число ферзей в треугольнике T не будет превосходить числа «сдвинутых квадратов», центры которых лежат в T. Поскольку каждый такой квадрат целиком лежит в $\frac{d}{2}$-окрестности треугольника T (рис. 10; d — длина диагонали квадрата), их число не превосходит отношения площади этой окрестности к площади квадрата.

Упражнение 5. *ε-окрестностью плоской фигуры F* называется объединение кругов радиуса ε с центрами в каждой точке фигуры F. Докажите, что площадь ε-окрестности выпуклого многоугольника равна $S + Pe + \pi e^2$, где S — площадь многоугольника, P — его периметр.

Длина катетов треугольника T равна $\frac{n}{2}$. Сторона квадрата, из которого построена решетка, равна

$$2\sqrt{k^2+l^2} = 2\sqrt{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{2}\,\sqrt{n-1}.$$

Значит, искомое отношение площадей равно

$$\frac{\frac{n^2}{8} + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)n\sqrt{n-1} + \pi(n-1)}{2(n-1)}.$$

Поскольку $W_0 = k^2 + l^2 = \frac{n-1}{2}$, из (3)

$$F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{n}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{8(n-1)} + \pi - \frac{3}{8}.$$

Ввиду того, что $\frac{n}{\sqrt{n-1}} < 2\sqrt{n}$ и $\frac{1}{8(n-1)} < 1$, при $n \geqslant 2$, а $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, получаем для досок со стороной в $2(k^2+l^2)+1$ клеток, где k и l — взаимно простые числа разной четности, окончательную оценку сверху:

$$F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + 4\sqrt{n} + 5. \qquad (4)$$

8. Произвольные доски

Пусть теперь у нас есть доска $n \times n$, где $n \geqslant 11$. Возьмем такое натуральное m, что $8m^2 + 3 \leqslant n < 8(m+1)^2 + 3$. Поскольку $n \geqslant 11$, такое m найдется. Заметим, что $8m^2 - 3 = 2[(2m)^2 + 1^2] + 1 = 2(k^2 + l^2) + 1$, где $k = 2m$, $l = 1$.

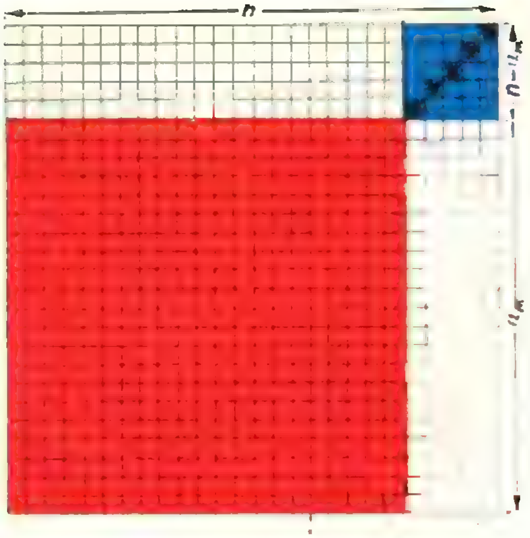


Рис. 11.

Обозначим $8m^2+3$ через α_m. Тогда мы можем написать

$$\alpha_m \leqslant n < \alpha_{m+1}. \qquad (5)$$

Разобьем нашу доску так, как показано на рисунке 11. Расставим на красной части доски $F(\alpha_m)$ ферзей так, чтобы они били все клетки этой части. По (4)

$$F(\alpha_m) < \frac{5}{8}\alpha_m + 4\sqrt{\alpha_m} + 5. \qquad (6)$$

На синей части доски расставим $n-\alpha_m$ ферзей по диагонали (рис. 11). Расставленные $F(\alpha_m)+(n-\alpha_m)$ ферзей бьют, очевидно, все поля нашей доски. Значит, $F(n) \leqslant F(\alpha_m) + (n-\alpha_m)$. Поскольку $n-\alpha_m < \alpha_{m+1}-\alpha_m = 16m+8$, из (6)

$$F(n) < \frac{5}{8}\alpha_m + 4\sqrt{\alpha_m} + 16m + 13. \qquad (7)$$

Упражнение 6. Докажите, что при всех m

$$4\sqrt{8m^2+3} + 16m + 13 < 16\sqrt{8m^2+3}.$$

Из (7) и упражнения 6 при всех натуральных m

$$F(n) < \frac{5}{8}\alpha_m + 16\sqrt{\alpha_m}.$$

Из (5) получаем окончательный результат

$$F(n) < \frac{5}{8}n + 16\sqrt{n}. \qquad (8)$$

Мы доказали (8) для $n \geqslant 11$. Легко проверить, что оценка (8) верна и для $3 \leqslant n \leqslant 10$ (см. п. 1). Итак,

$$\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \leqslant F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + 16\sqrt{n}$$

Задачи

1. Сколько нужно взять $\langle k, l\rangle$-решеток (при фиксированных k и l), чтобы они покрыли все клетки бесконечной шахматной доски?

2. Доска размером 9×9 бьется пятью ферзями. Найдите шесть разных центрально-симметричных решений.

3. Бьются ли все краевые клетки досок размером $n \times n$, где $n = 2(k^2+l^2)+1$ (k и l — взаимно простые числа разной четности), ферзями фундаментальной расстановки?

4*. Можно ли доску размером 35×35 побить восемнадцатью ферзями (см. рисунок на третьей странице обложки)?

5*. Верно ли, что отношение $\frac{F(n)}{n}$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{5}{8}$, при $n=8$? (Если это верно, то обычную шахматную доску 8×8 можно назвать «наихудшей».)

6*. Справедлив ли следующий *принцип монотонности:* если $n_1 < n_2$, то $F(n_1) \leqslant F(n_2)$?

Решения задач 4*—6* автору не известны.

Головоломки

Попробуйте расшифровать следующие примеры на сложение, в каждом из которых одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры, и ни одно число не начинается нулем.

1. буханка
уханка
ханка
анка
нка
ка
а
уууууу

2. доклад
оклад
клад
лад
ад
дддддд

3. фасад
сад
ад
д
судок

4. детали
детали
машина

Н. Антонович

М. Голубев, А. Кагаленко

Капля на горячей поверхности

Глядя на мир,
нельзя не удивляться
К. Прутков

Расположив утюг горизонтально, капните на него немного воды. Если температура утюга около 100 °С (немного больше 100 °С), то ничего особенного не произойдет. Капелька растечется по поверхности утюга и быстро, за несколько секунд, испарится. Если же температура утюга значительно больше 100 °С (350—500 °С), картина явления будет другой. Капелька, упав на утюг, отскочет от него, как мячик от пола (невысоко, на высоту 1—5 мм), и затем будет двигаться, не касаясь нагретой поверхности. Стабильность такого состояния зависит, прежде всего, от температуры поверхности — чем сильнее нагрет утюг, тем спокойнее ведет себя капля. Кроме того, время пребывания капли на утюге до полного испарения увеличивается в 100—200 раз. Причем скорость испарения капли зависит от ее размера: большие капли быстро уменьшаются в размерах до 3—5 мм, а маленькие «живут» довольно долго без заметных изменений. В одном из наших опытов капля диаметром 3 мм продержалась до полного испарения около 5 минут (300 секунд).

В чем причина столь странного поведения капли? Вернемся к началу опыта — капля воды падает на раскаленную поверхность. В начальный момент ее температура около 20 °С. Затем буквально за доли секунды нижние слои нагреваются до 100 °С, и начинается столь интенсивное испарение, что сила давления образующихся паров воды становится больше силы тяжести капли. Капля подпрыгивает, затем снова падает на утюг. За несколько подскоков вся вода в капле успевает прогреться до температуры кипения. Далее при достаточной температуре нагретой поверхности капля быстро успокаивается и начинает двигаться на некоторой высоте над этой поверхностью. Очевидно, в этом случае сила давления паров воды уравновешивает силу тяжести капли. В установившемся режиме капля довольно стабильна и «живет» весьма значительное время.

Обратите внимание на форму капли. При малых размерах форма кап-

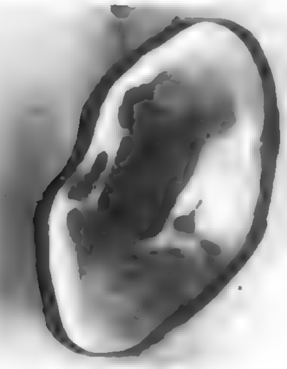


Рис. 1. Одна из фаз колебаний капли (момент наибольшего растяжения). Темное пятно в центре — образующийся внутри капли пузырек водяного пара.

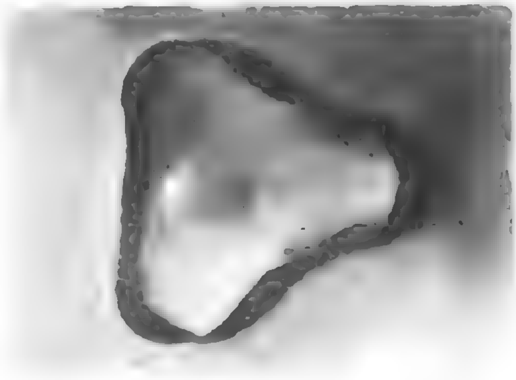


Рис. 2. Один из наиболее интересных видов колебаний: «треугольная» капля, в которой «впадины» и «выступы» постоянно меняются местами.

ли близка к сферической, а при больших — сфера оказывается сильно сжатой в вертикальном направлении. Дело в том, что капля над горячей поверхностью находится как бы на паровой подушке, опирается на нее. Возникает сила реакции, которая и вызывает деформацию капли. Чем капля больше, тем эта деформация заметнее.

В каплях (особенно больших) могут возникать колебательные процессы, например, сжатие и растяжение, а также и более сложные колебания (рис. 1 и 2). На фотографии, приведенной на рисунке 1, в центре капли видно темное пятно. Это — образовавшийся внутри капли воды пузырек пара. В больших каплях может возникнуть несколько таких пузырьков. Иногда капля приобретает форму кольца с одним большим пузырьком пара посередине. При таком режиме испарение происходит так интенсивно, что капля на глазах уменьшается в своих размерах.

В заключение несколько советов тем, кто захочет сам провести описанные опыты.

1. Желательно взять утюг, рабочая поверхность которого была бы как можно ровнее, то есть чтобы отсутствовали царапины, неровности и т. п. Встреча капли с неровностью утюга значительно сокращает время ее жизни (подумайте, почему?).

2. Утюг надо как-то закрепить (например, в штативе) и привести его поверхность в горизонтальное положение. В наших опытах использовался штатив от геодезического прибора.

3. Опыты можно проводить не только с водой. На утюг можно капнуть любую жидкость с низкой температурой кипения (типа ацетона, бензина, одеколона или спирта).

4. Не следует забывать и о технике безопасности, прежде всего, о надежности изоляции провода утюга и о предохранении попадания кипящей воды на руки.

Черно-белая... палитра

Человеческое зрение, несмотря на его достоинства, обладает рядом недостатков. Например, перепад яркостей в двух соседних областях в 1—2% (от большего значения яркости) фиксируется практически любым человеком с нормальным зрением, но плавное падение яркости на 10% от центра телевизионного экрана к его краю остается незамеченным. Но иногда бывает нужно различать в телевизионном изображении отдельные соседние участки с небольшими различиями в яркости. Для этого прибегают к . . . цветному телевидению. При этом на экране разглядывают не просто цветное, а специальным способом раскрашенное изображение.

Один из способов раскрашивания — так называемое квантование. При этом способе самую большую яркость принимают за 100% и разбивают весь промежуток яркостей (от черного до самого яркого) на несколько уровней. В этом случае на цветном телевизионном экране все яркости, попавшие в какой-то промежуток между двумя соседними уровнями, будут окрашены в один цвет. Например, детали изображения с яркостями, попадающими в область от 0 до 10% от максимальной яркости, будут окрашены в синий цвет, от 10% до 20% — в зеленый и т. д. При таком раскрашивании плавный перепад яркостей приобретает границу — резкий перепад цветов. Работать с таким изображением очень трудно — оно часто становится неузнаваемым.

При другом способе «раскрашивания» цвета плавно сменяют друг друга. В этом случае практически не образуется дополнительных границ, а плавные цветовые переходы различаются глазом более уверенно, чем слабые перепады яркости. При таком «раскрашивании» изображение сохраняет так называемое «психологическое тождество» с оригиналом.

Макет подобного «раскрашивателя» был создан во Всесоюзном заочном электротехническом институте связи и демонстрировался на ВДНХ.

Такое устройство — его называют телевизионным экспандером — может помочь быстрее ориентироваться в телевизионном изображении хирургам, контролирующим ход операции с помощью рентгено-телевизионных установок, операторам, проводящим осмотр покрытий, метеорологам, составляющим карты облачности, и т. п.

М. Кушнир

В. Войскунский

Сегодня — фигурное катание

Спорт многолик. Он — источник здоровья, переживаний болельщиков и математических задач. Есть виды спорта, хорошо «освоенные» математиками, например — шахматы. Сегодня мы займемся фигурным катанием.

Мы рассмотрим ряд задач, связанных с правилами определения мест, занятых фигуристами в соревнованиях.

Судейство соревнований по фигурному катанию осуществляют несколько арбитров. Наиболее ответственные соревнования судят девять арбитров, поэтому при дальнейшем изложении мы будем считать, что арбитров, осуществляющих судейство,— девять.

Окончилось соревнование. Каждый из девяти арбитров «расставил» участников по местам. Предполагается, что каждый арбитр дает всем спортсменам разные места (нельзя, чтобы несколько спортсменов «поделили» какое-то место). Итак, в результате соревнований каждый из арбитров «присваивает» каждому фигуристу определенное место; набор мест, полученный фигуристом, будем называть *комплектом оценок*.

Как в итоге устанавливается место, занятое каждым фигуристом в соревновании? У зрителей, наблюдающих соревнования по фигурному катанию, иногда создается впечатление, что это определяется суммой мест: складываются места, присвоенные участнику каждым арбитром. Однако это не так.

Правило определения мест таково: первое место занимает спортсмен, комплект оценок которого имеет наибольшее количество первых мест; если несколько фигуристов имеют одинаковое количество первых мест, то предпочтение отдается тем, у кого больше вторых мест; в случае равенства вторых мест — тем, у кого больше третьих мест, и т. д.; после того, как первое место «присвоено», в комплектах оценок остальных спортсменов «1» заменяется на «2»; затем второе место занимает спортсмен, комплект оценок которого имеет наибольшее количество вторых мест; при равенстве количества вторых мест сравнивают количества третьих мест и т. д.; после того, как первые $m-1$ мест «присвоены», в комплектах оценок остальных спортсменов «$m-1$» заменяется на «m» *), затем определяется m-е место; если у двух фигуристов, претендующих на одно место, количества каждых мест одинаковы, предпочтение отдается участнику, у которого сумма мест в первоначальном комплекте оценок меньше.

Реальная ситуация гораздо сложнее, в частности потому, что соревнования по фигурному катанию — многоборье. После окончания соревнований в отдельном виде многоборья каждый арбитр выставляет каждому спортсмену определенный балл (эти баллы при показе соревнований по телевидению показываются на экране). В зависимости от баллов, «присвоенных» участникам данным арбитром, они «расставляются» по местам: чем выше балл, тем выше место, то есть меньше его номер. После окончания всех видов многоборья для каждого фигуриста подсчитывается «итоговый» балл, полученный им от каждого арбитра, причем осуществляется не простое сложение баллов, полученных в каждом виде многоборья, а более сложный подсчет. В соответствии с «итоговыми» баллами фигуристы вновь получают у каждого из арбитров определенное место. Из этих-то мест и составляется комплект оценок, о котором говорилось выше.

---

*) Заметим, что оценок $<(m-1)$ в этот момент в комплектах оценок не будет, так как они были заменены на предыдущих шагах.

По сформулированному правилу фигурист с лучшей (меньшей) суммой мест из комплекта оценок иногда получает худшее (большее) место. Такие случаи встречались в практике фигурного катания, причем в соревнованиях самого высокого ранга. Так, на чемпионате мира по фигурному катанию 1975 года, который проходил в Колорадо-Спрингс, В. Ковалев с суммой мест 27 занял второе место, а Д. Карри с суммой мест 23— третье. Приведем фрагмент таблицы распределения мест, полученных спортсменами от арбитров в этих соревнованиях, для фигуристов, занявших в результате первые шесть мест:

Фигуристы	Номера арбитров									Занятое место	Сумма мест
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
Волков	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1	13
Ковалев	2	2	4	2	5	2	4	2	4	2	27
Карри	3	3	3	3	2	3	2	3	1	3	23
Крэистон	5	4	2	4	3	4	1	4	2	4	29
Маккеллен	6	5	5	5	4	5	5	6	7	5	48
Овчинников	4	6	7	6	7	6	7	5	5	6	53

Итак, не всегда фигурист, получивший минимальную сумму мест, займет первое место. А существует ли сумма мест, гарантирующая фигуристу первое место? Безусловно. Например, девять. Естественно возникает вопрос: какова максимальная величина α_1 такая, что любая сумма мест, меньшая или равная α_1, гарантирует фигуристу первое место? Подобный вопрос может быть поставлен относительно любого места, которое фигурист может занять в соревнованиях. Это и есть основная наша

Задача. В соревнованиях по фигурному катанию приняли участие n спортсменов. Для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ определить наибольшее число α_k такое, что любая сумма мест, меньшая или равная α_k, гарантирует фигуристу, получившему ее, место не ниже k-го. Предположим для простоты, что никакие два фигуриста не получили одинаковых сумм мест.

Случай $k=n$ тривиален, так как в этом случае при любой сумме мест, полученной фигуристом, он займет место не ниже k-го. Поэтому $\alpha_n = 9n$.

Рассмотрим случай $k=1$. Покажем, что $\alpha_1 = 13$. Рассмотрим следующее возможное распределение мест, полученных спортсменами от арбитров:

Номера арбитров									Занятое место	Сумма мест
1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	13
2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	14
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	27
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	$9n$

Из этой таблицы вытекает, что $\alpha_1 \leqslant 13$, так как в ней спортсмен с суммой мест 14 имеет второе место. Нам осталось показать, что если фигурист получит сумму мест s не больше 13, то он займет первое место. Допустим, что в этом случае фигурист получил n_1 первых мест и l мест ниже первого, $n_1+l=9$. С одной стороны, $s \geqslant n_1+2l=18-n_1$. С другой стороны, $s \leqslant 13$. Отсюда $n_1 \geqslant 5$, значит, в рассматриваемом случае фигурист займет первое место.

Упражнение 1. Доказать, что
$$\alpha_2 = \begin{cases} 17 & n=3 \\ 16 & n \geqslant 4. \end{cases}$$

Упражнение 2. Доказать, что $\alpha_3 = 18$.

Оказывается, для остальных k (то есть $4 \leqslant k < n$) $\alpha_k = k+16$.

Упражнение 3. Для любого $k : 4 \leqslant k < n$ построить таблицу распределения мест, полученных спортсменами от арбитров, в которой некоторый участник имеет сумму мест $k+17$ и занимает $(k+1)$-е место.

Из упражнения 3 вытекает, что при рассматриваемых k

$$\alpha_k \leqslant k+16. \qquad (1)$$

Упражнение 4. Сколько существует разных таблиц с указанным в упражнении 3 свойством? Две таблицы считаются разными, если в одной из них есть комплект оценок, которого нет в другой таблице, причем два комплекта оценок различны, если для некоторого i $1 \leqslant i \leqslant n$ число i-х мест в одном комплекте не равно числу i-х мест в другом комплекте

Упражнение 5 Доказать, что если сумма мест фигуриста не превосходит 20, то он занимает место не ниже четвертого

Упражнение 6 Для любого k $4 \leqslant k < n$ доказать, что если сумма мест фигуриста не превосходит $k+16$ и в его комплекте оценок есть места больше k-го, то он занимает место не ниже k-го.

Докажем методом математической индукции, что при k $4 \leqslant k < n$ сумма мест, не превосходящая $k+16$, гарантирует фигуристу место не ниже k-го Отсюда и из (1) следует $\alpha_k = k+16$

Базис индукции $k=4$ — вытекает из упражнения 5

Индукционный шаг Предположим, что при l $4 \leqslant l < n-1$ сумма мест, не превосходящая $l+16$, гарантирует фигуристу место не ниже l-го Докажем, что тогда сумма мест, не превосходящая $l+17$, гарантирует место не ниже $(l+1)$-го Допустим противное фигурист A имеет сумму мест, не превосходящую $l+17$, и место ниже $(l+1)$-го Из упражнения 6 вытекает, что в комплекте оценок фигуриста A все места не превосходят $l+1$ Но тогда и в комплекте оценок фигуриста B, имеющего $(l+1)$-е место, все места не превосходят $l+1$ Из наших правил и условия задачи вытекает, что сумма мест фигуриста B меньше суммы мест фигуриста A Значит, она не превосходит $l+16$ А это уже противоречит предположению индукции

Наше утверждение доказано Тем самым мы полностью решили нашу задачу

Опустим в нашей задаче условие о том, что никакие два фигуриста не получили одинаковых сумм мест Тогда несколько фигуристов могут иметь одинаковые комплекты оценок В этом случае давайте считать, что все эти фигуристы заняли одинаковое место Например, если каждый из двух фигуристов с одинаковыми комплектами оценок может занять четвертое место, то будем считать, что они оба заняли четвертое место, а остальные фигуристы претендуют не на пятое, а на шестое место

Упражнение 7 Доказать, что, как бы мы ни дополнили Правило определения мест, при любом $4 \leqslant k < n$ фигурист, получивший сумму мест $k+16$, может занять место ниже k-го

Предположим, что сумма мест у фигуриста, занявшего первое место, не совпадает ни с одной из сумм мест, полученных остальными фигуристами

Попробуйте установить, можно ли так при этом дополнить Правило определения мест, чтобы все результаты нашей задачи остались без изменений

Попробуйте также решить нашу задачу, если число арбитров на соревнованиях равно 2,7, p

---

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта».

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М421—М445 и Ф438—Ф447 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших нам письма, правильно решили задачу **М436** Остальные задачи решили *А Аббасов* (Джебраильский р-н Аз ССР) **27**, *Т Абдуввагабов* (с Ярашазмаляр ДАССР) **33**, *А Агабабян* (с Балко Гр ССР) **42**, *А Агаев* (с. Попровка Аз ССР) **37**, *Р. Азизян* (Баку) **26**, **27**, **31**, **32**, **37**, *А Айнулин* (Тюмень) **27**, **29**, *В Айриян* (Раздан) **33**, **37**, *М Айткалиев* (Алма Ата) **22** **33**, *А Алексеев* (Пермь) **22**, **24**, **26—28**, **31—33**, **35**, **37**, **39**, *а*), б), **41** **42**, *В Алифанов* (ст Выселки Краснодарского края) **23** **26** **37**, *С Антонов* (Киев) **41**, **42** **45**, *Б Аронов* (Саратов) **21**, **22** **24**, **26**, **27**, **31—33**, **35**, **37** **38**, **40**, *К Архангельский* (Херсон) **37**, **44**, **42**, *И Архипов* (Алма-Ата) **22**, **23**, *А Атабекян* (Ереван) **33**, *Р Ахкамов* (Стерлитамак) **22**, **26**, **37**, **42**, **45**, *К Бакланов* (Тула) **42**, *Е Балакина* (Москва) **31**, **33**, *А. Балинский* (с Дубляны Львовской обл) **37**, **41**, **42**, **43**, **в**), *П Баньковский* (Уральск) **23** **41**, *П Басараб* (с Ягановка Сумской обл) **22**, *В Батырев* (Москва) **22**, **24** **26**, **27**, **29**, **31**, **33**, **37** **38**, **39**, а), б), **40—42**, **44**, **45**, *В Бахтин* (Воронеж) **22**, **24**, **25**, **27**, **28**, **29**, *Ю Бащенко* (с Демидовка Винницкой обл) **29**, **37**,

(Продолжение **см** *с 43)*

Кардиоида

Кардиоида — это траектория точки M, лежащей на окружности (O_1, a), которая катится по неподвижной окружности (O, a) того же радиуса (рис. 1). В начальном положении точка M находится в точке A неподвижной окружности, называемой *полюсом* кардиоиды. На рисунке 1 видно, что в полюсе кардиоида имеет острие. Отталкиваясь от приведенного определения, покажем другие способы построения кардиоиды и некоторые ее свойства.

Касательная к кардиоиде в произвольной ее точке M проходит через точку P подвижной окружности, диаметрально противоположную точке ее касания Q с неподвижной (доказывается это так же, как в «Кванте», 1977, № 3, с. 19).

Ввиду того, что $\smile QM$ и $\smile QA$ конгруэнтны, точка M симметрична полюсу A относительно общей касательной NQ подвижной и неподвижной окружностей. Следовательно, окружность $(Q, |QA|)$ пройдет через точку M. Поскольку угол PMQ — прямой, касательная к кардиоиде PM будет также касательной к окружности $(Q, |QA|)$. Поэтому кардиоида может быть получена как огибающая семейства окружностей $(Q, |QA|)$ при всевозможных положениях точки Q на неподвижной окружности.

Длина отрезка AN равна ${}^1/_2|AM|$. Поэтому точка N описывает кардиоиду, гомотетичную той, которую мы только что рассмотрели, с центром гомотетии в точке A и коэффициентом гомотетии, равным ${}^1/_2$. Чтобы начертить «малую» кардиоиду, можно воспользоваться угольником, один катет которого во всех его положениях проходит через точку A, а второй касается неподвижной окружности. Тогда вершина прямого угла N опишет эту кардиоиду.

Пусть $AM \cap (O, a) = T$ (рис. 2). В четырехугольнике OO_1MT две стороны параллельны ($AM \parallel OO_1$, поскольку они имеют общий перпендикуляр NQ), две другие стороны конгруэнтны. Значит, OO_1MT — равнобедренная трапеция или параллелограмм. Из $\widehat{MO_1Q} = \widehat{AOQ}$ следует, что OO_1MT — параллелограмм. Поэтому кардиоиду можно строить, откладывая на прямой AT (при всевозможных положениях точки T на неподвижной окружности) от точки T отрезок TM длины $|OO_1| = 2a$. Откладывая его в обе стороны от T, мы получим всю кардиоиду*).

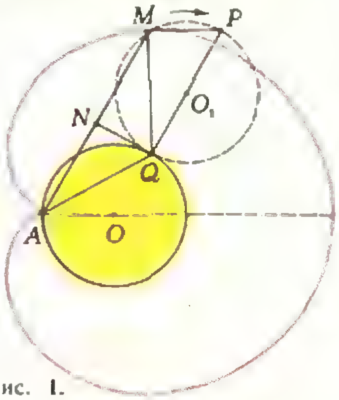


Рис. 1.

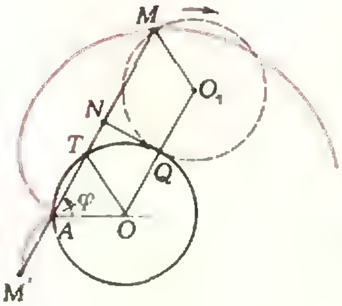


Рис. 2

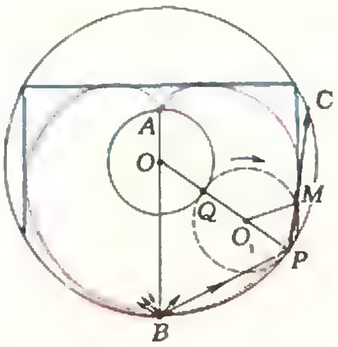


Рис. 3.

Докажите, что полярное уравнение («Квант», 1977, № 7, с. 46) кардиоиды имеет вид $\rho = 2a(1 + \cos\varphi)$, если за полюс полярной системы взять полюс кардиоиды A и полярную ось направить по AO (рис. 2).

Рисунок 3 объясняет способ построения кардиоиды, о котором рассказывается на второй странице обложки. Точка B показывает здесь положение точки M после того, как подвижная окружность прокатилась по неподвижной на половину своей длины. Отрезок PC симметричен отрезку PB относительно радиуса OP, так как $\widehat{MPO_1} = {}^1/_2\widehat{MO_1Q} = {}^1/_2\widehat{QOA} = \widehat{O_1PB}$ и $B \in (O, |OP|)$, $C \in (O, |OP|)$. Поэтому $|BP| = |PC|$. Кроме того, PC — касательная к кардиоиде.

Представим теперь, что в точке B помещен источник света. Ясно, что кардиоида является огибающей лучей, отраженных от окружности $(O, |OP|)$. Поэтому кардиоида является катакаустикой этой окружности («Квант», 1977, № 9, с. 43).

Докажите, что если некоторая окружность касается внутренним образом окружности вдвое большего радиуса, то при качении «большей» окружности по «меньшей» любая ее точка опишет кардиоиду.

Выразите длины «синих» хорд на рисунке 3 через a.

В. Березин

---

*) Этот способ построения кардиоиды уже приводился без обоснования в заметке «Улитка Паскаля» («Квант», 1977, № 5, с. 36)

задачник кванта

Задачи

М476—М480; Ф488—Ф492

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М476, М477» или «Ф488». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М476. а) Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leqslant 4$.

б) Пусть пространство разбито тремя семействами параллельных плоскостей на одинаковые кубики. Вершины кубиков назовем *узлами*. Докажите, что если все n вершин выпуклого многогранника лежат в узлах, а на его ребрах, гранях и внутри многогранника других узлов нет, то $n \leqslant 8$.

С. Миронов

М477*. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x + 1$.

М478. В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.

а) Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.

б) Постройте пример такого турнира семи команд.

в)* Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.

М479. Существуют ли а) шесть, б) 1000 таких различных натуральных чисел, что для любых двух a и b из них сумма $a + b$ делится на разность $a - b$?

Задачи М477—М479 предложил *С. Конягин*

М480.* Последовательность c_n строится по следующему правилу: $c_1 = 2$, $c_{n+1} = [3c_n/2]$ для $n \geqslant 1$*). Докажите, что

а) в этой последовательности бесконечно много четных чисел и бесконечно много нечетных чисел;

б) последовательность $e_n = (-1)^{c_n}$ непериодическая;

в) существует число γ такое, что $c_n = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \gamma\right]$.

---

*) Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

Ф488. Прямоугольная проволочная рамка с размерами сторон $a = 0{,}020$ м и $b = 0{,}030$ м погружается в мыльную воду, благодаря чему на ней образуется мыльная пленка. При наблюдении в отраженном свете, угол падения которого $\alpha = 30^\circ$, пленка кажется зеленой ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м).

1) Можно ли определить массу этой пленки с помощью весов, точность которых 0,1 мг? Плотность мыльного раствора $\rho = 10^3$ кг/м³, показатель преломления пленки $n = 1{,}33$.

2) Какого цвета будет казаться самая тонкая из пленок, удовлетворяющих условию задачи, если свет будет падать на нее и затем отражаться перпендикулярно пленке?

Указание. Учесть, что при отражении света от более плотной среды фаза волны скачком меняется на π.

X Международная олимпиада по физике

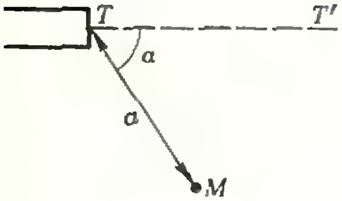


Рис. 1.

Ф489. Электроны ускоряются в электронной пушке электростатическим полем, проходя промежуток, напряжение на котором $U = 10^3$ В. Вылетев из пушки в точке T, электроны движутся затем по прямой TT' (рис. 1). В точке M на расстоянии $a = 5{,}0$ см от точки T находится мишень, причем прямая TM образует угол $\alpha = 60^\circ$ с прямой TT'.

1) Какой должна быть индукция $\vec{B}$ однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, чтобы электроны, вылетевшие из пушки, попадали в мишень?

2) Какой должна быть индукция $\vec{B}_1$ однородного магнитного поля, параллельного прямой MT, чтобы электроны попадали в мишень?

Считать, что $|\vec{B}|$ и $|\vec{B}_1|$ не превышают 0,030 Т.

X Международная олимпиада по физике

Ф490. При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщиной 1 мм количество частиц в пучке уменьшается на 15%, а их скорость не изменяется. Какая доля потока нейтронов проходит через пластинку из кадмия толщиной 10 мм?

Ф491. Большая тонкая проводящая пластина площади S и толщины d помещена в однородное электрическое поле $\vec{E}$, перпендикулярное пластине. Какое количество теплоты выделится в пластине, если выключить поле?

П. Зубков

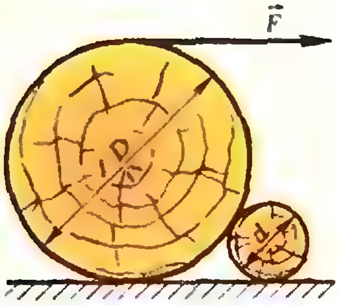


Рис. 2.

Ф492. На шероховатой плоскости лежат два круглых цилиндра с диаметрами D и d (рис. 2). Вокруг большого цилиндра обмотан шнур, к концу которого приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Определить, при каком, одинаковом для всех соприкасающихся поверхностей, коэффициенте трения μ большой цилиндр может быть перетащен через малый. Каким должно быть абсолютное значение силы $\vec{F}$ для того, чтобы это можно было сделать?

В. Керженцев

Решения задач

М434, М435; Ф445, Ф446

М434. *Число* $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ *представляется в виде несократимой дроби* $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажите, что p_n *— четное число.*
б) Докажите, что если $n>3$, *то* p_n *делится на 8.*
в) Докажите, что для любого натурального k *можно указать такое* n, *что числа* p_n, p_{n+1}, $p_{n+2}, \ldots$ *делятся на* 2^k.

а), б) Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ есть сумма нескольких несократимых дробей, числитель каждой из которых делится на 2^k, то и p делится на 2^k. Для решения задачи а) остается заметить, что числители дробей $\frac{2}{1}$, $\frac{2^2}{2}$, $\frac{2^3}{3}, \ldots$ после сокращения останутся четными (так как для любого натурального m справедливо неравенство $2^{m-1}\geqslant m$). Для решения задачи б) достаточно было бы иметь неравенство $2^{m-3}\geqslant m$. Это неравенство, однако, справедливо, лишь начиная с $m=6$. Поэтому проверим, что числители сумм $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}$ и $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}$ после сокращения будут делиться на 8. Эти суммы равны $\frac{32}{3}$ и $\frac{256}{15}$ соответственно.

в) Рассмотрим функцию $L_n(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}$. Покажем, что многочлен $L_n(2x-x^2)-2L_n(x)=f(x)$ имеет вид

$$f(x)=x^{n+1}\cdot\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n+2}x+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2n}x^{n-1}\right), \quad (*)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — целые числа. Для этого достаточно показать, что многочлен $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x)=x^n(a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}).$$

Заметим, что $L_n'(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$. Поэтому

$$f'(x)=L_n'(2x-x^2)\cdot(2-2x)-2L_n'(x)=$$
$$=\frac{1-(2x-x^2)^n}{1-2x+x^2}(2-2x)-\frac{2(1-x^n)}{1-x}=$$
$$=2\cdot\frac{x^n-x^n(2-x)^n}{1-x}=x^n\cdot\frac{2(1-(2-x)^n)}{1-x}$$

и

$$1-(2-x)^n=(1-(2-x))(1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots+(2-x)^{n-1})=(x-1)(1+(2-x)+(2-x)^2+\ldots+(2-x)^{n-1}).$$

Так как $f(2)=L_n(0)-2L_n(2)=-2L_n(2)$, то, положив в равенстве $(*)$ $x=2$, получим

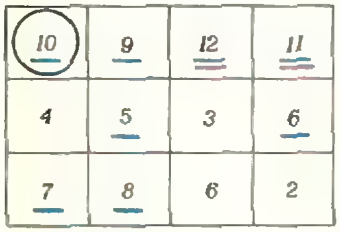
$$L_n(2)=-2^n\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{2a_1}{n+2}+\ldots+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{2n}\right).$$

Из неравенства $n<2^{\frac{n+1}{2}}$, справедливого для любого натурального числа n, следует, что все знаменатели в правой части меньше чем $2^{\frac{n+3}{2}}$. Поэтому ни один из знаменателей не делится на $2^{\left[\frac{n+3}{2}\right]+1}$ и, следовательно, число $L_n(2) = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}$ делится на $2^{n-1-\left[\frac{n+3}{2}\right]}$ (при $n \geqslant 4$). Для решения задачи остается заметить, что показатель $n-1-\left[\frac{n+3}{2}\right] \geqslant n-1-\frac{n+3}{2} = \frac{n-5}{2}$ неограниченно возрастает с ростом n. В статье «2-адические числа» объясняется происхождение этого решения.

Д. Фаддеев

◆

М435. *В таблице размерами $m \times n$ записаны действительные числа, в каждой клетке по числу. В каждом столбце подчеркнуто k наибольших чисел ($k \leqslant m$), в каждой строке — l наибольших чисел ($l \leqslant n$). Докажите, что по крайней мере kl чисел подчеркнуты дважды.*



$k = 1$; $l = 2$.

Рис. 1.

Мы будем решать задачу по индукции в несколько более общей формулировке, предполагая, что в каждом столбце подчеркивается не менее k наибольших, а в каждой строке — не менее l наибольших чисел. Индукцию проведем по $m+n$.

При $m = n = k = l = 1$ утверждение очевидно. Пусть у нас есть таблица размерами $m \times n$. Сведем задачу к таблице $m \times (n-1)$ или $(m-1) \times n$. Если в таблице все подчеркнутые числа подчеркнуты дважды, то их количество не меньше kn. В противном случае среди чисел, подчеркнутых по одному разу, выберем наибольшее число A. Число A является либо одним из наибольших в своем столбце, либо одним из наибольших в своей строке. Предположим, что A — одно из наибольших в своем столбце. Тогда, поскольку A не является одним из наибольших в своей строке и A — наибольшее среди всех по одному разу подчеркнутых чисел, все подчеркнутые (по строке!) наибольшие числа, стоящие в одной строке с A, подчеркнуты дважды (см. рис. 1). Выбросив из нашей таблицы эту строку, мы получим таблицу $(m-1) \times n$, в которой подчеркнуто не менее l наибольших чисел в каждой строке и не менее $k-1$ чисел — в каждом столбце. Предположение индукции заключается в том, что в этой меньшей таблице дважды подчеркнуто не меньше $(k-1)\,l$ чисел. Эти же числа подчеркнуты дважды и в большой таблице $m \times n$, в которой, кроме того, дважды подчеркнуты не менее l чисел в выброшенной строке. Так что всего в исходной таблице дважды подчеркнуто не меньше $(k-1)l + l = kl$ чисел, что и утверждалось в задаче.

С. Конягин

◆

Ф445. *Конденсатор емкости $C = 0{,}04$ мкФ с помощью ключа K периодически с частотой $\nu = 50$ раз в секунду заряжается от источника с э. д. с. $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом и разряжается через сопротивление $R = 1$ кОм (рис. 2). Определить мощность, выделяемую в нагрузке R, и к. п. д. такого устройства. Считать, что время замыкания контактов ключа достаточно, чтобы конденсатор успел полностью зарядиться (положение I) и полностью разрядиться (положение II).*

Во время разрядки конденсатора на сопротивлении R выделяется вся энергия, заключенная в конденсаторе. Эта энергия

$$W = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

За одну секунду конденсатор разряжается 50 раз (частота переключения ключа $\nu = 50$ 1/с). Следовательно, средняя мощность $P_{\text{ср}}$, выделяемая в нагрузке R, равна

$$P_{\text{ср}} = W\nu = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\nu = 10^{-2}\ \text{Вт}.$$

Для того чтобы найти коэффициент полезного действия η данного устройства, надо энергию W, выделяемую на сопротивлении R во время разрядки конденсатора, разделить на работу A, совершаемую источником тока во время зарядки конденсатора. Так как

$$A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2,$$

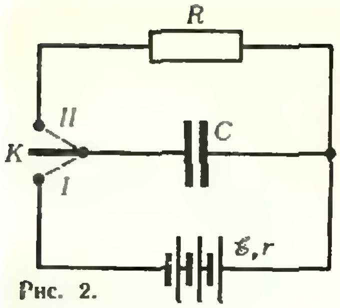


Рис. 2.

$$\eta=\frac{W}{A}=\frac{C\mathscr{E}^2/2}{C\mathscr{E}^2}=\frac{1}{2},$$

то есть к. п. д. не зависит от значений сопротивлений R и r.

Если бы конденсатора не было, а источник с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r был бы непосредственно подключен к нагрузке R, то к. п. д. схемы был бы равен

$$\eta'=\frac{I^2R}{I^2(R+r)}=\frac{R}{R+r}=0{,}995,$$

что значительно больше, чем в нашем случае.

◆

Ф446. *На шероховатой ленте транспортера лежит тело массой M, прикрепленное к стене пружиной жесткостью k (рис. 3). Ленту приводят в движение с постоянной скоростью v_0, и через некоторое время устанавливается периодическое движение тела. Нарисуйте график зависимости смещения тела, его скорости и ускорения от времени при этом движении.*

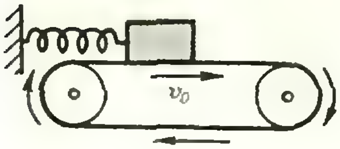


Рис. 3.

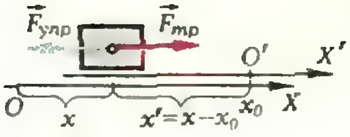


Рис. 4.

Направим ось координат X вправо, а начало координат свяжем с положением тела в начальный момент (рис. 4). На тело, проскальзывающее относительно ленты транспортера, действуют две силы. Одна из них — сила упругости пружины — пропорциональна координате x тела и направлена в сторону, противоположную его смещению:

$$F_{упр}=-kx,$$

а другая — сила трения скольжения — постоянна:

$$F_{тр}=\mu M|\vec g|,$$

где μ — коэффициент трения тела о ленту. Это означает, что, подобно обычному горизонтальному пружинному маятнику, тело должно совершать свободные гармонические колебания. Правда, эти колебания происходят относительно смещенного положения равновесия — точки O' с координатой x_0, где сумма проекций всех сил равна нулю:

$$F_{упр}+F_{тр}=0,\text{ или }-kx_0+\mu M|\vec g|=0,$$

откуда

$$x_0=\frac{\mu M|\vec g|}{k};$$

Покажем, что это действительно так. Для этого удобно перейти в другую систему координат, начало которой находится в точке O', а ось X' направлена вправо (см. рис. 4). Запишем уравнение движения тела в проекциях на выбранное направление:

$$Ma=F_{упр}+F_{тр}.$$

Здесь $F_{упр}=-k(x_0+x')=-k\left(\frac{\mu M|\vec g|}{k}+x'\right)$ и $F_{тр}=\mu M|\vec g|$.

Поэтому

$$Ma=-k\left(\frac{\mu M|\vec g|}{k}+x'\right)+\mu M|\vec g|,$$

или

$$Ma=-kx'.$$

(Заметим, что с таким же случаем мы встречаемся при решении задач на колебания вертикального пружинного маятника (рис. 5). Здесь роль постоянной силы трения играет тоже постоянная сила тяжести.)

Мы получили уравнение движения тела, совершающего свободные гармонические колебания. Эти колебания происходят по закону

$$x'=x'_m\cos(\omega_0t+\varphi_0).$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Амплитуду x'_m можно найти из энергетических соображений:

в начальный момент, когда скорость тела равна нулю, его смещение $x' = -x_0$. Следовательно, амплитуда колебаний

$$x'_m = x_0 = \frac{\mu M|\vec{g}|}{k}.$$

Начальная фаза φ_0 определяется начальными условиями: при $t=0$ $x' = -x_0$, откуда $\varphi_0 = \pi$.

Итак,

$$x' = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\frac{\mu M|\vec{g}|}{k} \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t.$$

В системе координат OX зависимость координаты тела от времени будет такой:

$$x = x_0 + x' = x_0(1 - \cos\omega_0 t) = \frac{\mu M|\vec{g}|}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right),$$

а проекции скорости и ускорения соответственно —

$$v = x_0\omega_0 \sin\omega_0 t = v_m \sin\omega_0 t = \mu|\vec{g}|\sqrt{\frac{M}{k}} \sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$$

и

$$a = x_0\omega_0^2 \cos\omega_0 t = a_m \cos\omega_0 t = \mu|\vec{g}| \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t.$$

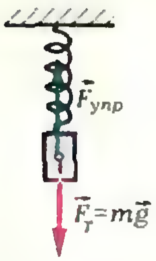


Рис. 5.

Однако все наши рассуждения справедливы, только если амплитуда v_m скорости тела не превосходит скорости v_0 движения ленты транспортера. Потому что только при условии

$$v_m \leqslant v_0, \quad \text{или} \quad \mu|\vec{g}|\sqrt{\frac{M}{k}} \leqslant v_0$$

сила трения, действующая на тело, постоянна. Графики зависимости $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ для этого случая изображены на рисунке 6.

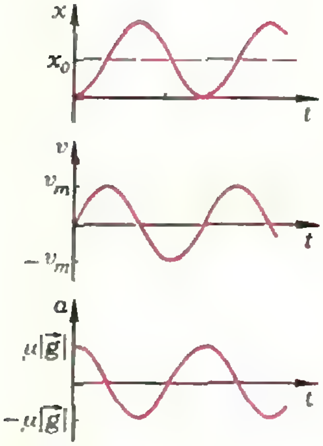


Рис. 6.

А что будет происходить с телом, если еще до прохождения смещенного положения равновесия (точки O') абсолютная величина его скорости станет равной v_0? Очевидно, что в этот момент тело «захватывается» лентой, и сила трения уменьшается до значения $|\vec{F}_{тр}| = |kx| < \mu M|\vec{g}|$. Благодаря этому тело некоторое время движется равномерно со скоростью движения ленты, пока не достигнет точки O' с координатой $x_0 = \frac{\mu M|\vec{g}|}{k}$. В этот момент сила трения становится равной своей максимальной величине $\mu M|\vec{g}|$ и при дальнейшем движении тела будет оставаться постоянной.

Следовательно, начиная с этого момента, тело, как и в первом случае, будет совершать гармонические колебания с той же частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, но с другой амплитудой x_m. Поскольку амплитуда колебаний скорости равна v_0 (с такой скоростью тело проходит положение равновесия), амплитуда колебаний координаты

$$x_m = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Аналогично амплитуда колебаний ускорения

$$a_m = v_0\omega_0 = v_0\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

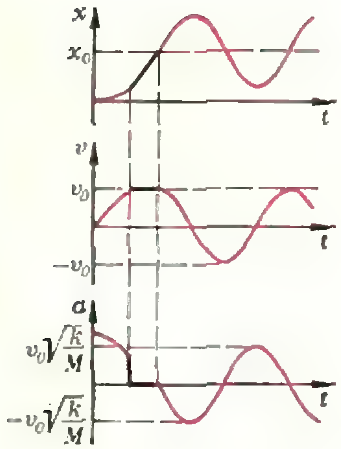


Рис. 7.

Соответствующие графики зависимости $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ показаны на рисунке 7.

И. Слободецкий

А. Бендукидзе

Производная показательной функции

«График функции $\exp_{10}$ имеет вид «гладкой» кривой. На глаз представляется, что этот график в каждой точке имеет касательную, угол наклона которой положителен. Поэтому естественно предполагать, что функция $\exp_{10}$ при любом значении аргумента имеет положительную производную. Эта гипотеза верна, что доказывается в более полных курсах анализа. Мы примем без доказательства, что функция $\exp_{10}$ имеет положительную производную в точке 0. Иначе говоря, допустим, что существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{0+\Delta x} - 10^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \quad (1)$$

Все дальнейшее будет отсюда следовать уже сравнительно просто».

Так начинается п. 109 — «Производная показательной функции. Число *e*» учебного пособия для 10-го класса — «Алгебра и начала анализа». Далее в этом пункте дается вывод формулы для производной функции $\exp_{10}$, а также и более общей формулы — для производной функции $\exp_a$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Все это, в самом деле, следует из существования предела (1) весьма просто.

Но у любознательного учащегося, а такими являются, безусловно, читатели «Кванта», может возникнуть вопрос: «Все-таки, как доказывается существование и положительность предела (1)?» Доказательство этого факта, как и сказано в пособии, можно найти в полных курсах анализа. Там доказывается более общий факт, а именно: для любого положительного $a\neq 1$ существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}, \quad (2)$$

и он положителен, если $a>1$, и отрицателен, если $0<a<1$. Но дело в том, что доказательство это, как правило, опирается на целый ряд предварительных лемм и теорем, в которых не всегда легко разобраться. Желательно было бы дать непосредственное доказательство. Такое доказательство и приводится ниже.

1. Пусть a — произвольное число больше единицы. Рассмотрим последовательность (x_n), общий член которой задается формулой

$$x_n = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Покажем, что (x_n) — сходящаяся последовательность и предел ее положителен.

Начнем с вопроса о сходимости и будем проверять условия теоремы Вейерштрасса. Для любого натурального n

$$a^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1 > -1,$$

поэтому согласно неравенству Бернулли

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(1 + \left(a^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\right)^{n+1} >$$

$$> 1 + (n+1)\left(a^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

Умножая это неравенство на $a^{\frac{1}{n}}$, получим

$$1 > a^{\frac{1}{n}} + (n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{1}{n}}\right)$$

или, что то же самое,

$$na^{\frac{1}{n}} + 1 > (n+1)\, a^{\frac{1}{n+1}}.$$

Этому неравенству очень легко придать следующий вид:

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) > (n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}} - 1\right).$$

Итак, мы видим, что $x_n > x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то есть последовательность (x_n) — убывающая. Если учесть при этом, что все $x_n > 0$, то мы вправе заключить: (x_n) — монотонная ограниченная последовательность. А такая последовательность, как утверждает теорема Вейерштрасса, имеет предел. Таким образом, (x_n) сходится. Следует ожидать, что предел ее зависит от a (как будет видно из дальнейшего, это так и есть). Поэтому обозначим его через $\varphi(a)$:

$$\varphi(a) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right). \qquad (3)$$

Остается показать, что для любого $a > 1$ число $\varphi(a)$ положительно*). Для этого заметим, что каково бы ни было $\alpha > 1$,

$$\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha + 1) < (\alpha - 1)n\alpha^{n-1} < (\alpha - 1)n\alpha^n,$$

то есть

$$n(\alpha - 1) > 1 - \frac{1}{\alpha^n}.$$

Полагая в этом неравенстве $\alpha = a^{\frac{1}{n}}$, получим

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) > 1 - \frac{1}{a},$$

откуда сразу следует, что

$$\varphi(a) = \lim_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \geqslant 1 - \frac{1}{a} > 0.$$

Между прочим, из существования предела (3) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0. \qquad (4)$$

В самом деле, если бы этот предел не существовал, или был бы отличным от нуля, то последовательность (x_n), которую можно записать и так:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right),$$

оказалась бы расходящей (почему)?.

2. Теперь мы уже можем изучить вопрос о существовании предела (2).

Теорема. Для любого $a \in \mathbf{R}_+$ существует предел (2); и он положителен, если $a > 1$, отрицателен — если $0 < a < 1$ и равен нулю при $a = 1$.

Доказательство. Мы покажем, что предел функции $(1/h)(a^h - 1)$ при $h \to 0$ равен $\varphi(a)$, то есть пределу последовательности $x_n = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ при $n \to \infty$. Случай $a = 1$ тривиален и не требует доказательства. Рассмотрим остальные случаи. Пусть сперва $a > 1$.

Так как $h \to 0$, конечно же, можно предположить, что $0 < |h| \leqslant 1$. Для любого такого h существует $n \in \mathbf{N}$, такое что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} < h \leqslant \dfrac{1}{n}, & \text{если } h > 0, \\ -\dfrac{1}{n+1} > h \geqslant -\dfrac{1}{n}, & \text{если } h < 0. \end{cases}$$

При $a > 1$ функция $\exp_a$ возрастает и, стало быть,

$$a^{\frac{1}{n+1}} - 1 < a^h - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1,$$

если $h > 0$,

$$a^{-\frac{1}{n+1}} - 1 > a^h - 1 \geqslant a^{-\frac{1}{n}} - 1,$$

если $h < 0$.

Но вместе с этими неравенствами справедливы и такие:

$$\begin{cases} n \leqslant \dfrac{1}{h} < n + 1, & \text{если } h > 0, \\ -n \geqslant \dfrac{1}{h} > -(n + 1), & \text{если } h < 0. \end{cases}$$

---

*) Из того, что члены некоторой сходящейся последовательности положительны, еще не следует, что и предел этой последовательности положителен — он может равняться нулю! Например, если $u_n = \frac{1}{n}$, то $u_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), но $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Поэтому имеем

$$\begin{cases} n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)<\dfrac{a^h-1}{h}< \\ <(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right), \text{ если } h>0, \\ \dfrac{n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{a^{\frac{1}{n+1}}}<\dfrac{a^h-1}{h}< \\ <\dfrac{(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ если } h<0. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=u_n,$$

$$(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=v_n,$$

$$\frac{u_n}{a^{\frac{1}{n+1}}}=u'_n, \qquad \frac{v_n}{a^{\frac{1}{n}}}=v'_n.$$

Тогда полученные неравенства примут такой вид:

$$\begin{cases} u_n<\dfrac{a^h-1}{h}<v_n, \text{ если } h>0, \\ u'_n<\dfrac{a^h-1}{h}<v'_n, \text{ если } h<0, \end{cases}$$

а при любом h, по модулю меньшем $1/n$,

$$u'_n<\frac{a^h-1}{h}<v_n. \qquad (5)$$

Пусть теперь $n\to+\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} u'_n=\lim_{n\to+\infty} v'_n=\varphi(a).$$

В самом деле, так как

$$u_n=(n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)-\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=x_{n+1}-\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right),$$

$$v_n=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=x_n+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

то согласно равенствам (3) и (4)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}-\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}=\varphi(a),$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} x_n+\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} x_n=\varphi(a).$$

Далее, согласно тому же равенству (4) $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n+1}}=1$, и поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u'_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{a^{\frac{1}{n+1}}}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\varphi(a)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v'_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{a^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\varphi(a)$.

Заметим при этом, что последовательность $\{v_n\}$ монотонно убывает, а $\{u'_n\}$, — возрастает.

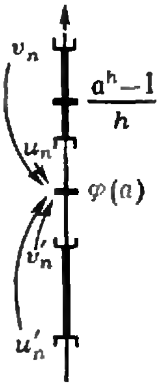
Итак, мы пришли к следующему выводу (см. рисунок): если $0<|h|\leqslant 1$, то интересующее нас отношение, то есть $(a^h-1):h$, можно «зажать» в промежуток $]u_n, v'_n[$ (если $h>0$) или в промежуток $]u'_n, v'_n[$ (если $h<0$), причем при стремлении n к $+\infty$ концы этих промежутков стремятся к одному и тому же числу $\varphi(a)$. Ясно, что и наше отношение стремится к тому же числу, то есть

$$a>1\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\varphi(a)>0.$$

Действительно, возьмем любое $\varepsilon>0$ и будем искать такое $\delta>0$, что

$$|h|<\delta\Rightarrow\left|\varphi(a)-\frac{a^h-1}{h}\right|<\varepsilon.$$

(Согласно определению предела функции, это и будет означать, что $\lim\limits_{h\to 0}(1/h)\times(a^h-1)=\varphi(a)$.



Так как последовательности $\{u'_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к $\varphi(a)$, притом первая возрастает, а вторая убывает, то по данному числу $\varepsilon>0$ можно найти такое число N, что

$$-\varepsilon<u'_N-\varphi(a) \text{ и } v_N-\varphi(a)<\varepsilon. \qquad (6)$$

Возьмем теперь $\delta=1/N$. Если $|h|\leqslant\delta=1/N$, то имеют место (см. (5)) неравенства

$$u'_N-\varphi(a)<\frac{a^h-1}{h}-\varphi(a)<v_N-\varphi(a),$$

то есть $\left|\frac{a^h-1}{h}-\varphi(a)\right|<\varepsilon$.

Случай $a>1$ исчерпан. Переходим к случаю, когда $0<a<1$. Он легко сводится к предыдущему. В самом деле,

$$0<a<1\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{u\to0}\frac{a^{-u}-1}{-u}=$$

$$=-\lim_{u\to0}\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^u-1}{u}=-\varphi\left(\frac{1}{a}\right)<0,$$

так как $\frac{1}{a}>1$, и, значит,

$$\varphi\left(\frac{1}{a}\right)>0.$$

Теорема доказана.

3. Доказанная нами теорема дает возможность заключить, что функция $\exp_a$ дифференцируема всюду и ее производная отличается от самой функции множителем $\varphi(a)$. В самом деле,

$$\exp'_a x=(a^x)'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=$$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\varphi(a),$$

то есть для любого $x\in\mathbf{R}$

$$(a^x)'=a^x\varphi(a).$$

Естественно спросить: чему равен коэффициент $\varphi(a)$ в этой формуле? О функции φ мы знаем лишь то, что $D(\varphi)=\mathbf{R}_+$ и

$$0<a<1\Rightarrow\varphi(a)<0,\ \varphi(1)=0,$$
$$a>1\Rightarrow\varphi(a)>0.$$

Дополнительное исследование показывает, что φ — это натуральный логарифм, то есть для любого $a>0$

$$\varphi(a)=\ln a.$$

Доказывать это равенство мы не собираемся, но предлагаем вам проверить, что функция φ обладает теми же свойствами, что и логарифм, а именно:

1. $\varphi(ab)=\varphi(a)+\varphi(b)$, $\quad a,b\in\mathbf{R}_+$.
2. $\varphi(a:b)=\varphi(a)-\varphi(b)$, $\quad a,b\in\mathbf{R}_+$.
3. φ — функция возрастающая.
4. Для любых $a\in\mathbf{R}_+$ и $p\in\mathbf{P}$: $\varphi(a^p)=p\varphi(a)$.

(Продолжение. Начало см. с. 32)

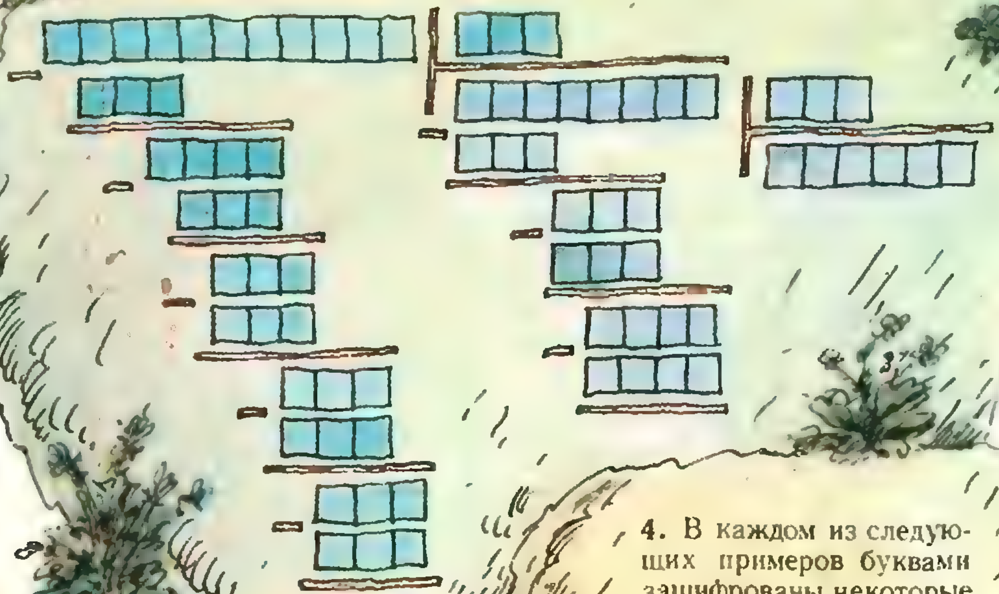
44; *А. Бекжанов* (Ама-Ата) 22, 29; *Г. Белобаб* (Алма-Ата) 22; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) 26, 27, 29; *С. Берколайко* (с. Котово Белгородской обл.) 23; *М. Бествина* (СФРЮ) 22—29, 31—33, 37, 39, а), б), 41—43, в); *П. Билер* (ПНР) 22, 24, 27, 29; *А. Бондал* (Москва) 26, 27, 29, 31, 33; *В. Бондаревский* (Минск) 37, 41, 42; *В. Бугаенко* (Киев) 21; 22, 24—29, 31—33, 35; *Е. Бурлакова* (Асбест) 22, 24, 26, 33, 37, 41, 42, 44, 45; *М. Быков* (Горький) 22, 23; *О. Вайнберг* (Казань) 22, 37, 38, 41, 42, 45; *Н. Великороссов* (Конаково) 21, 22, 31, 32, 37, 38, 40—42, 44, 45; *В. Верзаков* (Рудный) 29, 37; *Д. Виноградов* (Дзержинск) 31; *И. Власов* (Москва) 21, 22, 28, 29; *Ю. Волков* (Саратов) 26, 29, 31; *А. Воробьев* (Новосибирск) 33; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) 22—24; *А. Воякин* (Алма-Ата) 22, 23; *Г. Выродов* (Ворошиловград) 22; *В. Гаврилов* (Караганда) 37, 39, а), б); *Э. Гаджиларов* (Тбилиси) 33, 37, 41; *В. Галактионов* (Пенза) 37, 41, 45; *С. Галстян* (с. Чахрлу Варденского р-на Арм. ССР) 21—23, 26, 27, 29, 37, 38, 39, а), б), 41, 42, 45; *В. Ганкин* (Москва) 37; *Р. Гассиев* (с. Суижа СОАССР) 27; *А. Гатилов* (Воронеж) 27—29; *А. Гельфгат* (Рига) 37; *М. Герман* (Воронеж) 31; *А. Гидельшин* (д. Вайряки ТАССР) 22; *С. Глоба* (Киев) 31, 33, 41, 42; *А. Головко* (Алма-Ата) 22; *И. Гольдфарб* (Алма-Ата) 37, 39, а), б); *И. Горелик* (Минск) 37; *М. Горин* (Воркута) 22, 27, 28, 37, 38, 41, 42, 44; *К. Григорян* (Ереван) 37, 41, 42; *С. Гришечкин* (Москва) 21, 23—29, 31—33, 35, 37, 38, 40—44; *Д. Грязнов* (Днепропетровск) 37, 42; *В. Губа* (Вологда) 37, 41, 42, 45; *Ю. Гудыма* (Теребовля Тернопольской обл.) 22; *А. Гумматов* (Ордубад Аз. ССР) 37; *С. Гурневич* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) 23, 24, 27, 28; *А. Даниелян* (Ленинакан) 22; *А. Дедков* (Омск) 22, 37, 39, а), 42; *А. Демушкин* (Москва) 27, 33, 39 а), б), 42, 45; *А. Диденко* (Краснодар) 21; *В. Дорошок* (Фруизе) 25; *М. Драгонецкий* (Магнитогорск) 33, 45; *И. Дубовой* (Алма-Ата) 22; *М. Драгонецкий* (Магнитогорск) 33, 45; *И. Дубовой* (Алма-Ата) 22; *И. Дума* (с. Ивановка Львовской обл.) 41; *В. Дяченко* (Киев) 37; *О. Евдокимов* (Ленинград) 21, 22, 26, 27, 32, 33, 37, 38, 39, а), б), 42 44; *А. Егоян* (Тбилиси) 28, 31, 33, 41, 42, 45; *А. Ефашкин* (Оренбург) 21, 22, 24, 25, 27, 29; *Х. Желько* (СФРЮ) 31—33, 37; *В. Забелин* (Саратов) 41; *А. Заболотских* (Чусовой) 37; *И. Захаревич* (Ленинград) 21, 22, 24—29, 31—33; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 37, 41, 44; *Я. Золотарев* (Ташкент) 31, 33, 37, 39, а), б), 42; *В. Иванов* (Темир-Тау) 37; *Д. Иванов* (Ленинград) 29; *И. Игнатович* (Гомель) 41, 42, 44; *Р. Измайлов* (Баку) 22, 26, 29, 31, 37, 38, 39, а), б), 41, 42, 45; *В. Изосимов* (Кириши) 41; *М. Ильин* (Иркутск) 33, 37; *И. Ильясов* (Сызрань) 23, 29; *С. Исаков* (Пермь)

(Продолжение см. с. 51)

Задачи

1. Когда трехзначное число, две первые цифры которого одинаковы, а третья равна 5, разделили на однозначное число, то в остатке получили 8. Найти делимое, делитель и частное.

2. Впишите в пустые клеточки на рисунке по цифре так, чтобы получились правильно выполненные (один за другим) два примера на деление.



3. Найти наименьшую пару натуральных чисел a и b, удовлетворяющих условию $5a^2 = 2b^5$.

4. В каждом из следующих примеров буквами зашифрованы некоторые цифры. Расшифруйте примеры!

а) $\begin{array}{r} \text{ТРИ} \\ -\,\text{ДВА} \\ \hline \text{ЯРД} \end{array}$ $\quad\begin{array}{r} \text{ТРИ} \\ +\,\text{ДВА} \\ \hline \text{ПЯТЬ} \end{array}$

б) ТРИ · ТРИ = ШЕСТЬ

в) $\begin{array}{r} \text{ПОДАЙ} \\ -\,\text{ВОДЫ} \\ \hline \text{ПАША} \end{array}$

5. Число A — натуральное, причем в его записи встречаются лишь цифры 1, 9, 7, 6, каждая — 1977 раз. Может ли быть число $\sqrt[3]{A}$ целым?

И. Щепочкина

ДВАЖДЫ ОБ ОДНОМ

Вероятно, многие из вас играли в лото или хотя бы слышали об этой игре. Предлагаем вам некоторое ее видоизменение. Как и в обычном варианте, главным предметом у нас является мешок с «бочонками», на которых написаны числа от 0 до 99. Правила игры таковы. Вам разрешается написать любое количество чисел от 0 до 99, каждое число не более одного раза. После этого из мешка вынимается один «бочонок». Если у какого-то из написанных вами чисел первая (или вторая) цифра совпадает с первой (соответственно второй) цифрой вынутого числа, то ваше число получает 250 очков. Число, совпавшее с вынутым, получает 500 очков. Например, если вынуто число 95, то само оно получает 500 очков, числа 45 и 91 получают по 250 очков, а числа 59 и 04 не получают ничего (однозначные числа — 0, 1, 2, ... — записываются как двузначные — 00, 01, 02, ...).

Чтобы лучше разобраться в правилах, давайте сыграем. У вас — листок бумаги и ручка, у меня — мешок с «бочонками». Напишите пару чисел. Я вынимаю 66. *Сколько очков вы набрали? А сколько могли набрать?* Видимо, не более 750. *А какое наименьшее количество чисел нужно написать, чтобы наверняка что-нибудь набрать?*

Не спешите, подумайте. Сколько у вас получилось? 10? Правильно. Например, можно написать числа 00, 01, 02, 03, ..., 09, и тогда, какое бы число из мешка ни вынули, его вторая цифра совпадает со второй цифрой одного из ваших чисел, а, значит, по крайней мере 250 очков вы получите. А меньшим количеством чисел не обойтись. Ведь если вы напишете меньше десяти чисел, то найдется такая цифра a, которой не будет среди первых цифр ваших чисел, и такая цифра b, которой не будет среди вторых цифр ваших чисел. А тогда если из мешка вынут «бочонок» с числом $\overline{ab}$, вы не выиграете ничего.

Задача 1. Какое число было вынуто из мешка, если набор 07, 29, 45, 68, 84, 71, 32, 16, 53 ничего не получил?

А теперь вопрос потруднее.

Какое наименьшее количество чисел нужно написать, чтобы наверняка набрать 500 очков? Напишите 2—3 таких набора.

Отвлечемся на минуту от лото и вспомним про шахматную доску и ладью, которая бьет все поля, находящиеся на одной горизонтали или одной вертикали с тем полем, на котором она стоит. Скажите, *какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?*

Каждый, кто хоть немного знаком с шахматами, сразу ответит: конечно, восемь, например, как на рисунке 1.

Тогда еще один вопрос: *пусть на доске расставлены 8 не бьющих друг друга ладей. Сколько раз бьется каждое поле доски?*

Если ладьи не бьют друг друга, то они стоят на разных вертикалях и разных горизонталях, а тогда на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется по одной ладье. Любое поле, не занятое ладьей, бьется поэтому двумя ладьями (одной — по вертикали, другой — по горизонтали).

Что же общего между нашим лото и шахматами? А вот смотрите. Давайте выпишем все числа от 00 до 99 в квадратную таблицу 10 × 10:

00	01	02	. . .	09
10	11	12	. . .	19
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
90	91	92	. . .	99

Будем говорить, что число $\overline{ab}$ бьет число $\overline{cd}$, если $\overline{ab}$ получает очки, когда из мешка вынимают $\overline{cd}$, то есть если $a = c$ или $b = d$. Посмотрим на нашу таблицу. Каждое число бьет те числа, которые стоят с ним либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали. Мы уже знаем, что если 10 чисел не бьют друг друга (например, 00, 11, 22, ..., 99), то любое число от 0 до 99 будет либо совпадать с одним из этих 10 чисел, либо будет биться двумя выбранными. В обоих случаях наш набор получает 500 очков. А меньше чем десятью числами и 250 очков можно не набрать. Вот мы и ответили на вопрос о лото. Осталась только одна неясность.

Задача 2. Обязательно ли брать 10 чисел не бьющими друг друга, чтобы такой набор всегда получал 500 очков?

Этот вопрос очень важен. Поэтому прежде чем читать дальше, проверьте свой ответ на с. 60.

А теперь мы уже можем решить и более сложную задачу — *найти, сколько всего есть наборов из 10 чисел, наверняка получающих 500 очков.*

Мы уже знаем, что набор из 10 чисел наверняка получает 500 очков тогда и только тогда, когда эти числа не бьют друг друга. Первые цифры чисел различны, и потому эти числа можно расположить в порядке возрастания первых цифр (от 0 до 9). Тем самым мы сведем задачу к такой: *сколькими способами можно 10 цифр 0, 1, 2, ..., 9 (каждую по разу) приписать по одной справа к цифрам 0, 1, 2, ..., 9?* Или, иначе, *сколько есть способов расставить 10 различных предметов (цифр) по 10 местам (места задаются первыми цифрами)?*

Эта задача хорошо известна математикам и даже имеет свое название: ее называют *задачей о перестановках.* Для ее решения заметим, что к цифре 0 можно приписать любую из 10 различных цифр. Приписать цифры к паре 0 и 1 можно так: сначала приписываем какую-нибудь из 10 цифр к 0, а потом какую-нибудь из оставшихся девяти цифр — к 1. В результате из каждого способа приписывания цифры к 0 возникает 9 способов приписывания цифр к паре 0 и 1. Таким образом, мы получаем $10 \cdot 9 = 90$ пар чисел, начинающихся с 0 и 1, и так далее. Итак, ответом на вопрос задачи является произведение $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, которое обозначается 10! (читается «10 факториал»).

Задача 3 (контрольная). Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Предположим теперь, что мы хотим расставить не бьющих друг друга ладей на вращающейся шахматной доске. *Сколько расстановок мы увидим в этом случае?*

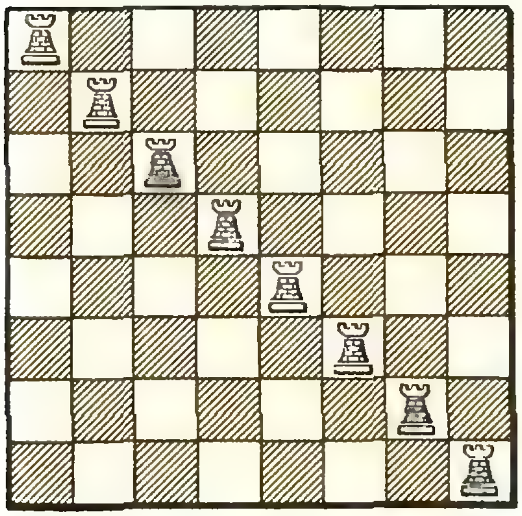


Рис. 1.

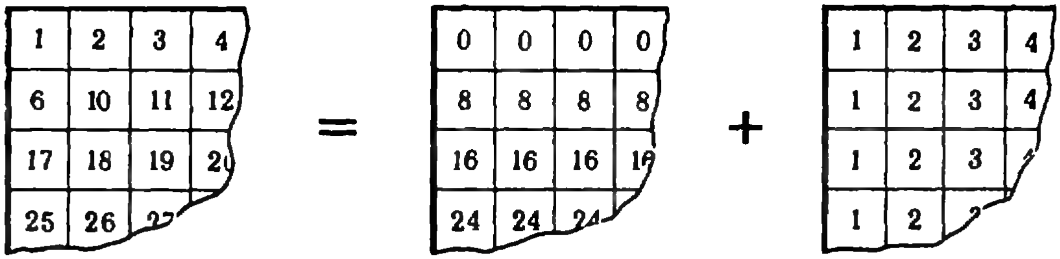


Рис. 2.

Хитрость этой задачи состоит в том, что когда доска вращается, мы не можем отличить данную расстановку от центрально-симметричной ей расстановки.

Задача 4 (контрольная и с «изюминкой»). Можем ли мы различить на вращающейся шахматной доске те расстановки, которые на неподвижной доске получаются друг из друга поворотом на 90° относительно центра доски?

Обозначим число центрально-симметричных расстановок через S. Тогда общее число расстановок ладей на вращающейся доске можно выразить формулой $S + \frac{8!-S}{2} = \frac{S+8!}{2}$, и нам остается только найти S. В верхнюю горизонталь у нас, как и обычно, есть 8 способов поставить ладью. Но если мы поставили ладью в верхнюю горизонталь, то придется поставить и симметричную ей ладью в нижнюю горизонталь. Поэтому для ладьи во второй сверху горизонтали остается только 6 возможностей, в третьей — 4, в четвертой — 2, после чего расстановка определена. Таким образом, имеется $8\cdot6\cdot4\cdot2 = 2^4\cdot4!$ симметричных расстановок, а общее число расстановок равно $\frac{8!+2^4\cdot4!}{2}$.

Задача 5 (контрольная). Сколько расстановок восьми не бьющих друг друга ладей можно увидеть на нераскрашенной вращающейся доске?

Пусть теперь на нашей шахматной доске выписаны подряд все числа от 1 до 64 (в верхней горизонтали слева направо числа от 1 до 8, в следующей — от 9 до 16 и так далее). *Какие значения может принимать сумма чисел, написанных на тех полях, где стоят ладьи* («ладейная сумма»)?

В начале этой статьи шахматная доска помогла нам решить задачу про лото. Теперь наоборот: лото поможет вам решить трудную задачу на доске. Пусть перед началом игры в лото каждый игрок получает некоторое число очков, и за возможность написать какое-то число нужно отдать столько очков, каково это число.

Задача 6 (контрольная). Какой из 10! наборов не бьющих друг друга чисел выгоднее и каково требуемое число очков?

Решив эту задачу, вы фактически вычислите «ладейную сумму» на доске 10×10, здесь будет удобна десятичная запись чисел.

На доске 8×8 более выгодной будет запись, связанная с числом 8. А именно, доску с числами можно представить в виде «суммы» двух досок (рис. 2), причем на каждом «слагаемом» ладейная сумма не зависит от расстановки ладей и равна

$$0+8+16+\ldots+56=224$$

на первом слагаемом и

$$1+2+3+\ldots+8=36$$

на втором слагаемом. Значит, при любой расстановке восьми не бьющих друг друга ладей ладейная сумма равна 260.

Вернемся к лото.

Задача 7. У вас хватило очков, чтобы написать все числа от 00 до 99. Из мешка вынули один бочонок. Увеличится ваше число очков (по сравнению с исходным) или уменьшится?

Задача 8. Дан набор из 10 не бьющих друг друга чисел. Всегда ли можно разбить остальные 90 чисел на 9 наборов по 10 не бьющих друг друга чисел?

И наконец, две задачи на доске. Будем говорить, что числа от 1 до 64 выписаны на шахматной доске «правильным образом», если для всех расстановок восьми не бьющих друг друга ладей «ладейная сумма» одинакова.

Задача 9. Доказать, что существует по крайней мере $2\cdot(8!)^2$ способа выписать числа от 1 до 64 на доске «правильным образом».

Задача 10. Какие значения может принимать «ладейная сумма», если числа от 1 до 64 выписаны «правильным образом»?

Я. Суконник, П. Горнштейн

Задачи на площади и двугранные углы

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Правильная треугольная пирамида с двугранным углом α при ребре основания пересечена плоскостью, параллельной основанию, так, что площадь полученного сечения равна площади боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Определить отношение площади основания к площади сечения.*

Если решать эту задачу, рассматривая сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и апофему боковой грани, то после достаточно сложных вычислений получается ответ $1+\cos\alpha$. То обстоятельство, что искомое отношение просто выражается через данную величину, ведет к дальнейшим размышлениям. Случайно ли это? Очевидно, нет. Скорее всего должно существовать и простое решение задачи. Посмотрим внимательно на ответ. Полученное соотношение связывает площадь S основания, площадь Q сечения (равную по условию площади боковой поверхности усеченной пирамиды) и двугранный угол при ребре основания (рис. 1).

Но согласно известной формуле *) площади ортогональной проекции многоугольника $S—Q=Q\cdot\cos\varphi$, откуда

$$\frac{S-Q}{Q}=\cos\varphi,\ \frac{S}{Q}=1+\cos\varphi.$$

И во многих других случаях применение формулы площади проекции является тем элементом, который непосредственно ведет к решению задачи.

Задача 2 (МАИ, 1973). *Основанием пирамиды служит параллелограмм, площадь которого Q. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей параллелограмма. Одна из боковых граней составляет с плоскостью основания угол α, другая — угол β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.*

---

*) См. «Геометрия 10», § 50.

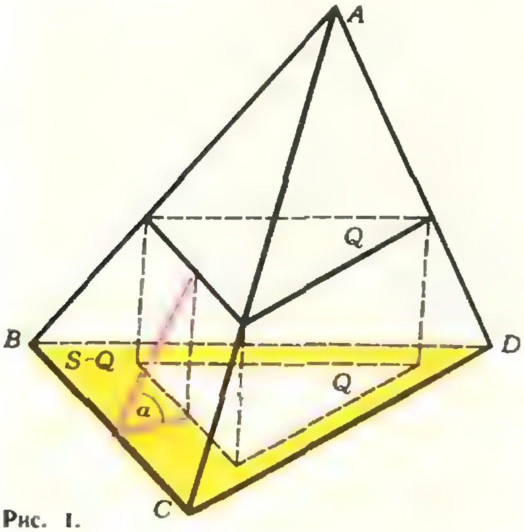


Рис. 1.

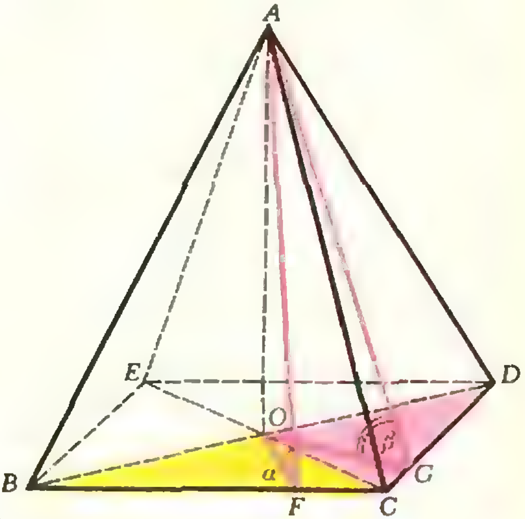


Рис. 2.

Ввиду того, что

$$S_{\triangle BAC}=S_{\triangle DAE},\ S_{\triangle CAD}=S_{\triangle EAB},$$

$$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COD}=\frac{Q}{4}$$

(рис. 2), сразу находим:

$$S_{\text{бок}}=2\,(S_{\triangle BAC}+S_{\triangle CAD})=$$

$$=2\left(\frac{S_{\triangle BOC}}{\cos\alpha}+\frac{S_{\triangle COD}}{\cos\beta}\right)=$$

$$=2\left(\frac{Q}{4\cos\alpha}+\frac{Q}{4\cos\beta}\right)=\frac{Q\,(\cos\alpha+\cos\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Задача 3 (КГУ, физфак, 1975). *В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани, которые содержат стороны острого угла основания, перпендикулярны основанию, две другие наклонены к основанию под углом β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.*

Легко заметить, что проекция E_1AD_1 (рис. 3) боковой грани EAD на плоскость боковой грани BAC равновелика грани BAC, причем двугранный угол между этими гранями равен $\frac{\pi}{2}-\beta$, а проекцией грани AED на плоскость основания ромба является треугольник BED. Поэтому

$$S_{\text{бок}}=2\,(S_{\triangle EAD}+S_{\triangle BAC})=$$

$$=2\,(S_{\triangle EAD}+S_{\triangle E_1AD_1})=$$

$$=2\left[S_{\triangle EAD}+S_{\triangle EAD}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]=$$

$$=2S_{\triangle EAD}\,(1+\sin\beta)=2\cdot\frac{S_{\triangle BED}}{\cos\beta}\times$$

$$\times\,(1+\sin\beta)=\frac{a^2\sin\alpha\,(1+\sin\beta)}{\cos\beta}.$$

Задача 4 (КПИ, 1975). *В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар; боковая грань этой пирамиды служит основанием другой пирамиды, вершина которой в центре шара и объем которой равен $^1/_6$ объема данной пирамиды. Определить величины двугранного угла при основании и плоского угла при вершине четырехугольной пирамиды.*

Известно, что $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{полн}}\cdot r$ (рис. 4). Поэтому

$$\cos\alpha=\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}}=\frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{бок}}}-1=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}S_{\text{полн}}\cdot r}{\frac{1}{3}(4S_{\triangle CAD})\cdot r}-1=\frac{V_{ABCDE}}{4V_{O_1CAD}}-$$

$$-1=\frac{6}{4}-1=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{|DF|}{|AF|}=$$

$$=\frac{|OF|}{|AF|}=\cos\alpha=\frac{1}{2},$$

$$\beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Задача 5 (ЛГУ, 1968). *Установить зависимость между косинуса-*

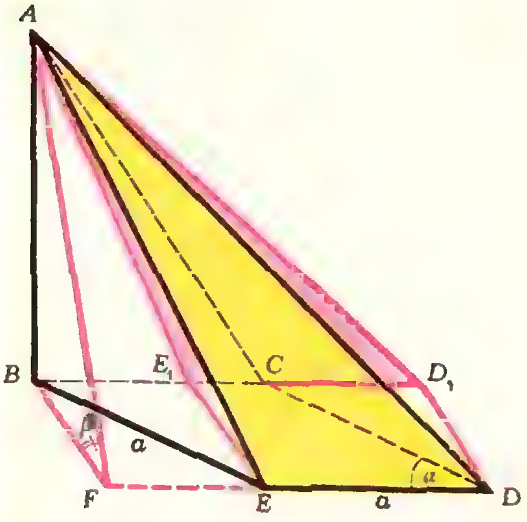


Рис. 3.

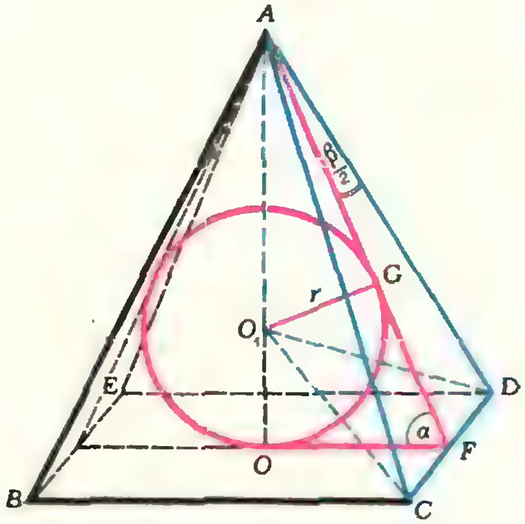


Рис. 4.

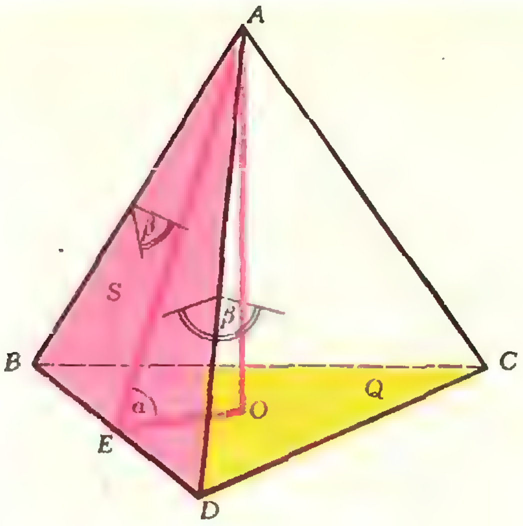


Рис. 5.

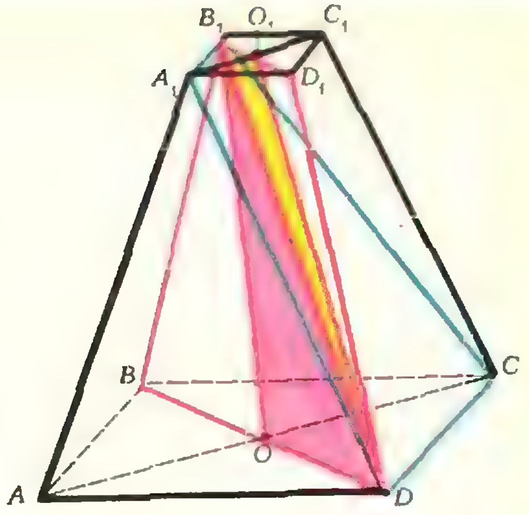


Рис. 6.

ми углов α *и* β, *которые образует в правильной треугольной пирамиде боковая грань с плоскостью основания и со смежной боковой гранью.*

Пусть (рис. 5) $(BCD)\perp[AO]$, $[AE]\perp[BD]$, $\widehat{AEC}=\alpha$, $S_{\Delta BDC}=Q$, $S_{\Delta ABD}=S$. Тогда, проектируя грань ABD на грань BCD, получим равенство $Q=3S\cos\alpha$, а проектируя грани BCD, ABC и ACD на грань ABD, получим равенство $S=Q\cos\alpha+2S\cos\beta$. Из этих двух равенств находим искомую зависимость:

$$3\cos^2\alpha+2\cos\beta-1=0.$$

Аналогично легко доказывается общая формула для правильной n-угольной пирамиды:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\alpha=\cos\frac{\beta}{2}.$$

Иногда применение формулы площади ортогональной проекции является не только полезным, но и приводит к эффектному решению.

Задача 6 (МФТИ, 1967). *В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен* α. *Найти отношение площадей сечений.*

В этой задаче существенным является аккуратно построенный чертеж. Само решение не вызывает затруднений. В самом деле, сечениями будут трапеции BB_1D_1D и DA_1B_1C (рис. 6), пересекающиеся по диагонали B_1D и образующие между собой угол α. Легко заметить, что точка A_1 проектируется в точку O_1, а точка C — в точку O (O и O_1 — центры оснований), поэтому грань DA_1B_1C проектируется в четырехугольник DO_1B_1O, откуда

$$\frac{S_{BB_1D_1D}}{S_{DA_1B_1C}}=\frac{2S_{DO_1B_1O}}{S_{DA_1B_1C}}=2\cos\alpha.$$

Задача 7 (МГУ, геолог. фак., 1974). *Дан куб* $ABCDA'B'C'D'$, *длина ребра которого равна* 1 *см. На ребрах* AA', BB', DD' *взяты соответственно точки* K, P *и* M *так, что* $|AK|:|A'K|=1:3$, $|BP|:|B'P|=3:1$, $|DM|:|D'M|=3:1$. *Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки* K, P *и* M, *а вершина расположена в точке* A'.

Нетрудно найти, что секущая плоскость пересекает основание $A'B'C'D'$ в серединах Q и N сторон $B'C'$ и $C'D'$ (рис. 7), откуда следует, что площадь проекции сечения $KPQNM$ на плоскость основания $A'B'C'D'$ равна $S_{A'B'QND'}=S_{A'B'C'D'}-S_{\Delta QC'N}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ (см²). Линейным углом двугранного угла QN будет угол KLA', причем он конгруэнтен углу $KA'R$ (R — основание высоты $A'R$ пирамиды $A'KPQNM$), откуда следует, что $|A'R|=|A'K|\cos\varphi$.

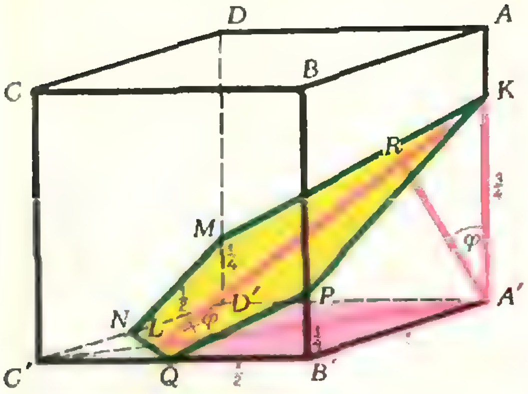


Рис. 7.

Применяя формулу площади проекции, находим

$$V_{A'KPQNM} = \frac{1}{3} S_{KPQNM}\cdot|A'R| =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{S_{A'B'QND'}}{\cos\varphi}\cdot|A'K|\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} S_{A'B'QND'}\cdot|A'K| =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{32}\ (\text{см}^3).$$

(Интересно заметить, что пирамиды $A'KPQNM$ и $KA'B'QND'$ равновелики.)

Упражнения

1 (ЛПИ, 1975). Боковая поверхность правильной десятиугольной пирамиды равна S, а площадь ее основания равна Q. Найти объем пирамиды.

2 (Казан. ГУ, 1972). Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{13}$, а величина плоского угла при ее вершине в четыре раза больше величины угла между боковым ребром и основанием. Найти площадь боковой поверхности.

3 (МГУ, мехмат, 1973). Точки K и M являются серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $DABC$, $S_{\triangle ABC}=p$. Найти $S_{\triangle BCD}$, если $S_{\triangle DKM}=q$, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан основания ABC.

4. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Через его смежные стороны проведены диагональные сечения, образующие с плоскостью основания угол α, а между собой — угол β. Доказать, что

$$\cos^2\alpha = \cos\beta.$$

5. В треугольной пирамиде с площадью основания Q, площадью боковой поверхности S и суммой двугранных углов при ребрах основания 3α вершина проектируется в точку пересечения медиан основания. Доказать, что

$$Q \leqslant S\cos\alpha.$$

(*Продолжение. Начало см. с. 32, 43*)

24, 29, 37; *И. Искендеров* (с. Нюснюс НАССР) **41**; *А. Исмаилова* (Мнигечаур) **33**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **22, 33, 37**; *А. Кагановский* (Новосибирск) **37, 45**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **37**; *И. Калинин* (Ленинград) **21—29, 37, 38, 39**, а), б); *А. Калинский* (Кишинев) **37**; *В. Кандаскалов* (пос. Буча Киевской обл.) **33**; *А. Каплан* (Сумгаит) **37, 42, 45**; *Б. Каплан* (Киев) **22**; *А. Каранович* (Целиноград) **31, 33**; *В. Каскевич* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **22, 24**; *А. Кац* (Ташкент) **22, 33, 37**; *А. Качуровский* (Новосибирск) **31—33, 35, 37, 39**, а), б), **41, 42**; *А. Кащавцев* (Москва) **37**; *А. Керимов* (Баку) **41, 42**; *А. Керимов* (Москва) **37**; *И. Кехвишвили* (Тбилиси) **44**; *И. Клопов* (п. Калиновка Оренбургской обл.) **22, 23**; *В. Книжник* (Москва) **21—29, 32, 33, 35, 37, 38, 40—45**; *С. Колпаков* (р. п. Чернышковский Волгоградской обл.) **41**; *М. Кольо* (НРБ) **24**; *В. Кононович* (п. Телиханы Брестской обл.) **22**; *Л. Корельштейн* (Москва) **21—30**; *А. Коротков* (Ижевск) **37, 38, 41, 45**; *С. Корчанов* (Ангарск) **22, 25, 26, 37, 39, а), б), 44, 45**; *В. Костусяк* (Запорожье) **27, 31—33, 37, 38, 39, а), б), 41, 42, 44**; *Л. Костюк* (Киев) **26, 31, 33, 37, 42**; *А. Крейндлин* (Москва) **26—28**; *Ф. Крис* (Ташкент) **37**; *А. Кротких* (Пермь) **31**; *О. Кружалов* (с. Воскресенское Тульской обл.) **29, 33, 37**; *С. Крынин* (с. Шаталовка Белгородской обл.) **33**; *С. Кузнецов* (Ангарск) **33, 42**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **22, 32, 33, 42, 44, 45**; *А. Кулеско* (Донецк) **21, 26—29, 31—33, 35, 37, 38, 41, 42, 43, б)**; *Д. Купчинский* (Павлодар) **33**; *А. Курилин* (Москва) **37, 45**; *Е. Курилин* (Череповец) **37**; *И. Куркиев* (Грозный) **33, 41**; *А. Кучер* (Донецк) **32, 42**; *А. Кущ* (Днепропетровск) **26, 27**; *С. Лабазов* (Краснодар) **33**; *С. Лавренченко* (Москва) **21, 22, 27, 30, 31, 37, 41, 45**; *С. Лайденов* (Брест) **33**; *Е. Лапин* (Алма-Ата) **27, 29, 33, 37, 39**, а); б); *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТАССР) **22**; *В. Лашкин* (Киев) **37**; *Г. Левко* (с. Верхняя Стинева Львовской обл.) **33, 37**; *Р. Леманн* (ГДР) **30**; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) **22, 27, 28, 32, 37, 41, 42**; *О. Луговая* (Алма-Ата) **22**; *В. Луковский* (п. Давид-Городок Брестской обл.) **22**; *Е. Лумельская* (Пермь) **27, 28, 29, 37, 41**; *Л. Любенов* (НРБ) **33**; *Д. Людмирский* (Киев) **37**; *А. Ляховец* (Краснодар) **37**; *А. Мадоян* (Ереван) **33**; *С. Майский* (Москва) **24, 26, 29**; *Ю. Макаров* (Караганда) **22, 26, 27, 31**; *Г. Мамедов* (Баку) **21, 22, 27, 28, 29**; *М. Мамедов* (Баку) **27**; *Т. Марьясина* (Москва) **33**; *Г. Мацкевич* (пос. Сокол Сахалинской обл.) **22, 27**; *Е. Мельников* (д. Касьяновка Орловской обл.) **23**; *Г. Мех-*

(*Окончание см. с. 59*)

Н. Гольдфарб, В. Новиков

Импульс тела и системы тел

Понятие импульса (количества движения) было впервые введено в механику Ньютоном. Напомним, что под *импульсом материальной точки* (*тела*) понимается векторная величина $\vec{p}$, равная произведению массы тела на его скорость *):

$$\vec{p}=m\vec{v}.$$

Наряду с понятием импульса тела используется понятие импульса силы. Импульс силы специального обозначения не имеет. В частном случае, когда действующая на тело сила постоянна, импульс силы по определению равен произведению силы на время ее действия: $\vec{F}\Delta t$. В общем случае, когда сила изменяется со временем ($\vec{F}=\vec{F}(t)$), импульс силы определяется как $\int_0^{\Delta t}\vec{F}(t)dt$.

Используя понятие импульса тела и импульса силы, первый и второй законы Ньютона можно сформулировать следующим образом.

Первый закон Ньютона: *существуют системы отсчета, в которых сохраняется неизменным импульс тела, если на него не действуют другие тела или действия других тел компенсируются.*

Второй закон Ньютона: *в инерциальных системах отсчета изменение импульса тела равно импульсу приложенной к телу силы*, то есть

$$\Delta\vec{p}=\Delta(m\vec{v})=\vec{F}\Delta t.$$

В отличие от привычной галилеевской формы второго закона: $m\vec{a}=\vec{F}$, «импульсная» форма этого закона позволяет применять его к задачам, связанным с движением тел переменной массы (например, ракет) и с движениями в области околосветовых скоростей (когда масса тела зависит от его скорости).

Подчеркнем, что импульс, приобретаемый телом, зависит не только от действующей на тело силы, но и от продолжительности ее действия. Это можно проиллюстрировать, например, на опыте с выдергиванием листа бумаги из-под бутылки — мы оставим ее стоящей практически неподвижно, если сделаем это рывком (рис. 1). Сила трения скольжения, действующая на бутылку в течение очень малого промежутка времени, то есть небольшой импульс силы, вызывает соответственно малое изменение импульса бутылки.

Второй закон Ньютона (в «импульсной» форме) дает возможность по изменению импульса тела определить импульс силы, действующей на данное тело, и среднее значение силы за время ее действия. В качестве примера рассмотрим такую задачу.

Задача 1. *Мячик массой 50 г ударяет в гладкую вертикальную стенку под углом 30° к ней, имея к моменту удара скорость 20 м/с, и упруго отражается. Определить среднюю силу, действующую на мячик во время*

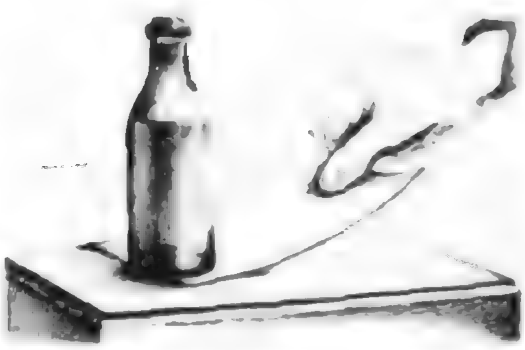


Рис. 1.

---

*) Впрочем, развитие физики в XX веке показало, что импульс является «самостоятельным» понятием и не всегда может быть представлен как просто произведение массы тела на его скорость.

удара, если соударение мячика со стенкой длится 0,02 с.

На мячик во время удара действуют две силы — сила $\vec{F}$ реакции стенки (она перпендикулярна стенке, так как трения нет) и сила тяжести. Пренебрежем импульсом силы тяжести, полагая, что по абсолютной величине он много меньше импульса силы $\vec{F}$ (это предположение мы подтвердим позже). Тогда при столкновении мячика со стенкой проекция его импульса на вертикальную ось Y не изменится, а на горизонтальную ось X — останется такой же по абсолютной величине, но изменит знак на противоположный. В результате, как видно из рисунка 2, импульс мячика изменится на величину $\vec{\Delta p}$, причем

$$|\vec{\Delta p}| = 2m|\vec{v}|\sin\alpha.$$

Следовательно, со стороны стенки на мячик действует сила $\vec{F}$ такая, что

$$|\vec{F}| = \frac{|\vec{\Delta p}|}{\Delta t} = \frac{2m|\vec{v}|\sin\alpha}{\Delta t} = 50\ \text{Н}.$$

По третьему закону Ньютона мячик действует на стенку с такой же по абсолютной величине силой.

Сравним теперь абсолютные значения импульсов сил $\vec{F}$ и $m\vec{g}$:

$$|\vec{F}|\Delta t = 1\ \text{Н}\cdot\text{с},\ m|\vec{g}|\Delta t = 0{,}01\ \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Мы видим, что $m|\vec{g}|\Delta t \ll |\vec{F}|\Delta t$, и импульсом силы тяжести действительно можно пренебречь.

Импульс замечателен тем, что под действием одной и той же силы он изменяется одинаково у всех тел, независимо от их массы, если только время действия силы одинаково. Разберем следующую задачу.

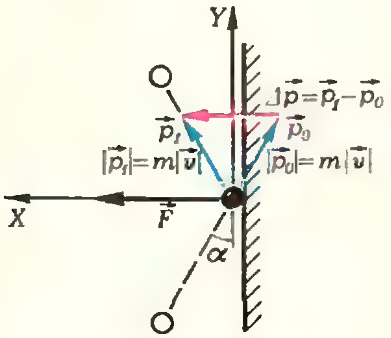

Y
$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$
$\vec{p}_1$
$\vec{p}_0$
$|\vec{p}_1| = m|\vec{v}|$
$|\vec{p}_0| = m|\vec{v}|$
X
$\vec{F}$
α

Рис. 2.

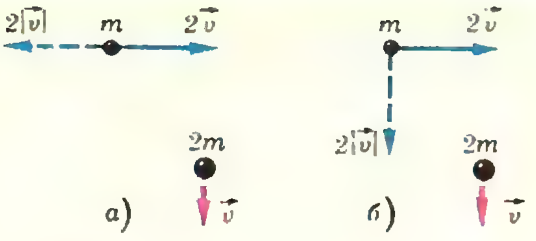

$2|\vec{v}|$
m
$2\vec{v}$
2m
а)
$\vec{v}$
m
$2\vec{v}$
$2|\vec{v}|$
2m
б)
$\vec{v}$

Рис. 3.

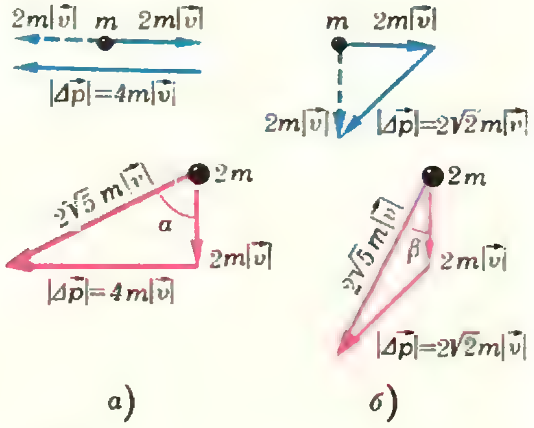

$2m|\vec{v}|$
m
$2m|\vec{v}|$
$|\Delta\vec{p}| = 4m|\vec{v}|$
m
$2m|\vec{v}|$
$2m|\vec{v}|$
$|\Delta\vec{p}| = 2\sqrt{2}m|\vec{v}|$
$2\sqrt{5}m|\vec{v}|$
2m
α
$2m|\vec{v}|$
$|\Delta\vec{p}| = 4m|\vec{v}|$
2m
$2\sqrt{5}m|\vec{v}|$
β
$2m|\vec{v}|$
$|\Delta\vec{p}| = 2\sqrt{2}m|\vec{v}|$
а)
б)

Рис. 4.

З а д а ч а 2. *Две частицы массами m и $2m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями соответственно $2\vec{v}$ и $\vec{v}$ (рис. 3). На частицы начинают действовать одинаковые силы. Определить величину и направление скорости частицы массой $2m$ в момент времени, когда скорость частицы массой m стала такой, как показано пунктиром: а) на рисунке 3, а; б) на рисунке 3, б.*

Изменение импульсов обеих частиц одно и то же: на них одинаковое время действовали одинаковые силы. В случае а) модуль изменения импульса первой частицы равен

$$|\vec{\Delta p}| = 2m|\vec{v}| - (-2m|\vec{v}|) = 4m|\vec{v}|.$$

Вектор $\vec{\Delta p}$ направлен горизонтально (рис. 4, *а*). Так же меняется и импульс второй частицы. Поэтому модуль импульса второй частицы будет равен

$$\sqrt{(4m|\vec{v}|)^2 + (2m|\vec{v}|)^2} = 2\sqrt{5}\ m|\vec{v}|,$$

модуль скорости равен $\sqrt{5}\ |\vec{v}|$,

а угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4m|\vec{v}|}{2m|\vec{v}|} = \operatorname{arctg} 2.$

Аналогично найдем, что в случае б) модуль изменения импульса первой частицы равен $2\sqrt{2}m|\vec{v}|$ (рис. 4, *б*). Модуль импульса второй частицы станет равным $2\sqrt{5}\,m|\vec{v}|$ (это нетрудно найти, воспользовавшись теоремой косинусов), модуль скорости этой частицы равен $\sqrt{5}\,|\vec{v}|$ и угол $\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ (согласно теореме синусов).

Когда мы переходим к системе взаимодействующих тел (частиц), то оказывается, что полный импульс системы — геометрическая сумма импульсов взаимодействующих тел — обладает замечательным свойством сохраняться во времени. Этот закон сохранения импульса является прямым следствием второго и третьего законов Ньютона. В учебнике «Физика 8» этот закон выведен для случая двух взаимодействующих тел, образующих замкнутую систему (эти тела не взаимодействуют ни с какими другими телами). Легко обобщить этот вывод на замкнутую систему, состоящую из произвольного числа n тел. Покажем это.

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса i-го тела системы за малый промежуток времени Δt равно сумме импульсов сил взаимодействия его со всеми другими телами системы:

$$\Delta\vec{p}_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}\Delta t.$$

Изменение полного импульса системы $\Delta\vec{p}$ есть сумма изменений импульсов, составляющих систему тел: $\Delta\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\vec{p}_i$ и, по второму закону Ньютона, равно сумме импульсов всех внутренних сил системы:

$$\Delta\vec{p} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}\Delta t.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между телами системы попарно одинаковы по абсолютной величине и противоположны по направлению: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Поэтому сумма всех внутренних сил равна нулю, и значит,

$$\Delta\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{p}_i = 0.$$

Но если изменение некой величины за произвольный малый промежуток времени Δt равно нулю, то сама эта величина неизменна во времени:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \mathrm{const}.$$

Таким образом, *изменение импульса любого из тел, составляющих замкнутую систему, компенсируется противоположным изменением в других частях системы. Иными словами, импульсы тел замкнутой системы могут как угодно изменяться, но сумма их остается постоянной во времени.*

Если же система не замкнута, то есть на тела системы действуют не только внутренние, но и внешние силы, то, рассуждая подобным образом, придем к выводу, что приращение полного импульса системы за промежуток времени Δt будет равно сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени:

$$\Delta\vec{p} = \sum\vec{F}_{\text{внеш}}\Delta t.$$

Импульс системы могут изменить только внешние силы.

Если $\sum\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то незамкнутая система ведет себя подобно замкнутой, и к ней применим закон сохранения импульса.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 3. *Орудие массы m соскальзывает по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В момент, когда скорость орудия равна $\vec{v}$, производят выстрел, в результате которого орудие останавливается, а вылетевший в горизонтальном направлении снаряд «уносит» импульс $\vec{p}$ (рис. 5). Продолжительность выстрела равна τ. Каково среднее за время τ значение $\vec{R}_{\text{ср}}$ силы реакции со стороны наклонной плоскости?*

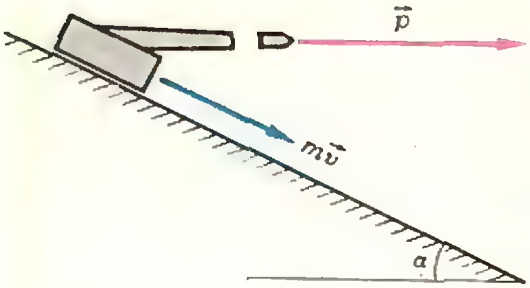


Рис. 5.

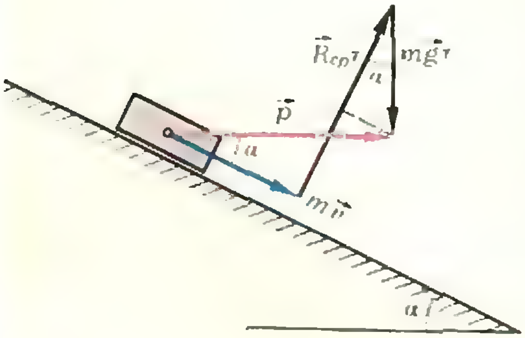


Рис. 6.

Начальный импульс системы тел орудие — снаряд равен $m\vec{v}$, конечный импульс равен $\vec{p}$. Рассматриваемая система не замкнута: за время τ она получает приращение импульса $\vec{p}-m\vec{v}$. Изменение импульса системы обусловлено действием двух внешних сил: силы реакции $\vec{R}_{ср}$ (перпендикулярной наклонной плоскости) и силы тяжести $m\vec{g}$, поэтому можно записать

$$\vec{p}-m\vec{v}=\vec{R}_{ср}\tau+m\vec{g}\tau.$$

Представим это соотношение графически (рис. 6). Из рисунка сразу видно, что искомое значение $\vec{R}_{ср}$ определяется формулой

$$|\vec{R}_{ср}|\tau=|\vec{p}|\sin\alpha+m|\vec{g}|\tau\cos\alpha.$$

Импульс — величина векторная, поэтому закон сохранения импульса можно применять к каждой из его проекций на оси координат. Иначе говоря, если сохраняется $\vec{p}$, то независимо сохраняются p_x, p_y и p_z (если задача трехмерная).

В случае, когда сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление — нуль, проекция полного импульса на это же направление сохраняется неизменной. Например, при движении системы в поле силы тяжести сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление.

Задача 4. *Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брусок, подвешенный на очень длинном шнуре, и застревает в бруске, сообщив ему скорость* $|\vec{u}|=0{,}5$ *м/с. Определить скорость пули перед ударом. Масса пули* $m=15$ *г, масса бруска* $M=6$ *кг.*

Торможение пули в бруске — сложный процесс, но для решения задачи нет никакой необходимости вникать в его детали. Так как в направлении скорости пули до удара и скорости бруска после застревания пули (подвес очень длинный, поэтому скорость бруска горизонтальна) не действуют внешние силы, то можно применить закон сохранения импульса:

$$m\vec{v}=(m+M)\vec{u}.$$

Отсюда скорость пули

$$\vec{v}=\frac{(M+m)\vec{u}}{m};\quad |\vec{v}|\approx 200 \text{ м/с}.$$

В реальных условиях — в условиях земного притяжения — не существует замкнутых систем, если не включать в них Землю. Однако, если взаимодействие между телами системы много сильнее, чем их взаимодействие с Землей, то можно с большой точностью применять закон сохранения импульса. Так можно поступать, например, при всех кратковременных процессах: взрывах, столкновениях и т. п. (см. например, задачу 1).

Задача 5. *Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массой* $m_р=500$ *кг и головного конуса массой* $m_к=10$ *кг. Между ними помещена сжатая пружина. При испытаниях на Земле пружина сообщила конусу скорость* $|\vec{v}_{отн}|=5{,}1$ *м/с по отношению к ракете-носителю. Каковы будут скорости конуса* $|\vec{v}_к|$ *и ракеты-носителя* $|\vec{v}_р|$, *если их отде-*

ление произойдет на орбите при движении со скоростью $|\vec{v}|=8000$ *м/с?*

Согласно закону сохранения импульса

$$(m_р+m_к)\vec{v}=m_р\vec{v}_р+m_к\vec{v}_к.$$

Кроме того,

$$\vec{v}_к-\vec{v}_р=\vec{v}_{отн}.$$

Из этих двух соотношений получим

$$|\vec{v}_к|=|\vec{v}|+\frac{m_р}{m_к+m_р}|\vec{v}_{отн}|=$$
$$=8005 \text{ м/с},$$

$$|\vec{v}_р|=|\vec{v}_к|-|\vec{v}_{отн}|=7999{,}9 \text{ м/с}.$$

Эту задачу можно решать и в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}$ в направлении полета. Заметим в связи с этим, что если импульс сохраняется в одной инерциальной системе отсчета, то он сохраняется и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Закон сохранения импульса лежит в основе реактивного движения. Струя газа, вырывающаяся из ракеты, уносит импульс. Этот импульс должен быть скомпенсирован таким же по модулю изменением импульса оставшейся части системы ракета-газ.

Задача 6. *Из ракеты массой M выбрасываются продукты сгорания порциями одной и той же массы m со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Пренебрегая действием силы тяжести, определить скорость ракеты, которой она достигнет после вылета n-й порции.*

Пусть $\vec{v}_1$ — скорость ракеты относительно Земли после выброса 1-й порции газа. По закону сохранения импульса

$$(M-m)\vec{v}_1+m(\vec{u}+\vec{v}_1)=0,$$

где $\vec{u}+\vec{v}_1$ — скорость первой порции газа относительно Земли в момент разделения системы ракета-газ, когда ракета уже приобрела скорость $\vec{v}_1$. Отсюда

$$\vec{v}_1=-\frac{m}{M}\vec{u}.$$

Найдем теперь скорость $\vec{v}_2$ ракеты после вылета второй порции. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_1$, ракета перед вылетом второй порции неподвижна, а после выброса приобретает скорость $\vec{v}\,'_2$. Воспользовавшись предыдущей формулой и сделав в ней замену $M\to M-m$, $\vec{v}_1\to\vec{v}\,'_2$, получим

$$\vec{v}\,'_2=-\frac{m\vec{u}}{M-m}.$$

Тогда $\vec{v}_2$ будет равно

$$\vec{v}_2=\vec{v}\,'_2+\vec{v}_1=-m\vec{u}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{M-m}\right).$$

Продолжая этот процесс дальше, нетрудно получить

$$\vec{v}_n=-m\vec{u}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{M-m}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M-(n-1)m}\right).$$

Закону сохранения импульса можно придать другую форму, упрощающую решение многих задач, если ввести понятие центра масс (центра инерции) системы. Координаты центра масс (точки *c*) по определению связаны с массами и координатами частиц, составляющих систему, следующими соотношениями:

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=$$
$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{m};$$

$$y_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{m},\quad z_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iz_i}{m}.$$

Следует заметить, что центр масс системы в однородном поле тяжести совпадает с центром тяжести.

Для выяснения физического смысла центра масс вычислим его скорость $\vec{v}_c$, а точнее, проекции этой скорости. По определению

$$v_{cx}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_c}{\Delta t}.$$

В этой формуле

$$\Delta x_c=\frac{\Sigma m_i\Delta x_i}{m} \text{ и } \frac{\Delta x_c}{\Delta t}=\frac{\sum m_i\frac{\Delta x_i}{\Delta t}}{m}.$$

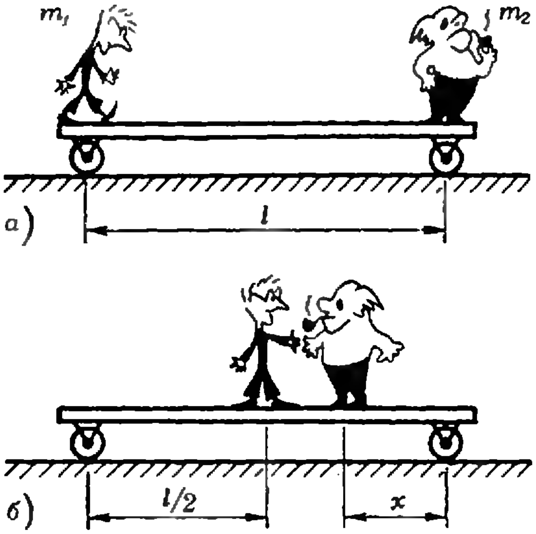


Рис. 7.

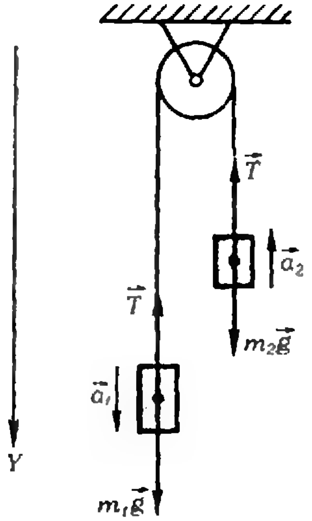


Рис. 8.

поэтому

$$v_{cx} = \frac{\sum m_i \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t}}{m} = \frac{\sum m_i v_{xi}}{m} = \frac{p_x}{m}.$$

Точно так же найдем, что

$$v_{cy} = \frac{p_y}{m} \text{ и } v_{cz} = \frac{p_z}{m}.$$

Отсюда следует, что

$$\vec v_c = \frac{\vec p}{m}, \text{ или } \vec p = m\vec v_c$$

— *полный импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.*

Центр масс (центр инерции) системы, таким образом, приобретает смысл точки, скорость которой равна скорости движения системы как целого. Если $\vec v_c = 0$, то система как целое покоится, хотя при этом тела системы относительно центра инерции могут двигаться произвольным образом.

С помощью формулы $\vec p = m\vec v_c$ закон сохранения импульса может быть сформулирован так: *центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.* Если система не замкнута, то можно показать, что

$$m\vec a_c = \sum \vec F_{\text{внеш}}$$

— *ускорение центра инерции определяется равнодействующей всех внешних сил, приложенных к системе.*

Рассмотрим такие задачи.

Задача 7. *На концах однородной платформы длиной l находятся два человека, массы которых m_1 и m_2 (рис. 7). Первый прошел до середины платформы. На какое расстояние x надо переместиться по платформе второму человеку, чтобы тележка вернулась на прежнее место? Найти условие, при котором задача имеет решение.*

Найдем координаты центра масс системы в начальный и конечный моменты и приравняем их (поскольку центр масс остался на том же месте). Примем за начало координат точку, где в начальный момент находился человек массой m_1. Тогда

$$\frac{m_2 l + Ml/2}{m_1 + m_2 + M} = \frac{m_1 l/2 + m_2(l - x) + Ml/2}{m_1 + m_2 + M}$$

(здесь M — масса платформы). Отсюда

$$x = \frac{m_1 l}{2m_2}.$$

Очевидно, что если $m_1 > 2m_2$, то $x > l$ — задача теряет смысл.

Задача 8. *На нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза, массы которых m_1 и m_2 (рис. 8). Найти ускорение центра масс этой системы, если $m_1 > m_2$.*

Система, состоящая из грузов, нити и блока, незамкнутая. Извне на систему действуют силы тяжести грузов $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ и сила, приложенная к блоку со стороны подвеса, равная удвоенной силе натяжения нити $\vec{T}$ (см. рис. 8). Напишем уравнение движения системы в проекциях на вертикальную ось Y, направленную вниз:

$$(m_1+m_2)a_c=(m_1+m_2)|\vec{g}|-2|\vec{T}|.$$

Силу $\vec{T}$ можно найти, написав уравнения движения для каждого груза в отдельности (учтем при этом, что $a_1=-a_2=a$):

$$m_1a=m_1|\vec{g}|-|\vec{T}|,$$

$$-m_2a=m_2|\vec{g}|-|\vec{T}|,$$

откуда

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}|\vec{g}|,$$

$$|\vec{T}|=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}|\vec{g}|.$$

Подставив полученное значение $|\vec{T}|$ в наше исходное уравнение, найдем, что

$$a_c=\left(\frac{m_1-m_1}{m_1+m_2}\right)^2|\vec{g}|\cdot$$

Задачу можно решить и по-другому. Непосредственно из определения центра масс следует, что

$$\vec{a}_c=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$$

(здесь $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — ускорения грузов m_1 и m_2 соответственно), или в проекциях на ось Y:

$$a_c=\frac{m_1a_1+m_2a_2}{m_1+m_2}.$$

Учитывая, что

$$a_1=-a_2=a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}|\vec{g}|,$$

получим

$$a_c=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2|\vec{g}|.$$

Упражнения

1. Два человека стоят на коньках на расстоянии l друг от друга. Один из них бросает мяч массы m, другой подхватывает его через промежуток времени t. С какой скоростью начнет скользить человек, бросавший мяч, если его масса M?

2. По клину с углом при основании α, который может двигаться по гладкому горизонтальному столу, движется заводной игрушечный автомобиль с постоянной по отношению к клину скоростью $\vec{u}$. Как велика скорость клина и чему равна сила давления автомобиля на клин? Масса клина M, автомобиля m. Автомобиль начал двигаться, когда клин покоился.

3. Гимнаст массой M, имея при себе груз массой m, прыгает под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. В момент, когда им достигнута наибольшая высота, он бросает груз назад с горизонтальной скоростью $\vec{u}$ относительно себя. На сколько увеличилась дальность прыжка от бросания груза?

4. Снаряд выброшен орудием с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. В верхней точке своей параболической траектории снаряд разрывается на два осколка с массами m_1 и m_2. Осколок массой m_1 после взрыва падает вертикально, имея начальную скорость $\vec{u}$. Найти уравнение движения второго осколка.

5. Лодка массой M неподвижно стоит в озере. На корме и на носу лодки на расстоянии l друг от друга находятся рыболовы массами m_1 и m_2 ($m_1>m_2$). Рыболовы меняются местами. На сколько переместится при этом лодка? Сопротивлением воды пренебречь.

6. На краю покоящегося плота массой M стоят n мальчиков, масса каждого из которых равна m. Найти скорость плота после того, как мальчики спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью $\vec{u}$ относительно плота: а) одновременно; б) поочередно. В каком случае скорость плота будет больше? Сопротивлением воды пренебречь.

7. На тележке стоят два бака, соединенных между собой трубкой с краном. Один из них наполнен водой (рис. 9). При открывании крана вода переливается в другой бак. Описать характер движения тележки.

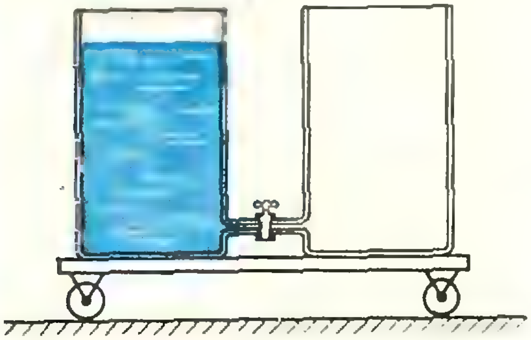


Рис. 9.

(Окончание. Начало см. с. 32, 43, 51)

тиев (ст. Махмудлы Аз. ССР) 33; *Р. Мешойрер* (Москва) 25, 28, 31, 34, 37, 41; *Б. Мидодашвили* (Тбилиси) 22, 31, 33; *А. Милевский* (Мытищи) 27, 37, 38, 41, 42, 45; *Д. Миндлин* (Ташкент) 22, 29, 31, 33, 41; *А. Мирлин* (Ленинград) 21, 22, 24, 25, 27—29, 31—33, 37, 39, а), б), 41, 42, 43, б), 45; *Ю. Михайлин* (Одесса) 37, 39, а), б); *А. Михельсон* (Ангарск) 33; *С. Молчанов* (Сумы) 33, 37; *Е. Мостивенко* (Сыктывкар) 27, 28, 33, 37, 39, а), б), 41, 45; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) 21—25; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 27, 29, 32; *Н. Назаров* (Ордубад) 37; *С. Напрасников* (Донецк) 28, 29, 31—33; *П. Натанов* (Москва) 31, 33; *А. Ненашев* (Ленинград) 21—25, 27, 31—35, 37, 38, 39, а), б), 40—42, 43, в), 44, 45; *О. Никитенко* (Барнаул) 32, 42; *Л. Николаев* (Москва) 22, 29; *Ю. Николаевский* (Харьков) 41, 42; *Д. Николешивили* (с. Варкетили ГССР) 33; *Г. Николов* (НРБ) 27, 29, 33, 37; *М. Нудельман* (Москва) 21, 25; *Л. Оганесян* (Ереван) 41, 42; *Е. Огиевский* (Днепропетровск) 21, 22, 24; *З. Озола* (Рига) 37; *Э. Озолин* (Борисов) 22, 24; *А. Опарин* (Горький) 33, 41, 42; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 22, 33, 37, 39, а), б); *А. Остров* (Барановичи) 37; *Ю. Палевская* (Москва) 37; *Д. Папуш* (Харьков) 22, 24, 26—29; 31—33, 37, 39, а), б), 41, 42, 44, 45; *И. Пашин* (Темиртау) 41; *Е. Пестрик* (Запорожье) 22; *В. Петров* (Великие Луки) 29; *А. Плюснин* (Днепропетровск) 27, 28, 29, 32, 33, 37; *В. Подобедов* (Саранск) 37; *А. Пожидаев* (Мсскаа) 22; *М. Полищук* (Симферополь) 33; *О. Полукеев* (Нижний Тагил) 22; *А. Попов* (Чусовой) 37, 45; *В. Потемкин* (Донецк) 33, 37, 38, 39, а), б), 42, 44, 45; *Л. Приб* (Алма-Ата) 22; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 27—29, 31—33, 37, 41, 42; *А. Рабинович* (Харьков) 31, 32, 37, 39, а), б); *В. Резник* (Челябинск) 22, 37, 41, 42; *В. Рогава* (Тбилиси) 22, 27; *А. Родников* (Москва) 22—24, 26, 28, 37, 38, 39, а), б), 40—42, 43, б), 45; *В. Романовский* (Н. Двор Гродненской обл.) 28, 33, 37, 39, а), б), 41, 42; *С. Рудницкий* (пос. Каменный Брод Житомирской обл.) 27, 29, 33; *А. Саблин* (р. п. Хохольский Воронежской обл.) 31—33, 37, 41, 45; *И. Сивенков* (Лысые горы Саратовской обл.) 37; *В. Сакович* (Поставы) 37, 41; *Д. Самощенко* (Свердловск) 37, 41, 42; *А. Сапожников* (Брест) 33; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) 21, 27—29, 31—33; *С. Свадеба* (Ровно) 32, 33, 37, 41; *О. Светозерский* (Владивосток) 31, 33; *В. Свинцов* (Камышин) 37, 38, 39, а), б); *Р. Севдималыев* (Шаифлин) 22, 23, 33; *А. Сивацкий* (Ленинград) 25—27, 31, 37, 41, 42, 45; *В. Сидоренко* (Красноярск) 31, 41, 42; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 21—25; *Г. Симонов* (пос. Цалка ГССР) 33; *В. Скричевский* (Киев) 41; *А. Скорик* (Ташкент) 33; *К. Скрипник* (Киев) 33; *Ю. Смирнов* (Ленинград) 22—24, 26, 27, 29, 31—35, 37, 38, 39, а), б), 40; *В. Стовба* (Москва) 21—29, 31—33, 35, 37, 39, а), б), 40; *А. Строков* (Алма-Ата) 22, 23; *М. Струнинский* (Северодонецк) 37, 38; *Ф. Сукачев* (Ташкент) 31, 37, 41, 42, 45; *В. Терехин* (Баку) 41; *О. Тимошин* (Кировоград) 29; *Е. Тищенко* (Бодайко) 22, 23, 33, 37, 41; *З. Тлешов* (Алма-Ата) 41, 42; *С. Требисова* (Алма-Ата) 22; *С. Треиль* (Челябинск) 30; *В. Трофимов* (Москва) 21—25; 27, 28, 31, 33, 37, 38, 40—42, 44; *И. Тураева* (Кемь) 33; *Д. Тэн-Чагай* (Алма-Ата) 22; *В. Угриновский* (Хмельник) 29; *А. Усекбекова* (Чардара) 41; *В. Ушаков* (Норильск) 31; *М. Файзутдинов* (Уфа) 41, 42, 45; *В. Фальков* (Харьков) 22, 24, 27, 29, 30, 41, 44; *Н. Федин* (Омск) 22, 29, 33, 37; *Я. Федоров* (Ленинград) 37, 41, 42, 45; *Г. Фирсова* (Ленинград) 21—23, 29, 37, 38, 39, а), б), 41, 42; *М. Фоминых* (Пермь) 31—33, 35, 37; *А. Хайкин* (Тула) 27—29, 31, 33, 37, 42; *М. Хаймов* (Воронеж) 22, 29, 39, а), б); *И. Ханчл* (ЧССР) 21—24, 27—29, 41, 42; *С. Хосид* (Алма-Ата) 22, 33, 37; *К. Христов* (НРБ) 27, 29; *М. Цейтлин* (Куйбышев) 22; *Ю. Церковский* (Москва) 33, 37, 41, 42, 45; *З. Цихистави* (Телави) 31, 37, 42; *И. Чекмарев* (Невинномыск) 37, 39, а), б); *М. Черепинский* (Воронеж) 33; *И. Черных* (Алма-Ата) 22; *А. Чурилов* (Харьков) 31, 33; *И. Шарипов* (Стерлитамак) 22, 26, 29; *А. Шафир* (Челябинск) 26, 29; *Г. Шахбазян* (Ленинград) 21, 22; *С. Шефитрямов* (Челябинск) 21, 22, 25; *В. Шматенко* (Ангарск) 33; *В. Шпильрайн* (Москва) 27, 32, 37; *А. Шубин* (Пермь) 41, 42, 45; *А. Шумилкин* (Химки) 37; *В. Шутько* (Новосибирск) 27; *И. Эркенов* (Алма-Ата) 37, 42; *А. Юдовин* (Баку) 41; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 24, 27, 29, 33, 37, 39, а), б).

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф438—Ф447**, справились с задачами **Ф438** и **Ф439**. Остальные задачи правильно решили: *А. Аганин* (Красноярск) 4; *В. Андреев* (ст. Славное Витебской обл.) 3; *А. Андрианов* (Москва) 3, 6; *А. Андриевский* (Минск) 0, 3; *Н. Анисимов* (Раменское) 0; *Ю. Антонов* (Чебоксары) 2; *Л. Аскенази* (Ленинград) 1; *А. Бакан* (Киев) 4, 5; *Ю. Балашов* (Москва) 3, 4; *Б. Будан* (Магнитогорск) 2; *В. Бударин* (Киев) 0; *С. Бурцев* (Димитровград) 3; *М. Быков* (Горький) 0, 3; *И. Вайсбурд* (Томск) 0, 5; *В. Варлыгин* (Москва) 4; *Н. Великороссов* (Конаково) 3; *С. Веселянский* (Харьков) 0, 1, 3, 5, 6; *Е. Викторов* (Москва) 0, 2, 3; *Л. Водоватов* (Москва) 0—2; *Ю. Волков* (Саратов) 2; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) 0, 2, 3; *М. Галегян* (Тбилиси) 0; *В. Гаркавый* (Лида) 1, 3, 5; *М. Глазунов* (Старый Оскол) 2; *Е. Гордиенко* (Кишинев) 0; *А. Грайфер* (Запорожье) 0; *В. Гришачев* (п. Лесной Рязанской обл.) 0, 2, 3; *И. Демчук* (с. Гримайлов Тернопольской обл.) 0; *С. Деречинник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) 3; *В. Дяченко* (Киев) 2; *Я. Егоров* (п. Почаев Тернопольской обл.) 3; *М. Жуков* (Москва) 2, 3; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 0—5; *Л. Загоруйко* (Киев) 3; *А. Завидонов* (Казань) 0; *С. Зеленский* (Харьков) 2, 4; *Е. Иванов* (Долгопрудный) 1; *И. Иванов* (Ростов-на-Дону) 2; *С. Исаков* (Пермь) 1; *С. Кавун* (Ровно) 0;

Л. Какабадзе (Тбилиси) 0—2; *С. Карнаухов* (Ростов-на-Дону) 2, 3—5, 7; *Л. Киневский* (Челябинск) 2; *М. Кирсанов* (Тула) 1, 2; *И. Кирюшин* (Ивано-Франковск) 4, 5; *Р. Ковбаса* (с. Поляна Львовской обл.) 0, 2; *Е. Коломийский* (Винница) 0; *В. Комов* (Александров) 0, 3—5, 7; *Г. Корионов* (Москва) 1, 2; *В. Костур* (Киев) 4; *В. Костусян* (Запорожье) 0, 2—4; *Г. Крчемский* (Кишинев) 1; *Л. Кушнер* (Астрахань) 4, 5; *С. Лабазов* (Краснодар) 4; *Д. Ларошко* (Минск) 3; *В. Лашкин* (Киев) 3—5, 7; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 2; *Д. Людмирский* (Киев) 3, 4; *С. Майский* (Москва) 0; *В. Макаров* (Челябинск) 4, 5; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 0, 3—5; *Н. Максимович* (с. Холодовка Винницкой обл.) 2; *Г. Маник* (с. Стольничены Котовского р-на МолдССР) 2; *А. Мануйлин* (с. В. Олексин Ровенской обл.) 1; *М. Матвеев* (Канаш) 1, 2; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 4; *В. Мелани* (Ереван) 2; *В. Мелихов* (Электрогорск) 0, 2; *Г. Метревели* (Цхинвали) 1, 2; *В. Мещеряков* (с. Пресиовка Северо-Казахстанской обл.) 2; *А. Мирлин* (Ленинград) 3—6; *А. Мисов* (Семипалатинск) 0; *М. Мордкович* (Ростов-на-Дону) 0, 2; *С. Мурга* (Ангарск) 3, 4; *М. Наврузова* (с. Муслах ДАССР) 3; *Б. Налибоцкий* (Минск) 1—7; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) 1, 2; *О. Нестеркин* (п. Мятлево Калужской обл.) 2; *А. Никитенков* (Великие Луки) 3—5, 7; *Ю. Никитин* (Куйбышев) 2; *Г. Никогосян* (Ленинакан) 4, 5; *М. Онегин* (Архангельск) 3, 4; *Д. Осипов* (Москва) 3; *Н. Османов* (Волгоград) 0; *П. Павицкий* (д. Брянка Ворошиловградской обл.) 5; *Д. Патарая* (Тбилиси) 2; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 1—3, 5, 6; *А. Петухов* (Цимлянск) 0; *О. Побылица* (Ленинград) 0—2; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 0—2; *А. Попов* (Чусовой) 1; *Р. Рахимов* (Душанбе) 2; *А. Родин* (Великие Луки) 2, 3; *Ю. Сияткович* (Минск) 2; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 4, 5; *А. Слесарев* (п. Широкий Ворошиловградской обл.) 1; *В. Смышляев* (Ленинград) 3, 5, 6; *В. Софронов* (Москва) 0; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) 3; *Р. Султанов* (Ташкент) 5; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 2; *Б. Таджиков* (Душанбе) 3, 7; *О. Тимошин* (Кировоград) 0, 2; *С. Туровец* (с. Семигостичи Брестской обл.) 2; *А. Фомин* (Новосибирск) 1, 3, 5, 6; *О. Хайкин* (Чебоксары) 0, 3—6; *А. Хугаев* (Цхинвали) 2; *В. Чеканов* (Быхов) 0; *Ю. Черняев* (Белгород) 0; *В. Четвериков* (Минск) 0, 2; *А. Чурилов* (Харьков) 1, 3, 5, 6; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 3, 5, 6; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 0, 2; *В. Швейдель* (Великие Луки) 2; *В. Шевченко* (ст. Варениковская Краснодарского кр.) 0; *О. Шейнин* (Мозырь) 0, 1; *А. Шептовецкий* (Москва) 1, 2; *Н. Шестопал* (Киев) 0—3, 5, 6; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 0, 2; *В. Шутько* (Новосибирск) 3, 4, 6.

К статье «Дважды об одном»

1. 90 (цифры 9 нет среди первых цифр чисел набора, а цифры 0 нет среди вторых цифр).

2. Обязательно. Если в наборе есть числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, бьющие друг друга (пусть для определенности $a = c$), то можно указать такую цифру x, которой нет среди первых цифр этого набора. Но поскольку всего в наборе лишь 10 чисел, то среди их вторых цифр найдется такая, которая выписана не более одного раза. Пусть это будет y. Тогда в том случае, когда из мешка вынут $\overline{xy}$, этот набор получит не более 250 очков.

3. Если ладьи не бьют друг друга, то в каждой горизонтали и в каждой вертикали стоит ровно по одной ладье. Поэтому в верхний ряд есть 8 способов поставить ладью. Каждый такой способ порождает 7 способов поставить 2 ладьи в два верхних ряда. Если эта пара ладей поставлена, то в третий ряд мы можем поставить ладью шестью способами и т. д. Таким образом, существует 8! способов расстановки ладей.

4. Можем, так как при повороте доски на 90° черные поля переходят в белые.

5. На нераскрашенной вращающейся доске мы не различаем расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски на 90°, 180° или 270°. Поэтому такие расстановки теперь нужно считать за одну расстановку. Таким образом, 8! расстановок ладей на неподвижной доске разбиваются на 3 группы:

1) расстановки, не меняющиеся при повороте на 90° (их число обозначим через A);

2) центрально-симметричные расстановки, меняющиеся при повороте на 90° (их число равно $S - A$, где S — число всех центрально-симметричных расстановок);

3) не центрально-симметричные расстановки (их число равно $8! - S$).

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

Рис. 1.

Теперь заметим, что разные расстановки первой группы являются разными и на вращающейся доске, расстановки второй группы распадаются на пары, а расстановки третьей группы — на четверки, которые образуют одну расстановку на вращающейся нераскрашенной доске. Поэтому общее число расстановок на такой доске равно

$$A+\frac{S-A}{2}+\frac{8!-S}{4}.$$

Легко найти, что $A=12$, $S=2^4\cdot 4!$.

6. Результат во всех случаях одинаковый: за возможность написать числа вам придется отдать 495 очков. Убедиться в этом очень просто: нужно представить каждое из написанных вами чисел $\overline{ab}$ в виде $10a+b$, раскрыть скобки и переставить слагаемые.

7. Увеличится на 50 очков.

8. Да, всегда можно.

10. 260. Указание. Восемь расстановок ладей (см. рис. 1) разбивают поля доски на восемь подмножеств, в каждом из которых сумма чисел на полях одинакова и равна

$$(1+2+\ \dots\ +64)/8=260.$$

К статье «Задачи на площади и двугранные углы»

1. $V=\sqrt{\dfrac{Q(S^2-Q^2)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{10}}{90}}$.

2. $S_{\text{бок}}=5$.

3. $S_{\triangle BCD}=\sqrt{\dfrac{p^2}{12}+4q^2}$.

К статье «Импульс тела и системы тел»

1. $|\vec{v}|=\dfrac{ml}{Mt}$.

2. $|\vec{v}_{\text{к}}|=\dfrac{m|\vec{u}|\cos\alpha}{M+m}$;

$|\vec{F}_{\text{д}}|=m|\vec{g}|\cos\alpha$.

3. $\Delta s=\dfrac{m|\vec{u}||\vec{v}_0|\sin\alpha}{(M+m)|\vec{g}|}$.

Указание.

Удобнее всего решать задачу в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью $|\vec{v}_0|\cos\alpha$.

4. $x_2=x_0+\dfrac{m_1+m_2}{m_2}|\vec{v}_0|\cos\alpha\cdot t$,

$$y_2=y_0+\frac{m_1|\vec{u}|}{m_2}t-\frac{|\vec{g}|t^2}{2},$$

где $x_0=\dfrac{|\vec{v}_0|^2\sin 2\alpha}{2|\vec{g}|}$ и $y_0=\dfrac{|\vec{v}_0|^2\sin^2\alpha}{2|\vec{g}|}$

(начало координат находится в точке, в которой установлено орудие).

5. $x=\dfrac{(m_1-m_2)l}{m_1+m_2+M}$.

6. а) $\vec{v}=-\dfrac{nm\vec{u}}{M+nm}$;

б) $\vec{v}=-\vec{u}\left(\dfrac{m}{M+nm}+\dfrac{m}{M+(n-1)m}+\right.$

$\left.+\ .\ .\ .\ +\dfrac{m}{M+m}\right)$;

скорость плота больше в случае б).

7. Положение центра масс системы не может измениться под действием внутренних сил. Поэтому вначале тележка должна двигаться в сторону, противоположную движению воды. После того, как уровни в баках окончательно сравняются, движение тележки прекратится.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. с. 44)

1. Если в остатке получили 8, то делитель равен 9. Число $\overline{aa5}$ должно делиться на 9, поэтому $2a=3$ или $2a=12$, откуда $a=6$. Ответ: 665:9=73 (8).

2. 10000214775:111=90092025, 90092025::225=400409.

3. $5\cdot 200^2=2\cdot 10^5$.

4. а)

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}769\\504\end{array}\\ \hline 1273\end{array}\qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r}769\\504\end{array}\\ \hline 265\end{array}.$$

б) $154\cdot 154=23716$.

в)

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r}10652\\9067\end{array}\\ \hline 1585.\end{array}$$

5. Нет, не может, потому что A дает остаток 3 при делении на 9, а должно либо делиться на 9, либо не делиться на 3.

К кроссворду

(см. 3-ю с. обл.)

По горизонтали:

7. Девять. 10. Радиан. 11. Фаза. 12. Ленц. 13. Линза. 14. Триод. 15. Температура. 21. Кратер. 25. Широта. 26. Телефон. 27. Дуга. 28. Вода. 29. ЭПАС. 30. Кельвин. 31. Неон. 32. Белл. 33. Круг. 34. Минимум. 35. Корень. 36. Шпонка. 42. Ковалевская. 44. Сетка. 46. Свеча. 47. Клин. 48. Реле. 49. Нуклон. 50. Минута.

По вертикали:

1. Квант. 2. Этна. 3. Плазма. 4. Контур. 5. Ватт. 6. Линия. 8. Лазер. 9. Алмаз. 15. Треугольник. 16. Анизотропия. 17. Эклиптика. 18. Ландсберг. 19. Котангенс. 20. Факториал. 22. Деление. 23. Цельсий. 24. Косинус. 37. Евклид. 38. Планк. 39. Кварк. 40. Скаляр. 41. Стокс. 43. Регул. 45. Атом. 46. Спин.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» №11)

1. а) Нет, не сумеет. Если трое ребят имеют вместе 4 цвета, то хоть у одного — не менее двух цветов. Тогда у него ровно 2 цвета, а у всех остальных ровно по одному недостающему цвету. Это приводит к противоречию. б) $n\geqslant 15$. 2. 19+98+81=198. 3. 40 лет, 30 лет. Указание. Составьте таблицу:

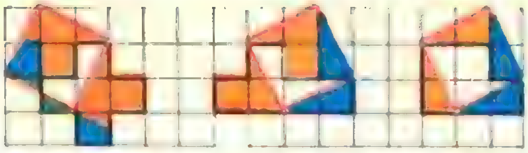


Рис. 2.

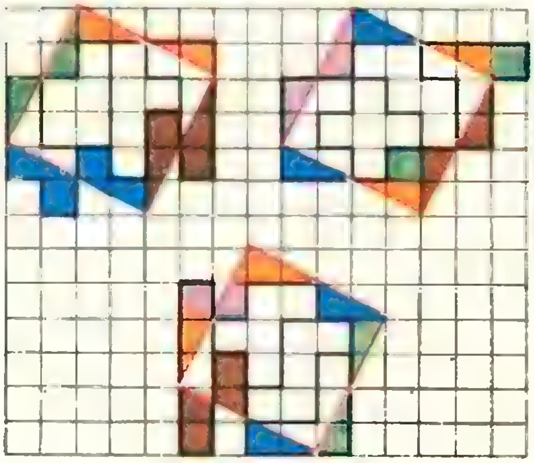


Рис. 3.

Лет	Было	Сейчас	Будет
Мне Сестре	$2x$ x	$4x$ $3x$	$4x+15$ $3x+15$

Из нее вытекает уравнение $4x+15+3x+15=100$. **4.** $m=n=0$. Указание. $\sqrt{m}=n^2-m$, и потому целое число, но $(\sqrt{m})^2\leqslant\sqrt{m}\,(\sqrt{m}+1)\leqslant(\sqrt{m+1})^2$

К головоломкам

(см. «Квант» № 10, 3-ю с. обл.)

Кроссворд

1. Физика. **2**. Протий. **3**. Ракета. **4**. Катион. **5**. Пентод. **6**. Оптика. **7**. Апогей. **8**. Нониус. **9**. Нептун. **10**. Ламбда. **11**. Ландау. **12**. Нуклон. **13**. Плазма. **14**. Фарада. **15**. Ньютон. **16**. Унисон. **17**. Рихман. **18**. Вакуум. **19**. Вольта. **20**. Статор. **21**. Планер. **22**. Нихром. **23**. Парсек. **24**. Окуляр.

Головоломка

Провести черту дроби: $\frac{10}{10}=1$.

Квадраты из пентамино

1. Крест — на 4 куска (см. рис. 2).
2. Достаточно 14 частей (см. рис. 3).

Напечатано в 1977 году

К 60-летию Великого Октября

Наука общества, строящего коммунизм 11 2
Александров П. Лузинская математическая школа 10 13
Большаков В. Оптическое зондирование Земли и Луны из космоса 10 26
Глушков В. Теория вычислительных систем и программирование в СССР 9 4
Гнеденко Б. О математике Страны Советов 11 18
Демидов С. Проблемы Гильберта и советская математика 11 31
Кикоин И. Как создавалась советская физика 10—12
Лешковцев В. Достижения советских физиков 11 2
Михайлов А. Шестиметровый телескоп 9 11
Смолянский М. XX лет космической эры 10 22
Тюлина И. Планета Жени Рудневой 11 38
Всенародная забота* о сельской школе 1 2
Научное творчество учащихся 9 2

Статьи по математике

Артемов С., Гиматов Ю., Федоров В. Много битов из ничего 3 12
Башмакова И. Исаак Ньютон 6 4
Болтянский В. О понятиях площади и объема 5 2
Васильев Н., Толпыго А. Плавные последовательности 6 30
Гиндикин С. Карл Фридрих Гаусс 8 2
Гиндикин С. Пьер-Симон Лаплас 12 00
Гутер Р., Полунов Ю. Точка, точка, запятая... 2 12
Ефремович В. Пространство и внутренняя геометрия поверхностей 1 4
Жаутыков О. Кривые второго порядка 8 22
Кириллов А. О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма 7 2
Кушниренко А. Целые точки в многоугольниках и многогранниках 4 13
Кушниренко А. Многоугольник Ньютона 8 19
Левитина В. Как Математик помог Бригадиру 11 40
Лопшиц А. Задача Мёбиуса и ее продолжение 3 2
Макаренков Ю. Алгоритмы на словах 2 2
Мамикон М. Объем шара 5 10
Мамикон М. Задача о ферзях 12 23
Маневич М., Слуцкин М. «Линейные построения» Грассмана 9 19
Ньютон И. Математические начала натуральной философии (предисловие) 6 3

BeatriceGloria_personal library

Тьмеладзе З. Теория игр 8 27
Футер А. Сигналы, графы и короли на торе 7 14
Ширшов А. Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$ 4 21

Статьи по физике

Алексеева Л. Вихри, которые «делают погоду» 8 15
Вирский А. Этот удивительный эллипсоид 2 10
Гольдин Л. Ускорители 4 2
Дозоров А. Можно ли поднять себя за волосы? 5 14
Кресин В. Адиабатный процесс 6 25
Лишевский В. Александр Григорьевич Столетов 3 5
Митрофанов А. Качающаяся скала 7 10
Смородинский Я. Закон всемирного тяготения 6 12
Смородинский Я. Масса атома и число Авогадро 7 20
Шамаш С., Эвенчик Э. Цикл Карно 1 11

Лаборатория «Кванта»

Бондарь А. Грампластинка и дифракция света 6 35
Голубев М., Кагаленко А. Капля на горячей поверхности 12 28
Козел С. Модель опыта Резерфорда 3 16
Майер В. Интерференционный опыт Брюстера 9 23
Майер В. Зеленая красная лампа 10 32
Майер В. «Липкая» струя 11 44
Майер В., Шафир Р.-Э. Струйный автогенератор звука 1 18
Майер В., Шафир Р.-Э. Звук и струя 7 23
Новинский Г., Хомазюк В. Закон Архимеда и ... решение уравнений 5 17
Пономарев Е. Опыты для изучения реактивного движения 2 15
Ростовцев Н. Как с помощью проволоки измерить длину световой волны 8 34
Смышляев В. Сообщающиеся сосуды и ... уравнения 5 19
Шефер В. Наблюдения над утренней чашкой кофе 4 24

Математический кружок

Болтянский В. Шесть зайцев в пяти клетках 2 17
Войскунский В. Сегодня — фигурное катание 12 31
Егоров А. Уравнения и пределы 10 34
Ефименко С. Повороты и пересечения многогранников 11 45
Земляков А. Орнаменты 3 20
Ионин Ю., Плоткин А. Среднее значение функции 7 26
Рабинович В. Аффинные задачи и теоремы 8 38
Тоом А. Решения задач ВЗМШ 9 27
Яглом И. О хордах непрерывных кривых 4 27

Математический практикум

Вавилов В. Шарнирные механизмы. Кривые Уатта 1 20
Вавилов В. Геометрия круга 6 38

Задачник «Кванта»

Задачи

М421—М480; Ф433—Ф492 1—12

Решения задач

М379—М419, М421—М436; Ф387—Ф446 1—12
Лодкин А. Функциональное уравнение на сфере 6 57
Пухов С. Задача о выпуклых телах 2 30

* * *

Фамилии решивших 3, 7, 9, 12
Победители конкурса «Кванта» 2 21
Премии «Кванта» 9 32

«Квант» для младших школьников

Виленкин Н. Математика и шифры 8 52
Горст Ю. На рыбалке 1 41
Данилов Ю. Головоломки художника Громова 2 39
Раскрой квадрата (итоги конкурса) 9 48
Коган Б. Цветные тени 11 56
Носов Н. Витя Малеев решает задачи 6 62
Орлов А. Ставь на минус! 3 41
Пальчиков Е. Почему в холодильнике сохнут продукты? 4 44
Перышкин А. Оригинальное доказательство закона Архимеда 9 47
Розова Г. Случай с пятиклассником 7 48
Савин А. Координаты 9 50
Семенов Е. Степа Мошкин повторяет геометрию 10 51
Турецкий Е., Цейтлин Н. Семиклассникам о вероятности 5 38
Щепочкина И. Дважды об одном 12 45

По страницам школьных учебников

Бендукидзе А. Производная показательной функции 12 40
Виленкин А., Ионин Ю. Площадь и интеграл 5 30
Виленкин Н. Как возникло и развивалось понятие функции 7 41
Гейдман Б. Гомотетия и замечательные точки в треугольнике 10 48
Гутенмахер В. Расстояние от точки до плоскости 3 38
Гутенмахер В. Пантограф 10 55
Земляков А. Четные и нечетные функции 4 38
Земляков А., Ивлев Б. 17 задач по анализу 1 36
Земляков А., Ивлев Б. Задачи на повторение 9 44
Савин А. Что значит «больше»? 11 53
Хинчин А. Геометрический смысл производной 2 35

Практикум абитуриента

Баканина Л. Закон сохранения импульса при соударениях 3 46
Болтянский В. Метод отделяющих констант 4 46
Габович И. Конусы в каркасах 2 47
Габович И. Ответ в тригонометрическом уравнении 9 53
Галкин Е. Рационально или иррационально? 5 45
Гольдфарб Н., Новиков В. Импульс тела и системы тел 12 52
Грушин В., Диденко А., Дубровский Г. Задачи на законы динамики материальной точки 11 77
Дорофеев Г., Розов Н. Периодичность и непериодичность функций 1 43

Константинов И. Насыщенный пар 6 67
Кузнецов Е. Линзы и системы линз 4 50
Розов Н. Читатели советуют 6 71
Суконник Я., Горнштейн П. Задачи на площади и двугранные углы 12 48
Турчин Э. Как решать задачи на механическое движение 2 50
Шувалова Э. Координатный метод 11 82

* * *

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 году

* * *

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт 6 88
Куйбышевский государственный университет 7 49
Курский политехнический институт 7 53
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 6 78
Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии 6 80
Московский институт инженеров железнодорожного транспорта 4 55
Московский институт инженеров землеустройства 7 52
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 6 86
Московский институт стали и сплавов 6 81
Московский институт управления им. С. Орджоникидзе 7 50
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 1—3
Московский физико-технический институт 5 48
Московский институт электронного машиностроения 6 84
Уральский государственный университет им. А. М. Горького 6 79

* * *

Программа вступительных экзаменов по математике для поступающих в вузы в 1977 году 2 44
Примерные варианты вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 году 3, 5, 6 (83 и 89)
Факультет управления и прикладной математики МФТИ 5 50
Подготовительные курсы при МИСИ 10 56

Спрашивайте — отвечаем

2 58; 3 56; 5 44; 10 60

Хроника НОУ

Книжник В. Построение алгебраических кривых с помощью шарнирных механизмов 9 30

Рецензии, библиография

Клумова И. Задачи и олимпиады 1 50
Рудов В. Настольная книга по астрономии 10 62
Рудов В. Жизнь — научный подвиг 11 92
Слукин Л. Ошибки в «Ошибках ...» 5 55
Смолянский М., Стасенко А. Олимпиады МФТИ 9 56

* * *

Новые книги 3, 6, 8, 11

Новости науки

Беве Л. Любая карта на плоскости может быть раскрашена в четыре цвета 1 60

Информация

Физико-математическая школа-интернат при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова 1 56
Всесоюзная заочная математическая школа 1 52
Заочная физико-техническая школа 1 53
Заочная физическая школа 8 62
Вечерняя физическая школа 8 63

* * *

Научное общество учащихся «ВИИТОРУЛ» 4 58
Форум юных астрономов 5 57

* * *

Голубой экран — абитуриенту-77 1 58

Олимпиады

XI Всесоюзная олимпиада школьников

Олимпиада по математике 11 58
Решение задач олимпиады по математике 11 63
Олимпиада по физике 11 65
Экспериментальные задачи олимпиады по физике 11 69
Победители XI Всесоюзной олимпиады 11 72

* * *

Задачи республиканских математических олимпиад 11 75
Ленинградская олимпиада средних профтехучилищ 11 74

Смесь

Данилов Ю. Ребята с нашего двора 9 64
Калашникова И., Веденеев А. Немного об экзаменах 7 55
Мочалов Л. Скворворд 2 60
Савин А. Скворворд и слова-оборотни 2 61
Об аутентичности научных анекдотов 8 60
Френкель В. Из творческого наследия Козьмы Пруткова 7 56

Над номером работали.
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Соснский, В. Тихомирова,
Ю. Шихнович

Номер оформили:
Е. Верентинова, М. Дубах, В. Машатин,
Э. Назаров, А. Пономарева

Зав. редакцией Л. Чернова

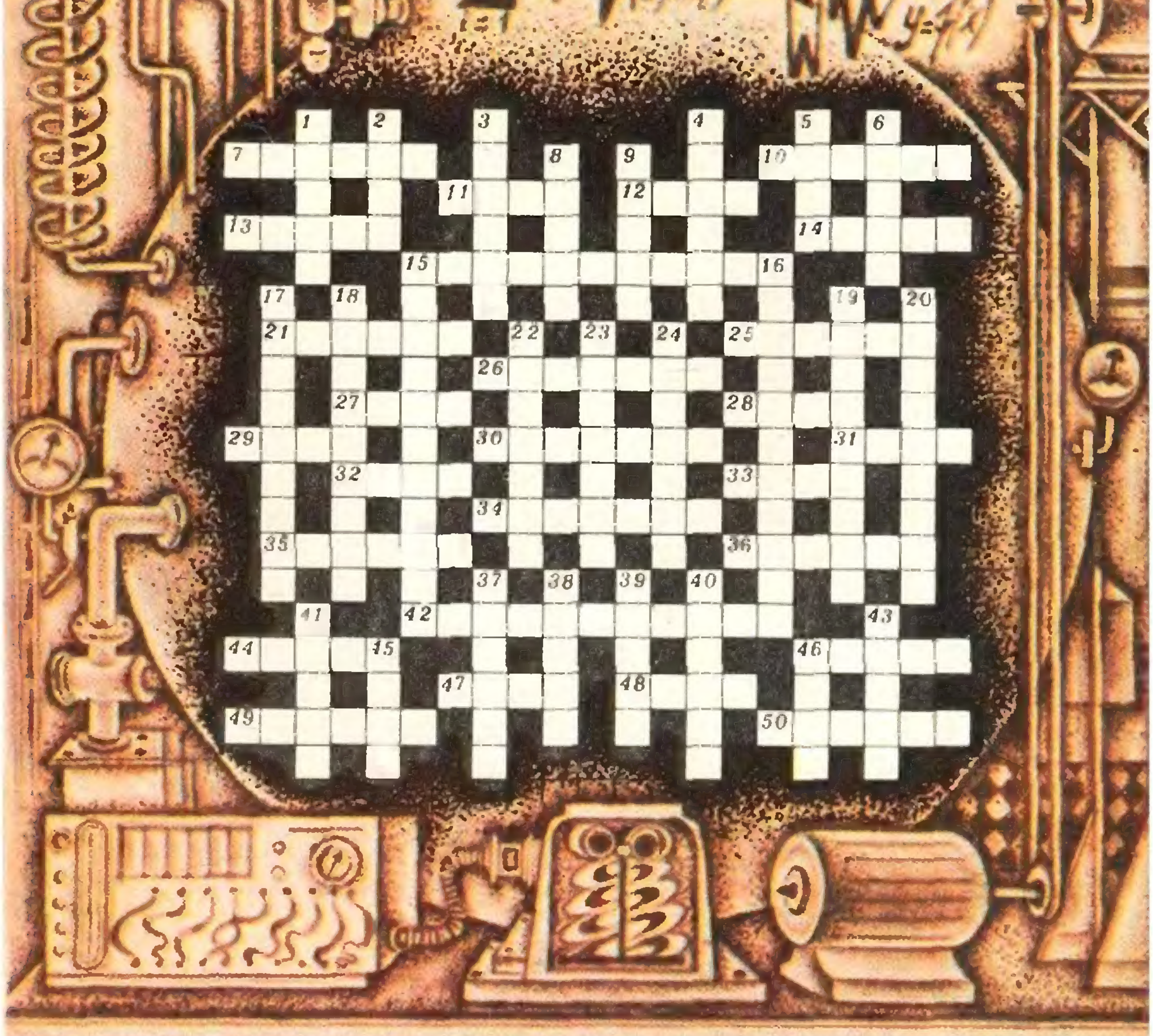
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/IX 1977 г.
Подписано в печать 9/XI 1977 г.
Бумага 70×108$^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,48 Т-18569
Цена 30 коп. Заказ 2176 Тираж 291 190 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

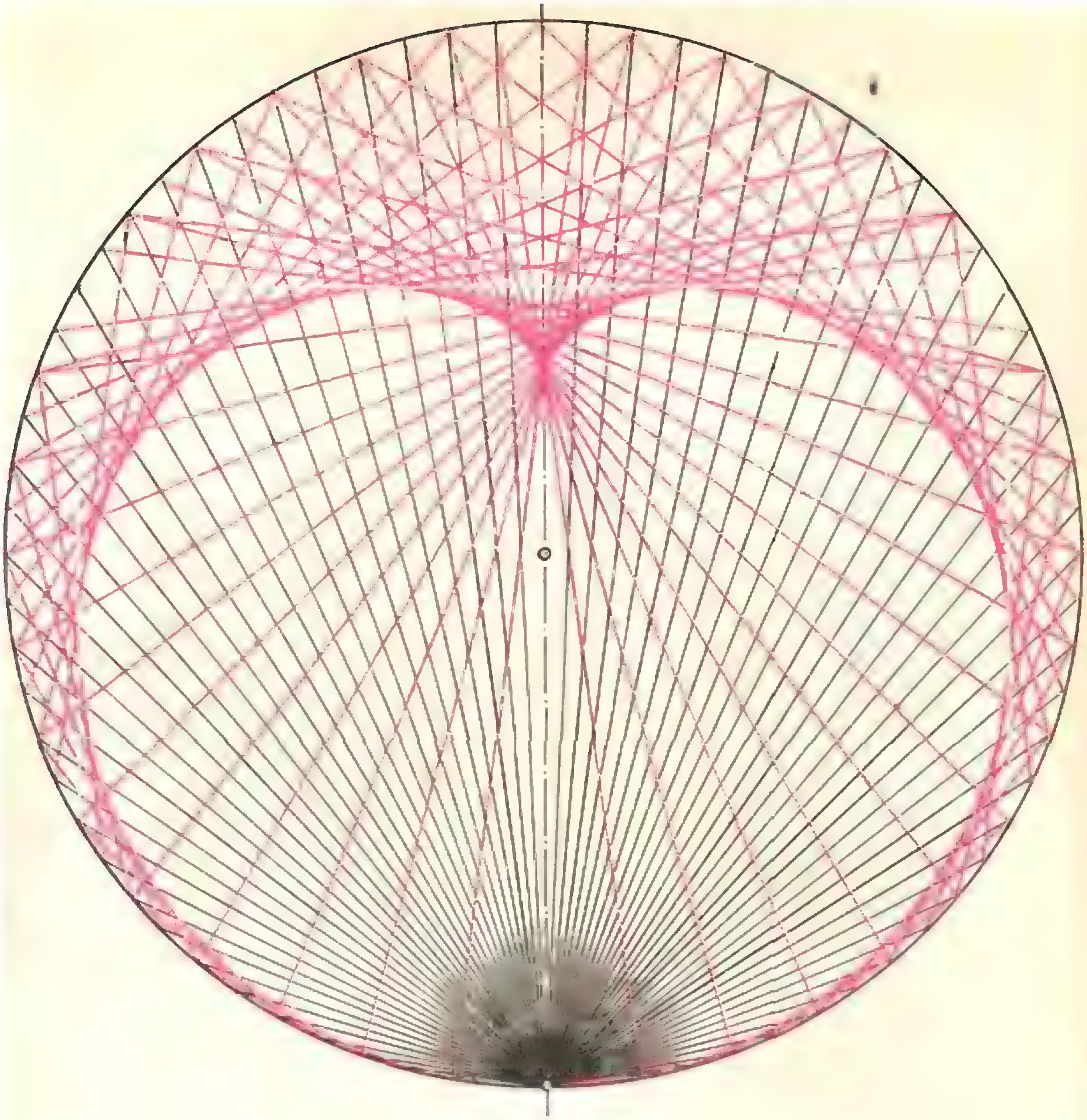
Рукописи не возвращаются



По горизонтали:
7. Цифра. 10. Угловая мера. 11. Аргумент синуса в уравнении колебательного движения. 12. Русский физик и электротехник, профессор Петербургского университета. 13. Система двух сферических преломляющих поверхностей. 14. Электронная лампа. 15. Физическая характеристика системы. 21 Конусообразное углубление. 25. Географическая координата. 26. Электромагнитный прибор, преобразующий электрические колебания в звуковые. 27. Часть окружности. 28. Жидкая среда. 29. Советско-американская космическая программа. 30. Единица термодинамической температуры. 31. Инертный газ. 32. Американский инженер, изобретатель телефона. 33. Геометрическая фигура. 34. Экстремум функции. 35. Значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. 36. Деталь, удерживающая гайку от самопроизвольного вращения. 42. Русская женщина-математик. 44. Электрод в триоде. 46. Светотехническая единица. 47. Геометрическое тело. 48. Электромагнитный прибор. 49. Элементарная частица атомного ядра. 50. Единица времени.

По вертикали:
1. Порция энергии. 2. Вулкан в Европе. 3. Состояние вещества. 4. Очертания предмета. 5. Единица мощности. 6. Одномерное множество точек. 8. Оптический квантовый генератор. 9. Самый твердый минерал. 15. Геометрическая фигура. 16. Зависимость физических свойств кристалла от выбранного направления. 17. Годичный путь Солнца по небесной сфере. 18. Советский физик, академик. 19. Тригонометрическая функция. 20. Математический знак. 22. Арифметическое действие. 23. Шведский астроном и физик. 24. Тригонометрическая функция. 37. Древнегреческий математик. 38. Немецкий физик. 39. Гипотетическая элементарная частица. 40. Величина, определяемая только численным значением. 41. Единица измерения кинематической вязкости. 43. Звезда Альфа созвездия Льва. 45. Мельчайшая частица химического элемента. 46. Характеристика электрона.

Кроссворд составил Л. Ерохин

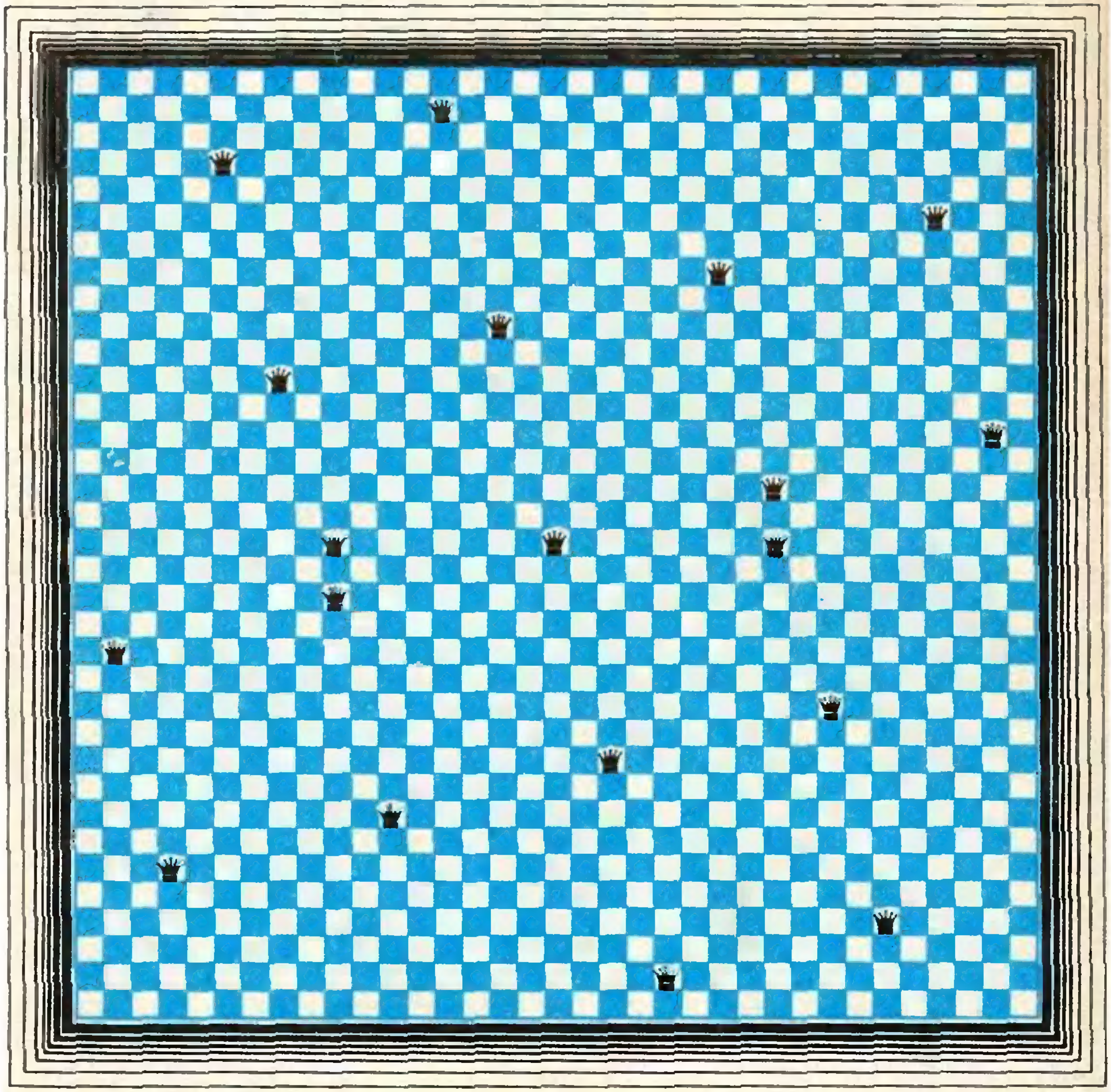


На этом рисунке изображена одна из замечательных кривых — кардиоида (так она была названа в 1741 году французским математиком Кастильоном из-за сходства с сердцем (καρδια по-гречески — сердце).

Здесь приведен один из способов ее построения. На окружности выбираем произвольную точку и проводим через нее все возможные хорды (на рисунке они чёрного цвета). Возьмем произвольную из этих хорд и проведем из второго ее конца еще одну, «красную» хорду, конгруэнтную «чёрной». *Огибающей* (см. «Квант», 1977, № 9, заметку «Нефроида») семейства этих «красных» хорд и будет кардиоида.

Подробнее о кардиоиде читайте на с. 33.

Индекс 70465
Цена 30 коп.



Эти девятнадцать ферзей бьют все клетки доски 35×35. Можно ли эту доску побить восемнадцатью ферзями?